АБАК — 1) Счетная доска, применявшаяся для арифметич. вычислений в Древней Греции, Риме, затем в Зап. Европе — до 18 в. Доска разделялась на полосы, счет осуществлялся передвижением находящихся в полосах счетных марок (костяшек, камней и т. п.). В странах Дальнего Востока распространен китайский аналог А.— суан-пан, в России — счеты. 2) В номографии особый чертеж (т. н. сетчатая номограмма). *БСЭ-3.*

АБЕЛЕВ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — голоморфный или мероморфный дифференциал на компактной, или замкнутой, римановой поверхности S (см. *Дифференциал на римановой поверхности*).

Пусть g — *род поверхности* S; $a_1b_1a_2b_2\ldots a_gb_g$ — циклы канонич. базиса гомологий S. В зависимости от характера особенностей различают А. д. трех родов: I, II и III, причем имеют место строгие включения: I⊂II⊂III. А. д. I р о д а — это голоморфные всюду на S дифференциалы 1-го порядка, к-рые в окрестности U каждой точки $P_0\in S$ имеют вид $\omega=pdz=p(z)dz$, где $z=x+iy$ — локальная униформизирующая переменная в U, $dz=dx+idy$, а $p(z)$ — голоморфная, или регулярная, аналитич. функция от z в U. Сложение А. д. и умножение на голоморфную функцию определяются естественными правилами: если

$$\omega=pdz,\ \pi=qdz,\ a=a(z),$$

то

$$\omega+\pi=(p+q)dz,\ a\omega=(ap)dz.$$

А. д. I рода образуют векторное пространство $\mathfrak{A}$ размерности g. После введения скалярного произведения

$$(\omega,\ \pi)=\iint_S \omega*\bar{\pi},$$

где $\omega*\bar{\pi}$ — *внешнее произведение* ω на звездно сопряженный дифференциал $\bar{\pi}$, пространство $\mathfrak{A}$ превращается в гильбертово пространство.

Пусть A_1, B_1, A_2, $B_2,\ldots$, A_g, B_g суть A- и B-периоды А. д. I рода ω, т. е. интегралы

$$A_j=\int_{a_j}\omega,\quad B_j=\int_{b_j}\omega,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ g.$$

Тогда имеет место соотношение:

$$\|\omega\|^2=i\sum_{j=1}^{g}(A_j\overline{B}_j-B_j\overline{A}_j)\geqslant 0. \qquad (1)$$

Если A'_1, B'_1, A'_2, $B'_2,\ldots$, A'_g, B'_g — периоды другого А. д. I рода π, то

$$i(\omega,\ \bar{\pi})=\sum_{j=1}^{g}(A_jB'_j-B_jA'_j)=0. \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) наз. б и л и н е й н ы м и с о о т н о ш е н и я м и Р и м а н а для А. д. I рода. Канонич. б а з и с А. д. I рода, т. е. канонич. базис φ_1, $\varphi_2,\ldots$, φ_g пространства $\mathfrak{A}$, выбирается таким образом, что

$$A_{ij}=\int_{a_j}\varphi_i=\delta_{ij},$$

где $\delta_{ii}=1$ и $\delta_{ij}=0$ при $j\neq i$. При этом матрица (B_{ij}), $i,\ j=1,2,\ldots,\ g$, B-периодов

$$B_{ij}=\int_{b_j}\varphi_i$$

симметрическая, а матрица мнимых частей ($\operatorname{Im} B_{ij}$) положительно определенная. А. д. I рода, у к-рого все A-периоды или все B-периоды равны нулю, тождественно равен нулю. Если все периоды А. д. I рода ω действительны, то $\omega=0$.

А. д. II и III р о д а относятся, вообще говоря, к мероморфным дифференциалам, т. е. к таким аналитич. дифференциалам, к-рые имеют на S не более чем конечное множество особенностей типа полюсов с локальным представлением

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+f(z)\right)dz, \qquad (3)$$

где $f(z)$ — регулярная функция, n — порядок полюса (если $a_{-n}\neq 0$), a_{-1} — вычет в данном полюсе. При $n=1$ полюс наз. простым. А. д. II рода — это мероморфные дифференциалы, у к-рых все вычеты равны нулю, т. е. мероморфные дифференциалы с локальным представлением

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+f(z)\right)dz.$$

А. д. III рода — это А. д. произвольного вида.

Если ω — произвольный А. д. с A-периодами $A_1, A_2,\ldots, A_g$, то А. д. $\omega'=\omega-A_1\varphi_1-A_2\varphi_2-\ldots-A_g\varphi_g$ имеет нулевые A-периоды и наз. н о р м и р о в а н н ы м А. д. В частности, если P_1 и P_2 — любые различные точки S, то можно построить нормированный А. д. $\omega_{1,2}$ с особенностями $(1/z)dz$ в P_1 и $(-1/z)dz$ в P_2, к-рый наз. н о р м а л ь н ы м А. д. III р о д а. Пусть ω — произвольный А. д. с вычетами $c_1, c_2,\ldots, c_n$ в точках $P_1, P_2,\ldots, P_n$ соответственно, при этом всегда $c_1+c_2+\ldots+c_n=0$. Если P_0 — произвольная точка на S такая, что $P_0\neq P_j$, $j=1, 2,\ldots, n$, то ω можно представить в виде линейной комбинации нормированного А. д. II рода ω_2, конечного числа нормальных А. д. III рода $\omega_{j,0}$ и базисных А. д. I рода φ_k:

$$\omega=\omega_2+\sum_{j=1}^{n}c_j\omega_{j,\,0}+\sum_{k=1}^{g}A_k\varphi_k.$$

Пусть ω_3 — А. д. III рода, имеющий только простые полюсы с вычетами c_j в точках P_j, $j=1, 2,\ldots, n$, а ω_1 — произвольный А. д. I рода;

$$A_k=\int_{a_k}\omega_1, \quad B_k=\int_{b_k}\omega_1,$$

$$A'_k=\int_{a_k}\omega_3, \quad B'_k=\int_{b_k}\omega_3, \quad k=1, 2, \ldots, g,$$

причем циклы a_k, b_k не проходят через полюсы ω_3. Пусть точка $P_0\in S$ не лежит на циклах a_k, b_k и L_j есть путь от P_0 к P_j. Тогда имеем б и л и н е й н ы е с о о т н о ш е н и я для А. д. I и III рода:

$$\sum_{k=1}^{g}(A_kB'_k-B_kA'_k)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}c_j\int_{L_j}\omega_1.$$

Между А. д. I и II рода также имеются билинейные соотношения аналогичного вида.

Произвольный А. д. III рода, кроме A- и B-периодов A_k, B_k, $k=1, 2,\ldots, g$, наз. ц и к л и ч е с к и м и п е р и о д а м и, имеет еще п о л я р н ы е периоды

вида $2\pi ic_j$ вдоль циклов, гомологичных нулю, но охватывающих полюсы P_j. Таким образом, для произвольного цикла γ имеем:

$$\int_\gamma \omega_3 = \sum_{k=1}^{g} (l_k A_k + l_{g+k} B_k) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j c_j,$$

где l_k, l_{g+k}, m_j — целые числа.

Важные свойства А. д. описываются в терминах дивизоров. Пусть (ω) — д и в и з о р А. д. ω, т. е. выражение вида $(\omega)=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}$, где P_j — все нули и полюсы ω, а α_j — их кратности, или порядки. Степень дивизора $d[(\omega)]=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ для А. д. ω зависит только от рода S, а именно всегда $d[(\omega)]=2g-2$. Пусть $\mathfrak{a}$ — нек-рый произвольно заданный дивизор. Обозначим через $\Omega(\mathfrak{a})$ комплексное векторное пространство А. д. ω, дивизоры к-рых (ω) кратны $\mathfrak{a}$; $L(\mathfrak{a})$ — векторное пространство мероморфных функций f на S, дивизоры к-рых (f) кратны $\mathfrak{a}$. Тогда размерность $\dim \Omega(\mathfrak{a})=\dim L(\mathfrak{a}/(\omega))$. Другая важная информация о размерности этих пространств содержится в т е о р е м е Р и м а н а — Р о х а: для любого дивизора $\mathfrak{a}$ имеем равенство:

$$\dim L(\mathfrak{a}^{-1}) - \dim \Omega(\mathfrak{a}) = d[\mathfrak{a}] - g + 1.$$

Отсюда следует, напр., что при $g=1$, т. е. на поверхности тора, мероморфная функция не может иметь единственный простой полюс.

Пусть S — произвольная компактная риманова поверхность, на к-рой z и w — мероморфные функции, удовлетворяющие неприводимому алгебраич. уравнению $F(z, w)=0$. Произвольный А. д. ω на S можно выразить тогда в виде $\omega=R(z, w)dz$, где $R(z, w)$ — нек-рая рациональная функция от z и w, и обратно: выражение $\omega=R(z, w)dz$ есть А. д. Таким образом, произвольный *абелев интеграл*

$$\int R(z, w)\, dz = \int \omega$$

является интегралом от нек-рого А. д. на компактной римановой поверхности S.

См. также *Алгебраическая функция*.

Лит.: [1] С п р и н г е р Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Н е в а н л и н н а Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Ч е б о т а р е в Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВ ИНТЕГРАЛ, а л г е б р а и ч е с к и й и н т е г р а л,— интеграл от *алгебраической функции*, т. е. интеграл вида:

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\, dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ — любая рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$F(z, w) \equiv a_0(z)\, w^n + a_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0 \quad (2)$$

с целыми рациональными по z коэффициентами $a_j(z)$, $j=0, 1, \ldots, n$. Уравнению (2) соответствует компактная *риманова поверхность* F, n-листно накрывающая сферу Римана, на к-рой z, w, а следовательно, и $R(z, w)$, рассматриваемые как функции точки поверхности F, однозначны.

Интеграл (1) задается как интеграл $\int_L \omega$ от *абелева дифференциала* $\omega=R(z, w)dz$ на F, взятый вдоль некоторого спрямляемого пути L. Вообще говоря, задание только начальной и конечной точек z_0 и z_1 этого пути L не вполне определяет значение А. и. (1), или, что то же, интеграл (1) является, вообще говоря, многозначной функцией от начальной и конечной точек пути L.

Поведение А. и. на F зависит прежде всего от топологич. структуры, в частности от топологич. инвариан-

та — рода g поверхности F (см. *Род поверхности*). Род g связан с числом листов n и числом точек ветвления ν (взятых с надлежащей кратностью) соотношением $g=\nu/2-n+1$. При $g=0$ переменные z и w выражаются рационально через нек-рый параметр t, и А. и. сводится к интегралу от рациональной функции от t. Так обстоит дело, напр., в элементарных случаях $w^2=az+a_1$ и $w^2=a_0z^2+a_1z+a_2$.

При $g\geqslant 1$ любой А. и. можно выразить в виде линейной комбинации элементарных функций и канонических А. и. трех родов. Интеграл $\int_L \omega$ наз. А. и. I рода, если ω — абелев дифференциал I рода. Иначе, А. и. I рода характеризуется тем, что при фиксированном начале z_0 пути L он является всюду конечной на F функцией верхнего предела z_1, вообще говоря, многозначной. Эта характеристика используется, напр., при построении аналогов А. и. I рода на некомпактных римановых поверхностях. Любой А. и. I рода может быть представлен в виде линейной комбинации g линейно независимых нормальных А. и. I рода

$$u_1=\int_L \varphi_1,\quad u_2=\int_L \varphi_2,\ \ldots,\ u_g=\int_L \varphi_g$$

от дифференциалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$, составляющих канонич. базис абелевых дифференциалов I рода. Если разрезать поверхность F вдоль циклов $a_1b_1a_2b_2\ldots a_gb_g$ канонич. базиса гомологий, то получается односвязная область F^*. Для всех путей $L^*\subset F^*$ с фиксированным началом z_0 и концом z_1 интегралы $\int_{L^*}\varphi_i$ являются однозначными функциями верхнего предела z_1. Многозначность интегралов u_i на F теперь полностью характеризуется тем, что интеграл $u_i=\int_L\varphi_i$ вдоль произвольного пути $L\subset F$, соединяющего те же точки z_0 и z_1, отличается от интеграла $\int_{L^*}\varphi_i$ лишь прибавлением целочисленной линейной комбинации A-периодов A_{ij} и B-периодов B_{ij} базисных дифференциалов I рода, составляющих матрицу периодов размера $g\times 2g$, к-рая удовлетворяет билинейным соотношениям Римана (см. *Абелев дифференциал*).

Интеграл $\int_L\omega$, где ω — абелев дифференциал II рода, наз. А. и. II рода. Рассматриваемый как функция от верхнего предела, он всюду на F не имеет иных особенностей, кроме полюсов. А. и. от нормированного абелева дифференциала II рода наз. нормальным А. и. II рода.

А. и. III рода — это А. и. произвольного вида. На F они допускают, вообще говоря, и логарифмич. особенности. При этом логарифмич. особенности могут встречаться только попарно. А. и. от нормального абелева дифференциала III рода наз. нормальным А. и. III рода. Любой А. и. можно представить в виде линейной комбинации нормальных А. и. I, II и III рода. В отличие от А. и. I и II рода, А. и. III рода, кроме A- и B-периодов, наз. циклическими периодами, имеет еще, вообще говоря, полярные периоды вдоль циклов, гомологичных нулю, но охватывающих логарифмич. особенности этого А. и., порождаемые полюсами абелева дифференциала ω с отличными от нуля вычетами.

Для произвольно взятых А. и. на одной и той же римановой поверхности F существуют определенные соотношения, обусловленные топологической и конформной структурой F. Напр., если $\omega_{P_iP_j}$ — нормальный абелев дифференциал III рода с простыми полюсами в точках P_i, P_j, то справедлива теорема о пере-

становке параметров и пределов для А. и. III рода: для любых точек P_1, P_2, P_3, P_4

$$\int_{P_1}^{P_2}\omega_{P_3P_4}=\int_{P_3}^{P_4}\omega_{P_1P_2}.$$

Соотношения, связывающие А. и. с рациональными функциями на F, носят назв. теоремы Абеля. Напр., в терминах дивизоров теорема Абеля для А. и. I рода имеет вид: дивизор $\mathfrak{a}$ на F является дивизором мероморфной функции тогда и только тогда, когда существует такая цепь L, что $\partial L=\mathfrak{a}$ и $\int_L\omega=0$ для всех абелевых дифференциалов I рода на F. Существуют варианты теоремы Абеля для А. и. II и III рода (см. [4]). А. и., и в частности теорема Абеля, служат основой для трансцендентного построения *Якоби многообразия* римановой поверхности. Вопрос обращения А. и. как функции верхнего предела ведет также к понятиям *абелевых функций*, *эллиптических функций* и *тета-функций* (см. *Якоби проблема обращения*).

Исторически начало теории А. и. было положено рассмотрением поверхности рода $g=1$. Записав соответствующее уравнение в виде:

$$F(z,\ w)=w^2-f(z)=0,$$

где $f(z)$ — многочлен от z 3-й или 4-й степени, получают в качестве соответствующих А. и. *эллиптические интегралы*. Впервые они появились при спрямлении дуг кривых 2-го порядка в работах Я. и И. Бернулли (Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli), Дж. Фаньяно (G. Faniano) конца 17 и начала 18 вв. Л. Эйлер (L. Euler) подошел к теореме сложения для эллиптич. интегралов — частному случаю теоремы Абеля (1752). В 1827 в работах Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) была поставлена и решена проблема обращения эллиптич. интегралов. Тем самым было положено начало теории эллиптич. функций. Однако нек-рыми фактами этой теории владел уже к началу 18 в. К. Гаусс (C. Gauss). Проблема обращения А. и. в гораздо более сложном случае $g>1$ возникла в работах Н. Абеля и К. Якоби. В самом начале развития теории большое внимание привлек случай *гиперэллиптических интегралов*, когда $F(z,\ w)=w^2-f(z)$, где $f(z)$ — многочлен 5-й или 6-й степени без кратных корней. Здесь $g=2$ и трудности проблемы обращения уже достаточно ощутимы. Существенное продвижение в теории А. и. связано с именем Б. Римана (B. Riemann), к-рый ввел понятие римановой поверхности (1851), сформулировал и доказал ряд важных результатов.

Многомерные обобщения теории А. и. изучаются в алгебраич. геометрии и теории комплексных многообразий.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, гл. 8, 9; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [3] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955, гл. 5; [4] Bliss G. A., Algebraic functions, N. Y., 1966; [5] Stahl H., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1896; [6] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВА ГРУППА — группа, операция в к-рой удовлетворяет закону *коммутативности*. Названа по имени Н. Абеля (N. Abel), установившего роль таких групп в теории разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах. Обычно для обозначения операции в А. г. используется аддитивная запись, т. е. знак $+$ для самой операции, наз. сложением, знак 0 для нейтрального элемента, наз. нулем (в мультипликативной записи он наз. единицей).

Примеры А. г. Все *циклические группы* — абелевы, в частности аддитивная группа целых чисел — абелева. А. г. будут всевозможные *прямые суммы* циклич. групп, аддитивная группа рациональных чисел Q (являющаяся локально циклической

группой, т. е. группой, все конечно порожденные подгруппы к-рой циклические), группы типа p^∞ (или квазициклич. группы Z_{p^∞}, где p — произвольное простое число).

Свободное объединение в многообразии А. г. совпадает с прямой суммой. *Свободная абелева группа* есть прямая сумма нек-рого множества бесконечных циклич. групп. Всякая подгруппа свободной А. г.— свободная А. г. Совокупность всех элементов конечного порядка А. г. образует подгруппу, наз. периодической частью А. г. Факторгруппа А. г. по ее периодич. части является *группой без кручения*. Таким образом, всякая А. г.— расширение периодич. А. г. при помощи А. г. без кручения. Это расширение не всегда расщепляемо, т. е. периодич. часть, вообще говоря, не выделяется в виде прямого слагаемого. Периодич. А. г., порядки всех элементов к-рой являются степенями фиксированного простого числа p, наз. примарной по простому числу p (в общей теории групп употребляется термин p-группа). Всякая периодич. А. г. может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам.

Наиболее полное описание известно для А. г. с конечным числом образующих. Его дает основная теорема об абелевых группах с конечным числом образующих: всякая конечно порожденная А. г. разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых циклич. подгрупп, из к-рых часть — конечные примарные, часть — бесконечные [Г. Фробениус (G. Frobenius), Л. Штиккельбергер (L. Stickelberger)]. В частности, конечная А. г. разложима в прямую сумму примарных циклич. групп. Такое разложение, вообще говоря, не единственно, но любые два разложения А. г. с конечным числом образующих в прямую сумму неразложимых циклич. групп изоморфны между собой и, таким образом, число бесконечных циклич. слагаемых и совокупность порядков примарных циклич. слагаемых не зависят от выбора разложения. Эти числа, наз. инвариантами конечно порожденной А. г., они являются полной системой инвариантов в том смысле, что всякие две группы, у к-рых эти инварианты совпадают, изоморфны. Всякая подгруппа А. г. с конечным числом образующих сама обладает конечной системой образующих.

Не всякая А. г. представима в виде прямой суммы (даже бесконечного числа) циклич. групп. Для примарных А. г. имеется необходимое и достаточное условие существования такого разложения — критерий Куликова. Пусть A — примарная А. г. по нек-рому простому p. Ненулевой элемент a группы A наз. элементом бесконечной высоты в A, если для любого целого k уравнение $p^k x = a$ разрешимо в A, и элементом высоты n, если это уравнение разрешимо лишь для $k \leqslant n$. Критерий Куликова: примарная А. г. разложима в прямую сумму циклич. групп тогда и только тогда, когда она есть объединение возрастающей последовательности своих подгрупп, у каждой из к-рых высоты элементов ограничены в совокупности. Любая подгруппа А. г., разложимой в прямую сумму циклич. подгрупп, сама разложима в прямую сумму циклич. подгрупп. Неразложимые (в прямую сумму) примарные группы исчерпываются циклич. примарными группами и группами Z_{p^∞}.

Конечное множество элементов $g_1, \ldots, g_k$ А. г. наз. линейно зависимым, если существуют такие целые числа $n_1, \ldots, n_k$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{k} n_i g_i = 0$. Если же таких чисел не существует, то это множество наз. линейно независимым. Произвольная система элементов А. г. наз. линейно зави-

симой, если линейно зависима нек-рая конечная ее подсистема. А. г., не являющаяся периодической, обладает максимальными линейно независимыми системами. Мощности всех максимальных линейно независимых подсистем одинаковы и наз. р а н г о м (П р ю ф е р а) данной А. г. Ранг периодич. группы считается равным нулю. Ранг свободной А. г. совпадает с мощностью системы ее свободных образующих.

Всякая А. г. без кручения ранга I изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Существует полное описание таких групп на языке типов. Всякому элементу А. г. без кручения ставится в соответствие его х а р а к т е р и с т и к а — счетная последовательность, состоящая из неотрицательных чисел и символа ∞. Эти последовательности строятся следующим образом. Все простые числа нумеруются в порядке возрастания $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, и элементу a сопоставляется последовательность, на k-м месте к-рой стоит число s_k, если уравнение $a=p_k^{s_k}x$ имеет решение в группе, а уравнение $a=p_k^{s_k+1}x$ уже решения не имеет, и стоит символ ∞, если уравнение $a=p_k^{s}x$ имеет решение при любом s. Характеристики считаются эквивалентными, если они отличаются не более, чем на конечном числе мест, и символ ∞ в каждой из них стоит на местах с одними и теми же номерами. Характеристики двух линейно зависимых элементов эквивалентны. Класс эквивалентных характеристик наз. т и п о м. Всякой А. г. без кручения ранга I однозначно соответствует тип, наз. т и п о м д а н н о й г р у п п ы, причем неизоморфным группам соответствуют различные типы.

А. г. без кручения, разложимые в прямую сумму групп ранга 1, наз. в п о л н е р а з л о ж и м ы м и. Не всякая подгруппа вполне разложимой группы будет вполне разложимой (но всякое прямое слагаемое таково). Для всякого целого n существует А. г. без кручения ранга n, неразложимая в прямую сумму. Для счетных А. г. без кручения может быть построена полная система инвариантов.

А. г. наз. п о л н о й, или д е л и м о й, если для любого ее элемента a и любого целого m в ней разрешимо уравнение $mx=a$. Все делимые А. г. исчерпываются всевозможными прямыми суммами групп, изоморфных Q и группам Z_{p^∞}, причем мощности множеств компонент, изоморфных Q, а также Z_{p^∞} (для каждого p), составляют полную и независимую систему инвариантов делимой группы. Всякая А. г. может быть изоморфно вложена в нек-рую делимую А. г. Делимые А. г. и только они являются инъективными объектами в категории А. г. и служат прямыми слагаемыми для всякой содержащей их А. г. Таким образом, всякая А. г. представима в виде прямой суммы полной группы и так наз. р е д у ц и р о в а н н о й г р у п п ы, т. е. группы, к-рая не содержит ненулевых полных подгрупп. Описание редуцированных А. г. известно лишь в немногих случаях. Так, теорема Ульма (см. [1], § 28) дает описание всех счетных редуцированных периодич. А. г.

Теория А. г., берущая свое начало в теории чисел, находит применение во многих современных математич. теориях. Так, теория двойственности характеров конечных А. г. получила глубокое развитие в теории двойственности для топологических локально компактных групп. Развитие гомологич. алгебры позволило решить ряд проблем в теории А. г., напр. дать описание множества всех расширений одной группы с помощью другой. Развитие теории модулей неразрывно связано с А. г. как модулями над кольцом целых чисел. Многие результаты теории А. г. удается перенести на случай модулей над кольцом главных идеалов. Относительная простота и изученность А. г. (что подтверждает, напр., разрешимость *элементарной теории* А. г.) вместе с до-

вольно разнообразным запасом объектов делают А. г. постоянным источником примеров во многих разделах математики.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Fuchs L., Abelian groups, 3 ed., Bdpst., 1966; [3] Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1, М., 1974; [4] Kaplansky I., Infinite abelian groups, Ann Arbor, 1954; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 9—44; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 5—45. *Ю. Л. Ершов.*

АБЕЛЕВА КАТЕГОРИЯ — категория, обладающая рядом характерных свойств категории всех абелевых групп. А. к. были введены как основа абстрактного построения гомологич. алгебры (см. [4]). Категория $\mathfrak{A}$ наз. абелевой (см. [2]), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

А0. Существует *нулевой объект*.

А1. Каждый морфизм обладает *ядром* и *коядром*.

А2. Каждый мономорфизм является *нормальным мономорфизмом*; каждый эпиморфизм является *нормальным эпиморфизмом*.

А3. Для каждой пары объектов существуют *произведение* и *копроизведение*.

Часто в определении А. к. дополнительно предполагается, что $\mathfrak{A}$ локально малая слева категория (см. *Малая категория*). Для А. к. это предположение равносильно локальной малости справа и, следовательно, локальной малости. Копроизведение объектов A и B А. к. наз. также прямой суммой этих объектов и обозначают $A \oplus B$ или $A+B$.

Примеры А. к.

1) Категория, двойственная А. к., также является А. к.

2) Категория ${}_R\mathfrak{M}$ всех левых унитарных модулей над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей и всех R-модульных гомоморфизмов является А. к. (напр., категория всех абелевых групп).

3) Всякая *полная подкатегория* А. к., содержащая вместе с каждым морфизмом его ядро и коядро и вместе с каждой парой объектов A, B — их произведение и копроизведение, есть А. к.

Все малые А. к. исчерпываются подкатегориями указанного типа категорий ${}_R\mathfrak{M}$ левых унитарных модулей, а именно, справедлива следующая теорема Митчелла: для всякой малой А. к. существует полное точное вложение в нек-рую категорию ${}_R\mathfrak{M}$.

4) Всякая категория диаграмм $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$ со схемой $\mathfrak{D}$ над А. к. $\mathfrak{A}$ является А. к. В схеме $\mathfrak{D}$ можно выделить множество C соотношений коммутативности, т. е. множество пар (φ, ψ) путей $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ в $\mathfrak{D}$ с общими началом и концом. Тогда полная подкатегория категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$, порожденная всеми такими диаграммами D: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$, что

$$D(\varphi) = D(\varphi_1) \ldots D(\varphi_n) = D(\psi_1) \ldots D(\psi_m) = D(\psi),$$

является А. к. В частности, если $\mathfrak{D}$ — малая категория, а множество C состоит из всех пар вида $(\alpha\beta, \gamma)$, где $\gamma=\alpha\beta$, то соответствующая подкатегория является А. к. одноместных ковариантных *функторов* из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{A}$.

Пусть в малой категории $\mathfrak{D}$ есть нулевой объект; функтор $F: \Sigma \to \mathfrak{A}$ наз. нормализованным, если он переводит нулевой объект в нулевой объект. Полная подкатегория категории функторов, порожденная нормализованными функторами, является А. к. В частности, если $\mathfrak{D}$ — категория, объектами к-рой служат все целые числа и нулевой объект N, а ненулевые неединичные морфизмы образуют последовательность

$$\ldots \longrightarrow (-1) \xrightarrow{d_{-1}} 0 \xrightarrow{d_0} 1 \xrightarrow{d_1} 2 \longrightarrow \ldots,$$

в к-рой $d_n d_{n+1}=0$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то соответствующая подкатегория, порождаемая нормализованными функторами, наз. категорией комплексов над $\mathfrak{A}$. В категории комплексов определяются адди-

тивные функторы Z^n, B^n, H^n соответственно n-мерных циклов, n-мерных граней и n-мерной гомологии со значениями в $\mathfrak{A}$ и на их основе развивается аппарат гомологич. алгебры.

5) Полная подкатегория $\mathfrak{A}'$ А. к. $\mathfrak{A}$ наз. п л о т н о й, если она содержит *подобъекты* и *факторобъекты* своих объектов и если в *точной последовательности*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$B \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда A, $C \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$. Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ строится следующим образом. Пусть $(R, \mu]$ — подобъект прямой суммы $A \oplus B$ с проекциями π_1, π_2 и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mu\pi_1} & A \\ {\scriptstyle \mu\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & X \end{array}$$

коуниверсален (т. е. является корасслоенным произведением). Подобъект $(R, \mu]$ наз. $\mathfrak{A}'$-подобъектом, если $\mathrm{Coker}\ \mu\pi_1$, $\mathrm{Ker}\ \beta \in \mathfrak{A}'$. Два $\mathfrak{A}'$-подобъекта эквивалентны, если они содержат нек-рый $\mathfrak{A}'$-подобъект. Множество $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'}(A, B)$ состоит по определению из классов эквивалентных $\mathfrak{A}'$-подобъектов. Обычное умножение бинарных отношений согласовано с введенной эквивалентностью, что позволяет построить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$, являющуюся А. к. *Точный функтор* $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ определяется сопоставлением каждому морфизму α: $A \to B$ его графика в $A \oplus B$. Подкатегория $\mathfrak{A}'$ наз. п о д к а т е г о р и е й л о к а л и з а ц и и, если функтор T обладает полным унивалентным сопряжением справа функтором $Q : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$.

6) Для всякого топологич. пространства X категория левых G-модулей над X, где G — пучок колец с единицей над X, является А. к.

Во всякой А. к. $\mathfrak{A}$ можно ввести частичное суммирование морфизмов таким образом, что $\mathfrak{A}$ станет *аддитивной категорией*. Поэтому в А. к. произведение и копроизведение любой пары объектов совпадают. Более того, в определении А. к. можно предполагать существование либо произведений, либо копроизведений. Всякая А. к. есть *бикатегория* с единственной бикатегорной структурой. Перечисленные свойства характеризуют А. к.: категория $\mathfrak{A}$ с конечными произведениями является абелевой тогда и только тогда, когда она аддитивна и когда всякий морфизм α имеет ядро и коядро и разлагается в произведение

$$\alpha = \mathrm{Coker}\,(\ker \alpha)\ \theta\ \ker\,(\mathrm{Coker}\ \alpha),$$

в к-ром θ — изоморфизм.

Приведенная выше теорема Митчелла обосновывает метод «диаграммного поиска» в А. к.: всякое утверждение о коммутативных диаграммах, справедливое во всех категориях левых модулей ${}_R\mathfrak{M}$ и вытекающее из точности нек-рых последовательностей морфизмов, справедливо во всех А. к.

В локально малой А. к. $\mathfrak{A}$-подобъекты любого объекта образуют *дедекиндову решетку*. Если в $\mathfrak{A}$ существуют произведения (или копроизведения) любого семейства объектов, то эта решетка и оказывается полной. Перечисленные условия заведомо выполняются, если в $\mathfrak{A}$ имеется образующий объект U и существуют копроизведения

$$\prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i, \quad U_i = U$$

для любого множества I. Таковы, напр., *Гротендика категории*, эквивалентные факторкатегориям категорий модулей по подкатегориям локализации (т е о р е м а Г а б р и е л я — П о п е с к у).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Freyd P., Abelian categories, N. Y., 1964; [3] Gabriel P., «Bull. Soc. math. France», 1962, t. 90, № 3, p. 323—448; [4] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961. *М. Ш. Цаленко.*

АБЕЛЕВА СХЕМА — гладкая схема групп над базисной схемой S, слои к-рой являются *абелевыми многообразиями*. Эквивалентное определение состоит в том, что абелева схема над S, или абелева S-схема, есть собственная гладкая S-схема групп, все слои к-рой геометрически связаны. С интуитивной точки зрения абелеву S-схему можно понимать как семейство абелевых многообразий, параметризованных схемой S. На А. с. переносится ряд фундаментальных свойств абелевых многообразий. Напр., абелева S-схема A является коммутативной S-схемой групп (см. [1]); если схема S нормальна, то A проективна над S (см. [2]).

А. с. изучаются в основном как схемы модулей абелевых многообразий с различными дополнительными структурами, а также в теории редукции абелевых многообразий (см. *Нерона модель*).

Лит.: [1] Mumford D., Geometric invariant theory, B., 1965; [2] Raynaud M., Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, B., 1970. *И. В. Долгачев.*

АБЕЛЕВА ФУНКЦИЯ — обобщение *эллиптической функции* одного комплексного переменного на случай многих комплексных переменных. Мероморфная в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$, функция $f(z)$ от p комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, наз. А. ф., если существуют $2p$ векторов-строк из $\mathbb{C}^p$

$$w_\nu = (\omega_{1\nu}, \omega_{2\nu}, \ldots, \omega_{p\nu}), \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2p,$$

линейно независимых над полем действительных чисел и таких, что $f(z+w_\nu)=f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^p$, $\nu=1, 2, \ldots, 2p$. Векторы w_ν наз. периодами, или системами периодов, А. ф. $f(z)$. Все периоды А. ф. $f(z)$ образуют абелеву группу Γ по сложению, наз. группой периодов (или модулем периодов). Базис этой группы наз. базисом периодов А. ф., а также системой основных (или примитивных) периодов. А. ф. наз. вырожденной, если существует такое линейное преобразование переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, к-рое переводит $f(z)$ в функцию меньшего числа переменных; в противном случае $f(z)$ наз. невырожденной А. ф. Вырожденные А. ф. характеризуются также тем, что они имеют бесконечно малые периоды, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти период w_ν, для к-рого

$$\| w_p \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} | \omega_{kp} |^2} < \varepsilon.$$

Если $p=1$, то невырожденные А. ф. суть эллиптич. функции одного комплексного переменного. Каждая А. ф. с группой периодов Γ естественным образом отождествляется с мероморфной функцией на комплексном торе $\mathbb{C}^p/\Gamma$, т. е. на факторпространстве $\mathbb{C}^p/\Gamma$ (см. также *Квазиабелева функция*).

Исследование А. ф. началось в 19 в. в связи с проблемой обращения *абелевых интегралов* I рода (см. *Якоби проблема обращения*, [1], [2]). Возникающие при решении этой проблемы А. ф. наз. специальными А. ф., а иногда в старых работах под А. ф. только они и подразумевались. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ — линейно независимые нормальные абелевы интегралы I рода, построенные на римановой поверхности F:

$$u_1 = \int_{c_1}^{x} du_1, \quad u_2 = \int_{c_2}^{x} du_2, \quad \ldots, \quad u_p = \int_{c_p}^{x} du_p,$$

а

$$z_j = \int_{c_1}^{x_1} du_j + \int_{c_2}^{x_2} du_j + \ldots + \int_{c_p}^{x_p} du_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

— заданная система сумм, в к-рой нижние пределы интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_p$ считаются фиксированными на поверхности F. Тогда специальные А. ф. можно определить как все рациональные функции координат p верхних пределов $x_1, x_2, \ldots, x_p$, рассматриваемых в свою очередь как функции от p точек $z_1, z_2, \ldots, z_p$ поверхности F. В символической записи, ведущей свое начало от К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), любую специальную А. ф. $\mathrm{Al}(z)$ можно изобразить в виде

$$\mathrm{Al}(z) = \mathrm{Al}(z_1, z_2, \ldots, z_p) =$$
$$= R[x_1(z_1, z_2, \ldots, z_p), x_2(z_1, z_2, \ldots, z_p), \ldots, x_p(z_1, z_2, \ldots, z_p)].$$

Соответствующие специальным А. ф. комплексные торы $\mathbb{C}^p/\Gamma$ являются *Якоби многообразиями* алгебраич. кривых.

Матрица W, столбцы к-рой образуют базис периодов А. ф. $f(z)$, имеет размер $p \times 2p$ и наз. матрицей периодов А. ф. $f(z)$. Для того чтобы данная матрица W размера $p \times 2p$ была матрицей периодов нек-рой невырожденной А. ф. $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла определенным условиям (условия Римана — Фробениуса). Она должна являться римановой матрицей, т. е. для W должна существовать такая антисимметрическая неособенная целочисленная квадратная матрица M порядка $2p$, что: 1) $WMW^T = 0$, где W^T транспонированная матрица W; 2) матрица $iWM\overline{W}^T$ определяет положительно определенную эрмитову форму (см. [3]). Если выразить условия 1) и 2) в виде соответственно уравнений и неравенств, то получится система $p(p-1)/2$ римановых уравнений и $p(p-1)/2$ римановых неравенств. Число p наз. родом матрицы W и соответствующей А. ф. $f(z)$. Столбцы $w_\nu = \mathrm{Re}\, w_\nu + i\,\mathrm{Im}\, w_\nu$ матрицы W, рассматриваемые как векторы в действительном евклидовом пространстве R^{2p}, определяют параллелотоп периодов А. ф. $f(z)$.

Все А. ф., соответствующие одной и той же матрице периодов W, образуют абелево функциональное поле K_W. В случае, когда поле K_W содержит невырожденную А. ф., степень его трансцендентности над полем $\mathbb{C}$ равна p; тор $\mathbb{C}^p/\Gamma$ при этом является *абелевым многообразием*, а K_W совпадает с его полем рациональных функций. Если же все А. ф. из K_W вырожденные, то K_W изоморфно полю рациональных функций на абелевом многообразии, размерность к-рого меньше p. См. также *Квазиабелева функция*.

Подобно эллиптич. функциям, каждая А. ф. может быть представлена в виде отношения двух целых трансцендентных *тета-функций*, представимых в свою очередь в виде *тета-рядов*. Задание римановой матрицы W определяет класс тета-рядов, позволяющий построить все А. ф. поля K_W.

Для специальных А. ф. матрица W посредством линейного преобразования независимых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$ всегда может быть приведена к виду

$$W = \begin{Vmatrix} \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{Vmatrix}.$$

При этом римановы соотношения между элементами матрицы $\|a_{jk}\|$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$, должны обеспечивать симметрию этой матрицы, $a_{jk} = a_{kj}$, и положительную определенность матрицы действительных частей $\|\mathrm{Re}\, a_{jk}\|$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$. Однако при $p > 3$ независимых среди элементов a_{jk} матрицы $\|a_{jk}\|$ будет только $3(p-1)$, т. е. столько, сколько конформных модулей имеет риманова поверхность F, на к-рой решается проблема обращения (см. *Модули римановой поверхности*). По-

мимо римановых соотношений, в этом случае между a_{jk} существует $(p\ \ 2)(p\ \ 3)\ 2$ соотношений трансцендентной природы, явный вид которых для случая $p\ \ 4$ впервые нашел в 1886 Ф. Шотки (F. Schottky; обзор последующих достижений по этой проблеме см. в [5]).

Специальные А. ф. представимы в виде отношения двух целых тета-функций с полуцелыми характеристиками специального вида. Из этого представления вытекает ряд свойств специальных А. ф., обобщающих многие свойства эллиптич. функций; так: производные А. ф. $f(z)$ по любому аргументу z_j суть А. ф.; любые $p+1$ А. ф. связаны алгебраич. уравнением; любую А. ф. можно выразить рационально через $p+1$ нек-рых А. ф., напр. через произвольную А. ф. и ее p частных производных 1-го порядка; для А. ф. справедлива т е о р е м а с л о ж е н и я, т. е. значение А. ф. в точке $a-b\in\mathbb{C}^p$ можно выразить рационально через значения нек-рых $p+1$ А. ф. в точках a, $b\in\mathbb{C}^p$.

А. ф. имеют большое значение в алгебраич. геометрии как средство *униформизации* алгебраич. многообразий определенных классов.

Лит.: [1] С п р и н г е р Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [2] Ч е б о т а р е в Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, гл. 8, 9; [3] З и г е л ь К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [4] В е й л ь А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [5] М а м ф о р д Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—49; [6] S t a h l H., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1896; [7] C l e b s c h A., G o r d a n P., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1866; Neudruck, Würzburg, 1967; [8] C o n f o r t o F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B.— [u.a.], 1956.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВО МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраическая группа*, являющаяся полным *алгебраическим многообразием*. Условие полноты накладывает сильные ограничения на А. м. Так, А. м. можно вложить в качестве замкнутого подмногообразия в проективное пространство, каждое рациональное отображение неособого многообразия в А. м. регулярно, групповой закон на А. м. всегда коммутативен.

Теория А. м. над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ эквивалентна, по существу, теории абелевых функций, основы к-рой были заложены в работах К. Якоби (C. Jacobi), Н. Абеля (N. Abel) и Б. Римана (B. Riemann). Если $\mathbb{C}^n$ есть n-мерное векторное пространство, $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ — решетка (см. *Дискретная подгруппа*) ранга $2n$, то факторгруппа $X\ \ \mathbb{C}^n\ \Gamma$ будет *комплексным тором*. Мероморфные функции на X отождествляются с мероморфными функциями на $\mathbb{C}^n$, инвариантными относительно решетки периодов Γ. Если степень трансцендентности поля K мероморфных функций на X равна n, то X можно наделить структурой алгебраич. группы, единственной в силу компактности X и такой, что поле рациональных функций этой структуры совпадает с K. Получающиеся таким образом алгебраич. группы являются А. м. и всякое А. м. над полем $\mathbb{C}$ имеет такой вид. Матрицу, задающую базис решетки Γ, можно привести к виду $(E|Z)$, где E — единичная матрица, а Z — матрица порядка $n\times n$. Комплексный тор $X\ \ \mathbb{C}^n/\Gamma$ есть А. м. в том и только том случае, когда матрица Z симметрична и ее мнимая часть положительно определена. Необходимо отметить, что как вещественные группы Ли все многообразия X изоморфны, но это неверно для их аналитич. или алгебраич. структур, к-рые сильно меняются при деформации решетки Γ. Рассмотрение матрицы периодов Z показывает, что это изменение носит аналитич. характер и это приводит к конструкции многообразия модулей всех абелевых многообразий данной размерности n. Его размерность равна $\frac{1}{2}n(n+1)$ (см. *Модулей проблема*).

Теория А. м. над произвольным полем k принадлежит А. Вейлю (см. [1], [2]). Она имеет большое количе-

ство приложений как в самой алгебраич. геометрии, так и в других областях математики, особенно в теории чисел и теории автоморфных функций. Каждому полному алгебраич. многообразию можно сопоставить функториальным образом А. м. (см. *Альбанезе многообразие*, *Пикара многообразие*, *Промежуточный якобиан*). Эти конструкции представляют собой мощный метод изучения геометрич. структуры алгебраич. многообразий. Так, с их помощью было получено одно из решений *Люрота проблемы*. Другим приложением является доказательство гипотезы Римана для алгебраич. кривых над конечным полем. Именно для решения этой проблемы и была создана абстрактная теория А. м. Она послужила также одним из источников теории *l-адических когомологий*. Простейшим примером таких когомологий служит *Тейта модуль* А. м. Он является проективным пределом групп X_{l^n} точек l^n-го порядка при $n\to\infty$. Определение структуры последних было одним из главных достижений теории А. Вейля. Именно, если m взаимно просто с характеристикой p поля k и k алгебраически замкнуто, то группа X_m изоморфна $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2\dim X}$. Ситуация в случае m p гораздо сложнее и она привела к появлению таких понятий, как конечные групповые схемы, формальные группы и p-делимые группы. Изучение действия эндоморфизмов А. м., в частности *Фробениуса эндоморфизма* на его модуль Тейта, дает возможность доказать гипотезу Римана, а также является основным инструментом в теории комплексного умножения А. м. Другой круг вопросов, связанный с модулем Тейта, состоит в исследовании действия на нем группы Галуа замыкания основного поля. Отсюда возникли гипотезы Тейта и теория Тейта—Хонды, дающая для А. м. над конечными полями их описание в терминах модуля Тейта [5].

Интенсивно развивается изучение А. м. над локальными, в том числе p-адическими полями. Аналог упомянутого выше представления А. м. в виде факторпространства $\mathbb{C}^n/\Gamma$ (которое обычно наз. униформизацией) был построен над такими полями Д. Мамфордом (D. Mumford) и М. Рейно (M. Raynaud). В отличие от комплексного случая униформизуются не все А. м., а только имеющие редукцией по mod p мультипликативную группу [6]. Теория А. м. над глобальными (числовыми и функциональными) полями играет важную роль в диофантовой геометрии. Основной результат здесь - т е о р е м а М о р д е л л а В е й л я: группа рациональных точек А. м., определенного над конечным расширением поля рациональных чисел, конечно порождена.

Лит.: [1] W e i l A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, P., 1948; [2] е г о ж е, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948; [3] В е й л ь А., Введение в теорию келеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [4] L a n g S., Abelian variétés, N.Y.-L., 1959; [5] М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [6] М а н и н Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 5—93; [7] С е р р Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [8] З и г е л ь К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954.

Б. Б. Венков, А. Н. Паршин.

АБЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(А. д. у. 1-го рода) или

$$[g_0(x)+g_1(x)y]y'=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(А. д. у. 2-го рода). Эти уравнения возникли в связи с исследованиями Н. Абеля [1] по теории эллиптич. функций. А. д. у. 1-го рода представляет естественное обобщение *Риккати уравнения*.

Если $f_1\in C(a,\ b)$, f_2 и $f_3\in C^1(a,\ b)$ и $f_3(x)\neq 0$ при $x\in[a,\ b]$, то А. д. у. 1-го рода заменой переменных

(см. [2]) приводится к нормальной форме $dz/dt = -z^3 + \Phi(t)$. В общем случае А. д. у. 1-го рода в замкнутой форме не интегрируется; это удается сделать лишь в отдельных частных случаях (см. [2]). Если g_0 и $g_1 \in C^1(a, b)$ и $g_1(x) \neq 0$, $g_0(x) - g_1(x) y \neq 0$, то А. д. у. 2-го рода сводится к А. д. у. 1-го рода подстановкой $g_0(x) + g_1(x) y^{-1} z$.

А. д. у. 1-го и 2-го рода, как и их дальнейшие обобщения

$$y' = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i, \quad y' \sum_{j=0}^{m} g_j(x) y^j \quad \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i,$$

подробно рассматривались в комплексной области (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1829, Bd 4, S. 309—48; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.

Н. Х. Розов.

АБЕЛЯ ЗАДАЧА — задача о нахождении в вертикальной плоскости s, τ) такой кривой, по к-рой материальная точка под действием силы тяжести, начав движение без начальной скорости в точке с ординатой x, достигнет оси $O\tau$ за время $T \quad f(x)$, где функция $f(x)$ задана заранее. А. з. поставлена Н. Абелем (N. Abel) в 1823; при ее решении им было получено (и решено) одно из первых интегральных уравнений — *Абеля интегральное уравнение*. Именно, если ω есть угол наклона к оси $O\tau$ касательной к искомой кривой, то

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sqrt{2g(x-s)}\sin\omega.$$

Интегрирование этого равенства в пределах от 0 до x и введение обозначений

$$\frac{1}{\sin\omega} = \varphi(s), \quad -\sqrt{2g}\,\Phi(x) \quad f(x)$$

приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x-s}} \quad f(x)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(s)$, нахождение к-рой дает возможность составить уравнение искомой кривой. Решение приведенного выше уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x-\tau}}\right].$$

Лит.: [1] Abel N. H., Œuvres complètes, t. 1, Christiania, 1881, p. 11—27.

Б. В. Хведелидзе.

АБЕЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}}\,ds \quad f(x), \tag{1}$$

к к-рому сводится решение *Абеля задачи*. А.и.у. наз. также более общее уравнение (о б о б щ е н н о е А.и.у.)

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}\,ds \quad f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{2}$$

где $a > 0$ и $0 < \alpha < 1$ — заданные постоянные, $f(x)$ — известная функция, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Выражение $(x-s)^{-\alpha}$ наз. я д р о м А. и. у., или я д р о м А б е л я. А. и. у. принадлежат к классу *Вольтерра уравнений* 1-го рода. Уравнение

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)}{|x-s|^\alpha}\,ds = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{3}$$

наз. А. и. у. с п о с т о я н н ы м и п р е д е л а м и.

Если $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то А.и.у. (2) имеет единственное непрерывное решение, представимое формулой

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{4}$$

или, что то же самое, формулой

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]. \qquad (5)$$

Формула (5) является решением А. и. у. (2) при более широких предположениях (см. [3], [4]). Так, в [3] показано, что если $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то А. и.у. (2) имеет в классе интегрируемых по Лебегу функций единственное решение, определяемое формулой (5). Решение А.и.у. (3) дано в [2]; см. также [6].

Лит.: [1] Böcher M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1909, v. 10, p. 271—78; [2] Carleman T., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 111—20; [3] Tonelli Z., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 183—99; [4] Tamarkin J., «Ann. Math.», 1930, v. 31, p. 219—29; [5] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963.
Б. В. Хведелидзе.

АБЕЛЯ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

суммируется методом Абеля (*A*-методом) к числу S, если для любого действительного числа x, $0<x<1$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

сходится и

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=S.$$

Этот метод суммирования встречался еще у Л. Эйлера (L. Euler) и даже у Г. Лейбница (G. Leibniz). Название «А.м.с.» обосновано *Абеля теоремой* о непрерывности суммы степенного ряда. А. м. с. является вполне *регулярным методом суммирования*, к-рый сильнее всей совокупности *Чезаро методов суммирования*. А. м. с. применяется в связи с тауберовыми теоремами для доказательства сходимости рядов.

С А. м. с. тесно связан *A**-метод суммирования: пусть z-комплексное число, $|z|<1$; ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

суммируется *A**-методом к числу S, если

$$\lim\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=S,$$

когда $z\to 1$ по любому некасательному к единичной окружности пути.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
А. А. Захаров.

АБЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО об оценке суммы попарных произведений чисел: если заданы такие множества чисел a_k и b_k, что все суммы $B_k=b_1+b_2+\ldots+b_k$, $k=1,2,\ldots,n$, ограничены по абсолютной величине числом B, т. е. $|B_k|\leqslant B$, и либо $a_i\geqslant a_{i+1}$, либо $a_i\leqslant a_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,n-1$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant B(|a_1|+2|a_n|).$$

В случае, когда a_k не возрастают и неотрицательны, оценка упрощается:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant Ba_1.$$

А. н. доказывается с помощью *Абеля преобразования*.
Л. Д. Кудрявцев.

АБЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, суммирование по частям, — преобразование вида:

$$\sum_{k=1}^{N}a_kb_k=a_Nb_N-a_1B_0-\sum_{k=1}^{N-1}B_k(a_{k+1}-a_k),$$

где a_k, b_k заданы, B_0 выбирается произвольно, а $B_k=B_{k-1}+b_k=B_0+b_1+b_2+\ldots+b_k$, $k=1,\ldots,N$. А. п. есть дискретный аналог *интегрирования по частям формулы*.

Если $a_N \to 0$ и последовательность $\{B_k\}$ ограничена, то А. п. обобщается на ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_1 B_0.$$

При помощи А. п. доказываются многие признаки сходимости числовых и функциональных рядов (см. *Абеля признак*). А. п. ряда часто приводит к ряду с той же суммой, но с лучшей сходимостью. Кроме того, А. п. постоянно используется в различных оценках (см. *Абеля неравенство*), в частности при исследовании скорости сходимости ряда. А. п. введено Н. Абелем [1].

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, S. 311—99; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1, 2 изд., М., 1963.

Л. П. Купцов.

АБЕЛЯ ПРИЗНАК — 1) А. п. для числовых рядов: если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

а числа a_n образуют монотонную ограниченную последовательность, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

2) А. п. для функциональных рядов: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

равномерно сходится на X, а функции $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, при каждом $x \in X$ образуют монотонную последовательность, равномерно ограниченную на множестве X. Аналогично формулируется А. п. равномерной сходимости интегралов

$$\int_{\alpha}^{\infty} a(n, x)\, b(n, x)\, dn,$$

зависящих от параметра $x \in X$.

А. п. могут быть усилены (см., напр., *Дедекинда признак*). См. также *Дирихле признак*, *Абеля преобразование*.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 7 изд., М., 1969; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1, 2 изд., М., 1963.

Л. П. Купцов.

АБЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) А. т. об алгебраических уравнениях: ни для какого n, большего или равного пяти, нельзя указать формулу, к-рая выражала бы корни любого уравнения n-й степени через его коэффициенты при помощи радикалов. Найдена Н. Абелем в 1824 (см. [1]). А. т. может быть получена также как следствие *Галуа теории*, из к-рой вытекает и более общее утверждение: для любого $n \geqslant 5$ существуют алгебраич. уравнения с целыми коэффициентами, корни к-рых не выражаются через радикалы из рациональных чисел. Современную формулировку А. т. для уравнений над произвольным полем см. *Алгебраическое уравнение*.

2) А. т. для степенных рядов: если степенной ряд

$$S(z) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k, \qquad (*)$$

где a_k, b, z — комплексные числа, сходится при $z = z_0$, то он абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z-b| \leqslant \rho$ радиуса $\rho < |z_0 - b|$ с центром в точке b. Установлена Н. Абелем [2]. Из этой теоремы вытекает, что

существует число $R \in [0, \infty]$, обладающее тем свойством, что при $|z-b|<R$ ряд сходится, а при $|z-b|>R$ расходится. Это число R наз. радиусом сходимости ряда (*), а круг $|z-b|<R$ наз. кругом сходимости ряда (*).

3) А. т. о непрерывности: если степенной ряд (*) сходится в точке z_0 границы круга сходимости, то он представляет собой непрерывную функцию в любом замкнутом треугольнике T с вершинами z_0, z_1, z_2, где z_1, z_2 лежат внутри круга сходимости. В частности,

$$\lim_{z \to z_0,\ z \in T} S(z) = S(z_0).$$

Этот предельный переход всегда можно осуществить по радиусу: на всем радиусе круга сходимости, соединяющем точки b и z_0, ряд (*) будет сходиться равномерно. Эта теорема используется, в частности, для вычисления суммы степенного ряда, сходящегося в точках на границе круга сходимости.

4) А. т. для рядов Дирихле: если *Дирихле ряд*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad \lambda_n > 0,$$

сходится в точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то он сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ и сходится равномерно внутри любого угла $|\arg(s-s_0)| \leqslant \theta < \pi/2$. Является обобщением А. т. для степенных рядов (достаточно взять $\lambda_n = n$ и обозначить $e^{-s} = z$). Из теоремы следует, что область сходимости ряда Дирихле — нек-рая полуплоскость $\sigma > c$, где c — абсцисса сходимости ряда.

Для обыкновенного ряда Дирихле (когда $\lambda_n = \ln n$) с известной асимптотикой для сумматорной функции $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ коэффициентов ряда справедлива следующая теорема: если

$$A_n = Bn^{s_1} (\ln n)^{\alpha} + O(n^{\beta}),$$

где B, s_1, α — комплексные числа, β — действительное число, σ_1 $1 < \beta < \sigma_1$, то ряд Дирихле сходится при $\sigma_1 < \sigma$, функция $\varphi(s)$ регулярно продолжается на полуплоскость $\beta < \sigma$, исключая точку $s = s_1$, причем

$$\varphi(s) = B\Gamma(\alpha+1)\, s\, (s-s_1)^{-\alpha-1} + g(s),$$

если $\alpha \neq -1, -2, \ldots$,

$$\varphi(s) = B \frac{(-1)^{-\alpha}}{(-\alpha-1)!}\, s\, (s-s_1)^{-\alpha-1} \ln(s-s_1) + g(s),$$

если $\alpha = -1, -2, \ldots$ Здесь $g(s)$ — регулярная при $\sigma > \beta$ функция.

Напр., дзета-функция Римана $\zeta(s)$ ($A_n = n$, $B = 1$, $s_1 = 1$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$) регулярна по крайней мере в полуплоскости $\sigma > 0$, исключая точку $s = 1$, в к-рой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом, равным 1. Эта теорема допускает различные обобщения. Так, если

$$A_n = \sum_{j=1}^{k} B_j n^{s_j} (\ln n)^{\alpha_j} + O(n^{\beta}),$$

где B_j, s_j, α_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ — любые комплексные числа, и $\sigma_k = 1 < \beta < \sigma_k < \ldots < \sigma_1$, то ряд Дирихле сходится при $\sigma > \sigma_1$, $\varphi(s)$ регулярен в области $\sigma > \beta$, исключая точки $s_1, s_2, \ldots, s_k$, в к-рых он имеет алгебраич. или логарифмич. особенности. Теоремы такого типа позволяют на основании асимптотики A_n получать определенные сведения о поведении ряда Дирихле в нек-рой полуплоскости.

Лит.: [1] Abel N., Oeuvres complètes, t. 1, Christiania, 1881; [2] его же, «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, S. 311—99; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *Л. П. Купцов.*

АБЕЛЯ — ГОНЧАРОВА ПРОБЛЕМА, проблема Гончарова, — проблема в теории функций комплексного переменного, состоящая в нахождении множества всех функций $f(z)$ из того или иного класса, удовлетворяющих соотношениям $f^{(n)}(\lambda_n) = A_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

где $\{A_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ – допустимые для данного класса последовательности комплексных чисел. Эта проблема была поставлена В. Л. Гончаровым (см. [2]).

Функции $f(z)$ ставится в соответствие ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n)\, P_n(z) \qquad (*)$$

– интерполяционный ряд Абеля – Гончарова, где $P_n(z)$ – полином Гончарова, определяемый равенствами:

$$P_n^{(k)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad P_n^{(n)}(z) \equiv 1.$$

Случай, когда $\lambda_n = a + nh$ $(n = 0,1,\ldots)$, a и h – действительные числа $(h \neq 0)$, с формальной точки зрения рассмотрен Н. Абелем (см. [1]). Здесь

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}(z-a)(z-a-nh)^{n-1}.$$

Ряд (*) является инструментом для изучения нулей последовательных производных регулярных функций. Множество функций $f(z)$, представимых рядом (*), наз. классом сходимости А.– Г. п.

В случае $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ был выделен класс сходимости А. – Г. п. в терминах ограничений на порядок и тип целых функций $f(z)$ в зависимости от роста величины $\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$ (см. [2]).

В случае $\lambda_n = n^{1/\rho} l(n)$, где $l(n)$ – медленно растущая функция, $0 < \rho < \infty$, был получен в нек-ром смысле точный класс сходимости А.– Г. п. (см. [6]). Были выделены также классы сходимости А. Г. п. для целых функций конечного и бесконечного порядков в терминах различных ограничений, наложенных на индикаторы соответствующих классов функций; рассмотрена А.– Г. п. для целых функций многих переменных. Для нек-рого класса узлов интерполяции получены точные оценки полиномов Гончарова.

Пусть A_r^{α} – класс функций $f(z)$ вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\alpha} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \leqslant r,$$

$0 < r < \infty$, $0 \leqslant \alpha < \infty$, Λ_α – класс всевозможных последовательностей $\{\lambda_n\}$ таких, что $|\lambda_n| \leqslant (n+1)^{\alpha-1}$, $n = 0,1,\ldots$. Границей сходимости для класса Λ_α наз. верхняя грань S_α тех значений r, для к-рых всякая функция $f(z) \in A_r^{\alpha}$ представима рядом (*). Нижняя грань W_α тех r, для к-рых существуют функция $f(z) \in A_r^{\alpha}$ и последовательность $\{\lambda_n\} \in \Lambda_\alpha$ такие, что $f^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $f(z) \not\equiv 0$, наз. границей единственности. Величины W_1 и W_0 наз. соответственно константами Уиттекера и Гончарова. Было показано, что $S_1 = W_1$ (см. [6]); доказаны также более общие утверждения:

$$S_\alpha = W_1 \text{ и } W_\alpha = W_1, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty$$

(см. [5], [10]).

Таким образом, при $\{\lambda_n\} \in \Lambda_\alpha$ А.– Г. п. сводится к нахождению константы W_1. Ее точное числовое значение неизвестно, однако найдены оценки: $0{,}7259 < W_1 < 0{,}7378$ (см. [9]).

При рассмотрении А.– Г. п. в классе A_1^* функций, регулярных в области $|z| \geqslant 1$ и таких, что $f(\infty) = 0$, было показано, что для любого множества чисел $\{\lambda_k\}$, $|\lambda_k| \geqslant 1$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|} = 0,$$

где $\{n_k\}$ – возрастающая подпоследовательность натуральных чисел, из равенств $f^{(n_k)}(\lambda_k) = 0$, $k = 0,1,\ldots,$

следует $f(z) \equiv 0$. Причем для любого числа $b > 0$ существуют последовательность $\{\lambda_n\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = b,$$

и функция $f(z) \not\equiv 0$, $f(z) \in A_1^*$, для к-рых $f^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ (см. [7]).

А.- Г. п. включает так наз. задачу о двух точках, поставленную Э. Уиттекером (см. [12]). Пусть поставлены последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{\mu_n\}$ таковы, что $\{\nu_k\} \cup \{\mu_n\} = \{n\}$ и $\{\nu_k\} \cap \{\mu_n\} = \varnothing$. Задача состоит в выяснении условий, при к-рых существует регулярная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям $f^{(\nu_k)}(1) = 0$, $f^{(\mu_n)}(0) = 0$. Эта задача решалась в различных подклассах класса функций, регулярных в круге $|z| < R$ $(R > 1)$. Полученные в нек-ром смысле точные условия выражены в терминах различных ограничений, наложенных на коэффициенты a_{ν_k} разложений

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$$

в зависимости от $\{\nu_k\}$ (см. [3]). Эта задача была обобщена, для решения ее были использованы методы теории бесконечных систем линейных уравнений (см. [4]). В частном случае, когда последовательность $\{\nu_k\}$ образует арифметич. прогрессию для целых функций экспоненциального типа, задача о двух точках в известном смысле решена до конца (см. [8]).

Лит.: [1] Abel N. H., Oeuvres complètes, t. 2, Christiania, 1839, p. 77—88; [2] Gontcharoff W. L., «Ann. Ec. Norm. Super.», 1930, t. 47, p. 1—78; [3] Гельфонд А. О., Ибрагимов И. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1947, т. 11, № 6, с. 547—60; [4] Джрбашян М. М., там же, 1952, т. 16, № 3, с. 225—52; [5] Драгилев М. М., Чухлова О. Н., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 287—94; [6] Евграфов М. А., Интерполяционная задача Абеля - Гончарова, М., 1954; [7] Казьмин Ю. А., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1963, № 1, с. 26—34; [8] Казьмин Ю. А., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1965, № 6, с. 37—44; [9] Macintyre S. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 67, p. 241—52; [10] Суетин Ю. К., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1966, № 5, с. 16—25; [11] Осколков В. А., «Матем. сб.», 1973, т. 92, № 1, с. 55—59; [12] Whittaker J. T., Interpolatory function theory, Camb., 1935.

В. А. Осколков.

АБЕЛЯ — ПУАССОНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов Фурье. Ряд Фурье функции $f(x) \in L\ [0, 2\pi]$ суммируется методом Абеля — Пуассона в точке φ к числу S, если

$$\lim_{\rho \to 1-0} f(\rho, \varphi) = S,$$

где $f(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\, \rho^k$,

$$\rho^k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + t)\, \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)}\, dt. \qquad (*)$$

Если $f(x) \in C(0, 2\pi)$, то интеграл в правой части есть гармонич. функция для $|z| = |\rho e^{i\varphi}| < 1$ и, как показал С. Пуассон (S. Poisson), является решением задачи Дирихле для круга. В связи с этим *Абеля метод суммирования* в применении к рядам Фурье наз. А.— П. м. с., а интеграл (*) — *Пуассона интегралом*.

Если (ρ, φ) полярные координаты точки внутри круга радиуса 1, то можно рассматривать предел функции $f(\rho, \varphi)$, когда точка (ρ, φ) стремится к точке на окружности не по радиальному, но и не по касательному и даже произвольному пути. Так, имеет место теорема Фату: если функция $f(x)$ принадлежит $L\ [0, 2\pi]$ и непрерывна в точке φ_0, то

$$\lim_{(\rho, \varphi) \to (1, \varphi_0)} f(\rho, \varphi) = f(\varphi_0)$$

независимо от способа стремления точки $M(\rho, \varphi)$ к точке $P(1, \varphi_0)$ при условии, что она остается внутри круга радиуса 1.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

А. А. Захаров.

АБНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа A группы G, обладающая тем свойством, что $g \in \langle A, A^g \rangle$ для любого элемента $g \in G$. Здесь $\langle A, A^g \rangle$ подгруппа, порожденная A и сопряженной с ней подгруппой $A^g = gAg^{-1}$. Примером А. п. конечной группы G может служить *нормализатор* $N_G(P)$ любой силовской p-подгруппы $P \subset G$, а также всякая максимальная подгруппа $M \subset G$, не являющаяся нормальной в G. В теории конечных *разрешимых групп*, где к А. п. относятся многие важные классы подгрупп, употребительно еще понятие субабнормальной подгруппы A группы G, определяемой рядом подгрупп:

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G,$$

где A_i абнормальна в A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

А. И. Кострикин.

АБСОЛЮТ — 1) А. регулярного топологического пространства X — пространство aX, обладающее тем свойством, что оно совершенно и неприводимо отображается на X, а всякий совершенный неприводимый прообраз пространства aX гомеоморфен пространству aX. У каждого регулярного пространства X имеется единственный А. При этом А. пространства X всегда экстремально несвязан и вполне регулярен и отображается на X совершенно и неприводимо посредством отображения $\pi_X : aX \to X$. Если два пространства X и Y связаны (однозначным или многозначным) *совершенным неприводимым отображением* $f : X \to Y$, то их А. гомеоморфны и существует такой гомеоморфизм $f_a : aX \to aY$, что $f = \pi_Y f_a \pi_X^{-1}$.

Если дан гомеоморфизм $f_a : aX \to aY$, то отображение, вообще говоря, многозначное, $f = \pi_Y f_a \pi_X^{-1}$ неприводимо и совершенно. Таким образом, А. и их гомеоморфизмы «управляют» всем классом совершенных неприводимых отображений регулярных пространств. Это фундаментальное свойство означает, что А. регулярных топологич. пространств являются проективными объектами в категории регулярных пространств и совершенных неприводимых отображений. Если регулярное пространство X, соответственно, бикомпактно, финально компактно, полно в смысле Чеха, то тем же свойством обладает и А. этого пространства. У паракомпактного пространства А. даже сильно паракомпактен и, более того, совершенно нульмерен. Но А. нормального пространства может не быть нормальным. Если X - вполне регулярное пространство, то расширение Стоуна - Чеха (см. *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*) его А. является А. любого бикомпактного расширения пространства X. Два пространства называются соабсолютными, если их А. гомеоморфны.

Таким образом, класс регулярных пространств разбивается на дизъюнктные (попарно непересекающиеся) классы соабсолютных пространств. Пространство X соабсолютно с некоторым метрическим пространством тогда и только тогда, когда оно является паракомпактным перистым пространством и в нем существует плотная σ-дискретная система открытых множеств. Бикомпакт соабсолютен с нек-рым компактом в том и только том случае, когда он имеет счетный π-вес. Если бикомпакт имеет счетный π-вес и не имеет изолированных точек (и только в этом случае), то он соабсолютен с канторовым совершенным множеством. Следовательно, все компакты без изолированных точек соабсолютны с канторовым совершенным множеством. А. счетного компакта является расширением Стоуна Чеха пространства натуральных чисел. А. экстремально несвязного пространства гомеоморфен ему. Таким образом, класс А. (каких бы то ни было) регулярных пространств совпадает с классом экстремально несвязных пространств. Так как недискретное экстремально несвяз-

ное пространство не содержит никакой сходящейся последовательности попарно различных точек, А. любого недискретного пространства неметризуем (и даже не удовлетворяет первой аксиоме счетности).

Среди многочисленных способов построения абсолюта aX данного (регулярного) пространства X одним из простейших является следующий.

Семейство $\xi = \{A\}$ непустых канонич. $\varkappa a$-множеств, т. е. замкнутых канонич. множеств A пространства X, наз. нитью, если оно направлено по включению, т. е. если ко всяким двум элементам A, A' семейства ξ существует элемент A'', содержащийся в $A \cap A'$. Нить ξ наз. максимальной, или концом, если она не является подсемейством никакой отличной от нее нити. Можно доказать, что нити существуют; более того, что для каждого непустого $\varkappa a$-множества A множество D_A всех нитей, содержащих множество A в качестве элемента, непусто. Каждая нить содержится в нек-рой максимальной нити. Пересечение всех множеств, являющихся элементами максимальной нити ξ, или пусто, или состоит из единственной точки $x(\xi)$; в последнем случае нить ξ наз. сходящейся (к точке $x(\xi)$). В множестве $\bar{a}X$ всех концов вводят топологию, объявляя совокупность всех множеств D_A ее замкнутой базой. Полученная топология оказывается хаусдорфовой и бикомпактной. Сходящиеся концы в бикомпакте $\bar{a}X$ образуют всюду плотное подпространство. Подпространство пространства $\bar{a}X$, состоящее из всех сходящихся концов, и есть абсолют $\bar{a}X$ пространства X; при этом оказывается, что бикомпакт $\bar{a}X$ есть не что иное, как максимальное бикомпактное расширение Стоуна — Чеха βaX абсолюта aX. Если же X не только регулярно, но и вполне регулярно, то имеет место формула перестительности операторов a и β:

$$\bar{a}X = \beta aX = a\beta X.$$

В. И. Пономарев.

θ-абсолют пространства θ-близости (X, δ) — пара (X_δ, π_X), состоящая из *близости пространства* X_δ и проекции $\pi_X : X_\delta \to X$, являющейся регулярным θ-отображением. При этом θ-отображением называется всякое θ-совершенное, неприводимое, θ-близостно непрерывное отображение. У всякого пространства θ-близости существует единственный θ-А. Всякое регулярное θ-отображение на θ-А. есть близостная эквивалентность. θ-А. пространства (X, δ) является максимальным прообразом пространства (X, δ) относительно регулярных θ-отображений. Для всякого регулярного θ-отображения $f : (x, \delta) \to (Y, \delta')$ существует такая близостная эквивалентность $F : X_\delta \to Y_\delta$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X_\delta & \xrightarrow{F} & Y_{\delta'} \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Для максимальных θ-близостей на регулярных топологич. пространствах понятие регулярного θ-отображения совпадает с понятием совершенно неприводимого отображения, а понятие θ-А.— с понятием А. регулярного топологич. пространства. *В. В. Федорчук.*

Лит.: [1] Пономарев В. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 101—32; [2] Gleason A. M., «Ill. J. Math.», 1958, v. 2, № 4 (A), p. 482—89; [3] Пономарев В. И., «Матем. сб.», 1963, т. 60, № 1, с. 89—119; [4] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1968, т. 76, № 4, с. 513—36.

2) Абсолют в проективной геометрии — кривая (поверхность) 2-го порядка, представляющая собой множество бесконечно удаленных точек в *Клейна интерпретации* гиперболич. плоскости (про-

странства). При помощи А. может быть введено мероопределение в проективной плоскости (пространстве) (см. *Проективное мероопределение*). Напр., проективная мера отрезка AB определяется как величина, пропорциональная натуральному логарифму *двойного отношения* $(ABCD)$ четырех точек, где C и D — точки пересечения прямой AB с А. *А. Б. Иванов.*

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА, модуль, действительного числа a — неотрицательное число (обозначается $|a|$), определяемое следующим образом: если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$. А. в. (модуль) комплексного числа $z = x + iy$ (x и y — действительные числа) — число $+\sqrt{x^2+y^2}$. Для А. в. имеют место следующие соотношения:

$$|a| = |-a|, \quad |a|^2 = |a^2| = a^2,$$
$$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \text{а при} \quad b \neq 0 \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

Об обобщении понятия А. в. на случай произвольного тела см. статью *Абсолютное значение*.

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, в основе к-рой лежат аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных (V постулата). А. г. содержит предложения, общие для *евклидовой геометрии* и для *Лобачевского геометрии*. Термин «А. г.» введен Я. Больяй (J. Bolyai, 1832). *А. Б. Иванов.*

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — 1) А. н. интеграла — свойство неопределенного интеграла (Лебега). Пусть функция f μ-интегрируема на множестве E. Интеграл от f на μ-измеримых подмножествах $e \subset E$ является абсолютно непрерывной функцией (см. ниже — п. 3) множества относительно меры μ, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что интеграл $\left|\int_e f d\mu\right| < \varepsilon$ для любого множества e с $\mu(e) < \delta$. В общем случае интеграл по конечно аддитивной функции множества μ как со скалярными, так и с векторными f или μ, есть абсолютно непрерывная функция. *А. П. Терехин, В. Ф. Емельянов.*

2) А. н. меры — понятие теории меры. Мера ν наз. абсолютно непрерывной относительно меры μ, если ν — абсолютно непрерывная функция множества относительно μ. Так, пусть ν — конечная мера, заданная с μ на нек-рой фиксированной σ-алгебре G; тогда ν абсолютно непрерывна относительно μ, если из $\mu(A) = 0$, $A \in G$, следует $\nu(A) = 0$. Обобщенная конечная мера ν абсолютно непрерывна относительно обобщенной меры μ, если $\nu(A) = 0$ как только $|\mu|(A) = 0$, где $|\mu|$ — полная вариация μ. *А. П. Терехин.*

3) А. н. функции — усиление понятия непрерывности. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, наз. абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (a, b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Всякая абсолютно непрерывная на отрезке функция непрерывна на этом отрезке; обратное неверно, напр. функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$ и $f(0) = 0$, будучи непрерывной на отрезке $[0, 1]$, не является на нем абсолютно непрерывной. Если в определении абсолютно непрерывной функции отбросить требование пустоты попарных пересечений интервалов (a_k, b_k), то функция

будет удовлетворять более сильному условию — *Липшица условию* с нек-рой постоянной.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывны и их сумма, разность и произведение, а если $g(x)$ не обращается в нуль, то и частное $f(x)/g(x)$. Суперпозиция двух абсолютно непрерывных функций может и не быть абсолютно непрерывной. Однако, если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $x \in [a, b]$, а функция $F(y)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[A, B]$, то сложная функция $F[f(x)]$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а функция $F(y)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$, то функция $F[f(x)]$ также абсолютно непрерывна на $[a, b]$.

Абсолютно непрерывная функция отображает множество меры нуль в множество меры нуль, а измеримое множество в измеримое. Всякая непрерывная функция с конечной вариацией, отображающая каждое множество меры нуль в множество меры нуль, является абсолютно непрерывной функцией. Всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных неубывающих функций.

Абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на нем конечную вариацию и почти в каждой его точке — конечную производную $f'(x)$, суммируемую на этом отрезке, причем

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Если производная абсолютно непрерывной функции почти всюду равна нулю, то сама функция постоянна. С другой стороны, для любой суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции $\varphi(x)$ функция $\int_a^x \varphi(t)dt$ абсолютно непрерывна на этом отрезке. Поэтому класс абсолютно непрерывных на данном отрезке функций совпадает с классом функций, представимых в виде неопределенного интеграла Лебега: интеграла Лебега с переменным верхним пределом от нек-рой суммируемой функции плюс постоянная.

Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то ее п о л н а я в а р и а ц и я равна:

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Понятие А. н. обобщается как на случай функций многих переменных, так и на случай функций множеств (см. ниже — п. 4).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959.

Л. Д. Кудрявцев.

4) А. н. ф у н к ц и и м н о ж е с т в а — понятие, употребляемое обычно применительно к счетно аддитивным функциям, определенным на σ-кольце S подмножеств множества X. Так, если μ, ν — две определенные на S счетно аддитивные функции со значениями из расширенной числовой прямой $[-\infty, \infty]$, то ν абсолютно непрерывна относительно μ (символически это записывается в виде $\nu \ll \mu$), если $|\mu|(E) = 0$ влечет $\nu(E) = 0$ (здесь $|\mu|$ — полная вариация μ:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

$$\mu^+ = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in S\},$$

$$\mu^- = -\inf\{\mu(F) : E \supset F \in S\},$$

μ^+ и μ^- — меры, наз. положительной и отрицательной вариациями μ; по теореме Жордана — Хана $\mu = \mu^+ - \mu^-$). Оказывается, что соотношения 1) $\nu \ll \mu$, 2) $\nu^+ \ll \mu$, $\nu^- \ll \mu$, 3) $|\nu| \ll |\mu|$ равносильны. Если мера ν конечна, то $\nu \ll \mu$ тогда и только тогда, когда для любого

$\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|\mu|<\delta$ влечет $|\nu|<\varepsilon$. В силу *Радона — Никодима теоремы*, если μ, ν — вполне σ-конечны (т. е. $X\in S$ и существует последовательность $\{E_n\}$, $n=1, 2,\ldots$, такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X, \quad |\mu(E_n)|, \quad |\nu(E_n)|<\infty,$$

и $\nu\ll\mu$), то на X существует конечная измеримая функция f такая, что

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu, \quad E\in S.$$

Обратно, если μ вполне σ-конечна и интеграл $\int f d\mu$ имеет смысл, то $\int_E f d\mu$ как функция множества E абсолютно непрерывна по μ. Если μ и ν вполне σ-конечные меры на (X, S), то существуют однозначно определенные вполне σ-конечные меры ν_1 и ν_2 такие, что $\nu=\nu_1+\nu_2$, $\nu_1\ll\mu$ и ν_2 сингулярна относительно μ (т. е. существует множество $E\in S$ такое, что $|\nu_2|(A)=0$, $|\mu|(X\setminus A)=0$) (теорема Лебега). Мера, определенная на борелевских множествах конечномерного евклидова пространства (или, более общим образом, локально компактной группы), называется абсолютно непрерывной, если она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега (меры Хаара). Неотрицательная мера μ на борелевских множествах действительной прямой абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда отвечающая ей функция распределения $F(x)=\mu\{(-\infty, x)\}$ абсолютно непрерывна (как функция действительного переменного). Понятие А. н. функций множества может быть определено и для конечно аддитивных функций, и для функций с векторными значениями.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ — см. *Погрешность*.

АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ — специальный вид суммируемости рядов и последовательностей, выделяемый из обычной суммируемости наложением дополнительных условий. В *матричном методе суммирования* эти условия состоят в требовании абсолютной сходимости рядов или последовательностей, полученных в результате преобразования, соответствующего данному методу суммирования. Пусть метод суммирования A определен преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k, \qquad n=0, 1, 2,\ldots,$$

тогда последовательность $\{s_n\}$ абсолютно суммируема методом A ($|A|$-суммируема) к пределу s, если она A-суммируема к этому пределу, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s,$$

и последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет ограниченную вариацию:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty. \qquad (1)$$

Если s_n являются частичными суммами ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad (2)$$

то в этом случае ряд (2) абсолютно суммируем методом A к сумме s. Условие (1) и есть то дополнительное условие, к-рое выделяет в этом случае А. с. из обычной суммируемости. Аналогично определяется А. с. для методов, определяемых матричными преобразованиями рядов в последовательности. Если

же метод суммирования определен преобразованием ряда (2) в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \qquad (3)$$

посредством матрицы $\|b_{nk}\|$:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} u_k,$$

то дополнительное условие здесь состоит в требовании абсолютной сходимости ряда (3). В частном случае, когда методу A соответствует тождественное преобразование последовательности в последовательность или ряда в ряд, А. с. ряда совпадает с его абсолютной сходимостью.

Для нематричных методов суммирования соответствующие дополнительные условия надлежащим образом видоизменяются. Так, для *Абеля метода суммирования* таким условием является требование, чтобы функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$$

имела ограниченную вариацию на полуинтервале $0 \leqslant x < 1$. Для интегральных методов суммирования А. с. выделяется требованием абсолютной сходимости соответствующих интегралов. Так, в *Бореля методе суммирования* должен абсолютно сходиться интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k x^k}{k!}\, dx.$$

Метод суммирования наз. сохраняющим абсолютную сходимость ряда, если он абсолютно суммирует каждый абсолютно сходящийся ряд. Если каждый такой ряд суммируем этим методом к той же сумме, к к-рой он сходится, то метод наз. абсолютно регулярным. Напр., *Чезаро метод суммирования* (C, k) абсолютно регулярен при $k \geqslant 0$. Метод Абеля абсолютно регулярен. Необходимыми и достаточными условиями абсолютной регулярности метода суммирования, определенного преобразованием ряда в ряд посредством матрицы $\|b_{nk}\|$, являются условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant M, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(теорема Кноппа – Лоренца). Имеются аналоги этих условий и для методов суммирования, определяемых преобразованиями других видов.

Обобщением А. с. является абсолютная суммируемость в степени p $(p \geqslant 1)$. Дополнительным условием, выделяющим А. с. в степени p из обычной суммируемости, напр., для метода суммирования, заданного преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$, является условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p < \infty.$$

Понятие А. с. введено Э. Борелем (E. Borel) для одного из его методов в формулировке, отличной от современной: А. с. выделялась требованием

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{k+p} x^k}{k!} \right| dx < \infty$$

для каждого $p = 0, 1, 2, \ldots$. А. с. применялась первоначально при исследовании суммируемости степенных рядов вне круга сходимости. В связи с вопросами умножения суммируемых рядов была определена и исследовалась А. с. методами суммирования Чезаро ($|C, k|$-суммируемость). Общее определение А. с. возникло позже и получило широкое применение в исследованиях по *суммированию рядов Фурье*.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Kogbetliantz E., Sommation des séries

et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, P., 1931; [3] Knopp K., Lorentz G. G., «Arch. Math.», 1949/50, Bd 2, S. 10—16; [4] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974. *И. И. Волков.*

АБСОЛЮТНО БЕСПРИСТРАСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, для к-рой выполняются условия

$$\mathsf{E}(X_1) = 0 \text{ и } \mathsf{E}(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Частные суммы $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ А. б. п. образуют *мартингал*. Между этими двумя типами последовательностей устанавливается следующая связь: последовательность $\{Y_n\}$ образует мартингал тогда и только тогда, когда она имеет вид $Y_n = X_1 + \ldots + X_n + c$ ($n = 1, 2, \ldots$ и $c = \mathsf{E}(Y_1)$ — постоянная), где $\{X_n\}$ — А. б. п. Таким образом, все мартингалы связаны с частными суммами нек-рых А. б. п. Простым примером А. б. п. являются последовательности независимых случайных величин с нулевым математич. ожиданием. Наряду с термином «беспристрастная» употребляют и термин «безобидная», связанный с понятием безобидной игры. *А. В. Прохоров.*

АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой интегрируема ее абсолютная величина. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $a < b$, то ее абсолютная величина интегрируема по Риману на этом отрезке и

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x) \right| dx.$$

Аналогичное утверждение справедливо для функции n переменных, интегрируемой по Риману на кубируемой области n-мерного евклидова пространства. Обратное утверждение для функций, интегрируемых по Риману, не справедливо: функция $f(x)$, равная 1 для рациональных x и -1 для иррациональных, не интегрируема по Риману, а ее абсолютная величина интегрируема. Для функций, интегрируемых по Лебегу, дело обстоит иначе: функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу (суммируема) на измеримом множестве E n-мерного пространства тогда и только тогда, когда на этом множестве интегрируема по Лебегу ее абсолютная величина, при этом справедливо неравенство:

$$\left| \int_E f(x)\, dx \right| \leqslant \int_E |f(x)|\, dx.$$

В случае несобственных одномерных интегралов в смысле Римана или Лебега по промежутку $[a, b)$, $a < b \leqslant +\infty$ (при условии, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману или, соответственно, по Лебегу на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$) из существования несобственного интеграла от абсолютной величины функции

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

следует и существование интеграла

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

но не наоборот (см. *Абсолютно сходящийся несобственный интеграл*). При этом, если существует несобственный интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \lim_{\eta \to b} \int_0^\eta |f(x)|\, dx,$$

то функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на промежутке $[a, b)$ и несобственный интеграл от нее равен интегралу Лебега.

В случае функций многих переменных (число к-рых $n > 1$) несобственные интегралы обычно определяются таким образом, что существование несобственного интеграла от абсолютной величины функции равносиль-

но существованию несобственного интеграла от самой функции.

Пусть значения функции $f(x)$ принадлежат нек-рому банахову пространству с нормой $\|\cdot\|$. Тогда функция $f(x)$ наз. абсолютно интегрируемой на измеримом множестве E, если существует интеграл

$$\int_E \| f(x) \| \, dx;$$

при этом, если функция $f(x)$ интегрируема на E, то

$$\left\| \int_E f(x) \, dx \right\| \leqslant \int_E \| f(x) \| \, dx.$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [4] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972.

Л. Д. Кудрявцев.

АБСОЛЮТНО ПЛОСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо, над к-рым любой модуль (правый или левый) является *плоским модулем*. Этот класс колец совпадает с классом *регулярных колец* в смысле фон Неймана.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — несобственный интеграл, для к-рого интеграл от абсолютной величины подинтегральной функции сходится. Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится. Пусть дан (для определенности) несобственный интеграл вида:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x) \, dx, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty, \ (*)$$

где функция $f(x)$ интегрируема по Риману (или по Лебегу) на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$.

Для абсолютной сходимости интеграла (*) необходимо и достаточно (критерий Коши абсолютной сходимости несобственного интеграла), чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое η_ε, $a \leqslant \eta_\varepsilon < b$, что для всех η' и η'', $\eta_\varepsilon \leqslant \eta' < b$, $\eta_\varepsilon \leqslant \eta'' < b$, выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} | f(x) | \, dx \right| < \varepsilon.$$

Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он равен интегралу Лебега от рассматриваемой функции. Существуют несобственные интегралы, сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся, напр.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}.$$

Чтобы определить сходится или нет заданный интеграл абсолютно, полезно использовать признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций; напр., с помощью *сравнения признака* устанавливается абсолютная сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x \ln x \, dx}{x^2}.$$

Для кратных несобственных интегралов (в большей части имеющихся определений) связь сходимости и абсолютной сходимости интегралов другая. Пусть на открытом множестве G n-мерного евклидова пространства определена функция $f(x)$. Если для любой последовательности кубируемых областей G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей область G (т. е. $G_k \subset \overline{G}_k \subset G_{k+1}$) и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

существует при $k \to \infty$ предел интегралов Римана

$$\int_{G_k} f(x) \, dx,$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности областей, то он обычно и наз. несобственным интегралом

$$\int_G f(x)\,dx.$$

Так определенный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он абсолютно сходится. Существуют и другие определения несобственных кратных интегралов. Напр., для функции $f(x)$, определенной на всем пространстве E^n и интегрируемой по Риману на любом n-мерном шаре Q_r радиуса $r<+\infty$, можно определить несобственный интеграл по E^n равенством

$$\int_{E^n} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{Q_r} f(x)\,dx.$$

В этом случае из абсолютной сходимости интеграла снова следует просто сходимость, но обратное неверно.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

с (вообще говоря) комплексными членами, для к-рого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{2}$$

Для абсолютной сходимости ряда (1) необходимо и достаточно (критерий Коши абсолютной сходимости ряда), чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ и всех целых $p\geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

абсолютно сходится ($i=\sqrt{-1}$), а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

сходится, но не абсолютно. Пусть

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{3}$$

— ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (1), но взятых, вообще говоря, в другом порядке. Из абсолютной сходимости ряда (1) следует и абсолютная сходимость ряда (3), и ряд (3) имеет ту же самую сумму, что и ряд (1). Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

абсолютно сходятся, то: любая их линейная комбинация

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n$$

также абсолютно сходится; ряд, полученный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм данных рядов. Перечисленные свойства абсолютно сходящихся рядов переносятся и на *кратные ряды*

$$\sum_{(n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k)} u_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}. \tag{4}$$

При этом, если кратный ряд абсолютно сходится, то он сходится, напр., как в смысле сферических частных сумм, так и в смысле прямоугольных; притом его сумма в обоих случаях оказывается одной и той же. Если кратный ряд (4) абсолютно сходится, то повторный ряд

$$\sum_{n_k=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} u_{n_1 n_2 \ldots n_k} \qquad (5)$$

абсолютно сходится, т. е. абсолютно сходятся все ряды, получающиеся последовательным суммированием членов ряда (4) по индексам $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем суммы кратного ряда (4) и повторного (5) равны и совпадают с суммой любого однократного ряда, образованного из всех членов ряда (4).

Если члены ряда (1) суть элементы нек-рого банахова пространства с нормой элементов $\|\cdot\|$, то ряд (1) наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|.$$

На случай А. с. р. элементов банахова пространства также обобщаются рассмотренные выше свойства абсолютно сходящихся числовых рядов, в частности А. с. р. элементов банахова пространства сходится в этом пространстве. Аналогичным образом понятие А. с. р. переносится и на кратные ряды в банаховом пространстве.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ на теле — отображение φ тела K в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;
2) $\varphi(x \cdot y)=\varphi(x) \cdot \varphi(y)$;
3) $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)+\varphi(y)$.

Отсюда $\varphi(1)=\varphi(-1)=1$, $\varphi(x^{-1})=\varphi^{-1}(x)$.

А. з. часто обозначается $|x|$ вместо $\varphi(x)$. А. з. наз. также нормой, мультипликативным нормированием. А. з. могут рассматриваться на любом кольце со значениями в линейно-упорядоченном кольце [4] (см. также *Нормирование*).

Примеры А. з. Если $K=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, то $|x|=\max\{x, -x\}$ является *абсолютной величиной*, или модулем, числа $x \in \mathbb{R}$. Аналогично, если K — поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел или тело $|\mathbb{H}|$ кватернионов, то $|x|=\sqrt{x \cdot \bar{x}}$ есть А. з. Подполя этих полей также снабжаются индуцированным А. з. Любое тело имеет тривиальное А. з.:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x=0; \\ 1, & x \neq 0; \end{cases}$$

конечные поля и их алгебраич. расширения имеют только такие А. з.

Примеры А. з. другого типа доставляют логарифмич. нормирования тела K: если v — нормирование K со значениями в группе $\mathbb{R}$ и a — действительное число, $0<a<1$, то $\varphi(x)=a^{v(x)}$ является А. з. Например, если $K=\mathbb{Q}$, а v_p есть p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, то $|x|_p=(1/p)^{v_p(x)}$ называется p-адическим А. з., или p-адической нормой. Эти А. з. удовлетворяют более сильному, чем 3), условию

4) $\varphi(x+y) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

А. з., удовлетворяющие условию 4), наз. ультраметрическими А. з., или неархимедовыми А. з. (в отличие от архимедовых А. з., не удовлетворяющих этому условию). Они характеризуются тем, что $\varphi(n \cdot 1) \leqslant 1$ для всех целых n.

Все А. з. тела характеристики $p>0$ являются ультраметрич. А. з. Все ультраметрич. А. з. получаются из нормирований указанным выше способом: $\varphi=a^{v(x)}$ (и обратно, за нормирование всегда можно взять $-\log\varphi$).

А. з. φ определяет метрику на K, если за расстояние между x и y принять $\varphi(x-y)$, и тем самым определяет топологию на K. Так, топология любого локально компактного тела определяется нек-рым абсолютным значением. А. з. φ_1 и φ_2 наз. эквивалентными, если они определяют одну топологию; в этом случае существует такое $\lambda>0$, что $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)^\lambda$ для всех $x\in K$.

Структура всех архимедовых А. з. дается т е о р е м о й О с т р о в с к о г о: если φ — архимедово А. з. на теле K, то существует такой изоморфизм K на нек-рое всюду плотное подтело тела $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $|\mathbb{H}|$, что φ эквивалентно А. з., индуцированному с $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $|\mathbb{H}|$.

Любое нетривиальное А. з. поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел эквивалентно либо p-адическому А. з. $|\ |_p$ (где p — простое число), либо обычной абсолютной величине. При этом для любого рационального числа $r\in\mathbb{Q}$

$$|r|\prod_p|r|_p=1.$$

Аналогичная формула имеет место и для полей алгебраич. чисел (см. [2], [3]).

Если φ — нек-рое А. з. тела K, то K может быть вложено, при помощи классич. процесса пополнения, в тело K_φ, полное относительно А. з., продолжающего φ (см. *Полное топологическое пространство*). Одним из основных современных методов изучения полей является вложение поля K в прямое произведение $\Pi_\varphi K_\varphi$ пополнений K_φ поля K по всем А. з. (см. *Адель*); поле K плотно лежит в $\Pi_\varphi K_\varphi$: именно, если $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — нетривиальные неэквивалентные А. з. на поле K, $a_1,\dots,a_n$ — элементы из K и $\varepsilon>0$, то существует такое $a\in K$, что $\varphi_i(a-a_i)<\varepsilon$ для всех i (т е о р е м а а п п р о к с и м а ц и и д л я А. з.).

А. з. поля K может быть продолжено (вообще говоря неоднозначно) на любое алгебраич. расширение поля K. Если K полно относительно А. з. φ, а L есть расширение K степени n, то продолжение φ на L единственно и задается формулой $\varphi'(x)=\sqrt[n]{\varphi(N_{L/K}(x))}$ для $x\in L$.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Л е н г С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

В. И. Данилов.

АБСОЛЮТНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО — устаревший термин для обозначения свойства данного множества как топологич. пространства в отличие от свойств его расположения в других пространствах.

П. С. Александров.

АБСОЛЮТНЫЙ МОМЕНТ с л у ч а й н о й в е л и ч и н ы X — математич. ожидание $\mathsf{E}|X|^r$, $r>0$. Обычное обозначение А. м. β_r; таким образом,

$$\beta_r=\mathsf{E}|X|^r.$$

Число r наз. п о р я д к о м А. м. Если $F(x)$ — функция распределения X, то

$$\beta_r=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\,dF(x), \tag{1}$$

и, напр., если распределение X имеет плотность $p(x)$, то

$$\beta_r=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\,p(x)\,dx. \tag{2}$$

В соответствии с (1) и (2) говорят об А. м. функции распределения $F(x)$ или плотности $p(x)$. Из существования β_r вытекает существование А. м. $\beta_{r'}$, а также *моментов* порядка r', $0<r'\leqslant r$. А. м. часто фигурируют в оценках для распределений вероятностей и их харак-

теристич. функций (см. *Чебышева неравенство*, *Ляпунова теорема*). Функция $\log \beta_r$ является выпуклой функцией от r, а функция $\beta_r^{1/r}$ — неубывающей функцией от $r\,(r>0)$. *Ю. В. Прохоров.*

АБСТРАКЦИЯ АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ — одна из математических идеализаций, связанная с определенной формой идеи бесконечности в математике — с идеей так наз. актуальной бесконечности.

В применении к потенциально неограниченно продолжимым конструктивным процессам (таким, напр., как процесс последовательного, отправляясь от нуля, порождения натуральных чисел) А. а. б. состоит в отвлечении от принципиальной незавершаемости этих процессов и в равноправном затем рассмотрении результатов воображаемого завершения этих процессов - множеств порождаемых ими объектов, причем эти результаты начинают восприниматься нашим сознанием в качестве актуальных, «готовых» объектов рассмотрения. Применение А. а. б. в указанном выше примере позволяет нам считать математич. объектом множество всех натуральных чисел - *натуральный ряд*.

В логич. аспекте последовательное принятие А. а. б. ведет к принятию в качестве логич. принципа закона исключенного третьего.

Особую роль А. а. б. играет при построении математики на базе общей теории множеств, созданной Г. Кантором (G. Cantor). Являясь далеко идущей идеализацией, А. а. б., особенно при многократном применении ее в переплетении с другими идеализациями, порождает объекты, «осязаемость» к-рых становится косвенной, вследствие чего решение проблемы понимания суждений о таких объектах наталкивается на определенные трудности. Неограниченное применение А. а. б. в математике в качестве правомерного средства образования математич. объектов встречало возражения со стороны ряда математиков [Л. Кронекер (L. Kronecker), К. Гаусс (K. Gauss), Д. Гильберт (D. Hilbert), Г. Вейль (H. Weyl) и др.]. Позитивные программы построения математики на базе абстракции потенциальной осуществимости без использования А. а. б. предложили Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer, см. *Интуиционизм*) и А. А. Марков (см. *Конструктивная математика*).

См. также *Абстракция математическая*.

Н. М. Нагорный.

АБСТРАКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — абстракция в математике, мысленное отвлечение, представляющее собой существенную составную часть мыслительной деятельности, направленной на формирование основных математич. понятий. Наиболее характерными для математики типами абстрагирования являются «чистое» отвлечение, идеализация и их разнообразные многоступенчатые наслоения (см. [5], с. 284).

Мысленный акт «чистого» отвлечения состоит в том, что в нек-рой рассматриваемой нами ситуации наше внимание фиксируется лишь на определенных (существенных для нас) свойствах исходных объектов рассмотрения и отношениях между этими объектами, в то время как другие свойства и отношения, рассматриваемые нами как несущественные, нашим сознанием в расчет не принимаются. Результат такого акта абстрагирования, закрепленный с помощью надлежащих языковых средств, начинает играть роль общего понятия. Типичный пример такой А. м.— *абстракция отождествления*.

Мысленный акт идеализации состоит в том, что в нек-рой рассматриваемой нами ситуации наше воображение порождает нек-рое понятие, становящееся для нашего сознания предметом рассмотрения, причем это понятие наделяется нашим воображением не только

такими свойствами, к-рые были выделены у исходных объектов в результате актов «чистого» отвлечения, но и другими — воображаемыми — свойствами, отражающими свойства исходных объектов в измененном виде или даже вообще отсутствующими у этих последних. Одной из наиболее традиционных для математики идеализаций является *абстракция актуальной бесконечности*, ведущая к идее актуальной бесконечности. Эта абстракция лежит в основе теоретико-множественного построения математики. Другая традиционная идеализация — *абстракция потенциальной осуществимости* — приводит к идее потенциальной бесконечности. Эта абстракция, в сочетании с отказом от применения абстракции актуальной бесконечности, лежит в основе конструктивного построения математики.

Характер той или иной математич. теории в значительной мере определяется характером А. м., применяемых в этой теории при формировании ее основных понятий. Анализ этих А. м. является одной из центральных задач оснований математики. Тщательное рассмотрение относящейся к этому кругу вопросов проблематики привело к осознанию следующих играющих фундаментальную роль обстоятельств: 1) суждения об абстрактных объектах, возникающих в результате наслоения далеко идущих идеализаций, требуют разработки особых способов их понимания; разработка этих способов представляет собой трудную проблему, являющуюся предметом специальной научной дисциплины - *семантики*; 2) логич. аппарат, применение к-рого оказывается допустимым в рамках той или иной математич. теории, существенным образом зависит от характера исходных понятий этой теории, а следовательно, и от характера А. м., применяемых при формировании этих понятий (см. *Интуиционизм*, *Конструктивная математика*).

Значительный вклад в анализ абстракций, применяемых в математике, внесли Л. Э. Я. Брауэр [1], Г. Вейль [2], Д. Гильберт [3], А. А. Марков [4] и др.

Лит.: [1] Brouwer L. E. J., «Tijdschrift voor wijsbegeerte», 1908, t. 2, p. 152; [2] Weyl H., Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Lpz., 1918; [3] Гильберт Д., О бесконечном, в кн.: Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М. – Л., 1948, добавление VIII; [4] Марков А. А., О логике конструктивной математики, М., 1972; [5] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294. *Н. М. Нагорный.*

АБСТРАКЦИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ — способ формирования общих абстрактных понятий, состоящий в том, что при рассмотрении к.-л. исходных объектов мы начинаем принимать во внимание лишь те их различия, к-рые в данной ситуации по тем или иным причинам оказываются для нас существенными, игнорируя другие — несущественные. Исходные объекты, различающиеся лишь несущественным образом, мы начинаем считать одинаковыми, и в речевом аспекте А. о. проявляется в том, что о двух одинаковых исходных объектах мы начинаем, отождествляя их, говорить как об одном и том же абстрактном объекте, закрепив за ним соответствующий термин. Так, напр., отождествляя одинаковые *буквы* (*слова*, *алфавиты*), мы приходим к понятию абстрактной буквы (абстрактного слова, абстрактного алфавита, см. [1], с. 7– 15); отождествляя эквивалентные фундаментальные последовательности рациональных чисел, мы приходим к понятию *действительного числа*; отождествляя изоморфные группы, мы приходим к понятию абстрактной группы и т. д.

См. также *Абстракция математическая*, *Эквивалентность*, *Изоморфизм*.

Лит.: [1] Марков А. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42; [2] его же, О логике конструктивной математики, М., 1972. *Н. М. Нагорный.*

АБСТРАКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ — одна из математич. идеализаций, связанная

с определенной формой идеи бесконечности в математике — идеей потенциальной бесконечности.

В применении к потенциально неограниченно продолжимым конструктивным процессам (таким, напр., как процесс последовательного, отправляясь от нуля, порождения натуральных чисел) А. п. о. состоит в отвлечении от возможных пространственных, временны́х и материальных препятствий к осуществлению очередного шага данного конструктивного процесса и в рассмотрении этого шага как потенциально осуществимого. Применение А. п. о. в упомянутом примере позволяет нам считать, что к любому натуральному числу может быть прибавлена единица, что может быть построена сумма любых двух натуральных чисел и т. п., но к возникновению идеи натурального ряда как актуального «бесконечного объекта» применение А. п. о. не приводит.

В логич. аспекте принятие А. п. о. ведет к обоснованию принципа математич. индукции.

Особую роль А. п. о. играет в *конструктивной математике*, в к-рой утверждения о существовании конструктивных объектов, удовлетворяющих заданным условиям, понимаются как утверждения о потенциальной осуществимости этих объектов.

См. также *Абстракция математическая*.

Н. М. Нагорный.

АБСЦИССА — одна из декартовых *координат* точки.

АВТОКОВАРИАЦИЯ случайного процесса X_t — *ковариация* X_t и X_{t+h}. Если $\mathsf{E}X$ обозначает математич. ожидание случайной величины X, то А. равна

$$\mathsf{E}\,(X_t - \mathsf{E}X_t)\,(X_{t+h} - \mathsf{E}X_{t+h}).$$

Термин «А.» употребляют обычно применительно к *стационарным случайным процессам* (в широком смысле). Для них А. зависит только от h и лишь множителем, равным дисперсии X_t, отличается от *автокорреляции*. Наряду с А. употребляют термин «ковариационная функция» (или функция автоковариации).

А. В. Прохоров.

АВТОКОЛЕБАНИЯ — незатухающие колебания в нелинейной *динамической системе*, амплитуда и частота к-рых в течение длительного промежутка времени могут оставаться постоянными, не зависят в широких пределах от начальных условий и определяются свойствами самой системы (см. также *Колебаний теория*). Термин «А.» был введен А. А. Андроновым (см. [1], с. 41—43).

Динамич. системы, способные совершать А., наз. автоколебательными системами. К таковым относятся часы, генераторы электрич. колебаний, электрич. звонок, духовые и смычковые музыкальные инструменты и т. п. При определенных условиях А. могут возникать и в динамич. системах, нормальным состоянием работы к-рых является отсутствие А. (напр., А. в передней подвеске автомобиля — «шимми»; флаттер крыла самолета, А. в системах автоматич. регулирования и управления). Простейшую автоколебательную систему можно представить состоящей из постоянного источника энергии, устройства, регулирующего поступление энергии в колебательную систему, и колебательной системы. Существенным является наличие обратной связи: регулирующее устройство, с одной стороны, управляет движением колебательной системы, а с другой — управление работой регулирующего устройства осуществляется движением колебательной системы (см. [6]). С математич. точки зрения, напр., автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы можно определить как такие системы, уравнения движения к-рых характеризуются наличием на фазовой плоскости одного или нескольких *предельных циклов*.

Важным характерным свойством А. является независимость их амплитуды в широких пределах от начальных условий, т. е. существование одной или нескольких областей начальных условий таких, что любым начальным условиям, принадлежащим к.-л. из этих областей, будет соответствовать одна и та же амплитуда А. Это значит, что в колебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, каждый из к-рых устанавливается в системе в зависимости от выбранной области начальных условий. Рассмотренное свойство является основным отличием периодич. движения в автоколебательной системе от периодич. движения в консервативной системе. Характерным свойством автоколебательных систем является также то, что период А. определяется свойствами самой системы, а не навязывается извне. Это — основное отличие А. от *вынужденных колебаний*.

Для А. существенно то, что для восполнения потерь энергии должен существовать постоянный источник энергии, к-рый в автономной системе, не имеющей сил, явно зависящих от времени, должен создавать силу, не являющуюся заданной функцией времени и определяемую самой системой. Постоянными источниками энергии могут быть: заводной механизм в часах, вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью, непрерывная движущаяся с постоянной скоростью лента, струя жидкости или газа, имеющая постоянную скорость, а в системах, где движущая сила — электрич. ток, таким источником энергии является, напр., батарея.

Примером простейшей автоколебательной системы может служить маятник, находящийся в среде с вязким трением, на к-рый действует постоянная по величине сила, всегда направленная в сторону движения. Дифференциальное уравнение этой динамической системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = F \operatorname{sign} \dot{x},$$

где $h>0$, $F>0$, k^2 — постоянные коэффициенты. При любых начальных условиях в системе устанавливается периодич. движение, причем максимальное отклонение маятника от положения равновесия (амплитуда) равно

$$x_0 = \frac{1+e^{-hT}}{1-e^{-hT}} \cdot \frac{F}{k^2},$$

где $T = \pi / \sqrt{k^2 - h^2}$ — полупериод периодич. движения. На фазовой плоскости $x\dot{x}$ этому движению соответствует устойчивый предельный цикл (см. [3]).

Характерной особенностью всех автоколебательных систем является такая связь между постоянным источником энергии и системой, когда энергия, отдаваемая источником, периодически изменяется, причем период этого изменения определяется свойствами системы. Можно сказать, что автоколебательная система представляет собой систему, к-рая за счет непериодич. источника энергии создает периодич. процесс. А. могут быть по форме близки к синусоидальным колебаниям, но могут и существенно отличаться от последних. А., существенно отличающиеся от синусоидальных, наз. р е л а к с а ц и о н н ы м и. А., близкие по форме к синусоидальным, обычно бывают в системах, потери энергии в к-рых за один период малы, и, следовательно, поступление энергии также мало. А., близкие по форме к синусоидальным, могут быть и в том случае, когда потери в системе за один период велики, но при надлежащем подборе параметров происходит компенсация потерь не только за период, а и за каждую малую долю периода в отдельности. К таким системам относятся так наз. *RC*-г е н е р а т о р ы с и н у с о и д а л ь н ы х к о л е б а н и й (см. [4]). При релаксационных колебаниях обычно потери энергии велики и за период ком-

пенсируются почти всей энергией колебательной системы.

Возникновение А. может быть «мягким» и «жестким» (см. [2]). Мягкое возникновение А. характеризуется тем, что в системе, находящейся в положении устойчивого состояния равновесия, при изменении к.-л. параметра возникают А., амплитуда к-рых непрерывно возрастает от нуля при непрерывном изменении параметра. При обратном изменении параметра амплитуда А. непрерывно уменьшается до нуля, и состояние равновесия системы становится устойчивым. При жестком возникновении А. система при медленном и непрерывном изменении параметра переходит из состояния устойчивого равновесия к А. конечной амплитуды; при дальнейшем изменении параметра амплитуда возрастает уже равномерно. При обратном изменении параметра амплитуда непрерывно уменьшается до определенного значения, после чего система переходит к состоянию устойчивого равновесия. Существенно при этом, что система переходит к А. и от А. при различных значениях параметра.

Автоколебательные системы обладают интересным и важным свойством — явлением принудительной синхронизации, называемым иногда «захватыванием». Оно состоит в том, что при достаточно малой разности между частотой автоколебательной системы и частотой внешней силы, действующей на эту систему, устойчивое периодическое движение системы приобретает частоту внешней силы, т. е. внешняя сила навязывает *свой* темп *автоколебательной системе* (см. [3], [5]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, [М.], 1956; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Бутенин Н. В., Элементы теории нелинейных колебаний, Л., 1962; [4] Горелик Г. С., Колебания и волны, М.— Л., 1950; [5] Фельдбаум А. А., Введение в теорию нелинейных цепей, М.— Л., 1948; [6] Харкевич А. А., Автоколебания, М., 1953.

Н. В. Бутенин.

АВТОКОРРЕЛОГРАММА случайного процесса — то же, что *коррелограмма*.

АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ случайного процесса X_t — *корреляция* значений X_t и X_{t+h}. Термин «А.» употребляют (наряду с термином «корреляционная функция») в основном при изучении *стационарных случайных процессов*, для к-рых А. зависит лишь от h (но не от t).

А. В. Прохоров.

АВТОМАТ — *управляющая система*, являющаяся *автоматом конечным* или некоторой его модификацией, полученной путем изменения компонент или функционирования. Основное понятие — конечный А. — возникло в середине 20 в. в связи с попытками описать на математическом языке функционирование нервных систем, универсальных вычислительных машин и других реальных А., предпринятыми впервые У. Мак-Каллоком и У. Питтсом (W. McCulloch, W. Pitts, 1943), С. К. Клини (S. C. Kleene, 1951), А. Бёрксом и Дж. Райтом (A. W. Burks, 1954, J. Wright) и др. Характерной особенностью такого описания является дискретность соответствующих математических моделей и конечность областей значений их параметров, что приводит к понятию конечного А. При этом внешние воздействия, реакции и состояния рассматриваются как буквы трех алфавитов, наз., соответственно, входным алфавитом, выходным алфавитом и алфавитом состояний. Тогда законы их взаимодействия могут быть заданы двумя функциями — функцией переходов и функцией выходов, отображающими пары «состояние — входная буква» в состояния и выходные буквы, соответственно. В каждый из моментов дискретного времени устройство, находящееся в определенном состоянии, воспринимает входной сигнал — букву входного алфавита, выдает выходной сигнал — букву выходного алфавита, определяемую функцией выходов, и переходит в новое состояние, определяемое функцией переходов. Наряду с

понятием конечного А. рассматриваются различные его обобщения и модификации, отражающие те или иные особенности реальных устройств. Для конечного А. (A, S, B, φ, ψ) существующие модификации можно разбить на следующие три основные группы. К первой группе относятся А., у которых некоторые из алфавитов A, S или B бесконечны, в связи с чем такие А. наз. б е с к о н е ч н ы м и. Ко второй группе относятся А., у к-рых вместо функций φ и ψ допускаются произвольные отношения или случайные функции. Таковы частичные, недетерминированные, вероятностные и другие А. К третьей группе относятся А. со специфич. множествами входных объектов. Таковы А. с переменной структурой, А. над термами (см. *Автоматов алгебраическая теория*). Существуют А., принадлежащие одновременно разным группам; напр., А. нечеткие относятся ко всем трем группам. Наряду с этим большую роль играют специальные подклассы конечных А.; например, А. без памяти, автономные, обратимые А. и т. д. Кроме того, использование понятий и методов из других разделов математики также приводит к появлению специфич. классов А. и связанных с ними задач. Напр., при применении алгебраич. средств возникают понятия А. над термами, линейного, группового, свободного и других А. (см. *Автоматов алгебраическая теория*); вопросы теории кодирования порождают понятия самонастраивающихся, обратимых А. и др. (см. также *Автомат вероятностный*). Для структурных А. также имеется целый ряд обобщений, сводящихся в основном к допущению бесконечных сетей и возможности изменения связей между элементами в процессе функционирования. Таким образом возникает понятие р а с т у щ е г о А. Ниже описываются основные модификации и подклассы конечных А., а также их важнейшие свойства.

Макроподход. 1. А. б е с к о н е ч н ы е (первая группа) отличаются от А. конечных только тем, что их алфавиты A, B или S (входной, выходной и множество состояний) могут быть бесконечными. Большинство понятий и задач, связанных с конечными А., естественно распространяются на бесконечные А. Увеличение мощности алфавитов расширяет вычислительные возможности А. Так, напр., если конечные А. реализуют *ограниченно-детерминированные функции*, то с помощью бесконечных А. можно реализовать любую детерминированную функцию. Более того, с помощью бесконечных А. может быть описано функционирование любых А. и машин. Вместе с тем большая общность понятия бесконечного А. снижает его содержательное значение, так что в основном изучаются лишь специальные подклассы бесконечных А., связанные с конкретными моделями управляющих систем.

2. Н е д е т е р м и н и р о в а н н ы е А. и а с и н х р о н н ы е А. (вторая группа). Формально н е д е т е р м и н и р о в а н н ы й А. определяется как система (A, S, B, χ), где A, S, B — алфавиты, имеющие прежний смысл, а $\chi \subseteq S \times A \times S \times B$ — отношение переходов-выходов. В том случае, когда отношение χ является функцией, отображающей $S \times A$ в $S \times B$, недетерминированный А. наз. д е т е р м и н и р о в а н н ы м А. и фактически совпадает с конечным А., поскольку в этом случае функцию χ можно рассматривать как пару функций φ, ψ, отображающих $S \times A$ в S и B, соответственно. В отличие от конечного А., инициальный недетерминированный А. $\mathfrak{A}_{S_1}$ имеет несколько начальных состояний, образующих подмножество S_1 множества S. Под поведением этого А. $\mathfrak{A}_{S_1}$ обычно понимают одно из следующих обобщений поведения конечного А.

1) Вместо функции f автомат $\mathfrak{A}_{S_1}$ реализует отношение f', состоящее из всех пар слов $(a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n) \in A^* \times B^*$ таких, что найдутся состояния $s_1, s_2, \ldots,$

s_{n+1}, для к-рых $s_1 \in S_1$ и для любого $i=1, 2, \ldots, n$ имеет место $(s_i a_i s_{i+1} b_i) \in \chi$. Класс отношений, реализуемых инициальным недетерминированным А., совпадает с классом ограниченно-детерминированных отношений (см. *Ограниченно-детерминированная функция*).

2) Инициальный недетерминированный А. $\mathfrak{A}_{S_1}$, у к-рого выделено множество S' заключительных состояний, а алфавит B пуст (т. е. $\chi \subseteq S \times A \times S$), представляет событие $L_{S'}$, состоящее из всех слов $a_1 \ldots a_n \in A^*$ таких, что найдутся состояния $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$, для к-рых $s_1 \in S_1$, $s_{n+1} \in S'$ и для любого $i=1, 2, \ldots, n$ имеет место $(s_i a_i s_{i+1}) \in \chi$. Класс событий, представимых А. $\mathfrak{A}_{S_1}$, совпадает с классом регулярных событий, т. е. относительно такого поведения недетерминированные А. эквивалентны конечным А. В то же время большая общность понятия недетерминированного А. проявляется в том, что для представления одного и того же события с помощью недетерминированного А. и конечного А. требуется различное число состояний. Существуют события, представимые недетерминированными А. с m состояниями и представимые конечными А. с 2^m состояниями, причем никакие конечные А. с меньшим числом состояний не представляют эти события.

Специальный подкласс недетерминированных А. образуют так наз. частичные А., у к-рых отношение χ является частичной функцией, отображающей множество $S \times A$ в $S \times B$, и к-рые реализуют частичные ограниченно-детерминированные функции.

Термином «асинхронный А.» обычно обозначают один из двух следующих видов А. К первому относятся А. вида (A, S, B, φ, ψ), где функция выходов ψ отображает множество $S \times B$ в B^* (у конечного А. ψ отображает $S \times B$ в B). Эти А. используются главным образом в теории кодирования. Ко второму виду относятся конечные А., функция переходов у к-рых обладает следующим свойством: $\varphi(s, aa) = \varphi(s, a)$ для любых s и a. Эти А. также используются в теории кодирования и, кроме того, для моделирования нек-рых систем в технике и биологии.

3. А. с переменной структурой (третья группа) — это конечные А. $\mathfrak{A} = (A \times A, S, B, \varphi, \psi)$ с двумя входами, у к-рых зафиксирована нек-рая бесконечная последовательность α (сверхслово) в алфавите А. На первый вход такого А. подаются произвольные слова в алфавите А, а на второй — начала последовательности α той же длины. Тем самым накладывается ограничение на множество пар входных слов. Если А. с переменной структурой рассматривать как А. с одним первым входом (на к-рый могут подаваться любые слова в алфавите A), то его функции переходов и выходов будут зависеть от длины поданной части входного слова. Относительно поведения А. с переменной структурой эквивалентны бесконечным А. с конечными входным и выходным алфавитами и счетным множеством состояний.

4. Нечеткие А. получаются как обобщение понятия конечного А. путем замены функций переходов и выходов нечеткими отношениями. Нечеткое подмножество множества M задается функцией, отображающей M в отрезок $[0,1]$. Таким образом, роль функций переходов и выходов в нечетком А. играют функции, отображающие множества $S \times A \times S$ и $S \times A \times B$ в отрезок $[0,1]$, где S — множество состояний, A — входной алфавит, B — выходной алфавит. Для нечетких А. естественно обобщаются основные понятия и задачи, характерные для конечных А., в частности задачи представления нечетких событий и реализации нечетких отношений. Нечеткие А. являются математич. моделями нек-рых распознающих устройств и используются в задачах *распознавания образов*.

5. Специальные классы конечных А. А. без памяти — это конечные А. с одним состо-

янием или А., эквивалентные им. Для таких А. каждая выходная буква полностью определяется входной буквой, поступившей в тот же момент. Эти А. часто наз. функциональными элементами и широко применяются в задачах синтеза А.

А. с конечным запоминанием, наз. иногда А. с конечной памятью,— это конечные А., любая выходная буква к-рых при любом исходном состоянии полностью определяется ограниченным отрезком входного слова, поступившим в предшествующие моменты. Минимальная длина таких отрезков для А. с конечным запоминанием с n состояниями не превосходит $\frac{1}{2}n(n-1)$, причем для нек-рых А. эта оценка достигается. А. с конечным запоминанием наз. самонастраивающимся, если для нек-рого t выходная буква в любой момент $\tau \geqslant t$ не зависит от исходного состояния. Эти А. используются в теории кодирования (см. *Кодирование и декодирование*), где обычно рассматривается модификация таких А., к-рая удовлетворяет указанному условию не для всех входных слов, а только для нек-рого подмножества их. А. с конечным запоминанием реализуются логич. сетями без обратных связей.

А. обратимые, или А. без потерь информации,— это конечные А., реализующие взаимно однозначные функции. Эти А. также используются в теории кодирования.

Микроподход. Существует три вида обобщений структурных А., к-рые можно рассматривать как обобщенные логич. сети: 1) обобщенные логич. сети с неизменной структурой, у к-рых элементы и связи между ними не меняются в процессе функционирования; 2) обобщенные логич. сети с изменяющейся структурой; 3) обобщенные логич. сети из объемных элементов и связей. Ниже приведены основные классы таких А.

1. Обобщенные логич. сети с неизменной структурой. К ним относятся мозаичные структуры и итеративные сети, являющиеся конечными фрагментами мозаичных структур с аналогичным кругом задач.

Мозаичные структуры представляют собой бесконечные соединения переходных систем (A, S, φ) (т. е. конечных А. вида (A, S, S, φ, φ), где функция выходов совпадает с функцией переходов, а выходной алфавит — с множеством состояний). Такие системы помещаются в целочисленные точки n-мерного пространства, причем для каждой точки определено конечное множество целочисленных точек, называемое ее окрестностью. Входной алфавит переходной системы, помещенной в данную точку, представляет собой декартово произведение множеств состояний переходных систем, помещенных в точки ее окрестности.

Мозаичную структуру можно рассматривать как бесконечный А., входной и выходной алфавиты, а также множество состояний к-рого равны и являются бесконечным декартовым произведением множеств состояний всех переходных систем, содержащихся в ней. Это позволяет сводить многие задачи для мозаичных структур к задачам для бесконечных А. К числу специфич. задач для мозаичных структур относится моделирование эффективных процедур и, в частности, вычислительных процессов. Иногда рассматривают мозаичные структуры, в к-рых вместо переходных систем используются произвольные А.

Важный класс мозаичных структур образуют однородные структуры. В случае, когда все переходные системы одинаковы и окрестность любой точки получается параллельным переносом нек-рой окрестности, мозаичная структура наз. однородной структурой. При этом обычно предполагается, что имеется нек-рое «устойчивое» состояние переходной системы,

к-рое сохраняется, когда входной буквой является *кортеж*, каждый член к-рого совпадает с этим состоянием. Характерными задачами для однородных структур являются задачи о самовоспроизведении и «райских садах».

В каждый момент состояния переходных систем, помещенных в точках целочисленной решетки, образуют как бы пространственную мозаичную картину, наз. обычно конфигурацией. Конфигурация, содержащая только конечное множество переходных систем, находящихся в состояниях, отличных от устойчивого (возбужденная часть), наз. конечной. Задача о самовоспроизведении состоит в выяснении существования конечных конфигураций, к-рые в процессе функционирования однородной системы переходят в конфигурации, возбужденная часть к-рых представляет собой многократно повторенную возбужденную часть исходной конфигурации. «Райским садом» наз. конфигурация, к-рая не может возникнуть из конфигураций, отличных от нее. Задача о «райских садах» состоит в выяснении существования «райских садов» для заданной однородной структуры.

2. Обобщенные логич. сети с изменяющейся структурой. Существуют разные виды таких логич. сетей. К числу наиболее общих из них относятся мозаичные структуры, у к-рых в процессе функционирования меняются как окрестности элементов, так и сами элементы. Примером такой обобщенной логич. сети может служить одномерная структура, имитирующая работу *Тьюринга машины* со входом. Одному из узлов одномерной решетки в этом случае соответствует управляющее устройство, а остальным — ячейки ленты, рассматриваемые как переходные системы, входными буквами и состояниями к-рых являются буквы рабочего алфавита машины Тьюринга. Коммутация определяется положением головки.

Другим видом обобщенных логич. сетей с изменяющейся структурой являются так наз. растущие А. Они представляют собой однородные структуры, в к-рых возбужденная часть растет в процессе функционирования. Существует несколько моделей таких А., отражающих различные особенности реальных устройств.

3. Обобщенные логич. сети из объемных элементов отличаются тем, что элементарным А. и связям между ними приписывается определенный объем, в связи с чем возникает задача синтеза А., имеющих минимальный объем.

Термин «А.» употребляется также в таких понятиях, как двусторонний, многоленточный, многоголовочный, линейно ограниченный и т. п. А., к-рые фактически являются модификациями машин Тьюринга. Более того, иногда в понятие А. включают все абстрактные машины.

Лит.: [1] Мак-Каллок У., Питтс В., в сб.: Автоматы, М., 1956, с. 362 -84; [2] Клини С., там же, с. 15—67; [3] Бёркс А., Райт Д., в кн.: Кибернетический сборник, в. 4, М., 1962, с. 33—57; [4] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 5, с. 3—62; 1962, т. 17, № 2; [5] Рабин М. О., Скотт Д., в кн.: Кибернетический сборник, в. 4, М., 1962, с. 58 -91; [6] Zadeh L. A., «J. Math. Anal. and Appl.», 1968, v. 23, № 2, p. 421—427; [7] Аладьев В. З., К теории однородных структур, Тал., 1972.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ – обобщение *автомата конечного*, в к-ром функции переходов и выходов являются случайными функциями. Другими словами, А. в. может быть задан системой (A, S, B, φ, ψ), где A, S, B — конечные алфавиты, имеющие тот же смысл, что и в конечном автомате, а φ, ψ — случайные функции, отображающие $S \times A$ соответственно в S и B и задаваемые системами вероятностных мер $\varphi_{s,a}, \psi_{s,a}$, определенных для любых a из A и s из S, соответственно, на множествах S и B. Эти меры обычно задаются с помощью стохастич. матриц (см. *Автоматов способы задания*). В том случае, когда эта вероятностная мера принимает

только два значения 0 и 1, понятие А. в. фактически совпадает с понятием детерминированного *автомата*. Автономные А. в. без выхода по существу эквивалентны дискретным цепям Маркова. Функционирование А. в. определяется аналогично функционированию недетерминированного автомата, причем начальное состояние определяется путем задания вероятностной меры σ на множестве S. Если А. в. находится с нек-рой вероятностью p в состоянии s и воспринимает входную букву a, то с вероятностью $p \cdot \omega(s, a, s', b)$ он переходит в состояние s' и выдает букву b выходного алфавита.

Подобно конечным автоматам, А. в. по характеру поведения разделяются на преобразователи и акцепторы. В первом случае, в соответствии с функционированием, А. в. преобразует входные слова с нек-рыми вероятностями в выходные слова и в слова в алфавите состояний. Эти вероятности для слов одинаковой длины образуют вероятностную меру, так что указанное поведение можно рассматривать как задание счетной системы таких мер. Во втором случае задается подмножество $S' \subseteq S$ заключительных состояний и число λ из отрезка $[0,1]$, называемое т о ч к о й с е ч е н и я. Событие, представимое вероятностным акцептором $\mathfrak{A}_\sigma = (A, S, \varphi, S', \lambda)$, где φ — случайная функция, отображающая $S \times A$ в S и задаваемая системой вероятностных мер $\varphi_{s,a}$, определенных на S, состоит из всех слов в алфавите A, под действием к-рых автомат переходит в одно из заключительных состояний с вероятностью, не меньшей λ. В отличие от конечных атоматов, при помощи А. в. представим континуальный класс событий. Более того, уже один А. в. при варьировании λ может представлять континуальный класс событий. В случае же однобуквенного входного алфавита каждый А. в. представляет лишь счетный класс событий, содержащий, вообще говоря, и нерегулярные события. Для специальных точек сечения, наз. изолированными, А. в. представляют лишь регулярные события. Число λ из отрезка $[0,1]$ наз. и з о л и р о в а н н о й т о ч к о й с е ч е н и я для данного А. в., если существует такое положительное число δ, что для любого входного слова вероятность перевода А. в. этим словом в заключительное состояние отличается от λ не менее чем на δ.

Большая часть понятий и задач, характерных для конечных автоматов, в различных вариантах может быть распространена и на А. в. При этом многие из них сохраняют свойства, присущие конечным автоматам. Напр., можно ввести понятие эквивалентности состояний так, что будет сохранена известная теорема об отличимости состояний простым экспериментом (см. *Эксперименты с автоматами*). Вместе с тем в отличие от конечных автоматов, для к-рых минимальная форма определяется однозначно (с точностью до изоморфизма), для данного А. в. может существовать континуум эквивалентных минимальных А. в.

Существуют различные виды и способы задания А. в. Напр., А. в. может быть представлен в виде детерминированного автомата с двумя входами, на один из к-рых поступает случайная последовательность входных букв. А. в. являются математич. моделями многих реальных устройств и используются при изучении поведения организмов.

Лит.: [1] Бухараев Р. Г., Вероятностные автоматы, Казань, 1970; [2] Starke P., Abstrakte Automaten, B., 1969.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТ КОНЕЧНЫЙ — математическая модель устройства с конечной памятью, преобразующего дискретную информацию. А. к. является одним из важнейших видов *управляющих систем*. Содержательно А. к. можно охарактеризовать как устройство, имеющее входной и выходной каналы и находящееся в каждый из моментов дискретного времени, наз. т а к т о в ы м и м о м е н т а м и, в одном из n состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n$. По

входному каналу в каждый тактовый момент в устройство поступают сигналы — буквы входного алфавита. В те же моменты по выходному каналу устройство выдает сигналы — буквы выходного алфавита. С соответствующей точки зрения, к таким устройствам могут быть отнесены *формальные системы*, реальные автоматы, живые организмы и т. п.

Существуют различные подходы к определению понятия А. к. При м а к р о п о д х о д е, т. е. когда интересуются только внешним поведением устройств, определение А. к. может быть дано в виде совокупности функций, либо в виде конечного ориентированного графа, либо в алгебраич. форме — в виде конечной алгебры с унарными операциями (см. *Автоматов способы задания*). При м и к р о п о д х о д е А. к. задается множеством элементов и схемой их соединения, т. е. в этом случае кроме функционирования описывается и строение автомата, в связи с чем это понятие обычно наз. с т р у к т у р н ы м, а сами А. к.— с т р у к т у р н ы м и а в т о м а т а м и, или а в т о м а т н ы м и с е т я м и.

Макроподход. А. к.— это система (A, S, B, φ, ψ), где A, S, B — конечные, как правило непустые, алфавиты, наз., соответственно, в х о д н ы м а л ф а в и т о м, м н о ж е с т в о м с о с т о я н и й и в ы х о д н ы м а л ф а в и т о м; φ — ф у н к ц и я п е р е х о д о в, отображающая множество $S\times A$ в S; ψ — ф у н к ц и я в ы х о д о в, отображающая $S\times A$ в B. Такие А. к. иногда называются а в т о м а т а м и М и л и. В случае, когда функция выходов ψ отображает S в B (т. е. не зависит от букв входного алфавита), А. к. называют а в т о м а т о м М у р а. Всякий автомат Мура является автоматом Мили.

Важнейшей характеристикой А. к. является его поведение (см. *Автомата поведение*), к-рое может быть определено по-разному. В зависимости от того, какой тип поведения рассматривается, А. к. подразделяются на преобразователи, акцепторы (распознаватели), генераторы и др. Чтобы определить основные виды поведения А. к., функции φ и ψ распространяют на множество $S\times A^*$ (где A^* — множество всех слов в алфавите A, включая пустое слово $\wedge$):

$$\varphi(s, \wedge)=s, \quad \varphi(s, \alpha a)=\varphi(\varphi(s, \alpha), a),$$
$$\psi(s, \wedge)=\wedge, \quad \psi(s, \alpha a)=\psi(\varphi(s, \alpha), a)$$

(здесь $s\in S$, $\alpha\in A^*$, $a\in A$, а запись αa обозначает слово, получаемое путем приписывания буквы a к слову α). Таким образом распространенные функции $\varphi(s, \alpha)$, $\psi(s, \alpha)$ для произвольных s и α описывают соответственно состояние, в к-рое переходит автомат из состояния s под действием входного слова α, и выходную букву, к-рая выдается автоматом в момент поступления последней буквы входного слова α. Пусть $\alpha\rceil_n$ обозначает начало длины n слова α и $\overline{\varphi}(s, \alpha)$, $\overline{\psi}(s, \alpha)$ — слова в алфавитах S и B, определяемые следующим образом:

$$\overline{\varphi}(s, \alpha)=\varphi(s, \alpha\rceil_1)\,\varphi(s, \alpha\rceil_2)\ldots\varphi(s, \alpha),$$

$$\overline{\psi}(s, \alpha)=\psi(s, \alpha\rceil_1)\,\psi(s, \alpha\rceil_2)\ldots\psi(s, \alpha).$$

Функции $\overline{\varphi}(s, \alpha)$, $\overline{\psi}(s, \alpha)$ описывают уже последовательность всех состояний, в к-рых находился автомат при поступлении в него букв слова α, а также выходное слово, т. е. последовательность букв выходного алфавита, выдаваемых автоматом под воздействием входного слова α. Тернарное отношение

$$F=\{(\alpha, \overline{\varphi}(s, \alpha), \overline{\psi}(s, \alpha)):\alpha\in A^*, s\in S\}$$

наз. ф у н к ц и о н и р о в а н и е м А. к. $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$. Функции $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ естественно распространяются и на бесконечные последовательности (с в е р х с л о-

в а) в алфавите A. Поэтому под функционированием А. к. иногда понимают отношение вида F, в к-ром α — произвольное сверхслово. В этом случае значение функции $\varphi(s, \alpha)$ определяется как множество всех тех и только тех состояний, к-рые встречаются в последовательности $\overline{\varphi}(s, \alpha)$ бесконечное число раз.

А. к. с выделенным начальным состоянием s_1 наз. **инициальным** и обозначается $\mathfrak{A}_{s_1}$. **Поведением инициального** А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ наз. обычно одно из следующих трех отношений.

1) Функция $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1, \alpha)$, отображающая A^* в B^* (или A^∞ в B^∞, где A^∞, B^∞ — множества всех сверхслов в алфавитах A и B соответственно). Эта функция наз. функцией вычислимой, или реализуемой, инициальным А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$.

2) Множество $L_{S'}\subseteq A^*$, определяемое для выделенного множества $S'\subseteq S$ **заключительных состояний** так:

$$L_{S'}=\{\alpha\in A^*:\varphi(s_1, \alpha)\in S'\}.$$

Множество $L_{S'}$ наз. **событием, представимым** А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ с множеством S' заключительных состояний.

3) Множество значений функции $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1, \alpha)$ для всевозможных α из A^*, называемое множеством, перечислимым данным А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$.

4) Множество $M_\gamma\subseteq A^\infty$, определяемое для системы γ подмножеств множества S следующим образом:

$$M_\gamma=\{\alpha\in A^\infty:\varphi(s_1, \alpha)\in\gamma\}.$$

Множество M_γ наз. сверхсобытием, представимым А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ с системой γ заключительных подмножеств состояний. А. к. с поведением типа 1) наз. **конечным преобразователем**, а с поведением типа 2) **конечным распознавателем**, или **акцептором**.

Если в качестве входного и выходного алфавитов взять декартовы произведения $A_1\times\ldots\times A_m$ и $B_1\times\ldots\times B_n$, соответственно, то поведением типа 1) будет набор из n функций от m аргументов. В этом случае говорят, что автомат имеет m входов и n выходов, причем алфавиты $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ наз., соответственно, **входными и выходными алфавитами** такого автомата. Класс событий, представимых А. к., и класс функций, вычислимых А. к., могут быть описаны различными математич. средствами. Основной результат состоит в том, что события, представимые А. к., совпадают с так наз. регулярными событиями, а функции, вычислимые А. к., совпадают с *ограниченно-детерминированными функциями*. Кроме того, класс множеств, перечислимых А. к., совпадает с классом событий, представимых А. к.

Относительно поведений 2), 3) и 4) автоматы Мура эквивалентны автоматам Мили в том смысле, что для всякого автомата Мили найдется эквивалентный ему, т. е. имеющий то же самое поведение, автомат Мура, и обратно. Для поведения 1) это неверно. Однако, если в автоматах Мура вместо $\overline{\psi}$ брать функции вида

$$\overline{\psi}(s, \alpha)=\psi(\varphi(s, \alpha_1]))\,\psi(\varphi(s, \alpha_2]))\ldots\psi(\varphi(s, \alpha)),$$

то автоматы Мура будут эквивалентны автоматам Мили.

Автомат Мура $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ наз. **автономным автоматом**, или **генератором**, если функция переходов не зависит от букв входного алфавита. Под **поведением инициального автономного автомата** $\mathfrak{A}_{s_1}$ принято понимать сверхслово

$$\psi(s_1)\psi(\varphi(s_1))\psi(\varphi^2(s_1))\ldots,$$

где $\varphi^{n+1}(s)=\varphi(\varphi^n(s))$. Эта последовательность является периодической с нек-рым предпериодом.

А. к. $\mathfrak{A}$ наз. переходной системой, если $B=S$ и для всякого s из S имеет место $\overline{\psi}(s, a)=s$, или же если выходной алфавит B — пустой. Таким образом, переходная система полностью определяется тройкой (A, S, φ).

Понятия А. к. и функционирования А. к. могут быть определены различными эквивалентными способами (см. *Автоматов способы задания*, *Автомата поведение*). Широкое распространение получили так наз. канонические уравнения. Для произвольного слова α пусть $\alpha(t)$ обозначает t-ю букву слова α, а $|\alpha|$ — длину слова α. Тогда функционирование F А. к. $\mathfrak{A}$ состоит из всех тех и только тех троек слов (α, σ, β), к-рые удовлетворяют условиям: 1) $|\alpha|-|\beta|=|\sigma|-1$; 2) для всякого t такого, что $1\leqslant t\leqslant|\alpha|$, имеют место равенства $\sigma(t+1)=\varphi(\sigma(t), \alpha(t))$, $\beta(t)=\psi(\sigma(t), \alpha(t))$. Для определения поведения инициального А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ необходимо добавить равенство $\sigma(1)=s_1$. Совокупность этих равенств однозначно определяет поведение инициального А. к. и наз. обычно каноническими уравнениями. Канонич. уравнения широко используются в задачах анализа и синтеза автоматов.

Микроподход. Рассматривается множество элементов, состоящее из определенных выше А. к. с входными и

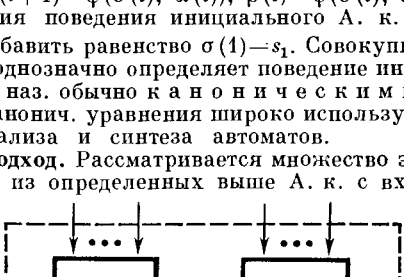


Рис. 1.

выходными алфавитами вида A^n, где A — конечный алфавит, одинаковый для всех элементов. Правила построения структурных А. к. из элементов описывают дозволенные соединения (отождествления) входов и выходов, а также определяют множества входов и выходов, получаемых А. к.

Важнейшим примером таких А. к. являются логические сети (л. с.). Ниже приводится один из вариантов этого понятия. В рассматриваемом случае $A=\{0,1\}$ и элементами являются так наз. функциональные элементы (ф. э.), представляющие собой А. к. с одним состоянием, а также специальные автоматы Мура, наз. задержками. Последние характеризуются тем, что они имеют два состояния, к-рые обычно обозначаются буквами 0 и 1 входного алфавита, причем функции переходов и выходов удовлетворяют условиям: $\varphi(a, b)=b$, $\psi(a)=a$. Поскольку ф. э. имеет только одно состояние, то он полностью характеризуется функцией выходов ψ, являющейся в этом случае *булевой функцией* от n аргументов, где n — число входов ф. э. Элементы являются исходными л. с., входы и выходы к-рых совпадают, соответственно, с входами и выходами элементов. Дальнейшее построение более сложных л. с. производится по следующим правилам.

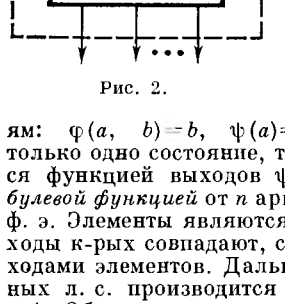


Рис. 2.

1. Объединение двух л. с. есть л. с., входами и выходами к-рой являются, соответственно, входы и выходы объединяемых л. с. (рис. 1).

2. Результат отождествления любых двух входов л. с. является л. с., выходы к-рой совпадают с выходами исходной л. с., а входами служат все входы исходной л. с., кроме одного из отождествленных (рис. 2).

3. Результат отождествления выхода одной л. с. с входом другой л. с. есть л. с. Ее входами являются все входы первой л. с. и те входы второй л. с., к-рые не отождествлялись с выходом первой л. с.; ее выходами являются все выходы обеих л. с. (рис. 3).

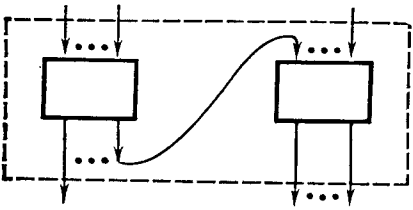


Рис. 3.

4. Результат отождествления выхода л. с., являющегося выходом задержки, с произвольным входом этой же л. с. есть л. с., входы к-рой — все входы исходной л. с., кроме отождествленного, а выходы — все выходы исходной л. с. (рис. 4). (При нек-рых ограничениях это правило может быть применимо и к выходам, не являющимся выходами задержек.)

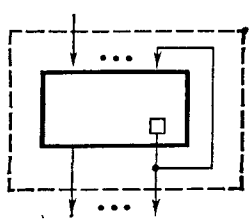


Рис. 4.

5. В любой л. с. можно объявить выходами только часть выходов, определенных согласно правилам 1—4. Л. с., получаемые из ф. э. с помощью правил 1, 2, 3, 5, наз. обычно схемами из ф. э.

Функционирование л. с. содержательно можно описать следующим образом. Пусть в момент t всем входам л. с. приписаны входные буквы и определены состояния задержек. Тогда в этот же момент всем входам и выходам элементов л. с., в частности всем выходам л. с., будут приписаны буквы в соответствии со следующими правилами. Если входам ф. э. с выходной функцией $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ приписаны, соответственно, буквы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$, то его выходу в этот же момент будет приписана буква, являющаяся значением $\psi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. Если задержка находится в момент t в состоянии a, то в этот же момент ее выходу приписывается буква a. Отождествленным входам и выходам приписываются одинаковые буквы. Далее, в момент $t+1$ состояния задержек определяются входными буквами в момент t, как было определено выше, т. е. $\varphi(a, b)=b$. Таким образом, при фиксированных начальных состояниях задержек л. с. определяет нек-рое отображение входных последовательностей в алфавите A^m в выходные последовательности в алфавите A^n, где m, $m \geqslant 1$, — число входов, а n, $n \geqslant 1$, — число выходов л. с. Класс таких отображений совпадает с классом функций, реализуемых А. к. в первом смысле (т. е. с классом ограниченно детерминированных функций), поскольку описанное выше функционирование л. с. совпадает с функционированием А. к. (A^m, S, A^n, φ, ψ), где m — число входов, n — число выходов л. с., S — декартово произведение множеств состояний всех задержек л. с.; функция переходов φ является покоординатным применением функций переходов задержек, а функция выходов ψ определяется в соответствии с вышеописанным функционированием ф. э. и задержек.

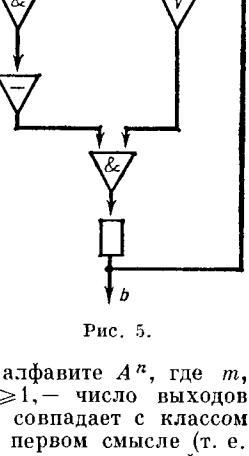


Рис. 5.

Пусть, напр., элементами являются задержки (к-рые на рисунке изображаются прямоугольниками) и ф. э. с выходными функциями $\bar{x}$, $x \vee y$ и $x\&y$ (треугольники с соответствующими символами функций). На рис. 5 изображена л. с., к-рая в тактовый момент t выдает выходную букву 1 в том и только в том случае, если среди входных букв в моменты 0, 1, 2, ..., t содержится нечетное число букв 1 (задержка в начальный момент имеет состояние 0; буквами a и b обозначены, соответственно, вход и выход л. с.). Если обозначить через $s(t)$, $a(t)$, $b(t)$, соответственно, состояние, входную букву и выходную букву в момент t, то функционирование такой л. с. можно задать следующими канонич. уравнениями:

$$s(0)=0, \quad s(t+1)=s(t)+a(t) \pmod 2, \quad b(t)=s(t).$$

При макроподходе этот автомат можно представить в виде (A, S, A, φ, ψ), где $A=S=\{0,1\}$, $\varphi(s, a)=s+a \pmod 2$ и $\psi(s, a)=s$.

Понятие А. к. явилось отправным пунктом современной *автоматов теории*, изучающей также различные модификации и обобщения этого понятия.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей, под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962; [3] Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., Введение в теорию конечных автоматов, М., 1962. *В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.*

АВТОМАТА ПОВЕДЕНИЕ — математическое понятие, описывающее взаимодействие автомата с внешней средой. Так, для *автомата конечного* внешней средой обычно является множество входных слов, а поведением — словарная функция, реализуемая автоматом, или событие (иногда сверхсобытие), представимое автоматом. Для автомата над термами (см. *Автоматов алгебраическая теория*) внешней средой является множество константных термов, а поведением — класс тех термов, значения к-рых, вычисляемые с помощью данного автомата, принадлежат выделенному подмножеству элементов соответствующей алгебры. Для мозаичных структур внешней средой является множество начальных конфигураций, а поведением — последовательности конфигураций, возникающих в тактовые моменты времени. Вообще, для большинства автоматов А. п. представляет собой ту или иную модификацию поведения конечных автоматов.

Специальным случаем является так наз. А. п. в случайной среде. Под средой здесь можно понимать вероятностный автомат $\mathfrak{B}$, преобразующий выходные сигналы рассматриваемого автомата $\mathfrak{A}$ в его входные сигналы. Так что можно считать, что автомат $\mathfrak{A}$ в случайной среде $\mathfrak{B}$ представляет собой автономную логич. сеть, построенную из автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ путем соединения выхода каждого из этих автоматов со входом другого. Тогда поведение автомата $\mathfrak{A}$ в случайной среде $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как функционирование указанной автономной логич. сети. Среда $\mathfrak{B}$ наз. стационарной, если она является автоматом с одним состоянием. Если рассматривать выходные сигналы автомата $\mathfrak{B}$ как различные «поощрения» или «наказания» автомата $\mathfrak{A}$, то естественно возникает задача построения автомата $\mathfrak{A}$, поведение к-рого в среде $\mathfrak{B}$ является оптимальным, т. е. дает наибольший возможный в данной среде выигрыш. Обычно предполагается, что выходной алфавит среды $\mathfrak{B}$ состоит из букв 0 и 1 и в ответ на выходные сигналы $b_1, \ldots, b_k$ автомата $\mathfrak{A}$ буква 1 выдается, соответственно, с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$. При этом «поощрением» автомата $\mathfrak{A}$ считается только буква 1.

Если среда $\mathfrak{B}$ стационарна, то множество состояний автономной логич. сети совпадает с множеством состояний автомата $\mathfrak{A}$. Если, кроме того, выходная буква автомата $\mathfrak{A}$ однозначно определяется состоянием, то функционирование этой логич. сети может быть описано стохастич. матрицей Q переходов состояний. Как

правило, рассматривают случаи, когда матрица Q эргодическая (см. *Эргодичность*). Тогда определена функция:

$$W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i p_i - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i (1-p_i) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i (2p_i - 1),$$

где σ_i — сумма финальных вероятностей всех состояний, определяющих выходную букву b_i. При этом

$$\min_i (2p_i - 1) \leqslant W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqslant \max_i (2p_i - 1).$$

Если выходные сигналы автомата $\mathfrak{A}$ не зависят от воздействий среды и равновероятны, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k = 1/k$, то

$$W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = W_0 = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} p_i - 1.$$

Функция $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ является математич. ожиданием величины, наз. выигрышем автомата $\mathfrak{A}$ в среде $\mathfrak{B}$. Говорят, что автомат $\mathfrak{A}$ обладает целесообразным поведением в среде $\mathfrak{B}$, если $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) > W_0$. Задача об оптимальном поведении в случайной среде ставится следующим образом. Требуется построить так наз. асимптотически оптимальную последовательность автоматов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ такую, что математич. ожидание выигрыша автомата $\mathfrak{A}_n$ с ростом n стремится к максимальному выигрышу в данной среде, равному величине $d_{\max} = \max_i \{2p_i - 1,\ i = 1, \ldots, k\}$. В рассматриваемом случае такую последовательность образуют так наз. автоматы с линейной тактикой при условии, что $d_{\max} \geqslant 1/2$. [Автомат с линейной тактикой $\mathfrak{A}_n$ с k-буквенным выходным алфавитом имеет kn состояний s_{ij}, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$, и следующие функции φ и ψ переходов и выходов:

$$\varphi(s_{ij}, 1) = s_{i, j+1}, \text{ если } j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\varphi(s_{in}, 1) = s_{in}, \ \varphi(s_{ij}, 0) = s_{i, j-1}, \text{ если } j = 2, \ldots, n,$$

$$\varphi(s_{i1}, 0) = s_{i+1, 1}, \ \psi(s_{ij}, a) = b_i,$$

$$i = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, n.]$$

Впервые правила асимптотически оптимального поведения в стационарной случайной среде начали изучаться в математич. статистике. Однако получаемые там результаты естественно переводятся на язык теории автоматов.

Рассматривается А. п. и в более сложных средах, а также поведение коллективов автоматов в случайных средах. В последнем случае автоматы рассматриваются как игроки, а правила игры, в к-рой участвуют эти автоматы, выступают в роли среды.

Лит.: [1] Барздинь Я. М., Трахтенброт Б. А., Конечные автоматы (Поведение и синтез), М., 1970; [2] Цетлин М. Л., Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, М., 1969; [3] Robbins H., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1956, v. 42, № 12, p. 920—923.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ — использование вычислительных машин для автоматич. получения машинной *программы* по нек-рой исходной записи, более близкой к начальной формулировке задачи. Содержание А. п. меняется со временем, отражая общее развитие средств общения человека с вычислительной машиной и методов программирования. В начале А. п. заключалась в передаче машине процесса трансляции (перевода) в машинную программу описания алгоритма решения задачи, выраженного в нек-ром *алгоритмическом языке*. Затем в процесс А. п. была включена процедура направленного синтеза алгоритма решения по сокращенной записи задачи, принадлежащей нек-рому фиксированному классу. В настоящее вре-

мя (70-е гг.) складывается новое содержание А. п. как всеобъемлющей процедуры синтеза алгоритма решения задачи в рамках существенно более широкого языка формулирования задач, не ограничиваемого конкретным классом. Синтез сопровождается контролем правильности алгоритма и привлекает в качестве формального аппарата различные модели семантики естественных языков, исчисление предикатов и методы поиска доказательств. *А. П. Ершов.*

АВТОМАТИЧЕСКИЙ ПЕРЕВОД, машинный перевод, — перевод текстов с одного языка на другой с помощью автоматич. устройств.

А. п. - одна из задач моделирования и автоматизации различных видов умственной деятельности человека, в данном случае - речевой деятельности. А. п. осуществляется с помощью *алгоритма*, правила к-рого не содержат ссылок на знания и интуицию человека, т. е. строго формальны. Алгоритм А. п. может выполняться любым подходящим устройством, действующим автоматически, напр. универсальной цифровой вычислительной машиной.

Проблема А. п. тесно связана с развитием современной структурной и математич. лингвистики, причем с самыми принципиальными и трудными лингвистич. проблемами, многие из к-рых ранее мало разрабатывались или даже осознанно не ставились.

Теоретич. базой разработки А. п. является теория формальных *грамматик*. Алгоритм А. п. реализует нек-рое соответствие между двумя языками, определяемыми своими грамматиками,— так наз. переводное соответствие. Оно формулируется в терминах структурных описаний предложений этих языков в рамках их грамматик. В качестве структурных описаний чаще всего используются системы составляющих и деревья подчинения (см. *Синтаксическая структура*). В соответствии с этим алгоритм А. п. в общих чертах состоит из трех основных частей: 1) анализ текста на входном языке, т. е. выявление структуры входного текста на основе заданной грамматики входного языка; 2) преобразование, т. е. переход от структуры текста на входном языке к структуре текста на выходном языке на основе заданного переводного соответствия; 3) синтез текста на выходном языке, т. е. переход от структуры выходного текста к конкретной последовательности слов.

В начальный период работ по А. п. правила перевода формулировались обычно сразу в виде алгоритмич. предписаний без предварительного построения формальных грамматик входного и выходного языков и без явной формулировки переводного соответствия. Из-за этого сведения чисто лингвистич. характера перемешивались с математич. оформлением алгоритма. В дальнейшем был взят курс на построение алгоритмов А. п. по общим схемам, пригодным для широкого круга языков, с максимально возможной расчлененностью этапов перевода и независимостью этапа анализа от этапа синтеза, с нахождением всех вариантов обработки текста, допускаемых грамматиками и переводным соответствием (так наз. многовариантный перевод). Сведения о конкретном языке стали, как правило, четко отделяться от алгоритмич. части. Таким образом, оказалось возможным отвлечься от гигантского количества частностей, специфических для конкретных языков, и сосредоточиться на разработке общих процедур поиска решений, удовлетворяющих заданным условиям.

Что касается собственно лингвистич. стороны А. п., то морфологические и почти все синтаксич. проблемы А. п. в рамках изолированного предложения можно считать решенными. Главные трудности при создании полностью автоматизированных систем высококачественного перевода связаны с недостаточным уровнем разработанности семантич. теории языков, с помощью к-рой

можно было бы точно сформулировать правила обработки смысла и значений, а также учитывать смысловые связи между отдельными предложениями связного текста. Без надлежащего учета семантики текста перевод нередко оказывается неоднозначным или неверным. Неправильность перевода является обычно следствием того, что правила перевода не учитывают все возможные осмысления переводимого текста или не позволяют всякий раз выбирать правильное осмысление, к-рое может определяться довольно широким контекстом и в конечном счете – сведениями из конкретной области, знаниями о мире и т. п.

Действующих систем высококачественного А. п. производственного типа пока (70-е гг. 20 в.) нет. Имеются экспериментальные системы разной степени сложности. На практике успешно используются упрощенные и специализированные системы А. п., связанные с автоматизацией обработки научно-технич. информации (пословный перевод с частичной грамматич. обработкой, частичный перевод и автоматич. реферирование для целей экспресс-информации, патентной документации и для информационно-поисковых систем). В обозримом будущем А. п. может использоваться для перевода только научно-технич. публикаций. Задача А. п. для литературно-художественных текстов не представляется реальной и нужной.

Лит.: [1] Машинный перевод. Сб. статей, пер. с англ., М., 1957; [2] Панов Д. Ю., Автоматический перевод, 2 изд., М., 1958; [3] Автоматический перевод. Сб. статей, пер. с англ., итал., нем., франц., М., 1971. *С. Я. Фитиалов.*

АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — наука о методах определения законов управления к.-л. объектами, допускающих реализацию с помощью технич. средств автоматики. Исторически сложилось так, что методы А. у. т. получили свое первое развитие применительно к процессам, встречающимся главным образом в технике (см. [1]). Напр., летящий самолет представляет собой объект, законы управления к-рым гарантируют его полет по требуемой траектории. Они реализуются с помощью совокупности измерительных приборов, преобразующих и исполнительных устройств, называемой автопилотом. Три причины лежат в основе этого развития: многие объекты управления были идентифицированы классиками науки (идентифицировать объект управления — значит написать его математич. модель, т. е. соотношения (1), (2), см. ниже); еще задолго до развития А. у. т., благодаря установлению ряда фундаментальных законов природы, существовал хорошо развитый математич. аппарат дифференциальных уравнений и особенно аппарат теории устойчивости движения (см. [2]); инженеры открыли закон обратной связи (см. ниже) и нашли средства его реализации.

Простейшие объекты управления описываются (векторным) обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=f(x,\ u,\ t) \tag{1}$$

и неравенством

$$N(x,\ u,\ t)\geqslant 0, \tag{2}$$

где $x\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ — вектор состояния объекта, $u\{u_1,\ \ldots,\ u_r\}$ — вектор управления, к-рый можно выбирать, t — время. Уравнение (1) есть математич. запись законов, к-рым подчинен объект управления; неравенство (2) — область его определения.

Пусть U есть к.-л. данный класс функций $u(t)$ (напр., кусочно непрерывных), принимающих численное значение из (2). Любую функцию $u(t)\in U$ назовем *допустимым управлением*. Уравнение (1) наз. *математической моделью объекта управления*, если:

1) указана область $N(x,\ u,\ t)\geqslant 0$ определения функции $f(x,\ u,\ t)$;

2) указан интервал времени $\mathscr{T}$ $[t_i, t_f]$ (или $[t_i, t_f)$, если $t_f = \infty$), на к-ром наблюдается движение $x(t)$;

3) указан класс допустимых управлений;

4) область $N \geqslant 0$ и функция $f(x, u, t)$ таковы, что уравнение (1) имеет единственное решение, определенное при любом $t \in \mathscr{T}$, $x_0 \in N$, каково бы ни было допустимое управление $u(t)$. Далее всюду в (1) $f(x, u, t)$ предполагается гладкой по всем аргументам.

Пусть $x_i = x(t_i)$ — начальное, а $x_f = x(t_f)$ — конечное состояния объекта управления. Состояние x_f наз. целью управления. Существуют две главные задачи А. у. т.: задача программирования — определение управления $u(t)$, при к-ром гарантируется достижение цели из x_i; определение закона обратной связи (см. ниже). Обе задачи разрешаются при условии полной управляемости объекта (1).

Объект (1) наз. полностью управляемым, если, каковы бы ни были x_i, $x_f \in N$, найдутся хотя бы одно допустимое управление $u(t)$ и интервал $\mathscr{T}$, при к-рых цель управления достижима. В противном случае говорят, что объект управляем неполностью. Поэтому возникает задача предварительного исследования: дана математич. модель (1), требуется установить критерий управляемости. В разрешении этой задачи достигнут (к 1977) незначительный прогресс. В случае, когда уравнение (1) линейно:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

где A, B — стационарные матрицы, критерий полной управляемости формулируется так: для того чтобы система (3) была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$Q = \| B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B \| \tag{4}$$

был равен n. Матрица (4) наз. матрицей управляемости.

Если A, B — известные дифференцируемые функции от t, то матрица управляемости определяется так:

$$Q = \| L_1(t),\ L_2(t),\ \ldots,\ L_n(t) \|, \tag{5}$$

где $L_1(t) = B(t)$, $L_k(t) = A(t)L_{k-1} - \frac{dL_{k-1}}{dt}$, $k = 2, \ldots, n$. В этом случае имеет место теорема: для того чтобы система (3) была полностью управляема, достаточно, чтобы существовала хотя бы одна точка $t^* \in \mathscr{T}$, в к-рой ранг матрицы (5) равен n (см. [3]). Для нелинейных систем критерий управляемости пока (к 1977) не найден.

Первая главная задача А. у. т. заключается в выборе допустимого управления, при к-ром гарантируется достижение цели x_f. Она имеет два способа решения. Первый из них состоит в проявлении воли главного конструктора (ГК) объекта (1) — назначение определенного вида движения, при к-ром цель x_f достижима, и в подборе соответствующего управления. Такой способ решения задачи программирования применяется в практике во многих случаях. При другом способе ищется допустимое управление, минимизирующее заданную плату управления. Математич. формулировка задачи такова. Даны: математич. модель объекта управления (1), (2); граничные условия на вектор x, к-рые символически запишем в виде

$$(i,\ f) = 0; \tag{6}$$

гладкая функция $G(x, t)$ и плата за принятое управление

$$\Delta G = G(x, t)\Big|_i^f. \tag{7}$$

Задача программирования: среди допустимых управлений требуется найти такое, при к-ром условия (6) выполняются, а функционал (7) принимает минимальное значение. Необходимые условия мини-

мума этой неклассической вариационной задачи доставляются следующей теоремой, носящей название «принцип максимума Л. С. Понтрягина» (см. [4]). Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\psi\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ и вспомогательную скалярную функцию

$$H(\psi, x, u, t) = \psi \cdot f(x, u, t). \tag{8}$$

Функция H позволяет записать уравнение (1) и уравнение для вектора ψ в следующей форме:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9}$$

Уравнение (9) является линейным и однородным относительно ψ, имеет единственное непрерывное решение, определенное при любых начальных условиях $\psi(t_i)$ и $t \in \mathscr{T}$. Вектор ψ наз. нулевым, если хотя бы одна из его компонент не обращается тождественно в нуль при $t \in \mathscr{T}$. Справедлива теорема: для того чтобы кривая x^0, u^0 доставляла сильный минимум функционалу (7), необходимо существование ненулевого непрерывного вектора ψ, определенного уравнением (9), при к-ром функция $H(\psi, x, u, t)$ достигает максимума по u и выполняется условие трансверсальности

$$\left[\delta G - H\delta t + \sum \psi_\alpha \delta x_\alpha\right]_i^f = 0.$$

Пусть $x^0(t, x_i, x_f)$, $u^0(t, x_i, x_f)$ — решение, отвечающее задаче. Доказано, что в стационарной системе функция $H(\psi^0, x^0, u^0)$ удовлетворяет условию

$$H(\psi^0, x^0, u^0) = C, \tag{10}$$

где C — постоянная, то есть (10) — ее первый интеграл. Решение u^0, x^0 наз. программой управления.

Пусть u^0, x^0 есть к.-л. (необязательно оптимальная) программа управления. Оказывается, что знание лишь одной программы управления недостаточно для достижения цели. Дело в том, что программа u^0, x^0, как правило, неустойчива относительно любых сколь угодно малых изменений в задаче, в частности наиболее важных изменений начальных значений (i, f), или, иными словами, эта задача некорректна. Особенность некорректности, однако, заключается в том, что она может быть исправлена средствами автоматич. стабилизации, основанными только лишь на использовании «принципа обратной связи». В связи с этим возникает другая главная задача управления — задача определения закона обратной связи.

Пусть y — вектор возмущенного движения системы, а ξ — вектор, характеризующий дополнительное отклонение органа управления, предназначенное для гашения возмущенного движения. Для реализации отклонения ξ должен быть заранее предусмотрен соответствующий ресурс управления. Возмущенное движение будет описываться уравнением

$$\dot{y} = Ay + B\xi + \varphi(y, \xi, t) + f^0(t). \tag{11}$$

Здесь: A, B - известные матрицы, определенные на движении x^0, u^0, и суть известные функции времени; φ — нелинейные члены разложения функции $f(x, u, t)$; $f^0(t)$ — постоянно действующая возмущающая сила, происходящая либо от того, что программное движение не определено точно, либо от того, что при построении модели (1) не были учтены к.-л. дополнительные силы. Уравнение (11) определено в окрестности $\|y\| \leqslant \overline{H}$, где $\overline{H}$, вообще говоря, достаточно малое, а в нек-рых случаях любое конечное положительное число или даже ∞.

Заметим, что полная управляемость системы (1), вообще говоря, не гарантирует полной управляемости системы (11).

Будем говорить, что объект управления (11) наблюдаем по координатам $y_1, \ldots, y_r$, $r \leqslant n$, если

существует набор готовых к действию измерительных приборов, способных непрерывно производить измерения координат в любой момент времени $t \in \mathcal{T}$. Значение этого определения может быть проиллюстрировано примером управления продольным движением самолета. Хотя авиация существует более 50 лет, до сих пор нет прибора, измеряющего возмущение угла атаки крыла самолета или высоту его полета вблизи земли. Совокупность измеряемых координат назовем полем регулирования и обозначим через $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$.

Рассмотрим совокупность допустимых управлений ξ, определенных над полем P:

$$\xi = \xi(y_1, \ldots, y_r, t, p), \quad r \leqslant n, \tag{12}$$

где p — векторный или матричный параметр. Будем говорить, что управление (12) представляет собой закон обратной связи, если операция замыкания [т. е. подстановка (12) в уравнение (11)] дает систему

$$\dot{y} = Ay + B\xi(y_1, \ldots, y_r, t, p) + \varphi(y, \xi(y_1, \ldots, y_r, t, p), t), \tag{13}$$

невозмущенное движение к-рой $y=0$ асимптотически устойчиво (см. *Асимптотически устойчивое решение*). Система (13) наз. асимптотически устойчивой, если ее невозмущенное движение $y=0$ асимптотически устойчиво.

Существует два класса задач, к-рые могут быть сформулированы относительно замкнутой системы (13): класс задач анализа и класс задач синтеза.

Рассмотрим допустимое управление (12), заданное с точностью до выбора параметра p, напр.

$$\xi = \left\| \begin{matrix} p_{11} & \ldots & p_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1} & \ldots & p_{rr} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{matrix} \right\|.$$

Задача анализа: требуется определить область S значений параметра p, для к-рых замкнутая система (13) асимптотически устойчива. Построение области S осуществляется на основании методов, разработанных в теории устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*) и нашедших широкое применение в А. у. т. В частности, отметим методы частотного анализа; методы, основанные: на *Ляпунова теории устойчивости* по первому приближению (теоремы Гурвица, Рауса и др.), на прямом методе Ляпунова построения v-функций, на теории Ляпунова — Пуанкаре построения периодич. решений, на методе гармонич. баланса, методе Б. В. Булгакова, методе А. А. Андронова, теории точечного преобразования поверхностей (см. [5]). Последняя группа методов дает возможность не только строить в пространстве P области S, но также проанализировать параметры устойчивых периодич. решений уравнения (13), характеризующих автоколебательные движения системы (13). Все эти методы получили широкое применение в практике автоматич. управления, и их изучают в рамках различных специальностей в высшей школе (см. [5]).

Если S не пусто, то управление (12) наз. законом обратной связи, или законом регулирования. Его реализация, осуществленная с помощью совокупности измерительных приборов, усилителей, преобразователей и исполнительных устройств, наз. регулятором.

С задачей анализа тесно связана другая весьма важная для практики задача о построении границ области притяжения (см. [6], [7]). Рассмотрим систему (13), в к-рой $p \in S$. Множество значений $y(t_i) = y_0$, содержащее точку $y=0$, для к-рых замк-

нутая система (13) сохраняет свойство асимптотич. устойчивости, наз. областью притяжения тривиального решения $y=0$. Задача состоит в том, чтобы для данной замкнутой системы (13) и точки $p \in S$ определить границы области притяжения.

Современная научная литература не содержит эффективных методов построения границ области притяжения, за исключением редких случаев, в к-рых удается построить неустойчивые периодич. решения замкнутых систем. Однако имеются нек-рые методы, позволяющие построить границы множества значений y_0, целиком содержащегося в области притяжения. В большинстве случаев эти методы основаны на оценке области фазового пространства, в к-ром *Ляпунова функция* удовлетворяет условию $v \geqslant 0$, $\dot{v} \leqslant 0$ (см. [7]).

Любое решение $y(t, y_0, p)$ замкнутой системы (13) представляет так наз. переходный процесс. В большинстве случаев практич. значения нельзя ограничиться решением лишь проблемы устойчивости. При разработке проекта предъявляются дополнительные, имеющие важное практич. значение, требования, при к-рых гарантируется наличие у переходного процесса нек-рых новых свойств. Характер требований и перечень свойств существенно связаны с физич. природой объекта управления. В задачах анализа обеспечение этих свойств переходного процесса, напр. заданного времени регулирования t^*, в ряде случаев может быть достигнуто за счет выбора параметра p. Задача выбора параметра p носит назв. проблемы качества регулирования (см. [5]), и методы решения этой проблемы связаны с тем или иным построением оценок решений $y(t, y_0, p)$: либо фактич. интегрированием уравнения (13), либо нахождением оценки этих решений экспериментально, с помощью аналоговой или цифровой вычислительной машины.

Задачи анализа переходных процессов имеют много иных формулировок во всех случаях, в к-рых $f^0(t)$ представляет собой случайную функцию, как, напр., в следящих системах (см. [5], [8]). Другие формулировки связаны с возможностью случайного изменения матриц A, B или даже функции φ (см. [5], [8]). В связи с этим развивались методы исследования случайных процессов, методы адаптации и обучения машин (см. [9]). Исследовались также переходные процессы в системах с запаздыванием и системах с распределенными параметрами (см. [10], [11]), в системах с переменной структурой (см. [12]).

Задача синтеза: дано уравнение (11), поле регулирования $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$, и множество $\xi(y_1, \ldots, y_r, t)$ допустимых управлений; требуется найти все множество M законов обратной связи (см. [13]). Одной из наиболее важных разновидностей этой задачи является задача о структуре минимальных полей. Поле $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$, наз. минимальным полем, если на нем существует хотя бы один закон обратной связи и если размерность поля r минимальна. Задача состоит в том, чтобы для данного уравнения (11) и множества допустимых управлений определить структуру $P(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r})$ всех его минимальных полей. Поясним характер задачи на примере:

$$\dot{z} = Az + Bu,$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & -n & k & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Vmatrix},$$

m, n, k — заданные числа. Допустимые управления — множество кусочно непрерывных функций u_2, u_4, принимающих свои значения из области

$$|u_2| \leqslant \bar{u}_2, \quad |u_4| \leqslant \bar{u}_4.$$

Минимальными полями в задаче являются либо поле $P(z_2)$, либо поле $P(z_4)$. Размерность каждого поля равна единице и понизить ее нельзя (см. [13]).

Пока известен (1977) лишь один метод синтеза *законов обратной связи*, основанный на использовании функций Ляпунова (см. [13]). При этом существенную роль играет теорема Барбашина - Красовского (см. [6], [10], [15]): для того чтобы невозмущенное движение $y=0$ замкнутой системы

$$\dot{y}=\varphi(y) \tag{14}$$

было асимптотически устойчиво, достаточно существования знакоопределенной положительной функции $v(y)$, полная производная к-рой, в силу уравнения (14), есть функция $w(y)$, знакопостоянная отрицательная, однако такая, что на многообразии $w(y)=0$ не лежат целые траектории системы (14), кроме $y=0$. Задача выяснения существования и структуры минимальных полей имеет важное практич. значение, поскольку эти поля отвечают требованиям ГК о минимуме веса, габаритов, сложности, стоимости системы управления и ее максимальной надежности. Особый научный и практич. интерес эта задача приобретает для *бесконечномерных систем, встречающихся в технике, биологии, медицине*, экономике и социологии.

К сожалению, при проектировании систем управления невозможно ограничиться решением задачи синтеза законов обратной связи. В большинстве случаев требования ГК касаются обеспечения нек-рых важных специфич. свойств переходного процесса в замкнутой системе. Важность этих требований видна на примере регулирования атомного реактора. В случае, если переходный процесс затягивается более 5 *сек* или максимальное уклонение к.-л. его координаты превосходит заданное значение, происходит атомный взрыв. В связи с этим возникают новые задачи синтеза законов регулирования, определенных на множестве M. Приведем формулировку одной из таких задач. Рассмотрим две сферы: $\|y_0\|=R$, $y_0=y_i$, $\|y(t_1)\|=\varepsilon$, $R\gg\varepsilon$ — заданные числа. Обратимся к множеству M всех законов обратной связи. Возьмем любой из них и произведем замыкание, получим уравнение:

$$\dot{y}=Ay+B\xi(y_1,\ \ldots,\ y_r,\ t)+\varphi(y,\xi(y_1,\ \ldots,\ y_r,\ t),\ t). \tag{15}$$

Рассмотрим все множество решений $y(t,\ y_0)$ уравнения (15), начинающихся на сфере R. Будем называть их R-*решениями*. Поскольку система (15) асимптотически устойчива для любого y_0 на сфере, существует момент времени t_1, при к-ром соблюдаются условия

$$\|y(t_1,\ y_0)\|\leqslant\varepsilon,\quad \|y(t,\ y_0)\|<\varepsilon$$

при любом $t>t_1$.

Пусть

$$t^*=\sup_{y_0} t_1.$$

Из определения t_1 ясно, что t^* существует. Интервал t^*-t_i наз. *временем регулирования* (*затухания переходного процесса*) в замкнутой системе (15), если любое R-решение выходит на сферу ε при $t_1\leqslant t^*$ и остается внутри ее при $t>t_1$. Очевидно, что время регулирования есть функционал вида $t^*=t^*(R,\ \varepsilon,\ \xi)$. Пусть T — заданное число. Возникает *задача синтеза быстродействующих регуляторов*: дано множество M законов обратной связи, требуется выделить такое его подмножество M_1, на к-ром время регулирования в замкнутой системе удовлетворяет условию

$$t^*-t_i\leqslant T.$$

Аналогично могут быть сформулированы задачи синтеза *множеств* $M_2,\ \ldots,\ M_k$ законов обратной связи, при к-рых соблюдаются другие $k-1$ требований ГК.

Главная задача синтеза об удовлетворении всех требований ГК разрешима, если множества $M_1, \ldots, M_k$ имеют непустое пересечение (см. [13]).

Наиболее детально задача синтеза изучена для случая, в к-ром поле P имеет максимальную размерность $r=n$, а показатель качества системы характеризуется функционалом

$$J=\int_0^\infty w(y,\ \xi,\ t)\,dt, \tag{16}$$

где $w(y,\ \xi,\ t)$ — знакоопределенная положительная функция по y, ξ. В этом случае задача наз. задачей аналитического конструирования оптимальных регуляторов (см. [14]) и формулируется так. Даны уравнение (11), класс допустимых управлений $\xi(y,\ t)$, определенных над полем $P(y)$ максимальной размерности, и функционал (16). Требуется найти управление $\xi=\xi(y,\ t)$, при к-ром функционал (16) достигает минимального значения. Эта задача разрешается теоремой: если уравнение (11) таково, что можно найти знакоопределенную положительную допускающую бесконечно малый высший предел функцию $v^0(y,\ t)$ и функцию $\xi^0(y,\ t)$ такие, что выполняется равенство

$$\frac{\partial v^0}{\partial t}+\frac{\partial v^0}{\partial y}(Ay+B\xi^0+\varphi(y,\ \xi^0,\ t))=0 \tag{17}$$

и справедливо неравенство

$$\frac{\partial v^0}{\partial t}+\frac{\partial v^0}{\partial y}(Ay+B\xi+\varphi(y,\ \xi,\ t))\geqslant 0$$

при любых допустимых ξ, то функция $\xi^0(y,\ t)$ разрешает задачу. При этом имеет место равенство

$$v^0(t_0,\ y_0)=\min_{\xi}\int_0^\infty w(y,\ \xi,\ t)\,dt.$$

Функция $v^0(y,\ t)$ наз. оптимальной функцией Ляпунова (см. [15]). Она служит решением уравнения (17) с частными производными типа Гамильтона—Якоби, удовлетворяющего условию $v(y(\infty),\ \infty)=0$. Методы эффективного решения такой задачи разработаны для случая, в к-ром функции w, φ допускают разложение в целые сходящиеся ряды по y, ξ с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями от t. При этом принципиальное значение имеет разрешимость задачи по линейному приближению в уравнении (11) и оптимизации лишь интеграла от квадратичных членов, удерживаемых в разложении w. Разрешимость же последней задачи гарантируется соблюдением условия полной управляемости (см. [15]).

Лит.: [1] Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А., Теория автоматического регулирования, М., 1949; [2] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [3] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [5] Техническая кибернетика, кн. 1—2, М., 1967; [6] Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, М., 1967; [7] Зубов В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Л., 1959; [8] Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [9] Цыпкин Я. З., Основы теории обучающихся систем, М., 1970; [10] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; [11] Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования, М., 1966; [12] Теория систем с переменной структурой, под ред. С. В. Емельянова, М., 1970; [13] Летов А. М., «Дифференц. уравнения», 1970, т. 6, № 4, с. 592—615; [14] его же, Динамика полета и управление, М., 1969; [15] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966, (дополнение 4).

А. М. Летов.

АВТОМАТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — направление в *автоматов теории*, характеризующееся использованием алгебраич. средств в изучении автоматов. А. а. т. основана на том, что автоматы можно рассматривать как нек-рые специальные алгебры или алгебраические системы. Кроме того, события, представимые ко-

нечными автоматами, относительно операций объединения, произведения и итерации образуют алгебру, порождаемую конечным множеством так наз. элементарных событий, каждое из к-рых состоит из одного однобуквенного или пустого слова. Алгебраический подход позволяет непосредственно использовать алгебраич. результаты в теории автоматов, а также помогает в нек-рых случаях установлению связи теории автоматов с другими областями математики. Так, с помощью теории автоматов были получены доказательства разрешимости нек-рых арифметических теорий второй ступени, а также новое, более простое, решение ограниченной *Бернсайда проблемы*.

С алгебраич. точки зрения, автомат (конечный или бесконечный) $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ является трехосновной алгеброй, т. е. алгеброй с тремя множествами A, S, B элементов и двумя операциями $\varphi : S\times A\to S$ и $\psi : S\times A\to B$. С другой стороны, переходную систему (A, S, φ), где $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — входной алфавит, S — множество состояний (см. *Автомат конечный*), можно рассматривать как алгебру $\langle S, a_1, \ldots, a_n\rangle$ с унарными операциями, обозначаемыми буквами a_i входного алфавита A и такими, что $a_i s_j=\varphi(s_j, a_i)$. Таким образом, для автоматов естественно определяются такие понятия, как *автоматов гомоморфизм*, изоморфизм, подавтомат и т. д. Вместе с тем этот подход позволяет сопоставить автомату $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ полугруппу преобразований множества S с операцией суперпозиции, порожденную операциями a_i, так что для произвольных a_i, a_j из A и s из S положено

$$a_i a_j S=\varphi(\varphi(s, a_i), a_j).$$

Эта полугруппа наз. полугруппой автомата $\mathfrak{A}$, она используется как средство описания определенных свойств автоматов (классификация, разложимость, изоморфизм и т. д.) на алгебраич. языке. В то же время всякой полугруппе Q с единицей можно сопоставить автомат с заданным входным алфавитом $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ и множеством состояний Q следующим образом. Каждой букве a_i из A ставят в соответствие нек-рый элемент q_i из Q и тогда функцию переходов φ можно определить так: $\varphi(q, a_i)=qq_i$. Полугруппа такого автомата изоморфна подполугруппе полугруппы Q, порожденной элементами $q_1, \ldots, q_n$, и тем самым в случае, если $q_1, \ldots, q_n$ суть образующие полугруппы Q, полугруппа автомата изоморфна исходной полугруппе Q. Полугруппа автомата очевидным образом изоморфна факторполугруппе входной полугруппы всех слов в алфавите A (множество A^*) с операцией последовательного соединения слов (конкатенация) по конгруэнции

$$R=\{(\alpha, \beta):\alpha, \beta\in A^* \quad \text{и} \quad \forall s\in S\,(\varphi(s, \alpha)=\varphi(s, \beta))\}.$$

Для произвольного состояния $s\in S$ конгруэнция R является максимальной подконгруэнцией отношения

$$R_s=\{(\alpha, \beta):\alpha, \beta\in A^* \quad \text{и} \quad \varphi(s, \alpha)=\varphi(s, \beta)\}.$$

Это означает, в частности, что событие, представимое инициальным акцептором $\mathfrak{A}_s=(A, S, \varphi, S')$, является объединением нек-рых R-классов. Поскольку полугруппа автомата характеризует его с точностью до изоморфизма, то различным классам полугрупп соответствуют свои классы автоматов. В том случае, когда полугруппа автомата является свободной, или абелевой, или циклической, или нильпотентной и т. п., или, наконец, группой, автомат называется, соответственно, свободным, абелевым, циклическим, нильпотентным, групповым (или перестановочным). Другой подход, связанный с алгебраич. классификацией функций переходов и выходов, приводит к классам линейных, подстановочных и др. автоматов (см. *Автомат*). Подстановочные автоматы реализуют взаимно однозначные функции и исполь-

зуются в теории кодирования. Линейные автоматы представляют интерес в связи с простотой их схемной реализации.

Автомат (A, S, B, φ, ψ) наз. линейным автоматом (л. а.), если A, S и B — линейные пространства над нек-рым полем P,

$$\varphi(s, a) = \varphi_1(s) + \varphi_2(a), \quad \psi(s, a) = \psi_1(s) + \psi_2(a),$$

где φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — линейные отображения соответственно: S в S, A в S, S в B, A в B. Обычно предполагается, что поле P конечно, а пространства A, S, B конечномерны; в этом случае л. а. является конечным автоматом. Если в представлении конечного акцентора в виде алгебры, операциями к-рой являются буквы входного алфавита, допустить многоместные операции, то полученное обобщение наз. автоматом над термами (автоматом над деревьями, обобщенным автоматом). Такие автоматы используются для доказательства разрешимости нек-рых математич. теорий второй ступени.

Лит.: [1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, М., 1975; [2] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 5, с. 3—62; [3] Тэтчер Дж. В., Райт Дж. Б., в кн.: Кибернетический сборник, в. 6, М., 1969, с. 112—44. См. также лит. к статье *Автомат*.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТОВ ГОМОМОРФИЗМ — отображение входного и выходного алфавитов, а также множества состояний одного автомата в аналогичные множества другого автомата, сохраняющее функции переходов и выходов. Более точно А. г. автомата $\mathfrak{A}_1$ $(A_1, S_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ в автомат $\mathfrak{A}_2 = (A_2, S_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ (см. *Автомат конечный*) — это отображение $h = (h_1, h_2, h_3)$ множества $A_1 \times S_1 \times B_1$ в множество $A_2 \times S_2 \times B_2$ такое, что

$$h_1 : A_1 \longrightarrow A_2, \quad h_2 : S_1 \longrightarrow S_2, \quad h_3 : B_1 \longrightarrow B_2,$$

и для любых s из S_1 и a из A_1 имеют место равенства:

$$h_2\varphi_1(s, a) = \varphi_2(h_2(s), h_1(a)),$$

$$h_3\psi_1(s, a) = \psi_2(h_2(s), h_1(a)).$$

Для автоматов инициальных, кроме того, требуется, чтобы функция h начальное состояние переводила в начальное. Автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ наз. гомоморфными, если существует А. г. h, отображающий $A_1 \times S_1 \times B_1$ на $A_2 \times S_2 \times B_2$. Если, кроме того, отображение h взаимно однозначно, то h наз. изоморфизмом, а автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — изоморфными автоматами. Если алфавиты A_1 и A_2, а также B_1 и B_2 совпадают и отображения h_1 и h_3 тождественны, то гомоморфизм (изоморфизм) h наз. гомоморфизмом (изоморфизмом) по состояниям. Аналогично определяются гомоморфизмы (изоморфизмы) по входному и выходному алфавитам. Изоморфные по состояниям автоматы, а также гомоморфные по состояниям инициальные автоматы эквивалентны (см. *Автоматов эквивалентность*).

Понятие А. г. используется в связи с задачами минимизации, разложения, полноты автоматов и др.

Лит.: [1] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 3—62.

А. А. Летичевский.

АВТОМАТОВ КОМПОЗИЦИИ — операции, позволяющие из одних автоматов получать другие, более сложные, путем соединения исходных автоматов по определенным правилам. А. к. играют важную роль в задачах синтеза и разложения автоматов. Важнейшими и наиболее употребительными А. к. являются прямое произведение, суперпозиция, обратная связь.

Прямым произведением автоматов $\mathfrak{A}_i = (A_i, S_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, наз. автомат $\mathfrak{A} = (A, S, B, \varphi, \psi)$, у к-рого

$$S = S_1 \times \ldots \times S_n, \quad A = A_1 \times \ldots \times A_n, \quad B = B_1 \times \ldots \times B_n,$$

а функции $\varphi(s, a)$ и $\psi(s, a)$ определяются соотношениями:

$$\varphi((s_1, \ldots, s_n), (a_1, \ldots, a_n)) = (\varphi_1(s_1, a_1), \ldots, \varphi_n(s_n, a_n)),$$
$$\psi((s_1, \ldots, s_n), (a_1, \ldots, a_n)) = (\psi_1(s_1, a_1), \ldots, \psi_n(s_n, a_n)).$$

Под *суперпозицией* автоматов $\mathfrak{A}_1 = (A_1, S_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (B_1, S_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ понимают автомат $\mathfrak{B} = (A_1, S, B_2, \varphi, \psi)$, у к-рого $S = S_2 \times S_1$, а

$$\varphi((s_2, s_1), a) = (\varphi_2(s_2, \psi_1(s_1, a)), \varphi_1(s_1, a))$$

и

$$\psi((s_2, s_1), a) = \psi_2(s_2, \psi_1(s_1, a)),$$

где $(s_2, s_1) \in S$ и $a \in A_1$.

В вопросах полноты и синтеза автоматов большую роль играет *операция обратной связи*. Эта операция применима к автоматам с n входами и m выходами: $\mathfrak{A} = (A, S, B, \varphi, \psi)$, где $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, $B = B_1 \times \ldots \times B_m$,

$$\psi(s, (a_1, \ldots, a_n)) =$$
$$= (\psi_1(s, (a_1, \ldots, a_n)), \ldots, \psi_m(s, (a_1, \ldots, a_n)))$$

таким, что для нек-рых i, j имеет место $B_i = A_j$ и функция ψ_i не зависит от a_j, т. е.

$$\psi_i = \psi_i(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)).$$

Тогда в применении к i-му выходу и j-му входу автомата $\mathfrak{A}$ операция обратной связи дает автомат $\mathfrak{A}' = (A', S, B, \varphi', \psi')$ такой, что $A' = A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_n$,

$$\varphi'(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) =$$
$$= \varphi(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n), a_{j+1}, \ldots, a_n)),$$
$$\psi'(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) =$$
$$= \psi(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)), a_{j+1}, \ldots, a_n)).$$

Кроме указанных, иногда используются другие виды А. к., напр. произведение, прямая сумма, полупрямое произведение и т. д.

Лит.: [1] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5 (101), с. 3—62; [2] Кудрявцев В. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13, с. 45—74. *В. Н. Редько.*

АВТОМАТОВ МИНИМИЗАЦИЯ — минимизация значений параметров автоматов, приводящая к эквивалентным и в определенном смысле оптимальным автоматам. Задача А. м. возникает при синтезе автоматов, и ее специфика зависит от подхода к их изучению.

При макроподходе минимизируют, как правило, число состояний автоматов, получая *минимальные*, или *приведенные, автоматы*. Специфика отыскания приведенных автоматов связана с формой задания автоматов и типа их поведения. Так, если в качестве поведения *автомата конечного*, заданного, напр., с помощью диаграммы переходов, рассматривать систему *ограниченно-детерминированных функций*, реализуемых автоматом, то отыскание минимального конечного автомата, эквивалентного исходному, осуществляется эффективно; оно основано на *теореме Мура*, согласно к-рой отличимость двух состояний автомата с n состояниями может быть установлена экспериментом длины $n-1$. Алгоритм минимизации состоит в построении такого автомата при том же способе задания, состояния к-рого соответствуют классам неотличимых состояний исходного автомата, а функции переходов и выходов определяются по представителям из этих классов. При этом минимальный автомат с точностью до изоморфизма состояний единствен. При рассмотрении конечного автомата как акцептора, представляющего подмножеством выделенных состояний событие, описанное с помощью заданного регулярного выражения, минимальный автомат строится эффективно, и алгоритм его построения можно разделить на два этапа. Сначала по исходному регулярному выражению строится нек-рый,

не обязательно минимальный, автомат, представляющий соответствующее регулярное событие. Такой автомат может быть построен, напр., с помощью индукции по операциям объединения $\cup$, конкатенации $\circ$ и итерации $*$, входящим в регулярное выражение. По автоматам $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, представляющим, соответственно, события R_1, R_2 и R_3, специальным образом строятся автоматы $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$ и $\mathfrak{A}_6$, представляющие события $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$ и R_3^*, причем число состояний автомата $\mathfrak{A}_4$ не превосходит произведения чисел состояний автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$; число состояний автомата $\mathfrak{A}_5$, вообще говоря, не больше произведения числа состояний автомата $\mathfrak{A}_1$ на число всех подмножеств множества состояний автомата $\mathfrak{A}_2$, а число состояний автомата $\mathfrak{A}_6$ не больше числа подмножеств множества состояний автомата $\mathfrak{A}_3$. На втором этапе число состояний полученного автомата минимизируется обычным способом, причем классам неотличимых финальных состояний исходного автомата соответствуют финальные состояния минимального автомата. Аналогичным способом строится минимальный автомат, представляющий заданное сверхсобытие. Существуют единственные с точностью до изоморфизма состояний минимальные автоматы, представляющие заданные события и сверхсобытия.

Для недетерминированных конечных, а также для недетерминированных и детерминированных бесконечных автоматов также существует единственный с точностью до изоморфизма состояний приведенный автомат. В первом случае отыскание этого автомата аналогично рассмотренному случаю конечных автоматов, а во втором его построение, вообще говоря, не является эффективным. Для стохастич. автомата с конечным числом состояний существует, вообще говоря, континуум различных приведенных автоматов, эквивалентных исходному. Отсюда следует отсутствие эффективного способа описания множества приведенных автоматов по заданному стохастич. автомату.

При микроподходе к изучению конечных автоматов для построения заданного автомата исходят из нек-рого конечного базисного набора $\mathfrak{B}$ логич. сетей. Требуется по автомату $\mathfrak{A}$, заданному, напр., с помощью канонич. уравнений, указать логич. сеть S, построенную из элементов базиса $\mathfrak{B}$ с использованием операций суперпозиции и обратной связи, к-рая реализует автомат $\mathfrak{A}$ и содержит минимальное число $L(\mathfrak{A})$ элементов базиса $\mathfrak{B}$, достаточное для реализации этого автомата. Т. о., сеть S будет являться в этом смысле оптимальной схемой для автомата $\mathfrak{A}$. В общем случае задача о реализации произвольного автомата $\mathfrak{A}$ с помощью сетей над базисом $\mathfrak{A}$ неразрешима и, следовательно, функция сложности $L(\mathfrak{A})$ автомата $\mathfrak{A}$ невычислима. В случае же, когда известно, что базис $\mathfrak{A}$ является полным (см. *Автоматов полные системы*), построение любой оптимальной сети для $\mathfrak{A}$ может быть осуществлено эффективно, напр., следующим образом. Известно, что проверка реализуемости автомата $\mathfrak{A}$ с помощью заданной сети S устанавливается эффективно. Кроме того, для заданного числа l число сетей над базисом $\mathfrak{B}$ сложности не более чем l вычислимо, и все эти сети строятся эффективно. Тем самым в качестве алгоритма построения всех оптимальных сетей для заданного автомата $\mathfrak{A}$ может быть использован последовательный просмотр на реализуемость автомата $\mathfrak{A}$ всех сетей сложности $1, 2, \ldots, L(\mathfrak{A})$. Вопрос о поведении функции $L(\mathfrak{A})$ и нек-рых ее обобщений составляет часть общей проблемы синтеза автоматов. Существует ряд эвристич. алгоритмов синтеза минимальных схем для автоматов, основанных на специальных свойствах базисов и конкретном содержании понятия оптимальности.

Лит. см. при ст. *Автомат конечный.* *В. А. Буевич.*

АВТОМАТОВ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ — специальные подмножества заданного класса M автоматов, на к-ром

определено нек-рое множество Ω операций со значениями в M. Эти подмножества обладают следующим основным свойством (с в о й с т в о м п о л н о т ы): множество всех автоматов, к-рые получаются путем конечного числа применений операций из Ω к автоматам из заданного подмножества $A \subseteq M$, совпадает с M. Задача о том, обладает ли множество свойством полноты или нет, наз. п р о б л е м о й п о л н о т ы (п. п.) для автоматов. Эта проблема изучена для различных моделей автоматов и операций. В порядке нарастания сложности объекта исследования сюда могут быть отнесены истинностные автоматы, автоматы, реализующие функции с задержками (т. е. функции k-значной логики с нек-рым временны́м сдвигом), конечные автоматы и др. П. п. для истинностных автоматов с обычно рассматриваемыми операциями суперпозиции по существу совпадает с п. п. для функций k-значной логики (см. *Многозначная логика*) и достаточно хорошо изучена. Под с и н х р о н н о й с у п е р п о з и ц и е й понимается такая суперпозиция автоматов, когда ко всем входам присоединяются автоматы, реализующие функции с одной и той же задержкой. Из найденных в этих случаях критериев полноты вытекает, в частности, существование алгоритма, устанавливающего для любой конечной системы автоматов ее полноту или неполноту. Основные критерии полноты даются в терминах так наз. п р е д п о л н ы х к л а с с о в (т. е. таких подмножеств класса M, к-рые замкнуты относительно операций из Ω и каждый из к-рых вместе с любым автоматом, ему не принадлежащим, образует полную систему). Показано, что множество A является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса, к-рые, в свою очередь, полностью описаны. Этот подход успешно осуществлен в целом ряде других случаев. Принципиально он возможен и при рассмотрении конечных автоматов, когда в качестве Ω выбираются операции суперпозиции автоматов и операция обратной связи (см. *Автоматов композиции*). Здесь также справедлив указанный выше критерий, однако в этом случае установлено, что семейство предполных классов является континуальным, что исключает возможность получения эффективных критериев полноты в указанных терминах. Заметим, что во всех описанных случаях существуют конечные полные системы, и потому п. п. для произвольных систем автоматов сводится к п. п. для конечных систем автоматов. С последним обстоятельством, как и выше, связана задача об алгоритмич. разрешимости п. п. для конечных систем конечных автоматов. Эта проблема может быть обобщена: для данного автомата a и множества B требуется определить, может ли a быть получен из автоматов множества B при помощи заданного набора операций. Таким образом приходят к изучению предиката $P(x, y)$ — «автомат x реализуется набором y». Установлено, что проблема распознавания реализуемости алгоритмически неразрешима при любом фиксированном a, т. е. одноместный предикат $P(a, y)$ нерекурсивен. С другой стороны, при различных значениях B параметра y предикат $P(x, B)$ может быть как рекурсивным, так и нерекурсивным. В связи с алгоритмич. неразрешимостью п. п. для автоматов возникает задача об отыскании классов множеств, для к-рых указанная проблема имеет эффективное решение. В частности, существует алгоритм для распознавания полноты систем, состоящих только из автоматов Мура и всех истинностных автоматов. С п. п. связана задача нахождения конкретных полных множеств автоматов с заданными свойствами. Установлено, что для любого натурального n существует полная система автоматов, никакая собственная подсистема к-рой не является полной, и таких систем при заданном n бесконечно много. Существует также в нек-ром смысле простейший автомат с двумя состояния-

ми, двумя входными и одним выходным каналами, к-рыи образует полную систему. П. п. рассматривается также для различных обобщений конечных автоматов и операций над ними; другое направление обобщений связано с введением различных отношений эквивалентности в рассматриваемом классе автоматов.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [2] Кудрявцев В. Б., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 91—115; [3] его же, там же, 1965, вып. 13, с. 45—74; [4] Кратко М. И., «Алгебра и логика. Тр. семинара», 1964, т. 3, № 2, с. 33—44; [5] Летичевский А. А., Условия полноты в классе автоматов Мура, К., 1963; [6] Буевич В. А., «Проблемы кибернетики», 1970, в. 22, с. 75—83.

В. Б. Кудрявцев.

АВТОМАТОВ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ — варианты описания автоматов, их функционирования или поведения. А. с. з. зависят от подхода к определению понятия автомата. При макроподходе (см. *Автомат конечный*) описывается внешнее поведение автомата; при микроподходе задание должно содержать описание элементов, из к-рых строится автомат, и схемы их соединения. Ниже приводятся способы задания конечных автоматов.

Макроподход. В этом случае задать конечный автомат $\mathfrak{A}=\langle A, S, B, \varphi, \psi\rangle$ при условии, что заданы алфавиты $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, $B=\{b_1, \ldots, b_k\}$, — значит описать функции φ и ψ или описать поведение этого автомата (см. *Автомата поведение*). Для задания функций φ и ψ обычно используют таблицу переходов, диаграмму переходов или матрицу переходов. Таблица переходов T автомата $\mathfrak{A}$ состоит из двух подтаблиц $T_\varphi=\|t_{ij}^{\varphi}\|$ и $T_\psi=\|t_{ij}^{\psi}\|$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, $t_{ij}^{\varphi}\in S$, $t_{ij}^{\psi}\in B$. Функции φ и ψ определяются как $\varphi(s_i, a_j)=t_{ij}^{\varphi}$, $\psi(s_i, a_j)=t_{ij}^{\psi}$. Если все столбцы T_ψ совпадают, то таблица T задает автомат Мура. Напр., пусть $A_0=\{a_1, a_2\}$, $S_0=\{s_1, s_2\}$, $B_0=\{b_1, b_2\}$; тогда таблица T (рис. 1) задает функции φ_0 и ψ_0 нек-рого автомата $\mathfrak{A}^0$ (на рис. 2 показаны подтаблицы T_φ и T_ψ таблицы T).

	a_1	a_2
s_1	s_1, b_2	s_2, b_2
s_2	s_2, b_1	s_1, b_2

Рис. 1

	a_1	a_2
s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_1

	a_1	a_2
s_1	b_2	b_2
s_2	b_1	b_2

Рис. 2

Диаграмма автомата (диаграмма переходов автомата) — это ориентированный граф G, вершинам к-рого взаимно однозначно соответствуют элементы S, а ребрам приписаны нек-рые множества пар вида (a, b), $a\in A$, $b\in B$. Из каждой вершины G исходит по крайней мере одно ребро; при этом множество $\mathfrak{N}$ всех пар, приписанных ребрам, исходящим из одной вершины, имеет вид $\mathfrak{N}=\{(a_1, b_{i_1}), (a_2, b_{i_2}), \ldots, (a_m, b_{i_m})\}$. Функции φ и ψ определяются следующим образом: $\varphi(s_i, a_j)=s_r$, $\psi(s_i, a_j)=b_p$, если ребру, исходящему из вершины s_i, приписана пара (a_i, b_p) и это ребро ведет в вершину s_r. Нек-рые свойства автомата удобно формулировать на языке диаграмм (связность автомата, достижимость состояний и т. п.). На рис. 3 представлена диаграмма переходов автомата $\mathfrak{A}^0$.

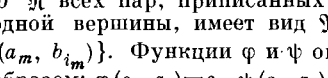


Рис. 3.

Матрица переходов используется для описания функционирования переходной системы $\langle A, S, \varphi\rangle$ (см. *Автомат конечный*). Она представляет собой $(n\times n)$-матрицу $P=\|P_{ij}\|$, элементами к-рой являются подмножества алфавита A (может быть, пустые) такие,

что $a \in P_{ij}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(s_i, a) = s_j$ и, следовательно, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место $P_{ip} \cap P_{ir} = \phi$ при $p \neq r$ и $\bigcup_{j=1}^{n} P_{ij} = A$. Чтобы распространить функцию φ на множество $S \times A^*$ (A^* — множество всех слов в алфавите A, включая пустое слово), рассматривают последовательность степеней матрицы P. Умножение матрицы P на себя производится по обычному алгоритму с использованием вместо операций умножения и сложения операций произведения (конкатенации) и объединения множеств слов. Если $\alpha \in A^*$ — слово длины d и $\alpha \in P_{ij}^{(d)}$, где $P_{ij}^{(d)}$ — элемент матрицы P^d, то $\varphi(s_i, \alpha) = s_j$. Так, матрица переходов P переходной системы $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ и матрица P^2 имеют, соответственно, вид:

$$P = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{Vmatrix}, \quad P^2 = P \times P = \begin{Vmatrix} \{a_1a_1, a_2a_2\} & \{a_1a_2, a_2a_1\} \\ \{a_2a_1, a_1a_2\} & \{a_2a_2, a_1a_1\} \end{Vmatrix}.$$

С указанными А. с. з. связан ряд алгоритмов минимизации (приведения) и синтеза автоматов.

Для задания поведения инициального (не обязательно конечного) автомата $\mathfrak{A}_{s_1}$ (преобразователя) необходимо описать функцию $f(\alpha) = \psi(s_1, \alpha)$, отображающую A^* в B^* (или A^∞ в B^∞, где A^∞, B^∞ — множества всех сверхслов в алфавитах A и B, соответственно). Эта функция может быть задана информационным деревом. Из каждой вершины информационного дерева исходит m ребер, взаимно однозначно соответствующих буквам алфавита A. Каждой вершине приписано состояние автомата $\mathfrak{A}_{s_1}$, а каждому ребру — буква алфавита B следующим образом. Корню приписано состояние s_1. Если некрой вершине приписано состояние s_i, то ребру, соответствующему букве a из A, приписана буква $b = \psi(s_i, a)$ и вершине, в к-рую ведет это ребро, приписано состояние $s_j = \varphi(s_i, a)$. Каждому слову $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r \in A^*$ соответствует единственная последовательность $\rho = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_r$ ребер этого дерева такая, что ρ_1 исходит из корня и ρ_{i+1} исходит из вершины, в к-рую ведет ρ_i. Слово $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r$, где β_i — буква из B, приписанная ребру ρ_i, $i = 1, \ldots, r$, совпадает со значением $\psi(s_1, \alpha)$. Если функция f реализуется конечным автоматом, то соответствующее информационное дерево может быть задано эффективно своим конечным поддеревом. На рис. 4 изображено поддерево информационного дерева, задающее поведение инициального автомата $\mathfrak{A}_{s_1}^0$ (левые ребра, исходящие из вершин, соответствуют символу a_1, правые — символу a_2).

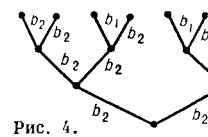


Рис. 4.

Описание поведения конечного автомата (акцептора) в терминах представимого события (сверхсобытия) может быть сделано с помощью регулярного выражения (см. *Регулярное событие*). Такие события могут быть также заданы как множества слов, порождаемых (выводимых) в нек-рой формальной системе (полу-Туэ грамматике и т. п.). Система полу-Туэ в этом случае задается четверкой $T = \langle A, S, \xi, \omega \rangle$, где A, S — конечные алфавиты, $A \cap S = \phi$, ξ — *аксиом схема* вида s_0X и ω — множество схем правил вывода вида $saX \to s'X$, $r \to r$, где $s, s', r \in S$, $a \in A$ и X — переменная, принимающая значения из A^*. При этом, если $saX \to s'X$ и $saX \to s''X$ принадлежат ω, то $s' = s''$. Слово $\alpha \in A^*$ выводимо в системе T, если существует последовательность слов $s_0\alpha = w_1, w_2, \ldots, w_n$ такая, что w_{i+1} получается из w_i, $i = 1, \ldots, n-1$, применением нек-рого правила из ω, $w_n \in S$ и ω не содержит правила $w_n \to w_n$. Аналогичный вид имеет грамматика, порождающая регулярное событие. Она задается четверкой $\Gamma = (A, S, s_1, \omega)$, где s_1 из S — аксиома, ω — множество правил вида $s_i \to as_j$, либо $s_i \to a$.

Слово $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ выводимо в Γ, если в ω имеются правила $s_1 \to \alpha_1 s_{i_2}$, $s_{i_2} \to \alpha_2 s_{i_3}$, $\ldots$, $s_{i_n} \to \alpha_n$. Известны алгоритмы, позволяющие получать матрицу переходов автомата по формальным системам описанного типа. Так, событие, представимое в акцепторе $\langle A_0, S_0, \varphi_0, s_1 \rangle$ состоянием s_2, может быть, напр., задано как множество слов, выводимых в системе полу-Туэ, к-рая имеет вид:

$$\mathscr{T} = \langle A_0, S_0, \xi = \{s_1 X\},$$
$$\omega = \{s_1 a_2 X \longrightarrow s_2 X;\ s_1 a_1 X \longrightarrow s_1 X;$$
$$s_2 a_1 X \longrightarrow s_2 X;\ s_2 a_2 X \longrightarrow s_1 X;\ s_1 \longrightarrow s_1\} \rangle.$$

Существует ряд других А. с. з. Напр., переходная система $\langle A, S, \varphi \rangle$, не обязательно конечная, может быть задана как алгебра $\langle S, \Phi \rangle$, где $\Phi = \{\varphi_a | a \in A\}$ есть множество унарных операций на S таких, что $\varphi_a(s) = \varphi(a, s)$. Так, переходную систему $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ можно рассматривать как алгебру $\langle S_0, \{\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}\} \rangle$, где $\varphi_{a_1}(s_1) = s_1$, $\varphi_{a_1}(s_2) = s_2$, $\varphi_{a_2}(s_1) = s_2$, $\varphi_{a_2}(s_2) = s_1$. Можно также рассматривать алгебру $\langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$, где $\tilde{S}$ – множество слов вида $s\alpha$, $s \in S$, $\alpha \in A^*$, и $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_a | a \in A\}$ – множество унарных операций на $\tilde{S}$ таких, что $\tilde{\varphi}_a(s\alpha) = s\alpha a$. Алгебра $\langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ задается системой образующих S и множеством определяющих соотношений $\omega = \{s_i \alpha_i = s'_i \alpha'_i,\ i = 1, 2 \ldots\}$. Такая алгебра задает автомат (вообще говоря, частичный) $\langle A, S, \varphi \rangle$ такой, что если $s_i \alpha_i = s'_i \alpha'_i$ – соотношение из ω, то $\varphi(s_i, \alpha_i) = \varphi(s'_i, \alpha'_i)$. Напр., переходную систему $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ можно задать системой образующих S_0 и множеством определяющих соотношений $\omega = \{s_1 = s_1 a_1, s_1 = s_2 a_2, s_2 = s_1 a_2, s_2 = s_2 a_1\}$. При этом предполагается, что $\varphi(s_1, \Lambda) = s_1$, $\varphi(s_2, \Lambda) = s_2$.

Поведение автомата может быть описано средствами языка логики одноместных предикатов. При этом выбор класса формул, задающих конечные автоматы, осуществляется различными способами. Описание может быть неполным, тогда оно определяет нек-рый класс автоматов, поведение к-рых идентично с точностью до этого описания. Напр., «анкетный» подход связан с заданием класса автоматов с помощью фрагментов информационных деревьев, частичного определения функций φ и ψ и т. п.

Указанные А. с. з. могут быть использованы с соответствующими модификациями при макроподходе к поведению нек-рых обобщений конечных автоматов (недетерминированных, бесконечных и т. п., см. *Автомат*). Так, элементами таблицы T_φ конечного недетерминированного автомата могут быть произвольные подмножества множества S. Поведение конечного недетерминированного акцептора описывается регулярным выражением, как и в детерминированном случае. Другими обобщениями конечных автоматов являются конечные *автоматы вероятностные*, автоматы над термами, мозаичные структуры и т. п.

Задать вероятностный автомат $\langle A, S, B, \mu \rangle$, если известны алфавиты $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, – значит при любых фиксированных i и j $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ указать условную вероятностную меру $\mu_{ij}(s_r, b_q)$ на множестве всех пар (s_r, b_q), $r = 1, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, k$. Для этого обычно рассматривают систему квадратных матриц с неотрицательными элементами

$$M^{q,j} = \left\| \mu^{q,j}_{i,r} \right\|,\ i,\ r = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m;$$
$$q = 1, \ldots, k,$$

такую, что каждая матрица M^j $\sum_{q=1}^{k} M^{q,j}$ является стохастической. Мера μ определяется так: $\mu_{ij}(s_r, b_q) = \mu^{q,j}_{i,r}$. Вероятностный автомат $\langle A, S, B, \mu \rangle$ рассматривается совместно с нек-рым начальным распределением вероятностей на множестве S:

$$\mu_0 = (\mu_0(s_1), \ldots, \mu_0(s_n)),\ \mu_0(s_i) \geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{n} \mu_0(s_i) = 1.$$

Иногда при задании вероятностных автоматов ограничиваются либо указанием матриц M^j, либо указанием матриц $\overline{M}^j = \|\mu^j_{i,q}\|$, где

$$\mu^j_{i,q} = \sum_{r=1}^{n} \mu^{q,j}_{i,r},$$

$i=1, \ldots, n$, $q=1, \ldots, k$, $j=1, \ldots, m$. Любая конечная *Маркова цепь* может рассматриваться как конечный вероятностный автомат, у к-рого матрицы M^j, $j=1, \ldots, m$, совпадают. Ниже представлены система матриц, задающая нек-рый вероятностный автомат $\mathfrak{A}$ ($n=2$, $k=2$, $m=2$), и матрицы M^1, M^2, $\overline{M}^1$, $\overline{M}^2$ этого автомата:

$$M^{1,1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}, \quad M^{1,2} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix},$$

$$M^{2,1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}, \quad M^{2,2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix},$$

$$M^1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \quad M^2 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{Vmatrix},$$

$$\overline{M}^1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \quad \overline{M}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

Чтобы задать конечный автомат над термами $\langle A, S, \sigma, \alpha_a \rangle$, когда известны алфавиты $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, необходимо, во-первых, указать отображение σ множества A в конечное множество неотрицательных целых чисел, причем так, чтобы существовал хотя бы один элемент $a \in A$ такой, что $\sigma(a)=0$, а во-вторых, для всякого $a_i \in A$, $i=1, \ldots, m$, требуется определить $\sigma(a_i)$-местную функцию α_{a_i}, отображающую множество $[S]^{\sigma(a_i)} = S \times \ldots \times S$ в S. Каждому элементу $a \in A$ такому, что $\sigma(a)=0$, ставится в соответствие элемент $\alpha_a \in S$, наз. начальным состоянием автомата. Напр., если $A=\{a_1, a_2\}$, $S=\{s_1, s_2\}$, $\sigma(a_1)=0$, $\sigma(a_2)=2$, $\alpha_{a_1}=s_1$, $\alpha_{a_2}(s_1, s_1)=s_2$, $\alpha_{a_2}(s_1, s_2)=s_1$, $\alpha_{a_2}(s_2, s_1)=s_2$, $\alpha_{a_2}(s_2, s_2)=s_2$, то функции σ, α_{a_1}, α_{a_2} задают нек-рый автомат над термами $\langle A, S, \sigma, \{\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}\} \rangle$ с начальным состоянием s_1.

Чтобы задать мозаичную структуру (бесконечное соединение переходных систем вида $\langle A, S, \varphi \rangle$, где $A=S^r$, см. *Автомат*), необходимо для каждой целочисленной точки n-мерного пространства определить конечное упорядоченное множество целочисленных точек — ее окрестность. При этом входной алфавит A переходной системы $\langle A, S, \varphi \rangle$, помещенной в нек-рую точку, есть декартово произведение множеств состояний переходных систем, помещенных в точки ее окрестности. Напр., пусть $S=\{s_1, s_2\}$ и для всякой целочисленной точки двумерного пространства (α, β) ее окрестность $D_{\alpha,\beta}$ есть упорядоченное множество $\{(\alpha-1, \beta), (\alpha, \beta+1), (\alpha+1, \beta)\}$. Чтобы задать однородную двумерную мозаичную структуру, определяют функцию φ следующим образом: $\varphi(s_1, s_1, s_1)=s_1$, $\varphi(s', s'', s''')=s_2$ в остальных случаях. Входной алфавит A в данном случае — декартово произведение $S \times S \times S$.

Микроподход. При микроподходе задать структурный автомат — значит описать элементы, из к-рых он построен, и схему их соединения. Описание может производиться на различных уровнях детализации. Часто ограничиваются рассмотрением так наз. *канонической схемы* построения автоматов; при этом элементы делят на две группы — *функциональные элементы* (автоматы с одним состоянием) и *элементы памяти*. Канонич. схема (рис. 5) состоит из двух функциональных блоков f и g с присоединенными к ним элементами памяти, в качестве к-рых

используются автоматы Мура: $\mathfrak{A}_i = \langle R_i, S_i, Q_i, \varphi_i, \psi_i \rangle$, $i=1, \ldots, l$. Блоки f и g построены из функциональных элементов. При данном способе задания структуру этих блоков не описывают, а задают (напр., таблично) реализуемые ими вектор-функции:

$$f = (f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l)):$$
$$A^n \times Q_1 \times \ldots \times Q_l \longrightarrow R_1 \times \ldots \times R_l;$$
$$g = (g_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l)):$$
$$A^n \times Q_1 \times \ldots \times Q_l \longrightarrow B^m,$$

где A^n и B^m —, соответственно, входной и выходной алфавиты канонич. схемы. Эта схема задает структурный автомат $\langle A^n, S, B^m, \varphi, \psi \rangle$, где $S = S_1 \times \ldots \times S_l$, а функции φ и ψ определяются следующим образом:

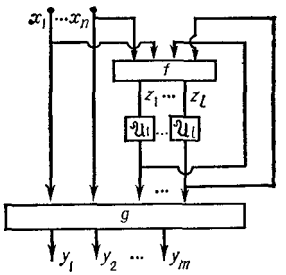


Рис. 5.

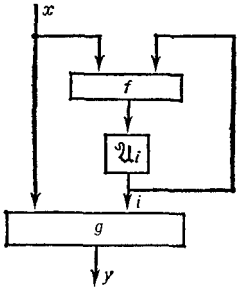


Рис. 6.

$$\varphi((s_1, \ldots, s_l), (a_1, \ldots, a_n)) = (s_1', \ldots, s_n'),$$
$$s_i = \varphi_i(s_i, f_i(a_1, \ldots, a_n, \psi_1(s_1), \psi_2(s_2), \ldots, \psi_l(s_l))),$$
$$\psi((s_1, \ldots, s_l), (a_1, \ldots, a_n)) = (b_1, \ldots, b_m),$$
$$b_j = g_j(a_1, \ldots, a_n, \psi_1(s_1), \ldots, \psi_l(s_l)).$$

Важным примером структурных автоматов являются логич. сети (см. *Автомат конечный*). На рис. 6 представлена канонич. схема автомата $\langle \tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{B}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle$, изоморфного автомату $\mathfrak{A}^0$, диаграмма к-рого изображена на рис. 3, $\tilde{A} = \tilde{S} = \tilde{B} = \{0,1\}$. Автомат $\mathfrak{A}' = \langle \tilde{S}, \tilde{S}, \tilde{S}, \varphi', \psi' \rangle$ — автомат Мура такой, что $\varphi'(1, z) = z$, $\varphi'(0, z) = z$.

Для описания структурных автоматов часто используются каноническое уравнения, т. е. системы вида:

$$u_1(1) = s_0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_l(1) = s_0,$$
$$u_1(t+1) = f_1(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_l(t+1) = f_l(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$y_1(t) = g_1(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m(t) = g_m(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $t=1, 2, \ldots$ — целочисленный параметр, $s_0 \in S$, а функции f_i, $i=1, \ldots, l$, g_i, $i=1, \ldots, m$, и переменные x_r, $r=1, \ldots, n$, принимают значения из множества A. Этой системе соответствует канонич. схема, в к-рой все элементы памяти совпадают: $\mathfrak{A}_i = \langle A, S, B, \varphi, \psi, s_0 \rangle$, где $A = S = B$, $i=1, \ldots, l$; $\varphi(a, a') = a'$, $\psi(a, a') = a$. Функционирование автомата $\mathfrak{A}_i$ содержательно может быть описано следующим образом. Пусть в момент времени t входу $\mathfrak{A}_i$ приписана буква $a(t)$, тогда эта же буква будет приписана выходу $\mathfrak{A}_i$ в момент $t+1$. На рис. 6 представлен автомат $\mathfrak{A}$, канонич. уравнения к-рого имеют вид:

$$u(1) = 0,$$
$$u(t+1) = x(t) + u(t) \pmod 2,$$
$$y(t) = x(t) \vee u(t).$$

В общем случае описание структурных автоматов связано с заданием набора элементарных автоматов и нек-рого класса «правильно устроенных» схем (сетей), причем последние обычно определяются индуктивно.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей, пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962.

В. А. Буевич, С. В. Алешин.

АВТОМАТОВ ТЕОРИЯ — раздел теории управляющих систем, изучающий математич. модели преобразователей дискретной информации, называемые автоматами. С определенной точки зрения такими преобразователями являются как реальные устройства (вычислительные машины, автоматы, живые организмы и т. д.), так и абстрактные системы (математич. машины, аксиоматич. теории и т. д.). А. т. возникла в сер. 20 в. в связи с изучением *автоматов конечных*, как математич. моделей нервных систем, и вычислительных машин. В дальнейшем класс объектов и проблематика А. т. существенно расширились, включив нек-рые понятия и задачи других разделов математики. Наиболее тесно А. т. связана с *алгоритмов теорией*, в частности с теорией абстрактных машин, поскольку автоматы можно рассматривать как частный случай последних.

Большинство задач А. т.— общие для основных видов управляющих систем. К ним относятся задачи анализа и синтеза автоматов, задачи полноты, минимизации, эквивалентных преобразований автоматов и др. Задача анализа состоит в том, чтобы по заданному автомату описать его поведение или по неполным данным об автомате и его функционированию установить те или иные его свойства (см. *Автомата поведение*, *Эксперименты с автоматами*). Задача синтеза автоматов состоит в построении автомата с наперед заданным поведением или функционированием (см. *Синтеза задачи*). К этой задаче примыкают проблемы, связанные с оценкой сложности автоматов, обладающих заданным поведением, а также с построением алгоритмов, дающих в определенном смысле оптимальные автоматы (см. *Автоматов минимизация*). Кроме того, применительно к классам исходных автоматов или автоматных отображений возникает проблема полноты (см. *Функциональные системы*, *Автоматов полные системы*). Задача эквивалентных преобразований ставится как для автоматов, так и для различных заданий их поведения (см. *Эквивалентные преобразования*). Помимо перечисленных постановок задач, общих для многих управляющих систем, в А. т. имеются специфич. проблемы, характерные для автоматов. Так, в зависимости от условий задачи поведение автоматов удобно задавать на разных языках (регулярные выражения, канонич. уравнения, язык логики предикатов и т. д., см. *Автоматов способы задания*), в связи с чем важными задачами являются выбор достаточно удобного адекватного языка и перевод с одного языка на другой. В тесной связи с задачами синтеза и эквивалентных преобразований находится задача минимизации числа состояний автомата, а также получение соответствующих оценок. Для конечных автоматов выработаны достаточно простые алгоритмы, позволяющие по регулярным выражениям получать автоматы, представляющие соответствующие события и имеющие минимальное возможное число состояний (см. *Автоматов минимизация*). Близкий круг вопросов возникает в связи с моделированием поведения автоматов одного класса автоматами другого класса. Здесь также представляют интерес вопросы минимизации моделирующих автоматов и оценки их сложности. Напр., при переходе от недетерминированного автомата (источника), представляющего (порождающего) регулярное множество слов, к конечному автомату, представляющему это же множество, число состояний может возрастать как показательная функция. Специальный раздел А. т. связан с так наз. *экспериментами с автоматами*. Основная задача здесь состоит в том, чтобы получить определенные

сведения о строении автомата путем наблюдения его реакции на те или иные внешние воздействия. При этом возникает большой круг задач, связанный с классификацией экспериментов и с вопросами разрешимости задач определенными видами экспериментов, а также с оценками длин минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач. Понятие эксперимента с автоматами используется также в задачах контроля автоматов (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). В разделах игры автоматов и *автоматов поведение* в случайной среде рассматриваются вопросы взаимодействия автоматов друг с другом или с определенными внешними средами. Многие из перечисленных выше задач могут рассматриваться как массовые (алгоритмические) проблемы. Для конечных автоматов большинство из них имеет положительное решение.

А. т. находит применение как в других областях математики, так и в решении практич. задач. Напр., средствами А. т. доказывается разрешимость нек-рых формальных исчислений. Применение методов и понятий А. т. к изучению формальных и естественных языков привело к возникновению раздела теории алгоритмов — *математической лингвистике*. Понятие автомата может служить модельным объектом в самых разнообразных задачах, благодаря чему возможно применение А. т. в различных научных и прикладных исследованиях.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. ст., пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962; [3] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы, М., 1970.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на множестве автоматов, возникающее в связи с изучением тех или иных содержательных свойств автоматов. Обычно таким свойством является *автоматов поведение*, так что два автомата считаются эквивалентными, если они имеют одинаковое поведение. При этом в качестве поведения автомата, как правило, рассматривается система функций, реализуемых автоматом (см. *Автомат конечный*). Для конечных автоматов такое отношение эквивалентности разрешимо, и потому существует алгоритм минимизации автоматов, т. е. построения для заданного автомата эквивалентного ему автомата с минимальным числом состояний (минимального автомата).

Для определения А. э. удобно использовать понятие эквивалентности состояний: состояния s и s' соответственно автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ (быть может, совпадающих) наз. эквивалентными, если инициальные автоматы $\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{A}_{s'}$ реализуют одну и ту же функцию. Тогда эквивалентность автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ равносильна тому, что для любого состояния автомата $\mathfrak{A}$ найдется эквивалентное ему состояние автомата $\mathfrak{A}'$, и обратно. Автомат является минимальным тогда и только тогда, когда любые два его состояния неэквивалентны. Для любого автомата минимальный автомат определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Алгоритм разрешения этого отношения эквивалентности для конечных автоматов основывается на теореме Мура о том, что состояния s и s' автомата $\mathfrak{A}$ эквивалентны точно тогда, когда функции, реализуемые инициальными автоматами $\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{A}_{s'}$, совпадают на словах длины $n-1$, где n — число состояний автомата $\mathfrak{A}$. В случае, когда состояния s и s' принадлежат, соответственно, двум автоматам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, эта оценка равна $n+n'-1$, где n' - число состояний автомата $\mathfrak{A}'$. На этой же теореме основан известный алгоритм минимизации конечных автоматов, состоящий в построении так наз. приведенного автомата, состояниями к-рого являются классы эквивалентных состояний, а функции переходов и выходов естественно индуцируются соответствующими функциями исходного автомата. Приведенный автомат является минимальным, поскольку любые два его состояния неэквивалентны.

Существуют асимптотич. оценки числа $A(m, n, p)$ минимальных автоматов с n состояниями, m входными и p выходными буквами; при условии, что $m+n+p\to\infty$ для $m\geqslant 3$ имеет место оценка $A(m, n, p)\sim\frac{(np)^{mn}}{n!}$, в то время как $A(2, n, p)\sim e^{-\frac{1}{2p^2}}\frac{(np)^{2n}}{n!}$. Другой задачей, связанной с изучением А. э., является проблема *эквивалентных преобразований* автоматов. Эта задача рассматривалась применительно к двум формам задания конечных автоматов — диаграммам и логическим сетям. В общем виде она состоит в том, чтобы найти систему правил преобразований, удовлетворяющих определенным условиям и позволяющих преобразовать произвольный автомат в любой эквивалентный ему автомат, — т. н. полную систему правил. В обоих случаях правило преобразования представляет собой пару схем (фрагментов диаграмм или логич. сетей), реализующих одинаковые наборы отображений. Применение такого правила состоит в замене одного фрагмента другим. Для конечных автоматов полной системы таких правил не существует. Однако для логич. сетей с ограниченным числом задержек такая система существует.

Основные понятия, проблематика и методы, возникающие при изучении эквивалентности конечных автоматов, как правило, переносятся и на другие типы автоматов с учетом их особенностей.

Лит. см. при статье *Автомат*.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМОРФИЗМ — *изоморфизм* (изоморфное отображение) нек-рой системы объектов на себя. Совокупность всех А. произвольной алгебраич. системы является группой; изучение этой группы служит важным и удобным орудием изучения свойств самой системы (см. *Алгебраической системы автоморфизм*).

АВТОМОРФНАЯ ФОРМА — *мероморфная функция* в ограниченной области D комплексного пространства C^n, удовлетворяющая относительно некоторой *дискретной группы* Γ, действующей в этой области, уравнению:

$$f(\gamma(x))=j_\gamma^{-m}(x)\,f(x),\qquad x\in D,\ \gamma\in\Gamma,$$

где $j_\gamma(x)$ — якобиан отображения $x\to\gamma(x)$, а m — целое число, наз. весом автоморфной формы. Если группа Γ действует без неподвижных точек, то А. ф. определяют дифференциальные формы на факторпространстве D/Γ и обратно. С помощью А. ф. можно строить нетривиальные *автоморфные функции*. Оказывается, что если $g(x)$ — голоморфная и ограниченная в области D функция, то ряд

$$\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(x))\,j_\gamma^m(x)$$

сходится при больших m, давая тем самым нетривиальную А. ф. веса m. Эти ряды наз. тета-рядами Пуанкаре.

Приведенное выше классич. определение А. ф. послужило в последнее время исходным пунктом для весьма широкого обобщения этого понятия в теории дискретных подгрупп групп Ли и групп аделей (см.[3]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974; [2] Зигель К. Д., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [3] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

А. Н. Паршин.

АВТОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — *мероморфная функция* нескольких комплексных переменных, инвариантная относительно некоторой *дискретной группы* Γ аналитич. преобразований данного комплексного многообразия M:

$$f(\gamma(x))=f(x),\quad x\in M,\quad \gamma\in\Gamma.$$

Часто под А. ф. понимают лишь функции, определенные в ограниченной связной области D n-мерного комплексного пространства C^n, инвариантные относительно дискретной группы Γ автоморфизмов этой области.

Факторпространство $X=M/\Gamma$ может быть наделено комплексной структурой и А. ф. суть мероморфные функции на X. Подавляющее большинство изученных случаев относится к ситуации, когда пространство X имеет компактификацию $\overline{X}$. В определение А. ф. естественно включается тогда требование ее продолжимости на все пространство X в виде мероморфной функции. Если $M=D$ (т. е. ограниченная связная область), то это условие необходимо требовать лишь при $n=1$ (если $n>1$ или M/Γ компактно, условие выполняется автоматически). Легко проверяется, что А. ф. образуют поле $K(\Gamma)$, изучение к-рого составляет одну из основных задач теории А. ф.

Наиболее подробно исследованы А. ф. одного переменного. Основы их теории заложены в 19 в. Ф. Клейном (F. Klein [1]) и А. Пуанкаре (H. Poincaré [2]). В качестве многообразия M здесь обычно рассматривают односвязную область. Различаются три случая: $M=P^1(C)$ (комплексная проективная прямая, или сфера Римана), $M=C$ и $M=H$ (верхняя полуплоскость $\{z\in C : \mathrm{Im}\, z>0\}$). В первом случае дискретные группы Γ конечны, кривые M/Γ суть алгебраич. кривые рода 0 (см. *Род кривой*) и, следовательно, А. ф. образуют поле рациональных функций. Примерами А. ф. в случае $M=C$ служат периодич. функции (так, функция $e^{2\pi iz}$ инвариантна относительно группы сдвигов $\{z\to z+n,\ n\in z\}$) и, в частности, эллиптич. функции. Для последних кривая M/Γ компактна и является эллиптич. кривой. Поле $K(\Gamma)$ в этом случае будет полем всех алгебраич. функций на M/Γ. Наконец, для $M=H$ и дискретных групп Γ таких, что H/Γ компактно или имеет конечный объем (в метрике Пуанкаре), H/Γ — алгебраич. кривая, а $K(\Gamma)$ — также поле всех алгебраич. функций на M/Γ. Род g этой кривой можно определить, построив для группы Γ фундаментальную область в виде многоугольника на верхней полуплоскости H (рассматриваемой как плоскость Лобачевского). Основной способ построения А. ф. в этой ситуации состоит в рассмотрении отношения двух *автоморфных форм* одинакового достаточно большого веса. Этот способ принадлежит А. Пуанкаре, к-рый доказал с его помощью приведенные выше результаты о строении полей А. ф. (см. [2], [3], [4]). Аналогом этой конструкции для эллиптич. функций является представление их в виде отношения тета-функций. С помощью теории униформизации можно показать, что таким образом получаются все поля алгебраич. функций от одной переменной [3].

Эти результаты, полученные еще в 19 в., дают полное описание полей А. ф. для $n=1$ и таких групп Γ, что пространство H/Γ имеет конечный объем. Случай групп Γ с бесконечным объемом пространства H/Γ (клейновы группы) гораздо сложнее и интенсивно изучается вплоть до настоящего времени (см. [5], [6]).

В 20 в. основное внимание в теории А. ф. уделяется функциям нескольких переменных. Пожалуй, единственным примером А. ф. от n переменных, детально изученным в 19 в., являются абелевы функции, связанные с абелевыми многообразиями подобно тому, как связаны эллиптич. функции с эллиптич. кривыми [1], [7]. Первым примером А. ф. n переменных в ограниченной области D явились модулярные функции Зигеля [7] (см. *Модулярная группа*). Их область определения представляет собой n-мерное обобщение верхней полуплоскости H и является одним из основных примеров ограниченной симметрич. области. К. Зигелю (C. Siegel) принадлежат также первые общие результаты о произвольных А. ф. в ограниченной области D. Обобщая упомянутую выше конструкцию Пуанкаре построения А. ф., он показал, что в поле $K(\Gamma)$ всегда существует по крайней мере n алгебраически независимых функций.

В дальнейшем основные усилия были направлены на выяснение, для каких областей D и групп Γ выполняет-

ся следующее утверждение, получившее название теоремы об алгебраических соотношениях. Если $f_1, \ldots, f_n$ — алгебраически независимые функции, то поле $K(\Gamma)$ есть конечное алгебраич. расширение поля рациональных функций $C(f_1, \ldots, f_n) \subset K(\Gamma)$.

Теорема эта доказана к настоящему времени (1977) в следующих случаях: 1) если факторпространство D/Γ компактно [7]; 2) если группа Γ псевдовогнута [8]; 3) если D — симметрическая область, а Γ — арифметическая группа. Псевдовогнутая группа определяется следующим образом. Пусть X — подобласть области D, содержащаяся в ней вместе с замыканием. Тогда точка границы $x_0 \in \partial X$ наз. псевдовогнутой, если для любой открытой окрестности U точки x_0 и для любой регулярной в U функции $\varphi(x)$ существует точка $x \in U \cap X$ такая, что $|\varphi(x)| \geqslant |\varphi(x_0)|$. Группа Γ наз. псевдовогнутой, если существует подобласть $X \subset D$ такая, что каждая граничная точка $x \in \partial X$ переводится преобразованием из Γ либо во внутреннюю точку, принадлежащую X, либо в псевдовогнутую точку границы ∂X.

Вопрос о природе и свойствах алгебраич. многообразий, возникающих в теории А. ф. n переменных, в отличие от случая одной переменной, исследован мало.

Важные обобщения понятия А. ф. — автоморфные формы, *мета-функции* и нек-рые др. Все они — частные случаи следующей общей конструкции. Рассматривается *расслоение* L на M и действие на нем группы Γ. Тогда можно определить сечения расслоения L, инвариантные относительно Γ. А. ф. получаются, когда расслоение L и действие группы Γ тривиальны.

При изучении А. ф. выявилась важная роль группы автоморфизмов области D. Именно на этом пути понятия и методы теории А. ф. были перенесены в теорию алгебраических групп, где они играют существенную роль при описании бесконечномерных представлений (см. [10]).

С самого начала своего развития теория А. ф. была богата связями с другими разделами математики. Прежде всего сюда относится алгебраич. геометрия. Помимо упомянутых выше результатов, методы А. ф. важны для исследования многообразий модулей таких объектов, как алгебраич. кривые и абелевы многообразия. Существенное значение имеют А. ф. и для теории чисел. В настоящее время они служат единственным инструментом для изучения дзета-функций алгебраич. многообразий (см. [11]). Другое весьма многообещающее теоретико-числовое направление в теории А. ф. — исследование p-адических А. ф. и автоморфных форм (см. [9]). Наконец, следует упомянуть о применении А. ф. при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области [12], или о построении решений алгебраич. уравнений выше 4-й степени посредством автоморфных функций.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.— Л., 1937, гл. 8; [2] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.—Л., 1936; [4] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [5] Адамар Ж., Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций, пер. с франц., М., 1952; [6] Кра И., Автоморфные формы и клейновы группы, пер. с англ., М., 1975; [7] Зигель К. Л., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [8] Андреотти А., Грауерт Г., Алгебраические поля автоморфных функций, в кн.: Комплексные пространства, М., 1965; [9] Modular functions of one variable, v. 1—3, B., 1973; [10] Жакет Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL (2), пер. с англ., М., 1973; [11] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [12] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950.

А. Н. Андрианов, А. Н. Паршин.

АВТОНИМИЯ — использование выражения (слова) в качестве своего собственного имени. Такое употребление выражения наз. автонимным (в противопо-

ложность его употреблению в своем обычном смысле). Напр., говоря «x входит в уравнение $x+3=2$», мы используем x в качестве имени для буквы x, а $x+3-2$ — в качестве имени для выражения $x+3=2$. Говоря «12 делится на 2», мы употребляем выражение 12 неавтонимно (как имя нек-рого упоминаемого натурального числа), а говоря «12 состоит из двух цифр», мы употребляем выражение 12 автонимно (как имя самого себя).

В естественных языках контекст речи и синтаксис обычно являются достаточно надежными критериями отличения автонимного употребления выражения от неавтонимного его употребления. Однако возможны случаи, когда такое отличение затруднительно. В этих случаях *во избежание* двусмысленностей приходится соблюдать осторожность: отличать объект от его имени (обозначения), отличать употребление нек-рого языкового выражения в качестве названия от его упоминания в качестве предмета высказывания. Различение обозначаемого и обозначающего может быть достигнуто использованием имен, образованных специально для этой цели, или использованием кавычек, причем выражение, заключенное в кавычки, считается отличным от этого же выражения без кавычек. Автонимное употребление выражения означает слияние упоминания выражения с его употреблением в качестве имени; выражение, использованное автонимно,— это и объект, и средство называния этого же объекта.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960, § 8; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957, с. 224—25; [3] Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969, с. 59—60. *А. С. Кузичев.*

АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-рую не входит явно независимое переменное t (время). Общий вид А. с. 1-го порядка в нормальной форме:

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

или, в векторной записи,

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

Неавтономная система $\dot{x} = f(t, x)$ сводится к А. с., если ввести новую неизвестную функцию $x_{n+1} = t$. Исторически А. с. возникли при описании физич. процессов с конечным числом степеней свободы. А. с. наз. также динамическими, или консервативными (см. *Динамическая система*).

Комплексная А. с. вида (1) эквивалентна вещественной А. с. с $2n$ неизвестными функциями

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{Re} x) = \operatorname{Re} f(x), \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{Im} x) = \operatorname{Im} f(x).$$

Содержательная теория комплексных А. с., отличная от вещественного случая, имеет место в случае аналитических $f(x)$ (см. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений*).

Будем рассматривать А. с. с действительными коэффициентами и их действительные решения. Пусть $x = \varphi(t)$ - (произвольное) решение А. с. (1), $\Delta = (t_-, t_+)$ — интервал его определения, $x(t; t_0, x^0)$ - решение с начальными данными $x|_{t=t_0} = x^0$. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(G)$. Точка $x^0 \in G$ наз. положением равновесия (точкой покоя) А. с. (1), если $f(x^0) \equiv 0$. Положению равновесия отвечает решение $\varphi(t) = x^0$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Локальные свойства решений.

1) Если $\varphi(t)$ — решение, то $\varphi(t+c)$ — решение при любом $c \in \mathbb{R}$.

2) Существование: при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in G$ решение $x(t; t_0, x^0)$ существует на нек-ром интервале $\Delta \ni t$.

3) Гладкость: если $f \in C^p(G)$, $p \geqslant 1$, то $\varphi(t) \in C^{p+1}(\Delta)$.

4) Зависимость от параметров: пусть $f = f(x, \alpha)$, $\alpha \in G_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ (G_α область); если $f \in C^p(G \times G_\alpha)$, $p \geqslant 1$, то $x(t; t_0, x^0, \alpha) \in C^p(\Delta \times G_\alpha)$ (подробнее см. [1] [4]).

5) Пусть x^0 не является положением равновесия, тогда существуют окрестности V, W точек x^0, $f(x^0)$, соответственно, и *диффеоморфизм* $y = h(x) : V \to W$ такие, что А. с. имеет вид $\dot{y} = \text{const}$ в W.

Замена переменных $x = \varphi(y)$ в А. с. (1) приводит к системе

$$\dot{y} = (\varphi'(y))^{-1} f(\varphi(y)) \tag{2}$$

($\varphi'(y)$ - *Якоби матрица*).

Глобальные свойства решений.

1) Любое решение $x = \varphi(t)$ А. с. (1) можно продолжить на интервал $\Delta = (t_-, t_+)$. Если $\Delta = \mathbb{R}$, то решение наз. неограниченно продолжаемым; если $t_+ = +\infty$, $t_- > -\infty$, то решение наз. неограниченно продолжаемым «вперед по времени» (аналогично — «назад»). Если $t_+ < +\infty$, то для любого компакта $K \subset \Omega$, $x^0 \in K$, существует $\tau = \tau(K) < t_+$ такое, что точка $x(t; t_0, x^0)$ находится вне K при $t > \tau(K)$ (аналогично при $t_- > -\infty$; см. *Продолжаемость решений дифференциальных уравнений*).

2) Продолжение единственно в том смысле, что любые два решения с общими начальными данными совпадают на общей области их определения.

3) Всякое решение А. с. принадлежит к одному из трех типов: a) непериодическое, причем $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ для любых $t_1 \neq t_2$, $t_j \in \mathbb{R}$; b) периодическое, непостоянное; c) $\varphi(t) \equiv \text{const}$.

Геометрическая интерпретация А.с. Каждому решению $x = \varphi(t)$ ставится в соответствие кривая Γ: $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$, лежащая в области G. Тогда G наз. *фазовым пространством* А. с., Γ — фазовой траекторией, решение интерпретируется как движение по фазовой траектории. Фазовым потоком наз. отображение $g^t : G \to G$ по формуле $g^t x^0 = x(t; 0, x^0)$ (т. е. каждая точка сдвигается за время t вдоль фазовой траектории). На своей области определения фазовый поток удовлетворяет условиям: 1) $g^t x$ непрерывно по (t, x), 2) справедливо групповое свойство: $g^{t_1 + t_2} x = g^{t_1} g^{t_2} x$.

Имеет место теорема Лиувилля: пусть $D \subset G$ область с конечным объемом, v_t — объем области $g^t D \subset G$; тогда

$$\left.\frac{dv_t}{dt}\right|_{t=0} = \int_D \operatorname{div} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Для гамильтоновой системы из (3) следует сохранение фазового объема фазовым потоком. Другой вариант равенства (3): пусть $x = \varphi(t, \alpha)$ — семейство решений А. с. (1), $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in G_\alpha$ — область, $\varphi \in C^1(\Delta \times G_\alpha)$; тогда

$$\frac{d}{dt} \ln I(t, \alpha) = \operatorname{div} f(x), \tag{3'}$$

где $I(t, \alpha) = \det \partial x / \partial (t, \alpha)$.

Структура фазовых траекторий.

1) Любые две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.

2) Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из типов: a) гладкая простая незамкнутая жорданова дуга, b) цикл, т. е. кривая, диффеоморфная окружности, c) точка (положение равновесия). Локальная структура фазовых траекторий в малой окрестности точки, отличной от положения равновесия, тривиальна (см. локальное свойство 5) решений): семейство фазовых траекторий диффеоморфно семейству параллельных прямых. Для линейной А. с. структура фазовых траекторий в окрестности положения равновесия известна, так как

А. с. интегрируема (см. [5]). Для нелинейных А. с. этот вопрос принадлежит к числу не решенных до конца проблем даже при $n=2$ (см. *Качественная теория дифференциальных уравнений*). Одним из аспектов этой проблемы является вопрос об устойчивости положения равновесия (см. *Устойчивости теория*). Ниже приведены нек-рые результаты. Пусть x^0, y^0 — положения равновесия систем (1) и

$$\dot{y}=g(y). \qquad (1')$$

U, V — окрестности точек x^0, y^0. Системы (1) и (1′) наз. эквивалентными в окрестности положения равновесия x^0, y^0, если существуют U, V и взаимно однозначное отображение $h: U\to V$ такие, что $(h\circ f^t)x=(g^t\circ h)x$ (если $x\in U$, $f^tx\in U$, $(g^t\circ h)x\in V$), т. е. при замене $y=h(x)$ траектории А. с. (1) переходят в траектории А. с. (1′). Эквивалентность наз. дифференцируемой (топологической), если h есть диффеоморфизм (гомеоморфизм). Пусть x^0 — положение равновесия А. с. (1), матрица $f'(x^0)$ невырождена и не имеет чисто мнимых собственных значений. Тогда А. с. (1) в окрестности x^0 топологически эквивалентна своей линейной части $\dot{y}=f'(x^0)y$. Полярный пример: А. с. $\dot{x}=Ax$, $\dot{y}=By$, где A, B — постоянные матрицы с чисто мнимыми собственными значениями и $n>2$; неизвестно, когда эти А. с. топологически эквивалентны. Одной из самых фундаментальных задач теории А. с. является задача о структуре всего семейства фазовых траекторий. Наиболее полные результаты получены при $n=2$, но даже в этом случае задача далека от своего разрешения.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [5] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949.

М. В. Федорюк.

АВТОРЕГРЕССИОННЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $\{X_t\}$, значения к-рого удовлетворяют при нек-рых постоянных $a_1, \ldots, a_p$ уравнению *авторегрессии*

$$X_t=a_1X_{t-1}+\ldots+a_pX_{t-p}+Y_t, \qquad (*)$$

где p — нек-рое положительное число, а величины Y_t обычно предполагаются некоррелированными и одинаково распределенными со средним 0 и дисперсией σ^2. Если все нули функции $\varphi(z)=z^p-a_1z^{p-1}-\ldots-a_p$ комплексного аргумента z лежат внутри единичного круга, уравнение (*) имеет решение

$$X_t=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu Y_{t-\nu},$$

где b_ν связаны с a_j соотношением

$$\varphi^{-1}(z)=\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu.$$

Пусть, напр., $\{Y_t\}$ является процессом *белого шума* со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$; тогда единственным А. п., удовлетворяющим уравнению (*), будет стационарный в широком смысле процесс $\{X_t\}$ со спектральной плотностью

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\varphi(e^{i\lambda})|^{-2},$$

если $\varphi(e^{i\lambda})$ не имеет действительных нулей. *Автоковариации* процесса $r_k=\mathsf{E}X_tX_{t-k}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r_k=a_1r_{k-1}+\ldots+a_pr_{k-p}, \quad k>0,$$

и в терминах b_ν имеют вид

$$r_k=\sigma^2\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu b_{\nu+k}.$$

Параметры a_k авторегрессии связаны с коэффициентами *автокорреляции* процесса $\rho_k = r_k/r_0$ матричным соотношением

$$A = R_p^{-1} \rho_p,$$

где $A = (a_1, \ldots, a_p)'$, $\rho_p = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ и R_p — матрица коэффициентов автокорреляции (уравнение Юна — Уокера).

Лит.: [1] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

А. В. Прохоров.

АВТОРЕГРЕССИЯ — регрессионная зависимость значений X_n нек-рой случайной последовательности $\{X_n,\ n=0,\ \pm 1,\ \ldots\}$ от предшествующих значений $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-m}$. Схема линейной А. m-го порядка определяется уравнением линейной *регрессии* X_n по X_{n-k}, $k=1, \ldots, m$, то есть

$$X_n = \beta_1 X_{n-1} + \ldots + \beta_m X_{n-m} + \varepsilon_n, \qquad (*)$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — постоянные, случайные величины ε_n одинаково распределены с нулевым средним, дисперсией σ^2 и некоррелированы (иногда независимы). Схема А. служит полезной стохастич. моделью для описания нек-рых *временных рядов* (впервые схема линейная А. была введена Дж. Юлом, Yule G., 1921) для анализа временных рядов, к-рыми описывается система, осцилирующая под воздействием внутренних сил и случайных ударов извне. Схема А. (*) может быть рассмотрена как случайный процесс особого типа - *авторегрессионный процесс*.

А. В. Прохоров.

АДАМАРА ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула

$$g^*(z, \zeta) = g(z, \zeta) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \int_0^{l_k} \frac{\partial g(\varphi_k(s), z)}{\partial n^{(k)}} \frac{\partial g(\varphi_k(s), \zeta)}{\partial n^{(k)}} \varphi_k(s)\, ds + O(\varepsilon^2)$$

для *Грина функции* $g(z, \zeta)$ n-связной области G ($n=1, 2, \ldots$) комплексной z-плоскости. А. в. ф. имеет место, если: 1) граничные компоненты $\Gamma_k = \{z : z = \varphi_k(s)\}$ области G суть дважды дифференцируемые замкнутые кривые Жордана, s — длина дуги на Γ_k, $0 \leqslant s \leqslant l_k$; 2) числа ε_k, $\varepsilon_k > 0$, настолько малы, что лежащие в G концы отрезков внутренних нормалей $n^{(k)}$ к Γ_k длины $\varepsilon_k \varphi_k(s)$ образуют непрерывно дифференцируемые кривые, ограничивающие n-связную область G^*, $\overline{G^*} \subset G$; 3) ζ есть фиксированная точка в G^*. А. в. ф. представляет функцию Грина $g^*(z, \zeta)$ области G^* через $g(z, \zeta)$ с равномерной оценкой $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon = \max \varepsilon_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, остаточного члена в прямом произведении области G^* и любого компакта из G. А. в. ф. применима и для функции Грина конечной римановой поверхности с краем.

Предложена Ж. Адамаром [1].

Лит.: [1] Hadamard J., «Mém. présentés par divers savants à l'Acad. sci.», 1908, t. 33; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957, гл. 7.

И. А. Александров.

АДАМАРА МАТРИЦА — квадратная матрица $H = \|h_{ij}\|$ порядка n, элементы h_{ij} к-рой суть $+1$ или -1, и такая, что имеет место равенство

$$HH^T = nI_n, \qquad (*)$$

где H^T — транспонированная матрица H, а I_n — единичная матрица порядка n. Равенство (*) эквивалентно утверждению, что любые две строки H ортогональны. А. м. названы по имени Ж. Адамара, доказавшего [1], что определитель $|A|$ матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n, элементы a_{ij} к-рой суть комплексные числа, удовлетворяет неравенству Адамара:

$$|A|^2 \leqslant \Pi_{i=1}^{n} s_{ii},$$

где

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{kj}},$$

a_{kj} — элемент, сопряженный a_{kj} (см. *Адамара теорема* об определителях). В частности, если $|a_{ij}| \leqslant M$, то $|A| \leqslant M^n n^{n/2}$. Отсюда следует, что А. м. есть квадратная матрица из ± 1 порядка n с максимальным абсолютным значением определителя, равным $n^{n/2}$. Свойства А. м.: 1) из $HH^T = nI_n$ следует $H^TH = nI_n$, и наоборот; 2) перестановка строк или столбцов и умножение элементов к.-л. строки или столбца А. м. на -1 сохраняют свойство матрицы быть А. м.; 3) прямое произведение двух А. м. есть снова А. м., порядок к-рой равен произведению порядков сомножителей. Иными словами, если $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ суть А. м. порядков m и n соответственно, то $C = \|a_{ij}B\|$ есть А. м. порядка mn. А. м., у к-рой первая строка и первый столбец состоят из $+1$, наз. нормализованной. Порядок А. м. $n = 1, 2$ или $n \equiv 0 \pmod 4$. Нормализованные А. м. порядков 1 и 2 суть:

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Существование А. м. доказано для нескольких классов значений n (см., напр., [2], [3]). Предположение о существовании А. м. для любого $n \equiv 0 \pmod 4$ остается (70-е гг. 20 в.) недоказанным. Методы построения А. м. рассмотрены в [2]. А. м. используются при построении нек-рых типов *блок-схем* [2] и кодов [3]. Так, А. м. порядка $n = 4t$ эквивалентна адамаровой ($v = 4t-1$, $b = 2t-1$, $\lambda = t-1$)-конфигурации.

Обобщенной А. м. наз. квадратная матрица $H(p, h)$ порядка h, элементами к-рой являются корни p-й степени из единицы и к-рая удовлетворяет равенству

$$HH^{cT} = hI_h,$$

где H^{cT} — транспонированная матрица H с сопряженными элементами, а I_h — единичная матрица порядка h. Для обобщенных А. м. справедливы свойства, аналогичные 1) и 3) (см. [4]).

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. sci. math.», 1893, ser. 2, t. 17, pt. 1, p. 240—246; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Питерсон У., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1964; [4] Butson A. T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 13, № 6, p. 894—898.

С. А. Рукова.

АДАМАРА ТЕОРЕМА — 1) А. т. о лакунах (о пропусках): если номера $n_1, n_2, \ldots$ всех отличных от нуля коэффициентов степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

удовлетворяют условию

$$n_{k+1} > (1+\theta)\, n_k, \qquad (*)$$

где $\theta > 0$, то граница круга сходимости этого ряда является его естественной границей, т. е. функция не может быть аналитически продолжена за пределы этого круга. Условие (*) наз. условием Адамара; лакуны, удовлетворяющие условию Адамара, наз. лакунами Адамара. См. также *Лакунарный ряд*, *Фабри теорема*.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», ser. 4, 1892, t. 8, p. 101—86; [2] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

2) А. т. о целых функциях — теорема о представлении *целых функций* с помощью их нулей, уточняющая *Вейерштрасса теорему* о бесконечных произведениях в случае целой функции $f(z)$ конечного порядка ρ. Если, для простоты, $f(0) \neq 0$, то

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z),$$

где $Q(z)$ — многочлен степени не выше ρ, а

$$P(z) = \Pi_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q\right) = \Pi_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}$$

— *каноническое произведение* Вейерштрасса рода $q \leqslant \rho$, построенное по нулям α_k функции $f(z)$. Иначе говоря, А. т. утверждает, что род целой функции не превосходит ее порядка. Эта теорема использовалась Ж. Адамаром при доказательстве асимптотич. закона распределения простых чисел.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», ser. 4, 1893, t. 9, p. 171—215; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 2; [3] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956.
Е. Д. Соломенцев.

3) А. т. об определителях: пусть D — определитель матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Тогда имеет место неравенство

$$D^2 \leqslant \sum a_{1\varkappa}^2 \sum a_{2\varkappa}^2 \cdots \sum a_{n\nu}^2 \qquad (*)$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, когда

$$a_{\mu 1} a_{\nu 1} + a_{\mu 2} a_{\nu 2} + \ldots + a_{\mu n} a_{\nu n} = 0$$

для каждой пары различных μ, ν, или когда хотя бы один множитель в правой части (*) равен нулю. Геометрич. смысл этой теоремы заключается в том, что объем параллелепипеда в n-мерном пространстве не превышает произведения длин его ребер, исходящих из одной вершины, и что равенство имеет место, когда эти ребра взаимно перпендикулярны или когда длина одного из ребер равна нулю.

Ж. Адамар в [1] рассматривал эту задачу для определителя с комплексными элементами.

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. sci. math.», 1893, ser. 2, t. 17, pt. 1, p. 240—6.
О. А. Иванова.

4) А. т. о трех кругах: если $f(z)$ — голоморфная функция комплексного переменного $z = re^{i\varphi}$ в кольце $0 < r_1 < r < r_2 < \infty$, непрерывная в замкнутом кольце $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, и $M(r) = \max |f(z)|$ при $|z| = r$, то справедливо неравенство

$$\log M(r) \leqslant \frac{\log \frac{r_2}{r}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log M(r_1) + \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log M(r_2),$$

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Это неравенство означает, что $\log M(r)$ есть *выпуклая функция* от $\log r$. А. т. является частным случаем *двух констант теоремы*.

А. т. допускает обобщения в различных направлениях, в частности обобщение для других метрик, для гармонич. и субгармонич. функций.

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. Soc. math. France», 1896, ser. 2, v. 24, p. 199—220; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 6; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937, гл. 3; [4] Соломенцев Е. Д., «Докл. АН АрмССР», 1966, т. 42, № 5, с. 274—78.
Е. Д. Соломенцев.

5) А. т. мультипликационная, А. т. об умножении особенностей: если степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad (1)$$

имеют, соответственно, радиусы сходимости $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, если S_1 и S_2 — звезды Миттаг-Леффлера (см. *Звезда элемента функции*), соответственно, для $f(z)$ и $g(z)$, и если α — множество особых точек функции $f(z)$ на границе звезды S_1, а β — множество особых точек функции $g(z)$ на границе звезды S_2, то степенной ряд

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \qquad (2)$$

имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1 r_2$, а его звезда Миттаг-Леффлера S содержит звезду-произведение $C(CS_1 \times CS_2)$, где CA обозначает дополнение множества A и $A \times B$ — множество всех произведений pq чисел $p \in A$, $q \in B$; кроме того, из угловых и хорошо достижимых точек границы звезды-произведения особыми точками

функции $P(z)$ могут быть лишь точки произведения множеств $\alpha \times \beta$. Первоначальные формулировки теоремы (см. [1], [2]) были несколько отличны от приведенной выше, они потребовали уточнений (см. [2]).

Степенной ряд (2) наз. адамаровским произведением, или адамаровской композицией, степенных рядов (1). Свойства адамаровского произведения, выявленные этой А. т. и в последующих исследованиях (см. [3]), позволяют использовать его в вопросах аналитич. продолжения степенных рядов, когда по коэффициентам ряда вида (2) оказывается возможным сделать нек-рые заключения об особенностях представляемой им аналитич. функции.

Если K — произвольное компактное множество, расположенное внутри звезды-произведения $C(CS_1 \times CS_2)$, то найдется такой замкнутый спрямляемый контур L, расположенный внутри $C(CS_1 \times CS_2)$ и охватывающий K, что для всех $z \in K$ справедливо интегральное представление адамаровского произведения:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(t)\, g\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t}. \qquad (3)$$

Представление (3) также применяется в вопросах аналитич. продолжения.

Лит.: [1] Hadamard J., «Acta math.», 1899, Bd 22, S. 55—63; [2] его же, «Scientia Phys.-math.», 1901, № 12; [3] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АДАМСА МЕТОД — конечно разностный метод решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y' = f(x,\ y), \quad y(x_0) = y_0.$$

При интегрировании по сетке с постоянным шагом $x_n = x_0 + nh$ расчетные формулы имеют вид: а) экстраполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}),$$

б) интерполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}).$$

При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}.

На практике находят приближение из а), а затем приводят одно-два уточнения по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}) + h v_1 f(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(i)});$$

уточнения сходятся при условии $h|v_1| \|(\partial f/\partial y)\| < 1$. Начальные условия $y_1, \ldots, y_k$ для А. м., необходимые для начала вычислений по формулам а), определяются каким-либо специальным образом. Погрешность решения записывается в виде

$$\chi_{k+1} \left(\int_{x_0}^{x_n} \Omega(x,\ t)\, y^{(k+2)}(t)\, dt \right) h^{k+1} + O(h^{k+2}),$$

где $\Omega(x,\ t)$ — решение системы

$$\frac{d\Omega(x,\ t)}{dx} = f_y(x,\ y(x))\, \Omega(x,\ t) \quad \text{при} \quad \Omega(t,\ t) = E.$$

Структура члена $O(h^{k+2})$ такова, что обычно при малых h он равномерно мал по сравнению с главным членом на больших промежутках интегрирования. Это обстоятельство обеспечивает возможность применения А. м. на больших промежутках интегрирования в случае абсолютно устойчивого решения дифференциальной задачи; в частности, в отличие от *Милна метода*, его можно применять для отыскания устойчивых периодич. решений дифференциальных уравнений. Стандартная программа А. м. интегрирования с автоматич. выбором шага существенно сложнее стандартной программы *Рун-*

ге — Кутта метода, вследствие более сложного алгоритма при изменении шага и нестандартного выбора начальных значений y_k.

Для случая уравнений $y'=-ay$, $a>0$, расчетная формула а) имеет вид:

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}(-ay_{n-\lambda}).$$

Это уравнение имеет частные решения $y_n=C\mu^n$, где μ — корень уравнения

$$\mu^{k+1}=\mu^k-ah\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\mu^{k-\lambda}.$$

Если $ah\sum_{\lambda=0}^{k}|u_{-\lambda}|>2$, то среди корней этого уравнения есть корень $|\mu|>1$, и ошибки округления сильно возрастают. При интегрировании с автоматич. выбором шага в ряде случаев это обстоятельство вызывает неоправданное измельчение шага. Однако в большинстве случаев А. м. оказывается несколько более экономичным по сравнению с методом Рунге — Кутта. А. м. предложен впервые Дж. К. Адамсом (J. C. Adams, 1855).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Тихонов А. Н., Горбунов А. Д., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 537—48; [4] Лозинский С. М., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1958, № 5, с. 52—90; [5] Беленький В. З., в сб.: Вычислительные методы и программирование, М., 1965, с. 253—61; [6] Бахвалов Н. С., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, № 5, с. 683—86. *Н. С. Бахвалов.*

АДДИТИВНАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция одного аргумента, удовлетворяющая для любой пары взаимно простых m, n условию

$$f(mn)=f(m)+f(n).$$

А. а. ф. наз. *сильно аддитивной*, если $f(p^\alpha)=f(p)$ для всех простых p и всех натуральных α. А. а. ф. наз. *вполне аддитивной*, если условие $f(mn)=f(m)+f(n)$ справедливо не обязательно для взаимно простых m, n; в этом случае $f(p^\alpha)=\alpha f(p)$.

Примеры. Функция $\Omega(m)$ — число всех простых делителей числа m (кратные делители считаются столько раз, какова их кратность) — А. а. ф.; функция $\omega(m)$ — число различных простых делителей числа m — сильно А. а. ф.; функция $\log m$ — вполне А. а. ф. *И. П. Кубилюс.*

АДДИТИВНАЯ ГРУППА кольца — группа, образуемая всеми элементами данного кольца относительно операции сложения в кольце. А. г. кольца всегда абелева. *О. А. Иванова.*

АДДИТИВНАЯ КАТЕГОРИЯ — категория C, в к-рой для любых двух объектов X и Y на множестве морфизмов $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ определена структура абелевой группы таким образом, что композиция морфизмов

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y)\times\mathrm{Hom}_C(Y, Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_C(X, Z)$$

является билинейным отображением. Кроме того, требуется, чтобы в C существовал *нулевой объект* (или нуль), а также произведение $X\times Y$ любых двух объектов X и Y.

В А. к. существует прямая сумма $X\oplus Y$ любых двух объектов, к-рая изоморфна их произведению $X\times Y$. *Двойственная категория* к А. к. также является А. к.

Функтор $F: C\to C'$ из А. к. C в А. к. C' наз. *аддитивным*, если для любых объектов X и Y категории C отображение $F: \mathrm{Hom}_C(X, Y)\to\mathrm{Hom}_C\{F(X), F(Y)\}$ является гомоморфизмом соответствующих абелевых групп. А. к. наз. *предабелевой*, если для любого морфизма существует *ядро* и *коядро*.

Если для морфизма $u: X\to Y$ в А. к. существует образ $\mathrm{Im}(u)$ и кообраз $\mathrm{Coim}(u)$, то определен единственный морфизм $u: \mathrm{Coim}(u)\to\mathrm{Im}(u)$ такой, что морфизм u разлагается в композицию

$$X\longrightarrow\mathrm{Coim}(u)\longrightarrow\mathrm{Im}(u)\longrightarrow Y.$$

Каждая абелева категория по определению аддитивна. Примерами аддитивных неабелевых категорий могут служить категория топологич. модулей над заданным топологич. кольцом относительно морфизмов, являющихся непрерывными линейными отображениями, а также категория абелевых групп Γ с фильтрацией $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_n = \{0\}$ относительно морфизмов, являющихся гомоморфизмами групп, сохраняющими фильтрацию.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] Gruson L., «Bull. sci. math.», 1966, v. 90, № 1, p. 17—40. *И. В. Долгачев.*

АДДИТИВНАЯ ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ — проблема, заключающаяся в нахождении асимптотич. значения сумм вида:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m \leqslant n} \tau_{k_1}(m)\,\tau_{k_2}(m+a), \\ &\sum_{m < n} \tau_{k_1}(m)\,\tau_{k_2}(n-m), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\tau_k(m)$ — количество различных разложений целого числа m на k множителей, считая и порядок, k_1 и $k_2 \geqslant 2$ — натуральные числа, a — фиксированное целое число, отличное от нуля, n — достаточно большое натуральное число. В частности, $\tau_2(m) = \tau(m)$ — *делителей число* числа m. Суммы вида (1) выражают, соответственно, количества решений уравнений

$$x_1 x_2 \ldots x_{k_2} - y_1 y_2 \ldots y_{k_1} = a,$$
$$x_1 x_2 \ldots x_{k_1} + y_1 y_2 \ldots y_{k_2} = n.$$

Частные случаи А. п. д. ($k_1 = k_2 = 2$, $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$) рассматривались в [1]—[3]. А. п. д. при $k_1 = 2$ и любом натуральном k_2 была решена с помощью *дисперсионного метода* Ю. В. Линником.

Лит.: [1] Ingham A., «J. Lond. Math. Soc.», 1927, v. 2, p. 202—8; [2] Esterman T., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1930, v. 31, p. 123—33; [3] Hooly C., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1957, v. 7, p. 396—413. *Б. М. Бредихин.*

АДДИТИВНАЯ РАВНОМЕРНАЯ СТРУКТУРА топологического тела K — равномерная структура его аддитивной группы. При этом базис окружений равномерной структуры коммутативной топологич. группы K образуют множества $\tilde{V}$ всех таких пар (x, y), что $x - y \in V$, где V — произвольная окрестность нуля. Покрытие топологич. тела K будет равномерным для А. р. с., если в него можно вписать покрытие вида $\{V_y | y \in K\}$, где V — произвольная окрестность нуля и $V_y = \{x + y | x \in V\}$. В частности, базис А. р. с. числовой прямой образуют все покрытия, каждое из к-рых состоит из всех интервалов фиксированной длины. Пополнением тела рациональных чисел по его А. р. с. является числовая прямая.

Равномерная структура группы $\mathbb{R}^n$, называемая ее А. р. с., является произведением равномерных структур ее сомножителей $\mathbb{R}$. Базис ее составляют все покрытия, каждое из к-рых образовано всеми (открытыми) шарами фиксированного радиуса. *В. В. Федорчук.*

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ — одна из ветвей современной алгебры. Главная задача А. т. и.— представление любого *идеала* кольца (или другой алгебраич. системы) в виде пересечения конечного числа идеалов специального вида (примарных, терциарных, примальных, одночастных и др.). При этом вид представлений выбирается так, что: 1) для любого идеала существует нужное представление, или, что то же, справедлива нек-рая теорема «существования»; 2) выбранные представления должны быть единственны с точностью до каких-то ограничений, или, что то же, выполняется нек-рая теорема «единственности». Начало А. т. и. было положено в 20—30-х гг. 20 в. работами Э. Нётер [1] и В. Крулля [2].

Все особенности А. т. и. отчетливо проявляются в случае колец. Пусть R — нётерово кольцо, т. е. — ас-

социативное кольцо с условием максимальности для идеалов. Если A — идеал в R, то существует наибольший идеал N кольца R, обладающий свойством: $N^k \subseteq A$ для нек-рого натурального $k \geqslant 1$. Этот идеал N наз. примарным радикалом идеала A (в кольце R) и обозначается через $\mathrm{pr}(A)$. Идеал Q кольца R наз. примарным, если для любых двух идеалов A, B в R выполняется условие:

$$AB \subseteq Q, \quad A \not\subseteq Q \Rightarrow B \subseteq \mathrm{pr}(Q).$$

Для примарных идеалов верна теорема пересечения: пересечение любых двух примарных идеалов с одним и тем же примарным радикалом P само есть примарный идеал с тем же радикалом P. С помощью этой теоремы доказывается теорема существования: если кольцо R коммутативно, то для любого идеала $A \neq R$ существует такое представление идеала A в виде пересечения конечного числа примарных идеалов A_i:

$$A = A_1 \cap \ldots \cap A_n, \tag{1}$$

что ни один из идеалов A_i не содержит пересечения остальных, и примарные радикалы $\mathrm{pr}(A_i)$ попарно различны. Такие представления наз. несократимыми, или примарно редуцированными (см. [1], [4]). Для этих представлений верна теорема единственности: если (1) и

$$A = B_1 \cap \ldots \cap B_m \tag{2}$$

— два примарно редуцированных представления идеала A кольца R, то $m=n$ и $\mathrm{pr}(A_i) = \mathrm{pr}(B_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, при надлежащей перенумеровке идеалов B_i.

Именно А. т. и. нётеровых коммутативных колец (классич. А. т. и.) нашла многочисленные применения в различных разделах математики.

Если кольцо R некоммутативно, то теорема «существования», указанная выше, перестает быть верной, в то время как теоремы «единственности» и «пересечения» верны. Этот факт начиная с 30-х гг. 20 в. привел к поискам такого обобщения классич. примарности на некоммутативный случай, при к-ром оставалась бы справедливой и теорема «существования». Было найдено нужное обобщение (см. [4]) — терциарность (см. *Терциарный идеал*). В дальнейшем было показано, что при нек-рых естественных ограничениях терциарность является единственным «хорошим» обобщением понятия примарности (см. [6], [7], [8]).

В 60-е гг. 20 в. А. т. и. развивалась в рамках теорий решеток, систем с частными и мультипликативных систем (см. [4], [5], [6]), что дало толчок развитию, напр., А. т. и. неассоциативных колец, нормальных делителей группы и подмодулей модуля.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, H. 1—2, S. 24—66; [2] Krull W., там же, 1929, Bd 101, H. 4, S. 729—744; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] Lesieur L., Croisot R., Algèbre noethérienne non commutative, P., 1963; [5] Murata K., «J. Inst. Pol. Osaka City Univ.», 1959, v. A10, № 2, p. 91—115; [6] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1967, т. 31, № 5, с. 1057—90; [7] Riley J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 105, № 2, p. 177—201; [8] Гоян И. М., Рябухин Ю. М., «Матем. исследования», 1967, т. 2, в. 1, с. 14—25; [9] Fuchs L., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 1, № 1, p. 1—6; [10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—180. *В. А. Андрунакиевич.*

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются задачи о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида, а также алгебраич. и геометрич. аналоги таких задач, относящиеся к полям алгебраич. чисел и к множествам точек решетки. Эти задачи наз. аддитивными задачами. Обычно рассматриваются аддитивные задачи о разложении больших чисел.

К классич. проблемам А. т. ч. относятся: задача о представлении числа суммой четырех квадратов, девяти

кубов и т. д. (см. *Варинга проблема*); задача о представлении числа в виде суммы не более трех простых (см. *Гольдбаха проблема*); задача о представлении числа в виде суммы простого и двух квадратов (см. *Харди — Литлвуда проблема*) и другие аддитивные проблемы. Для решения задач А. т. ч. применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы, а также методы, основанные на вероятностных соображениях. В зависимости от методов решения, аддитивные задачи входят составной частью в другие разделы теории чисел — аналитич. теорию чисел, алгебраич. теорию чисел, вероятностную теорию чисел.

Первые систематич. результаты в А. т. ч. были получены Л. Эйлером (L. Euler, 1748), к-рый исследовал с помощью степенных рядов разложения целых чисел на положительные слагаемые; в частности, им была рассмотрена задача о разложении числа на заданное количество слагаемых.

Многие классич. задачи А. т. ч. решаются методом редукции к производящим функциям, к-рый восходит к Л. Эйлеру и лежит в основе аналитич. методов, развитых Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. И. Литлвудом (J. E. Littlewood) и И. М. Виноградовым. Исходной является идея сопоставления заданным последовательностям $A_i=\{a_i\}$ (где $a_i\geqslant 0$ — целое, $i=1, 2, 3, \ldots$) степенных рядов

$$f_i(z)=\sum\nolimits_{0\leqslant a_i<\infty} z^{a_i}$$

с производящей функцией

$$F(z)=\prod\nolimits_{i=1}^{k} f_i(z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} r(n)\, z^n,$$

где $r(n)=r_{k,A}(n)$ — количество представлений числа n в виде

$$n=a_1+a_2+\ldots+a_k,\quad a_i\in A_i,\quad A=\{A_1, A_2, \ldots\}.$$

При этом $r(n)$ вычисляется при помощи интеграла Коши. В методе Виноградова степенные ряды заменяются тригонометрич. суммами

$$f_i(\alpha)=\sum\nolimits_{0\leqslant a_i\leqslant n}\exp(2\pi i\alpha a_i),$$

$$r(n)=\int_0^1 F(\alpha)\exp(-2\pi i n\alpha)\, d\alpha.$$

Из $r(n)$ выделяется главная часть, состоящая из интервалов, распространенных на окрестности нек-рых рациональных точек. Вместо аналитич. свойств $F(z)$, требующих в ряде задач А. т. ч. привлечения гипотез, аналогичных *Римана гипотезе*, центральную роль при вычислении $r(n)$ играют чисто арифметич. оценки тригонометрич. сумм по методу Виноградова и законы распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях, получаемые трансцендентными методами теории L-функций Дирихле. Устанавливается, что в зависимости от k либо $r(n)\neq 0$ для всех $n\geqslant 1$, либо $r(n)\neq 0$ для достаточно больших n $(n\geqslant n_0(A))$, либо для почти всех n выполняется соотношение $r(n)\neq 0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sum\nolimits_{n\leqslant x,\ r(n)\neq 0} 1\Big)/x=1,$$

или, наконец, для $r(n)$ имеется асимптотич. формула. Наименьшее число k, удовлетворяющее одному из перечисленных условий, обозначается соответственно $g(A)$, $G(A)$, $G_0(A)$, $k_0(A)$. В случае $\{a_i\}=\{p\}$, где $\{p\}$ — последовательность простых чисел, при $k=3$ получается теорема Виноградова: всякое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел; при $k=2$ — теорема Чудакова: почти все четные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел.

Нек-рые задачи А. т. ч. решаются при помощи исследования структуры множеств, получающихся в резуль-

тате суммирования последовательностей $A_i\{a_i\}$, заданных лишь их плотностями $d(A_i)=\inf_n A_i(n)/n$, где $A_i(n)=\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n}1$. Из положительности $d(A_i)$ при $A_1=A_2=\ldots=A_k=A$ уже следует, что $g(A)<\infty$. Применение этого факта к задачам А. т. ч., в к-рых суммируются последовательности нулевой плотности, осуществляется путем конструирования из данных последовательностей новых последовательностей с положительной плотностью. Ведущую роль при этом играют *решета методы*, с помощью к-рых доказывается положительность $d(A_i)$. Таким способом Л. Г. Шнирельманом доказана теорема о представимости натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа простых слагаемых, Ю. В. Линником найдено элементарное решение проблемы Варинга.

Элементарные методы решета, принадлежащие В. Бруну (см. *Бруна решето*) и А. Сельбергу (см. *Сельберга решето*), приводят в ряде задач А. т. ч. к результатам, недоступным пока современным аналитич. средствам. Однако наиболее законченные решения нек-рых задач А. т. ч. получаются путем комбинирования аналитических и элементарных методов. В методах решета принцип высеивания простых чисел из натурального ряда (см. *Эратосфена решето*) распространяется на совокупности последовательностей. Так, одновременное высеивание с должной точностью из последовательностей $\{m\}$ и $\{2n-m\}$ простых чисел, $\leqslant n^{\theta_1}$ и, соответственно, $\leqslant n^{\theta_2}$ (где $\theta_1<1$ и $\theta_2<1$ — надлежащим образом выбранные положительные константы), приводит к решению так наз. квазипроблемы Гольдбаха — Эйлера о представлении четного числа суммой двух чисел, одно из к-рых имеет не более k_1, а другое — не более k_2 простых множителей.

В 1959 Ю. В. Линником при помощи созданного им *дисперсионного метода* была решена проблема Харди — Литлвуда, а именно, было доказано (см. [2]), что всякое достаточно большое натуральное число может быть представлено в виде суммы простого числа и двух квадратов целых чисел. Дисперсионным методом был решен ряд так наз. бинарных проблем, связанных с нахождением числа $Q(n)$ решений уравнения $\alpha+\beta=n$, где α и β пробегают заданные последовательности чисел, достаточно хорошо распределенные в арифметич. прогрессиях. Для метода Линника характерно использование элементарных теоретико-вероятностных понятий, примененных П. Л. Чебышевым в его выводе закона больших чисел. С этой целью данное бинарное уравнение сводится к большому числу вспомогательных уравнений, для к-рых сопоставляются ожидаемые $(S_i(n))$ и истинные $(Q_i(n))$ количества решений уравнений. Если подсчет дисперсии показывает, что $Q_i(n)$ «в среднем» мало отличаются от $S_i(n)$, то $Q(n)=\Sigma S_i(n)$ (с допустимой погрешностью). Дисперсионный метод был использован также для исследования общего уравнения Харди — Литлвуда.

Область применения дисперсионного метода пересекается с областью применения метода *большого решета*, разработанного Ю. В. Линником в 1941. Этот метод позволяет высеивать последовательности при помощи простых чисел с возрастающим числом выбрасываемых вычетов. Фактически метод большого решета является следствием законов распределения слабо зависимых случайных величин.

В А. т. ч. существуют задачи, систематич. изучение к-рых относится к другим разделам теории чисел: проблема представимости целых чисел квадратичными формами и формами высших степеней; исследование диофантовых уравнений, допускающих трактовку с позиций общей А. т. ч.

В современной теории чисел интенсивно развиваются различные направления А. т. ч., наблюдается тенден-

ция к перенесению проблем и методов А. т. ч. на произвольные поля алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Ostmann H. H., Additive Zahlentheorie, Bd 1 -2, B., 1956; [5] Чудаков Н. Г., «Успехи матем. наук», 1938, вып. 4, с. 14 -33; [6] Бредихин Б. М., там же, 1965, т. 20, в. 2 (122), с. 89—130. *Б. М. Бредихин.*

АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, конечно аддитивная функция (множества, области), - действительная функция μ, определенная на системе множеств E и такая, что

$$\mu\left(\sum E_i\right) = \sum \mu\left(E_i\right)$$

для всякого конечного числа попарно непересекающихся множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ из E, объединение к-рых также принадлежит E. Особую роль среди А. ф. играют *счетно аддитивные функции.* *А. П. Терехин.*

АДДИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ — подмодуль r прямой суммы $A \oplus B$ двух модулей A и B над нек-рым кольцом R. Каждое А. о. можно рассматривать, таким образом, и как (неоднозначное) отображение $r : A \to B$, точнее как «многозначный» гомоморфизм, т. е. гомоморфизм r^0 подмодуля $\mathrm{Def}\, r$ в фактормодуль $B/\mathrm{Ind}\,(r)$, где

$$\mathrm{Def}\, r = \{a \in A \mid (\exists b \in B),\ a,\ b \in r\},$$
$$\mathrm{Ker}\, r = \{a \in A \mid (a,\ 0) \in r\},$$
$$\mathrm{Ind}\, r = \mathrm{Ker}\, r^{-1},$$

здесь $r^{-1} : B \to A$ — обратное к А. о. r отношение, состоящее из всех таких пар $(b,\ a) \in B \oplus A$, что $(a,\ b) \in r$. Обратно, если даны подмодуль $S \subset A$, фактормодуль B/L модуля B и гомоморфизм $\beta : S \to B/L$, то существует и притом единственное А. о. $r : A \to B$ такое, что $r^0 = \beta$.

Если даны два А. о. $r : A \to B$ и $s : B \to C$, то, как и для других бинарных отношений, может быть определено произведение А. о. $sr : A \to C$ (это множество всех пар $(a,\ c) \in A \oplus C$ таких, что существует элемент $b \in B$, для к-рого $(a,\ b) \in r$ и $(b,\ c) \in s$). Это умножение ассоциативно (там, где оно определено), более того, А. о. образуют *категорию с инволюцией* $r \to r^{-1}$.

А. о. используются для естественного определения связывающих гомоморфизмов для точных последовательностей комплексов. Аналогичные рассмотрения могут быть проведены не только в категории модулей, но и в любой абелевой категории.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Пуппе Д., «Математика», 1964, т. 8, № 6, с. 109—139. *А. В. Михалев.*

АДДИТИВНОСТЬ — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Напр., А. объема означает, что объем целого тела равен сумме объемов составляющих его частей. См. *Аддитивная функция, Счетно аддитивная функция.*

АДДИТИВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ — проблемы теории чисел о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида. Решение классич. А. п. привело к созданию новых методов в теории чисел. К классич. А. п. относятся:

1) *Гольдбаха проблема* о представлении нечетных натуральных чисел, больших 5, суммой трех простых и проблема Эйлера — Гольдбаха о представлении четных чисел, больших 2, суммой двух простых (поставлены в 1742).

2) *Варинга проблема* (1770) о представлении всякого натурального числа в виде суммы $s = s(k)$ неотрицательных k-х степеней с фиксированным $k \geqslant 1$.

Другими А. п. являются, напр., следующие.

3) Проблема представления натуральных чисел суммой ограниченного числа простых (ослабленная проблема Гольдбаха).

4) *Харди — Литлвуда проблема* о представлении всякого целого числа, большего 1, в виде суммы простого и двух квадратов (сформулирована в 20-х гг. 20 в.).

5) Задачи о представлении всех достаточно больших четных чисел суммами двух чисел с ограниченным числом простых сомножителей.

6) Задачи о представлении целых чисел квадратичными формами с тремя и четырьмя переменными и аналогичные задачи.

Для решения А. п. применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы (см. *Аддитивная теория чисел*). Значительная часть А. п. может быть сведена к двум классам:

а) Тернарные аддитивные проблемы типа $n=\alpha+\beta+\gamma$, где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметич. прогрессиях последовательностям целых чисел, γ принадлежит последовательности, может быть и редкой, но с хорошим поведением нек-рых, соответствующих ей, тригонометрич. сумм.

б) Бинарные аддитивные проблемы типа $n=\alpha+\beta$ с теми же условиями для α и β, что и в а).

Универсальным средством решения тернарных А. п. для достаточно больших n является общий аналитич. метод Харди — Литлвуда — Виноградова в форме метода тригонометрических сумм (см. *Виноградова метод*). Бинарные А. п. обычно не могут быть решены этими методами. Для решения таких А. п. применяются различные варианты элементарного решета (см. *Решета метод*). Особенно сильные результаты получаются при помощи *большого решета* и *дисперсионного метода* Ю. В. Линника. А. п. типа б) также являются бинарными. Они исследуются своеобразными арифметико-геометрич. методами теории квадратичных форм.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

Б. М. Бредихин.

АДДИЦИОННАЯ ТЕОРЕМА для веса: если би компакт X представим в виде объединения множества бесконечной мощности $\leqslant\tau$ своих подпространств веса $\leqslant\tau$, то вес X не больше τ. А. т. (справедливость ее предполагалась в [1]) установлена в [3] для $\tau=\aleph_0$, в полном объеме — в [4]. См. *Вес* топологич. пространства.

Лит.: [1] Alexandroff P., Urysohn P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amst., 1929; [2] Engelking R., Outline of general topology, Amst.—Warsz., 1968; [3] Смирнов Ю. М., «Fundam. math.», 1956, t. 43, № 3, p. 387—93; [4] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41.

А. В. Архангельский.

АДЕЛЬ — элемент группы аделей, т. е. топологич. прямого произведения

$$\Pi_{v\in V} G_{k_v}(G_{O_v})$$

групп G_{k_v} с отмеченными открытыми подгруппами G_{O_v}. Здесь G_k — *линейная алгебраическая группа*, определенная над *глобальным полем* k, V — множество всех неэквивалентных *нормирований* поля k, k_v — пополнение k относительно $v\in V$, O_v — кольцо целых элементов в k_v. Группа А. алгебраич. группы G обозначается через G_A. Так как все группы G_{k_v} локально компактны, а G_{O_v} компактны, то G_A — локально компактная группа.

Примеры. 1) Если G_k — аддитивная группа k^+ поля k, то G_A обладает естественной структурой кольца, к-рое наз. кольцом аделей поля k и обозначается A_k. 2) Если G_k — мультипликативная группа k^* поля k, то G_A наз. группой иделей поля k (группа иделей является группой единиц в кольце аделей A_k). 3) Если $G_k=GL(n, k)$ — полная линейная груп-

па над k, то G_A состоит из таких элементов $g=(g_v)\in \in\Pi_{v\in V}G_v$, что $g_v\in GL(n, O_v)$ для почти всех нормирований v.

Понятие группы А. было впервые введено К. Шевалле (C. Chevalley) в 30-х гг. 20 в. для полей алгебраич. чисел в связи с потребностями теории полей классов. Спустя 20 лет оно было обобщено М. Кнезером (M. Kneser) и Ц. Тамагава (T. Tamagawa) на алгебраич. группы (см. [1], [2]). Последние заметили, что основные результаты об арифметике квадратичных форм над числовыми полями удобно переформулировать на языке группы А.

Образ диагонального вложения G_k в G_A является дискретной подгруппой в G_A и наз. подгруппой главных аделей. Если ∞ — множество всех архимедовых нормирований k, то

$$G_{A(\infty)}=\Pi_{v\in\infty}G_{k_v}\times\Pi_{v\notin\infty}G_{O_v}$$

наз. подгруппой целых аделей. Если $G_k\backslash k^*$, то число различных двойных классов смежности вида $G_kxG_{A(\infty)}$ группы А. G_A конечно и равно числу *классов идеалов поля* k. Естественно возникающий вопрос о конечности числа таких двойных классов для произвольной алгебраич. группы G связан с теорией приведения для подгруппы главных А., т. е. с конструкцией фундаментальной области для факторпространства G_A/G_k. В [5] доказано, что G_A/G_k тогда и только тогда компактно, когда группа G является k-анизотропной (см. *Анизотропная группа*). Более того, решен вопрос о том, когда над полем алгебраич. чисел факторпространство G_A/G_k имеет конечный объем в *Хаара мере*. Так как G_A локально компактна, то такая мера всегда существует и объем G_A/G_k в мере Хаара конечен тогда и только тогда, когда группа G не имеет рациональных k-характеров (см. *Характер* алгебраич. группы). Величина $\tau(G)$ объема G_A/G_k представляет важный арифметич. инвариант алгебраич. группы G (см. *Тамагавы число*). Опираясь на эти результаты, доказано (см. [5]), что для произвольной алгебраич. группы G имеет место разложение

$$G_A=\bigcup_{i=1}^{m}G_kx_iG_{A(\infty)}.$$

Для случая, когда k — функциональное поле, также доказана конечность числа двойных классов смежности указанного вида для группы А. алгебраич. группы и построен аналог теории приведения [6]. Относительно разнообразных арифметич. применений группы А. см. [4], [7].

Лит.: [1] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969, с. 44—55; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология. т. 11, М., 1973, с. 5—37; [5] Borel A., в кн.: Publ. Math. I.H.E.S., 1963, № 16, p. 5—30; [6] Harder G., «Invent. math.», 1969, v. 7, № 1, p. 33—54; [7] Платонов В. П., «Труды матем. института им. Стеклова», 1973, т. 132, с. 162—68; [8] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

В. П. Платонов.

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ — термин физич. происхождения с математически не вполне точным содержанием. Обычно А. и. определяются как количественные характеристики движения *гамильтоновой системы*, почти не изменяющиеся при адиабатическом (т. е. очень медленным по сравнению с характерным масштабом времени для движения в системе) изменении ее параметров (к-рое может продолжаться столь долго, что значения самих этих параметров, в отличие от А. и., значительно изменяются). Так, для простейшей системы

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-\omega^2(\varepsilon t)\,x, \qquad (*)$$

где ε — малый параметр, а $\omega(s)$ — положительная достаточно гладкая функция, А. и. служит

$$I=\omega x^2+\frac{v^2}{\omega}.$$

При $\omega=\text{const}$ система (*) описывает обычный гармонич. осциллятор с частотой ω; таким образом, в данном случае при медленном (по сравнению с периодом колебания) изменении параметров системы ее энергия $(v^2+\omega^2x^2)/2$ меняется пропорционально частоте. Как и в этом примере, обычно подразумевается, что если бы параметры вообще не изменялись, то рассматриваемая гамильтонова система была бы вполне интегрируемой и ее движения были бы квазипериодическими (в данном примере — просто периодическими); известны и другие обобщения. Во многих работах математиков или специалистов по небесной механике, посвященных гамильтоновым системам, близким к вполне интегрируемым, термин «А. и.» не используется, хотя полученная там информация позволяет утверждать, что те или иные величины в том или ином случае являются А. и.

«Приближенное сохранение» А. и. $I(t)$ означает, что при всех рассматриваемых t разность $I(t)-I(0)$ остается малой. (При этом производная $dI(t)/dt$ вполне может быть величиной того же порядка, что и производные других параметров системы, лишь бы с течением времени изменения А. и. не накапливались.) Такое приближенное сохранение может иметь место либо на очень большом, но конечном промежутке времени (в р е м е н н ы́ е А. и.), либо на всей бесконечной оси t (с т а ц и о н а р н ы е, или в е ч н ы е, А. и.; см. [1]). Слова «медленное изменение параметров системы» можно уточнять двумя способами: а) функция Гамильтона H явно зависит от времени t (система неавтономна), но производная dH/dt мала; б) рассматриваемая система с канонич. переменными p, q представляет собой подсистему в бóльшей системе с переменными p, q, p', q', к-рая уже автономна и такова, что p', q' либо изменяются медленно, либо их изменение слабо влияет на подсистему.

При всех этих подстановках существование А. и. можно утверждать лишь при различных дополнительных предположениях, к-рым трудно дать отчетливую общую формулировку (см., напр., [1]). Временны́е А. и. для систем описанного выше типа фактически относятся к асимптотич. методам теории возмущений (при более общей постановке также имеются нек-рые строгие результаты, см. [4]). При доказательстве временно́й асимптотич. инвариантности к.-л. величины $I(t)$ обычно строится другая величина $J(t)$ с теми свойствами, что значения $I(t)$ осциллируют возле $J(t)$, а $dJ(t)/dt$ имеет более высокий порядок малости, чем производные других параметров системы. Так, в примере (*) для $J=I+\varepsilon\omega' xv'\omega^2$ (штрих обозначает производную от ω по аргументу $s=\varepsilon t$) непосредственное дифференцирование дает $\frac{dJ(t)}{dt}=O(\varepsilon^2)$; это гарантирует, что I — временно́й А. и. Существование вечных А. и. в случае а) при сколько-нибудь общем характере зависимости H от t (исключающем, в частности, периодичность или существование пределов при $t\to\pm\infty$) сомнительно. Для случая б) вопрос о вечных А. и. связан с малыми знаменателями (см. [2]).

Исторически А. и. играли важную роль в квантовой теории Бора — Зоммерфельда, где имелся рецепт: величины, подлежащие квантованию,— А. и. С созданием последовательной квантовой механики этот рецепт потерял значение. В современной физике А. и. используются при исследовании движения заряженных частиц в электромагнитных полях (см. [3]). Здесь чаще всего фигурирует отношение $v_\perp^2/H$, где H — величина напряженности магнитного поля, $v_\perp$ — компонента скорости частицы, лежащая в плоскости, перпендикулярной к вектору H; это отношение является А. и. при условии, что магнитное поле мало изменяется по длине *ларморовского радиуса*.

Кроме того, в квантовой механике при адиабатическом изменении состояния нек-рые величины сохраняют свои значения (напр., квантовые числа), исключая процессы, приводящие к вырожденным состояниям системы. Поэтому в квантовой механике тоже можно говорить об А. и., однако они не играют в ней особой роли и даже сам этот термин там обычно не вводится.

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Андронова А. А., Леонтович М. А., «Журнал Русского физико-химического о-ва», 1928, т. 60, № 5, с. 413—19; [2] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, № 6, с. 91—192; [3] Нортроп Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц, пер. с англ., М., 1967; [4] Kasuga T., «Proc. Japan. Acad.», 1961, v. 37, № 7, p. 366 -82.

Д. В. Аносов, А. П. Фаворский.

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ — течение, при к-ром отсутствует теплообмен между различными участками жидкости и окружающими ее телами. Если течение сжимаемой жидкости является адиабатическим и непрерывным, то энтропия элемента жидкости постоянна. Если движение установившееся, т. е. характеристики поля течения не зависят от времени, то для любого элемента жидкости сумма энтальпии и кинетич. энергии не изменяется.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Основы газовой динамики, пер. с англ., М., 1963.

А. П. Фаворский.

АДИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ - *линейная топология* кольца A, в к-рой фундаментальная система окрестностей нуля образована степенями $\mathfrak{A}^n$ нек-рого двустороннего идеала $\mathfrak{A}$. В этом случае топология наз. $\mathfrak{A}$-адической, а идеал $\mathfrak{A}$ — идеалом определения топологии. Замыкание любого множества $F \subset A$ в $\mathfrak{A}$-адической топологии равно $\bigcap_{n\geqslant 0}(F+\mathfrak{A}^n)$; в частности, топология отделима тогда, и только тогда, когда $\bigcap_{n\geqslant 0}\mathfrak{A}^n=(0)$. Отделимое пополнение $\hat{A}$ кольца A в $\mathfrak{A}$-адической топологии изоморфно проективному пределу $\varprojlim(A/\mathfrak{A}^n)$.

Аналогично определяется $\mathfrak{A}$-адическая топология A-модуля M: ее фундаментальная система окрестностей нуля задается подмодулями $\mathfrak{A}^nM$; в $\mathfrak{A}$-адической топологии M становится топологическим A-модулем.

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей в $\mathfrak{A}$-адической топологии и $\hat{A}$ — его пополнение; если $\mathfrak{A}$ — идеал конечного типа, то топология в $\hat{A}$ является $\hat{\mathfrak{A}}$-адической, а $\hat{\mathfrak{A}}^n=\mathfrak{A}^n\hat{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — максимальный идеал, то $\hat{A}$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $\hat{\mathfrak{A}}$. Топологией локального кольца считается А. т., определяемая максимальным идеалом (m-адическая топология).

Для изучения А. т. колец фундаментальной является лемма Артина — Риса: пусть A есть коммутативное нётерово кольцо, $\mathfrak{A}$ есть идеал в A, E есть A-модуль конечного типа и F—подмодуль модуля E. Тогда существует такое k, что для любого $n\geqslant 0$ выполняется равенство

$$\mathfrak{A}^n(\mathfrak{A}^kE\cap F)=\mathfrak{A}^{k+n}E\cap F.$$

Топологич. интерпретация леммы Артина - Риса показывает, что $\mathfrak{A}$-адическая топология на F индуцирована $\mathfrak{A}$-адической топологией модуля E. Отсюда следует, что пополнение $\hat{A}$ кольца A в $\mathfrak{A}$-адической топологии является плоским A-модулем (см. *Плоский модуль*), что пополнение $\hat{E}$ A-модуля E конечного типа совпадает с $E\otimes_A\hat{A}$, а также теорема Крулля: $\mathfrak{A}$-адическая топология нётерова кольца отделима тогда, и только тогда, когда множество $1+\mathfrak{A}$ не содержит делителей нуля. В частности, топология отделима, если $\mathfrak{A}$ содержится в радикале (Джекобсона) кольца.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

***l*-АДИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ** — одна из конструкций когомологий абстрактных алгебраич. многообразий и схем. *Этальные когомологии* схем являются периодич. модулями. Для различных нужд, в первую очередь для доказательства формулы Лефшеца и приложений к дзета-функциям, необходимы когомологии «с коэффициентами в кольцах нулевой характеристики». Они получаются из этальных когомологий переходом к проективному пределу.

Пусть l - простое число, l-а д и ч е с к и м п у ч к о м на схеме X наз. проективная система $F=(F_n)_{n\in N}$ этальных абелевых пучков F_n такая, что для всех n гомоморфизмы перехода $F_{n+1}\to F_n$ эквивалентны канонич. морфизму $F_{n+1}\to F_{n+1}/l^nF_{n+1}$. Каждая компонента F_n l-адического пучка является пучком Z/l^n Z-модулей. l-адический пучок F наз. к о н с т р у к т и в н ы м (соответственно, л о к а л ь н о п о с т о я н н ы м), если все пучки F^n конструктивные (локально постоянные) этальные пучки. Имеет место естественная эквивалентность категории локально постоянных конструктивных пучков на связной схеме X и категорией модулей конечного типа над кольцом Z_l целых l-адических чисел, на к-рых непрерывно слева действует фундаментальная группа схемы X. Это показывает, что конструктивные локально постоянные пучки являются абстрактными аналогами системы локальных коэффициентов в топологии. Примерами конструктивных l-адических пучков являются пучок $Z_{l,X}=((Z/l^nZ)_X)_{n\in N}$, п у ч к и Т е й т а $Z_l(m)_X=(\mu_{l^n,X}^{\otimes m})_{n\in N}$, где $(Z/l^nZ)_X$ — постоянный пучок на X, ассоциированный с группой Z/l^nZ, а $\mu_{l^n,X}$ — пучок корней l^n-й степени из единицы на X. Если A — абелева схема над X, то $T_l(A)=(A_{l^n})_{n\in N}$, где A_{l^n} — ядро умножения в A на l^n, образует локально постоянный конструктивный l-адический пучок на X, наз. м о д у л е м Т е й т а абелевой схемы A.

Если X — схема над полем k, а $\overline{X}=X\otimes_k\overline{k}_s$ — схема, полученная из X заменой базы с k на сепарабельное замыкание $\overline{k}_s$ поля k, и $F=(F_n)$ — l-адический пучок на X, то этальные когомологии $H^i(\overline{X}, \overline{F}_n)$ определяют проективную систему $(H^i(\overline{X}, \overline{F}_n))_{n\in N}$ $\mathrm{Gal}(\overline{k}_s/k)$-модулей. Проективный предел $H^i(\overline{X}, F)=\varprojlim_n H^i(\overline{X}, \overline{F}_n)$ естественным образом снабжается структурой Z_l-модуля, на к-ром $\mathrm{Gal}(\overline{k}_s/k)$ действует непрерывно относительно l-адической топологии, и наз. i-ми l-адическими когомологиями пучка F на X. В случае, когда $k=\overline{k}_s$, обычно пишут $H^i(\overline{X}, F)=H^i(X, F)$. На l-А. к. конструктивных l-адических пучков переносятся фундаментальные теоремы об этальных когомологиях. Если Q_l — поле рациональных l-адических чисел, то Q_l-пространства $H^i_l(\overline{X})=H^i(\overline{X}, Z_l)\otimes Q_l$ наз. р а ц и о н а л ь н ы м и l-а д и ч е с к и м и к о г о м о л о г и я м и схемы X. Их размерность $b_i(X; l)$ (в случае, когда она определена) наз. i-м ч и с л о м Б е т т и X. Для полных k-схем числа $b_i(X; l)$ определены и не зависят от l ($l\neq\mathrm{char}\ k$). Если k — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $l\neq p$, то сопоставление гладкому полному k-многообразию пространств $H^i_l(X)$ определяет *Вейля когомологии*. В случае, когда $k=C$ — поле комплексных чисел, имеет место т е о р е м а с р а в н е н и я: $H^i_l=H^i(X, Q)\otimes Q_l$.

Лит.: [1] Grothendieck A., в кн.: Seminaire Bourbaki, Textes des conférences. Année, 1964/65, N.Y. -Amst., 1966, exposés № 279, p. 1—15.

И. В. Долгачев.

***p*-АДИЧЕСКОЕ ЧИСЛО** — элемент расширения поля рациональных чисел, получаемого на основе свойств делимости целых чисел на заданное простое число p.

Это расширение есть пополнение поля рациональных чисел относительно неархимедова нормирования (см. *Абсолютное значение*).

Целым p-адическим числом для произвольного простого p наз. последовательность $x=(x_0, x_1, \ldots)$ вычетов x_n по mod p^{n+1}, удовлетворяющих условию

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \quad n \geqslant 1.$$

Сложение и умножение целых p-А. ч. определяется формулами

$$(x+y)_n \equiv x_n + y_n \pmod{p^{n+1}},$$
$$(xy)_n \equiv x_n y_n \pmod{p^{n+1}}.$$

Каждое целое число m отождествляется с p-А. ч. $x=(m, m, \ldots)$. Относительно сложения и умножения целые p-А. ч. образуют кольцо, к-рое содержит кольцо целых чисел. Кольцо целых p-А. ч. может быть также определено как проективный предел

$$\varprojlim_n \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$$

колец вычетов по mod p^n (относительно естественных проекций).

p-адическим числом, или рациональным p-адическим числом, наз. элемент поля отношений Q_p кольца Z_p целых p-А. ч. Это поле наз. полем p-адических чисел и содержит поле рациональных чисел в качестве подполя. Как кольцо, так и поле p-А. ч. наделяются естественной топологией. Эта топология может быть определена метрикой, связанной с p-адической нормой, т. е. с функцией $|x|_p$ от p-А. ч. x, определяемой следующим образом. Если $x \neq 0$, то x однозначно представимо в виде $p^n a$, где a — обратимый элемент кольца целых p-А. ч. Тогда p-адическая норма $|x|_p$ равна p^{-n}. Если $x=0$, то $|x|_p=0$. Определяя $|x|_p$ сначала только на рациональных числах, можно получить поле p-А. ч. как пополнение поля рациональных чисел.

Каждый элемент поля p-А. ч. может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leqslant a_k < p, \qquad (*)$$

где a_k — целые, k_0 — нек-рое целое число, $a_{k_0} \neq 0$, и ряд $(*)$ сходится в метрике поля Q_p. Числа $x \in Z_p$ с условием $|x|_p \leqslant 1$ (т. е. с $k_0 \geqslant 0$) образуют кольцо Z_p целых p-А. ч., являющееся пополнением кольца целых чисел поля Q. Числа $x \in Z_p$ с условием $|x|_p = 1$ (т. е. $k_0=0$, $a_0 \neq 0$) образуют мультипликативную группу и наз. p-адическими единицами. Совокупность чисел $x \in Z_p$ с условием $|x|<1$ (т. е. с $k_0 \geqslant 1$) является главным идеалом в Z_p с образующим элементом p. Кольцо Z_p является полным кольцом дискретного нормирования. Поле Q_p локально компактно в топологии, индуцируемой метрикой $|x-x'|_p$. Поэтому в нем существует инвариантная мера μ, подчиняемая обычно условию $\mu(V_p)=1$. Для различных p нормирования $|x|_p$ независимы, а поля Q_p неизоморфны. Многие факты и понятия классического анализа переносятся на случай p-адических полей.

p-А. ч. связаны с решением диофантовых уравнений по модулю возрастающей степени простого числа. Так, если $F(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то разрешимость при всех $k \geqslant 1$ сравнения

$$F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

эквивалентна разрешимости уравнения $F(x_1, \ldots, x_m)=0$ в целых p-А. ч. Необходимым условием разрешимости этого уравнения в целых или рациональных числах является его разрешимость в кольцах или, соответственно, полях p-А. ч. при всех p. Такой подход к решению

диофантовых уравнений и, в частности, выяснение вопроса о достаточности этих условий, наз. локальными условиями, составляет важную часть современной теории чисел (см. *Диофантова геометрия*).

Упомянутое выше свойство разрешимости в одном частном случае может быть заменено более простым. Именно, если

$$F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

имеет решение $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$, и это решение определяет неособую точку гиперповерхности $\overline{F}(x_1, \ldots, x_m) = 0$, где $\overline{F}$ — многочлен F, взятый по mod p, то данное уравнение имеет решение в целых p-А. ч., сравнимое с $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$ по mod p. Это утверждение, известное под назв. *Гензеля леммы*, является частным случаем более общего факта, относящегося к теории схем.

Кольцо целых p-А. ч. может рассматриваться как часть более общей конструкции колец Витта $W(A)$. Кольцо целых p-А. ч. получается в том случае, когда $A = F_p$ - конечное поле из p элементов (см. *Витта вектор*). Другим обобщением p-А. ч. являются $\mathfrak{p}$-адические числа, возникающие при пополнении полей алгебраич. чисел относительно неархимедовых нормирований, связанных с простыми дивизорами.

p-А. ч. были введены К. Гензелем (см. [1]). Существующее для них канонич. представление является аналогом разложения аналитич. функций в степенной ряд. Это есть одно из проявлений аналогии между алгебраич. числами и алгебраич. функциями.

Лит.: [1] Hensel K., «Jahresber. Dtsch. Math. Ver.», 1899, Bd 6, H. 1, S. 83—8; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [4] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [5] Hasse H., Zahlentheorie, 2 Aufl., B., 1963; [6] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [7] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. Н. Паршин, В. Г. Спринджук.

АДСОРБЦИЯ — поглощение вещества из газа или раствора поверхностью раздела между ними (или поверхностью твердого тела). Иными словами, А. есть поглощение адсорбата из объема фаз на поверхности адсорбента. А. является частным случаем сорбции.

Молекулы адсорбата, попадая на поверхность адсорбента, удерживаются силовым полем поверхности в течение нек-рого времени, зависящего от природы адсорбата и адсорбента, от температуры T и давления p, а затем покидают поверхность (десорбируются). В состоянии термодинамического и молекулярного равновесия скорости А. и десорбции равны. Зависимость между относительным давлением $\varphi = p/p_s$ адсорбента и относительной концентрацией $\theta = c/c_s$, где индекс s означает предельное значение при постоянной температуре, наз. изотермой А.

Уравнение Ленгмюра мономолекулярной А. имеет вид

$$\varphi = \frac{\theta}{k(1-\theta)},$$

где k — константа равновесия, приближенно учитывающая взаимодействие между молекулами адсорбат — адсорбент.

Для однородной поверхности адсорбента при полимолекулярной А. обычно используется уравнение Брунауера [1].

Для капиллярных тел широкое распространение получила эмпирическая формула Поснова [2]

$$\frac{1}{\theta} = A \ln \varphi + 1,$$

где A — коэффициент, зависящий от температуры и структуры адсорбента.

Лит.: [1] Брунауер С., Адсорбция газов и паров, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [2] Поснов В. А., «Ж. техн.

физики», 1953, № 23, с. 865; [3] Ильин Б. В., Природа адсорбционных сил, М.— Л., 1952; [4] де Бур Я. Х., Динамический характер адсорбции, пер. с англ., М., 1962.

А. В. Лыков.

АЗАРТНАЯ ИГРА — многошаговая игра одного игрока. А. и. G определяют как систему

$$G = \langle F,\ f_0 \in F,\ \{\Gamma(f)\}_{f \in F},\ u(f) \rangle,$$

где F — множество капиталов, f_0 — начальный капитал игрока, $\Gamma(f)$ — множество конечно аддитивных мер, определенных на всех подмножествах F, $u(f)$ — функция полезности (см. *Полезности теория*) игрока, определенная на множестве его капиталов. Игрок выбирает $\sigma_0 \in \Gamma(f_0)$, и его капитал f_1 будет распределен согласно мере σ_0. Затем игрок выбирает $\sigma_1(f_1) \in \Gamma(f_1)$ и получает соответственно f_2 и т. д. Последовательность $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$ является *стратегией* игрока. Если игрок кончает игру в момент t, то его выигрыш определяется как математич. ожидание по σ функции $u(f_t)$. Цель игрока состоит в максимизации его функции полезности. Простейшим примером А. и. является лотерея. Игрок, имея наличный капитал f, может приобрести k лотерейных билетов стоимостью c, $k = 1, \ldots, [f/c]$. Каждому k соответствует вероятностная мера на множестве всех капиталов, и после тиража капитал игрока становится равным f_1. Если $f_1 < c$, то игра кончается; если $f_1 \geqslant c$, то игрок может либо выйти из игры, либо снова приобретать лотерейные билеты в количестве от одного до $[f_1/c]$ штук и т. д. Функцией полезности игрока может являться, напр., математич. ожидание капитала или вероятность получения выигрыша не менее определенной величины.

Теория А. и. является составной частью общей теории *управляемых вероятностных процессов*. В А. и. могут играть и сразу несколько лиц, но с теоретико-игровой точки зрения А. и.— игра одного игрока, т. к. его выигрыш не зависит от стратегий партнеров.

Лит.: [1] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must: Inequalities for stochastic processes, N.Y.— [a.o.], 1965.

Е. Б. Яновская.

АКСИАЛЬНЫЙ ВЕКТОР — то же, что *осевой вектор*.

АКСИОМ СХЕМА — единый способ задания *аксиом*, обладающих одной и той же синтаксич. структурой. Конкретная А. с. обычно реализуется при помощи фиксирующего ее синтаксич. структуру выражения $\mathfrak{A}$ (чаще всего не принадлежащего языку, в к-ром записываются аксиомы) и правил, позволяющих, исходя из выражения $\mathfrak{A}$, получить произвольную аксиому данной структуры.

В контекстах с заранее сформулированными или однозначно подразумеваемыми правилами порождения аксиом с помощью выражения $\mathfrak{A}$ А. с. обычно наз. самовыражение $\mathfrak{A}$. Так, напр., говорят о А. с. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$ пропозиционального исчисления P, подразумевая под этим совокупность аксиом вида $A \supset (B \supset A)$, где A и B — произвольные формулы исчисления P.

Примером схемы нелогических аксиом является следующий вариант схемы индукции в традиционных аксиоматизациях арифметики:

$$(\alpha(0) \,\&\, \forall x\,(\alpha(x) \supset \alpha(x'))) \supset \forall x \alpha(x);$$

здесь α и x предполагаются не принадлежащими алфавиту языка рассматриваемой формализации арифметики и интерпретируются, соответственно, как произвольная формула и произвольная переменная этой формализации.

Применение А. с. обычно позволяет обойтись без правила подстановки при построении формальных теорий. Так, напр., во всяком достаточно сильном пропозициональном исчислении с двумя правилами вывода — правилом подстановки и правилом заключения — оказывается возможным ограничиться при выводах подста-

новками только в аксиомы, что позволяет эквивалентным образом модифицировать такое исчисление, заменив каждую аксиому соответствующей А. с. и удалив правило подстановки из числа действующих в нем правил вывода.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, т. 1, пер. с англ., М., 1960. *Ф. А. Кабаков.*

АКСИОМА — основное положение, самоочевидный принцип. В дедуктивных научных теориях А. наз. основные исходные положения той или иной теории, из к-рых путем дедукции, т. е. чисто логич. средствами, извлекается все остальное ее содержание. См. *Аксиоматический метод.* *П. С. Новиков.*

АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЙ КЛАСС — класс однотипных моделей, определяемый системой аксиом. Класс K моделей формального языка L наз. аксиоматизируемым (конечно аксиоматизируемым), если существует (конечная) система Σ замкнутых формул языка L такая, что K содержит те и только те модели, на к-рых определены и истинны все формулы из Σ (см. *Алгебраическая система*). Класс моделей рекурсивной сигнатуры наз. рекурсивно аксиоматизируемым, если он может быть задан рекурсивным множеством аксиом.

Многие классы алгебраич. систем, изучаемых в математике, определяются системой аксиом языка 1-й ступени. Напр., классы всех булевых алгебр, всех групп, всех полей, всех решеток являются конечно аксиоматизируемыми. Классы всех групп без кручения, всех полей характеристики 0, всех алгебраически замкнутых полей рекурсивно аксиоматизируемы, хотя не конечно аксиоматизируемы. Теория А. к. выявляет закономерности, общие для всех классов объектов, определяемых с помощью данного языка; она хорошо разработана для языка 1-й ступени, поэтому далее речь идет только о таких классах и формулах.

Две модели наз. элементарно эквивалентными, если всякая формула языка 1-й ступени, истинная в одной из них, истинна и в другой. Модель $\mathfrak{M}$ наз. элементарным расширением модели $\mathfrak{N}$, если всякая формула, определенная и истинная в $\mathfrak{N}$, будет истинной в $\mathfrak{M}$.

Элементарно замкнутый класс K моделей наз. полным, если все его модели элементарно эквивалентны между собой. Каждый А. к. моделей является суммой попарно непересекающихся полных классов. Класс наз. категоричным в мощности $\mathfrak{m}$, если все его модели мощности $\mathfrak{m}$ изоморфны. Полный класс моделей счетной сигнатуры, категоричный в несчетной мощности, будет категоричным во всех несчетных мощностях, но может быть некатегоричным в счетной мощности; и в этом случае класс имеет счетное число попарно неизоморфных счетных моделей. Для любого $n \neq 2$ существует полный А. к., имеющий ровно n неизоморфных счетных моделей.

А. к. моделей K наз. разрешимым, если существует алгорифм, позволяющий для каждой замкнутой формулы языка L указать, истинна или нет она на каждой модели K. Связь полных, категоричных и разрешимых классов дает теорема: если K категоричен в бесконечной мощности и не имеет конечной модели, то он полон. Полный рекурсивно А. к. моделей разрешим.

Обобщениями А. к. являются редукционные классы и проективные классы. Проективные классы определяются аксиомой 2-й ступени, имеющей вид:

$$\exists T_1 \ldots \exists T_n \mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n),$$

где P_i, T_i — предикатные переменные, $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n)$ — формула сигнатуры $\sigma = (P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n)$. Многие свойства А. к. переносятся на эти классы.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] его же, в кн.: Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда, т. 1, Л., 1963, с. 169—98. *А. Д. Тайманов.*

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — направление в математич. логике, занимающееся изучением фрагментов содержательной теории множеств методами математич. логики. Обычно с этой целью фрагменты теории множеств оформляются в виде формальной аксиоматич. теории. В более узком смысле термин «А. т. м.» может служить для обозначения к.-л. формальной аксиоматич. теории, направленной на построение нек-рого фрагмента содержательной («наивной») теории множеств.

Теория множеств, возникшая на рубеже 19—20 вв., уже в самом начале своего развития натолкнулась на парадоксы. Открытие таких фундаментальных парадоксов, как Рассела и Кантора (см. *Антиномия*), вызвало широкую дискуссию и способствовало коренному пересмотру логико-математич. принципов. Аксиоматич. направление в теории множеств можно рассматривать как инструмент более детального изучения положения дел в создавшейся ситуации.

Построение формальной А. т. м. начинается с точного описания языка, на к-ром формулируются утверждения. Затем принципы «наивной» теории множеств выражаются на описанном языке в виде аксиом, схем аксиом. Ниже дано краткое описание нек-рых наиболее распространенных систем А. т. м. Важную роль при этом играет язык, содержащий следующие исходные символы: 1) переменные x, y, z, u, v, x_1, ..., к-рые в языке играют роль общих имен множеств; 2) предикатные символы $\in$ (знак принадлежности) и $=$ (знак равенства); 3) оператор дескрипции ι (означающий «такой объект, что...»); 4) логические связки и кванторы: $\leftrightarrow$ (эквивалентно), $\rightarrow$ (влечет), $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\neg$ (не), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует); 5) скобки (,). Выражения языка делятся на термы и формулы. Термы являются именами множеств, а формулы выражают суждения. Термы и формулы образуются согласно следующим правилам.

П1. Если τ и σ — переменные или термы, то $(\tau\in\sigma)$ и $(\tau=\sigma)$ суть формулы.

П2. Если A и B — формулы и x — переменная, то $(A\leftrightarrow B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\vee B)$, $(A\wedge B)$, $\neg A$, $\forall xA$, $\exists xA$ суть формулы и ιxA — терм; переменная x есть терм.

Напр., формула $\forall x(x\in y\rightarrow x\in z)$ выражает суждение «y есть подмножество z», ее естественно обозначить $y\subseteq z$; терм $\iota w\forall y(y\in w\leftrightarrow y\subseteq z)$ является именем множества всех подмножеств z, в привычной математич. символике его обозначают через Pz. Пусть знак $\rightleftharpoons$ означает «стоящее слева есть обозначение для стоящего справа». Приведем нек-рые дальнейшие обозначения для формул и термов.

Пустое множество:

$$\varnothing \rightleftharpoons \iota x\forall y\,\neg\, y\in x.$$

Множество таких x, что $A(x)$:

$$\{x \mid A(x)\} \rightleftharpoons \iota z\,\forall x\,(x\in z\leftrightarrow A(x)),$$

где z не входит свободно в $A(x)$ (т. е. не является параметром формулы $A(x)$).

Неупорядоченная пара x и y:

$$\{x, y\} \rightleftharpoons \{z \mid z=x\vee z=y\}.$$

Одноэлементное множество из x:

$$\{x\} \rightleftharpoons \{x, x\}.$$

Упорядоченная пара x и y:

$$\langle x, y\rangle \rightleftharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Объединение x и y:

$$x\cup y \rightleftharpoons \{z \mid z\in x\vee z\in y\}.$$

Пересечение x и y:

$$x\cap y \rightleftharpoons \{z \mid z\in x\wedge z\in y\}.$$

Объединение всех элементов x:

$$\bigcup x \rightleftarrows \{z \mid \exists v\,(z \varepsilon v \wedge v \varepsilon x)\}.$$

Декартово произведение x и y:

$$x \times y \rightleftarrows \{z \mid \exists u v\,(z = \langle u, v\rangle \wedge u \varepsilon x \wedge v \varepsilon y)\}.$$

w есть функция:

$$\mathrm{Fnc}\,(w) \rightleftarrows \exists v\,(w \subseteq v \times v) \wedge$$
$$\forall u v_1 v_2\,(\langle u, v_1\rangle \varepsilon w \wedge \langle u, v_2\rangle \varepsilon w \longrightarrow v_1 = v_2).$$

Значение функции w на элементе x:

$$w'x \rightleftarrows \iota y\,\langle x, y\rangle \varepsilon w.$$

z есть стандартное бесконечное множество:

$$\mathrm{Inf}\,(z) \rightleftarrows \varnothing \varepsilon z \wedge \forall u\,(u \varepsilon z \longrightarrow u \cup \{u\} \in z).$$

Следующая аксиоматич. теория A наиболее полно отражает принципы «наивной» теории множеств. Аксиомы A:

A1. а к с и о м а о б ъ е м н о с т и:

$$\forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow x \varepsilon z) \longrightarrow y = z$$

(«если множества y и z содержат одни и те же элементы, то они равны»);

A2. а к с и о м ы с в е р т ы в а н и я:

$$\exists y \forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow A),$$

где A — произвольная формула, не содержащая в качестве параметра y («существует множество y, содержащее те и только те элементы x, для к-рых A»).

Описанная система противоречива. Если в A2 в качестве A взять формулу $\neg x \varepsilon x$, то из формулы $\forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow \neg x \varepsilon x)$ легко выводится $y \varepsilon y \leftrightarrow \neg y \varepsilon y$, что противоречиво.

Аксиоматич. системы теории множеств можно разделить на следующие четыре группы.

а) Построение аксиоматич. систем первой группы направлено на такое ограничение аксиом свертывания, к-рое обеспечивает наиболее естественный способ формализации обычных математич. доказательств и в то же время позволяет избежать известных парадоксов. Первой аксиоматикой такого рода была система Z Цермело (E. Zermelo, 1908). Однако в системе Z невозможно естественным образом формализовать нек-рые разделы математики, и А. Френкель (A. Fraenkel, 1922) предложил пополнить Z новым принципом, названным им а к с и о м о й п о д с т а н о в к и. Полученная система наз. с и с т е м о й Ц е р м е л о — Ф р е н к е л я и обозначается ZF.

б) Вторую группу составляют системы, аксиомы к-рых выбраны в связи с к.-л. объяснением парадоксов, напр. как следствий непредикативных определений. Сюда относятся: разветвленная теория типов Рассела, простая теория типов T, теории типов с трансфинитными индексами (см. *Типов теория*).

в) Третья группа характеризуется использованием нестандартных средств логич. вывода, многозначных логик, дополнительных условий на доказательства, бесконечных правил вывода. Системы, относящиеся к этому направлению, наименее развиты.

г) Четвертая группа включает модификации систем первых трех групп, преследующие определенные логич. или математич. цели. Укажем только на системы NBG Неймана — Гёделя — Бернайса (J. Neumann — K. Gödel — P. Bernays, 1925) и NF Куайна (W. Quine, 1937). Построение системы NBG вызвано желанием иметь конечное число аксиом для теории множеств, основанной на системе ZF. В NF реализуется стремление преодолеть расслоение понятий, имеющее место в теории типов.

Системы Z, ZF, NF можно формулировать в описанном выше языке. Правила вывода, а также так наз. л о г и-

ческие аксиомы у этих систем совпадают и образуют прикладное исчисление предикатов 1-й ступени с равенством и оператором дескрипции. Укажем только аксиомы для равенства и оператора дескрипции:

$$x = x,\ x = y \longrightarrow (A(x) \longrightarrow A(y)),$$

где $A(x)$ — формула, не содержащая связанной переменной y (т. е. не имеющая вхождений вида $\forall y$, $\exists y$, ιy), и $A(y)$ получается из формулы $A(x)$ заменой нек-рых свободных вхождений переменной x на y;

$$\exists!\, x A(x) \longrightarrow A(\iota x A(x)),$$

где квантор $\exists!\, x$ означает «существует одно и только одно x», а формула $A(\iota x A(x))$ получается из формулы $A(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на терм $\iota x A(x)$. Квантор $\exists!\, x$ выразим через кванторы $\forall$ и $\exists$ и равенство.

Нелогические аксиомы системы Z:

Z1. аксиома объемности A1;

Z2. аксиома пары:

$$\exists u \forall z (z \varepsilon u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

(«существует множество $\{x, y\}$»);

Z3. аксиома суммы:

$$\exists y \forall x (x \varepsilon y \leftrightarrow \exists t (t \varepsilon z \wedge x \varepsilon t))$$

(«существует множество $\bigcup z$»);

Z4. аксиома степени:

$$\exists y \forall x (x \varepsilon y \leftrightarrow x \subseteq z)$$

(«существует множество Pz»);

Z5. аксиома выделения:

$$\exists y \forall x (x \varepsilon y \leftrightarrow x \varepsilon z \wedge A(x))$$

(«существует подмножество z, состоящее из тех элементов x, для к-рых имеет место $A(x)$»); аксиомы Z2—Z5 являются примерами аксиом свертывания;

Z6. аксиома бесконечности:

$$\exists z \operatorname{Inf}(z);$$

Z7. аксиома выбора:

$$\forall z \exists w (\operatorname{Fnc}(w) \wedge \forall x (x \varepsilon z \wedge \neg x = \varnothing \longrightarrow w`x \varepsilon x))$$

(«для всякого множества z существует функция w, выбирающая из каждого непустого элемента x множества z единственный элемент $w`x$»). К этим аксиомам добавляют еще аксиому фундирования:

Z8.

$$\forall x (\neg x = \varnothing \longrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge y \cap x = \varnothing)),$$

цель к-рой — постулировать, что не существует убывающих цепей $x_2 \varepsilon x_1$, $x_3 \varepsilon x_2$, $x_4 \varepsilon x_3$, ... Аксиома Z8 позволяет упростить построения в Z. Добавление этой аксиомы не вносит противоречия.

В системе Z можно развивать арифметику, анализ, функциональный анализ, рассматривать кардинальные числа, меньшие $\aleph_\omega$. Однако если определить алефы стандартным образом, то доказать в Z существование $\aleph_\omega$ и более высоких кардиналов уже невозможно.

Система ZF получается из Z добавлением аксиом подстановки Френкеля, к-рым можно придать вид аксиом свертывания:

ZF9.

$$\exists y \forall x (x \varepsilon y \leftrightarrow \exists v (v \varepsilon z \wedge x = \iota t A(t, v)))$$

(«существует множество y, состоящее из x, $x = \iota t A(t, v)$, когда v пробегает все элементы множества z»). Иначе говоря, y получается из z, если каждый элемент v из z заменить на $\iota t A(t, v)$.

Система ZF является очень сильной теорией. Все обычные математич. теоремы формализуются в ZF.

Система NBG получается из системы ZF добавлением нового типа переменных — классовых переменных X,

Y, Z, ... и конечного числа аксиом образования классов, позволяющих доказать формулы вида

$$\exists Y \forall x\,(x \varepsilon Y \leftrightarrow A\,(x)),$$

где $A\,(x)$ – формула системы NBG, не содержащая связанных классовых переменных и символа ι. Поскольку по каждой формуле $A(x)$ можно образовать класс, то бесконечное число аксиом ZF удается заменить конечным числом аксиом, содержащих классовую переменную. Аксиома выбора имеет вид:

$$\exists X\,(\mathrm{Fnc}\,(X) \wedge \forall x\,(\,|\,x = \varnothing \longrightarrow X'\,x \varepsilon x))$$

и утверждает существование единой для всех множеств функции выбора, являющейся классом.

Система NF имеет наиболее простую аксиоматику, а именно: 1) аксиому объемности и 2) те аксиомы свертывания, в к-рых формулу A можно с т р а т и ф и ц и р о в а т ь, т. е. приписать всем переменным формулы A верхние индексы таким образом, чтобы получилась формула теории типов T, т. е. в подформулах вида $x \varepsilon y$ индекс у x на единицу меньше, чем индекс у y.

Система NF обладает следующими особенностями:

а) *выбора аксиома* и обобщенная *континуум-гипотеза* опровержимы;

б) *бесконечности аксиома* доказуема;

в) аксиома объемности играет весьма существенную роль. Так, если аксиому объемности заменить несколько более слабой аксиомой:

$$(\exists u\,(u \varepsilon y) \wedge \forall u\,(u \varepsilon y \leftrightarrow u \varepsilon z)) \longrightarrow y = z,$$

допускающей много пустых множеств, а аксиомы свертывания NF оставить без изменения, то получится довольно слабая теория, именно: уже в формальной арифметике можно доказать непротиворечивость полученной системы.

Ниже приведены результаты о соотношениях между описанными системами.

(α) Всякая формула ZF доказуема в NBG тогда и только тогда, когда она доказуема в ZF.

(β) В ZF можно установить непротиворечивость Z, пополненной любым конечным числом примеров схемы аксиом подстановки ZF9. Таким образом, ZF значительно сильнее Z.

(γ) В Z доказуема непротиворечивость T, так что Z сильнее T.

(δ) NF не слабее T в том смысле, что в NF можно развить всю теорию типов.

Аксиоматич. подход к теории множеств позволил придать точный смысл утверждению о принципиальной неразрешимости нек-рых математич. проблем и строго доказать его. Общая схема применения аксиоматич. метода здесь такова. Рассматривается формальная аксиоматич. система S теории множеств (как правило, это ZF или нек-рые ее модификации), настолько универсальная, чтобы она содержала все обычные способы рассуждения классич. математики и все обычные математич. факты могли бы в ней быть выведены. Данная проблема A может быть записана в виде формулы в языке S. Затем математич. методами устанавливается, что в S невозможно вывести ни A, ни отрицание A. Отсюда следует, что проблема A не может быть разрешена (в ту или иную сторону) средствами теории S, но так как теория S определялась в расчете охватить все обычные методы рассуждения, то полученный результат свидетельствует о том, что A не может быть разрешена обычными методами рассуждения, т. е. свидетельствует о «трансцендентности» A.

Результаты о невыводимости в теории S доказываются, как правило, в предположении о непротиворечивости S или нек-рого естественного расширения S. Это связано с тем, что, с одной стороны, проблема может быть невыводима в S только при непротиворечивости S, последнее же не может быть установлено средствами S

(согласно *Гёделя теореме о неполноте*), т. е. не может быть доказано обычными методами. С другой стороны, непротиворечивость S является обычно весьма правдоподобной гипотезой. Сама теория S определяется в расчете на выполнение этой гипотезы.

Далее, аксиоматич. подход к теории множеств позволил точно поставить и решить проблемы, связанные с эффективностью в теории множеств, интенсивно обсуждавшиеся особенно в первый период развития теории множеств в работах Р. Бэра (R. Baire), Э. Бореля (E. Borel), А. Лебега (H. Lebesgue), С. Н. Бернштейна, Н. Н. Лузина, В. Серпинского (W. Sierpiński). А именно, говорят, что теоретико-множественный объект, удовлетворяющий свойству $\mathfrak{A}$, задается эффективно в аксиоматич. теории S, если может быть построена формула $A(x)$ теории S, про к-рую в S можно доказать, что ей удовлетворяет единственный объект, и этот объект удовлетворяет свойству $\mathfrak{A}$. Это определение дает возможность точно доказать, что для нек-рых свойств $\mathfrak{A}$ в теории S невозможно эффективно указать объект, удовлетворяющий свойству $\mathfrak{A}$, в то время как существование этих объектов в S может быть установлено. Но поскольку теория S выбирается достаточно универсальной, то неэффективность существования нек-рых объектов в S свидетельствует и о невозможности эффективно установить их существование обычными математич. средствами.

Наконец, методы А. т. м. позволили решить ряд трудных проблем и в классич. ветвях математики: теории кардинальных и ординальных чисел, дескриптивной теории множеств, топологии.

Ниже приведены нек-рые из результатов в А. т. м. Большинство теорем относится к А. т. м. ZF Цермело — Френкеля, наиболее употребительной в настоящее время. Пусть ZF$^-$ есть система ZF без аксиомы выбора Z7. В силу (α) результаты легко адаптируются и к системе NBG.

1) К. Гёдель (1939) показал, что если ZF$^-$ непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после добавления аксиомы выбора и континуум-гипотезы. Отсюда следует, что в ZF невозможно опровергнуть аксиому выбора или континуум-гипотезу. Для доказательства этого результата Гёдель построил модель теории ZF, состоящую из так наз. *конструктивных по Гёделю множеств* и играющую важную роль в современной А. т. м.

2) Вопрос о том, можно ли вывести в ZF аксиому выбора или континуум-гипотезу, оставался открытым вплоть до 1963, когда П. Коэн (P. Cohen) с помощью разработанного им *вынуждения метода* показал, что если ZF$^-$ непротиворечива, то она остается таковой и после присоединения любой комбинации из аксиомы выбора, континуум-гипотезы или их отрицаний. Таким образом, эти две проблемы независимы в ZF.

Основным методом установления невыводимости формулы A в ZF является построение модели ZF, в к-рой имеет место отрицание A. Метод вынуждения Коэна, усовершенствованный затем другими авторами, сильно расширил возможности построения моделей теории множеств и в настоящее время лежит в основе почти всех дальнейших результатов о невыводимости. Напр.:

3) Показано, что к ZF без противоречия можно присоединить гипотезу о том, что мощность множества подмножеств множества x может быть почти произвольной наперед заданной функцией мощности x на регулярных кардиналах (единственные существенные ограничения связаны с теоремой Кёнига).

4) В 1920 М. Я. Суслин сформулировал г и п о т е з у: всякое линейно полно упорядоченное множество такое, что всякое попарно непересекающееся семейство непустых открытых интервалов в нем не более чем счетно, необходимо содержит счетное всюду плотное подмно-

жество. Методом Коэна была установлена неразрешимость в ZF гипотезы Суслина.

5) Показана неразрешимость в ZF⁻ (без аксиомы выбора) утверждения: всякое подмножество множества действительных чисел измеримо по Лебегу.

6) Выяснено взаимоотношение с ZF многих важных проблем дескриптивной теории множеств. Первые результаты в этом направлении были объявлены Гёделем в 30-х гг. и доказаны П. С. Новиковым [5]. Методы А. т. м. позволили обнаружить неизвестные ранее связи между проблемами «наивной» теории множеств. Доказано, напр., что из существования неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел типа Σ^1_2 (т. е. A_2) вытекает существование несчетного Π^1_1 (т. е. CA) множества без совершенного подмножества.

7) Доказано отсутствие в ZF эффективного вполне упорядочения континуума. Получены многочисленные результаты об отсутствии эффективно определенных объектов в дескриптивной теории множеств и теории ординалов.

Лит.: [1] Френкель А.А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Коэн Пол Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [3] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [4] Drake F. R., Set theory, Amsterdam, 1974; [5] Новиков П. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316.

В. Н. Гришин, А. Г. Драгалин.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — способ построения научной теории, при к-ром в основу теории кладутся нек-рые исходные положения, наз. *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логич. следствия аксиом.

В математике А. м. зародился в работах древнегреческих геометров. Блестящим, остававшимся единственным вплоть до 19 в. образцом применения А. м. была геометрич. система, известная под назв. «Начал» Евклида (ок. 300 до н. э.). Хотя в то время не вставал еще вопрос об описании логич. средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида уже достаточно четко проведена идея получения всего основного содержания геометрич. теории чисто дедуктивным путем из нек-рого, относительно небольшого, числа утверждений — аксиом, истинность к-рых представлялась наглядно очевидной.

Открытие в нач. 19 в. неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским и Я. Больяй (J. Bolyai) явилось толчком к дальнейшему развитию А. м. Они установили, что, заменив привычный и, казалось бы, единственно «объективно истинный» V постулат Евклида о параллельных его отрицанием, можно развивать чисто логич. путем геометрич. теорию, столь же стройную и богатую содержанием, как и геометрия Евклида. Этот факт заставил математиков 19 в. обратить специальное внимание на дедуктивный способ построения математич. теорий, что повлекло за собой возникновение новой проблематики, связанной с самим понятием А. м., и формальной (аксиоматической) математич. теории. По мере того как накапливался опыт аксиоматич. изложения математич. теорий — здесь надо отметить прежде всего завершение логически безупречного (в отличие от «Начал» Евклида) построения элементарной геометрии [М. Паш (M. Pasch), Дж. Пеано (G. Peano), Д. Гильберт (D. Hilbert)] и первые попытки аксиоматизации арифметики (Дж. Пеано),— уточнялось понятие формальной аксиоматич. системы (см. ниже); возникала специфич. проблематика, на основе к-рой выросла так наз. *доказательств теория* как основной раздел современной математич. логики.

Понимание необходимости обоснования математики и конкретные задачи в этой области зародились в более или менее отчетливой форме уже в 19 в. При этом, с одной стороны, уточнение основных понятий и сведéние

более сложных понятий к простейшим на точной и логически все более строгой основе проводились гл. обр. в области анализа [«ε — δ»-язык О. Коши (A. Cauchy), теоретико-функциональные концепции Б. Больцано (B. Bolzano) и К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), континуум Г. Кантора (G. Cantor) и Р. Дедекинда (R. Dedekind)]; с другой стороны, открытие неевклидовых геометрий стимулировало развитие А. м., возникновение новых идей и постановку проблем более общего метаматематич. характера, прежде всего проблем, связанных с понятием произвольной аксиоматич. теории, таких, как проблемы непротиворечивости, полноты и независимости той или иной системы аксиом. Первые результаты в этой области принес м е т о д и н т е р п р е т а ц и й, к-рый грубо может быть описан следующим образом. Пусть каждому исходному понятию и отношению данной аксиоматич. теории T поставлен в соответствие нек-рый конкретный математич. объект. Совокупность таких объектов наз. п о л е м и н т е р п р е т а ц и и. Всякому утверждению $\mathfrak{A}$ теории T естественным образом ставится теперь в соответствие нек-рое высказывание $\mathfrak{A}^*$ об элементах поля интерпретации, к-рое может быть истинным или ложным. Тогда говорят, что утверждение $\mathfrak{A}$ теории T, соответственно, истинно или ложно в данной интерпретации. Поле интерпретации и его свойства сами обычно являются объектом рассмотрения к.-л., вообще говоря другой, математич. теории T_1, к-рая, в частности, тоже может быть аксиоматической. Метод интерпретаций следующим образом позволяет устанавливать факт о т н о с и т е л ь н о й н е п р о т и в о р е ч и в о с т и, т. е. доказывать суждения типа: «если теория T_1 непротиворечива, то непротиворечива и теория T». Пусть теория T проинтерпретирована в теории T_1 таким образом, что все аксиомы A_i теории T интерпретируются истинными суждениями A_i^* теории T_1. Тогда всякая т е о р е м а теории T, т. е. всякое утверждение A, логически выведенное из аксиом A_i в T, интерпретируется в T_1 нек-рым утверждением A^*, выводимым в T_1 из интерпретаций A_i^* аксиом A_i, и, следовательно, истинным. Последнее утверждение опирается на еще одно неявно делаемое нами допущение известного подобия логич. средств теорий T и T_1, но практически это условие обычно выполняется. (На заре применения метода интерпретаций об этом допущении специально даже не задумывались: оно представлялось само собой разумеющимся; на самом деле в случае первых опытов доказательства теорем об относительной непротиворечивости логич. средства теорий T и T_1 просто совпадали — это была классич. логика предикатов.) Пусть теперь теория T противоречива, т. е. нек-рое утверждение A этой теории выводимо в ней вместе со своим отрицанием. Тогда из вышесказанного следует, что утверждения A^* и «не A^*» будут одновременно истинными утверждениями теории T_1, т. е., что теория T_1 противоречива. Этим методом была, напр., доказана [Ф. Клейн (F. Klein), А. Пуанкаре (H. Poincaré)] непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского в предположении, что непротиворечива геометрия Евклида; а вопрос о непротиворечивости гильбертовой аксиоматизации евклидовой геометрии был сведен (Д. Гильберт) к проблеме непротиворечивости арифметики. Метод интерпретаций позволяет также решать вопрос о независимости систем аксиом: для доказательства того, что аксиома A теории T не зависит от остальных аксиом этой теории, т. е. не выводима из них, и, следовательно, существенно необходима для получения всего объема данной теории, достаточно построить такую интерпретацию теории T, в к-рой аксиома A была бы ложна, а все остальные аксиомы этой теории истинны. Иной формой этого способа доказательства независимости A является установление непротиворе-

чивости теории, к-рая получается, если в данной теории Таксиому A заменить ее отрицанием. Упомянутое выше сведéние проблемы непротиворечивости геометрии Лобачевского к проблеме непротиворечивости евклидовой геометрии, а этой последней — к вопросу о непротиворечивости арифметики имеет своим следствием утверждение, что V постулат Евклида не выводим из остальных аксиом геометрии, если только непротиворечива арифметика натуральных чисел. Слабая сторона метода интерпретаций состоит в том, что в вопросах непротиворечивости и независимости систем аксиом он дает возможность получать результаты, носящие неизбежно лишь относительный характер. Но важным достижением этого метода стал тот факт, что с его помощью была выявлена на достаточно точной основе особая роль арифметики как такой математич. теории, к вопросу о непротиворечивости к-рой сводится аналогичный вопрос для целого ряда других теорий.

Дальнейшее развитие — а в известном смысле это *была вершина* — А. м. получил в работах Д. Гильберта и его школы в виде так наз. метода *формализма* в основаниях математики. В рамках этого направления была выработана следующая стадия уточнения понятия аксиоматич. теории, а именно понятие *формальной системы*. В результате этого уточнения оказалось возможным представлять сами математич. теории как точные математич. объекты и строить общую теорию, или *метатеорию*, таких теорий. При этом соблазнительной представлялась перспектива (и Д. Гильберт был в свое время ею увлечен) решить на этом пути все главные вопросы обоснования математики. Основным понятием этого направления является понятие формальной системы. Всякая формальная система строится как точно очерченный класс выражений - формул, в к-ром нек-рым точным образом выделяется подкласс формул, наз. теоремами данной формальной системы. При этом формулы формальной системы непосредственно не несут в себе никакого содержательного смысла, и их можно строить из произвольных, вообще говоря, значков или элементарных символов, руководствуясь только соображениями технического удобства. На самом деле способ построения формул и понятие теоремы той или иной формальной системы выбираются с таким расчетом, чтобы весь этот формальный аппарат можно было применять для выражения, возможно более адекватного и полного, той или иной конкретной математической (и не математической) теории, точнее, как ее фактич. содержания, так и ее дедуктивной структуры. Общая схема построения (задания) произвольной формальной системы S такова.

I. Язык системы S:

а) алфавит — перечень элементарных символов системы;

б) правила образования (синтаксис) — правила, по к-рым из элементарных символов строятся формулы системы S; при этом последовательность элементарных символов считается формулой тогда и только тогда, когда она может быть построена с помощью правил образования.

II. Аксиомы системы S. Выделяется нек-рое множество формул (обычно конечное или перечислимое), к-рые наз. аксиомами системы S.

III. Правила вывода системы S. Фиксируется (обычно конечная) совокупность предикатов $R_1, \ldots, R_k$ на множестве всех формул системы S. Пусть $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i+1})$ — к.-л. из этих предикатов ($n_i > 0$); если для данных формул $F_1, \ldots, F_{n_i+1}$ утверждение $R_i(F_1, \ldots, F_{n_i+1})$ истинно, то говорят, что формула F_{n_i+1} непосредственно следует из формул $F_1, \ldots, F_{n_i}$ по правилу R_i.

Заданием I, II, III исчерпывается задание формальной системы S как точного математич. объекта, поскольку понятие теоремы или выводимой формулы системы S образуется для всех формальных систем следующим единообразным способом (при этом степень точности определяется уровнем точности задания алфавита, правил образования и правил вывода, т. е. предикатов $R_1, \ldots, R_k$). В ы в о д о м системы S наз. всякая конечная последовательность формул системы S, в к-рой каждая формула либо является аксиомой системы S, либо непосредственно следует из к.-л. предшествующих ей в этой последовательности формул по одному из правил вывода R_i системы S. Формула системы S наз. т е о р е м о й этой системы, если существует вывод системы S, заканчивающийся этой формулой.

Всякую конкретную математич. теорию T можно перевести на язык подходящей формальной системы S таким образом, что каждое осмысленное (ложное или истинное) предложение теории T выражается нек-рой формулой системы S.

Естественно было надеяться, что этот метод формализации позволит строить все положительное содержание математич. теорий на такой точной и, казалось бы, надежной основе, как понятие выводимой формулы (теоремы формальной системы), а такие принципиальные вопросы, как проблема непротиворечивости математич. теорий, решать в форме доказательств соответствующих утверждений о формализующих эти теории формальных системах. Поскольку формальные системы описанного выше типа сами оказываются точными, или, как говорили в школе Гильберта, финитными, математич. объектами, можно было ожидать, что удастся получить ф и н и т н ы е д о к а з а т е л ь с т в а утверждений о непротиворечивости, т. е. доказательства, к-рые в определенном смысле были бы эффективными, не зависящими от тех мощных средств, вроде *абстракции актуальной бесконечности*, к-рые в классических математич. теориях как раз и являются причиной трудностей в их обосновании. Таким образом, требование финитности средств, применяемых для получения результатов о формальных системах, в частности теорем о их непротиворечивости, было вполне закономерной особенностью формалистич. программы Гильберта. Однако результаты К. Гёделя (K. Gödel) начала 30-х гг. 20 в. привели к краху основных надежд, связывавшихся с этой программой. Гёдель показал:

1) Всякая естественная, непротиворечивая формализация S арифметики или любой другой математич. теории, содержащей арифметику (напр., теории множеств), неполна и неполнима в том смысле, что: а) в S имеются (содержательно истинные) неразрешимые формулы, т. е. такие формулы A, что ни A, ни отрицание A не выводимы в S (н е п о л н о т а ф о р м а л и з о в а н н о й а р и ф м е т и к и), б) каким бы конечным множеством дополнительных аксиом (напр., неразрешимыми в S формулами) ни расширить систему S, в новой, усиленной таким образом, формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы (н е п о п о л н и м о с т ь; см. [5], а также *Гёделя теорема о неполноте*).

2) Если формализованная арифметика в действительности непротиворечива, то хотя утверждение о ее непротиворечивости выразимо на ее собственном языке, однако доказательство этого утверждения, проведенное средствами, формализуемыми в ней самой, невозможно.

Это означает, что уже для арифметики принципиально невозможно исчерпать весь объем ее содержательно истинных суждений классом выводимых формул какой бы то ни было формальной системы, и что нет никакой надежды получить когда-либо финитное доказательство непротиворечивости арифметики, т. к., по-видимому,

всякое разумное уточнение понятия финитного доказательства оказывается формализуемым в формальной арифметике.

Все это ставит определенные границы возможностям А. м. в том его виде, к-рый он приобрел в рамках гильбертовского формализма. Однако и в этих границах он сыграл и продолжает играть важную роль в основаниях математики. Так, напр., уже после описанных результатов Гёделя им же в 1938—40, а затем П. Коэном (P. Cohen) в 1963 на основе аксиоматич. подхода с применением метода интерпретаций были получены фундаментальные результаты о совместимости и независимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы в теории множеств (см. [6], [7]). Что касается такого основного вопроса оснований математики, как проблема непротиворечивости, то после результатов Гёделя стало ясно, что для его решения, по-видимому, не обойтись без других, отличных от финитистских, средств и идей. Здесь оказались возможными разные подходы, не для всех математиков в равной степени приемлемые или убедительные, в частности в виду существования различных точек зрения на допустимость тех или иных логич. средств. Из результатов о непротиворечивости формальных систем следует прежде всего указать на доказательство непротиворечивости формализованной арифметики (см. [8]), к-рое опирается на бесконечную индукцию до нек-рого счетного трансфинита. Другим, более поздним, примером такого рода является попытка обоснования утверждения о непротиворечивости формальной системы анализа с помощью нек-рых идей *интуиционизма* (см. [9]).

Лит.: [1] «Начала» Евклида, пер. с греч., кн. 1—15, М.— Л., 1948—50; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [3] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [4] Peano G., «Rivista di matematica», 1891, v. 1, p. 1—10; [5] Gödel K., «Monatsh. Math. Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [6] Гёдель К., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 96—149; [7] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [8] Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [9] Spector C., в кн.: Recursive function theory, Providence, 1962, p. 1—27.

И. С. Новиков.

АКСОНОМЕТРИЯ — один из способов изображения пространственных фигур на плоскости. А. заключается в том, что фигура, выбранная прямоугольная декартова система координат и ортогональная проекция фигуры на одну из координатных плоскостей проектируются на плоскость чертежа. В зависимости от способа проектирования А. делится на параллельную и центральную. Если направление параллельного проектирования на плоскость чертежа перпендикулярно этой плоскости, то А. наз. ортогональной, или нормальной, в противном случае — косоугольной. При ортогональной А. указывают косинусы углов наклона координатных осей к плоскости чертежа, называемые иногда показателями искажения. Если два показателя искажения равны, то А. наз. диметрией; если равны три показателя — изометрией; если все показатели искажения различны — триметрией. Основной теоремой А. является теорема Польке — Шварца, состоящая в том, что любой тетраэдр может быть спроектирован в плоский четырехугольник, подобный данному.

Лит.: Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., Аксонометрия, М., 1953.

А. Б. Иванов.

АЛГАМС — *алгоритмический язык*, ориентированный в основном на вычислительные машины средней мощности. А. разработан в 1963—66 Группой по Автоматизации программирования для Машин Среднего типа (ГАМС), созданной комиссией многостороннего сотрудничества академий наук социалистич. стран. А. призван сыграть роль эталонного языка для обмена алгоритмами между социалистич. странами. В основу А. положен язык алгол-60 (см. *Алгол*), на к-рый были

наложены нек-рые ограничения, облегчающие процесс *трансляции*. Наиболее важными ограничениями являются: запрещение рекурсивного использования процедур, требование обязательной спецификации формальных параметров процедуры, описание идентификаторов (кроме меток) до их использования, упрощение конструкций именующих выражений. Эти ограничения согласованы с ограничениями, наложенными на алгол-60 в унифицированном языке, называемом подмножеством алгол-60. Наряду с ограничениями в А. введены новые понятия внешнего идентификатора и идентификатора части, отсутствующие в языке алгол-60. С помощью внешних идентификаторов именуются массивы, к-рые желательно разместить во внешней памяти машины. Чтение и запись внешних массивов производятся с помощью стандартной процедуры обмена. Идентификаторы части, помещаемые перед блоками, выделяют части программы, к-рые могут храниться во внешней памяти и вызываться в оперативную память при входе в соответствующий блок. Эти понятия повышают эффективность использования языка при ограниченном объеме оперативной памяти машины. Кроме того, в А. детально разработаны процедуры ввода и вывода информации и уточнен способ описания тел процедур с помощью др. языков.

Лит.: [1] Описание языка АЛГАМС, в сб.: Алгоритмы и алгоритмические языки, в. 3, М., 1968, с. 3—56; [2] Любимский Э. З., Мартынюк В. В., «Программирование», 1976, № 1, с. 87—8.

В. В. Луцикович.

АЛГЕБРА — 1) Часть математики (см. *Алгебра*). В этом понимании термин «А.» употребляется в таких сочетаниях, как *гомологическая алгебра*, *коммутативная алгебра*, *линейная алгебра*, *полилинейная алгебра*, *топологическая алгебра*.

2) Частный случай *операторного кольца*: А. (иногда — линейная, или векторная, А.) над полем, телом, коммутативным кольцом. Ассоциативная А. (прежнее назв. «гиперкомплексная система»), неассоциативная А., альтернативная А.— алгебры именно в этом понимании.

3) То же, что *универсальная алгебра*. В этом понимании алгебрами будут, напр., *булевы алгебры*, *унарные алгебры*.

АЛГЕБРА — часть математики, посвященная изучению *алгебраических операций*.

Исторический очерк. Простейшие алгебраич. операции — арифметич. действия над натуральными и положительными рациональными числами — встречаются в самых ранних математич. текстах, свидетельствующих о том, что уже в глубокой древности были известны все основные свойства этих действий. Значительное влияние на развитие алгебраич. идей и символики оказала, в частности, «Арифметика» Диофанта (3 в. н. э.). Термин «А.» происходит от названия сочинения Мухаммеда аль-Хорезми «Альджебр аль-мукабала» (9 в.), содержащего общие приемы для решения задач, сводящихся к алгебраич. уравнениям 1-й и 2-й степеней. В конце 15 в. вместо громоздкого словесного описания алгебраич. действий, господствовавшего ранее, в математич. сочинениях появляются принятые теперь знаки $+$ и $-$, затем знаки степеней, корней, скобки. Ф. Виет (F. Viète, конец 16 в.) первым стал применять буквенные обозначения как для неизвестных, так и для заданных в задаче величин. К сер. 17 в. в основном сложилась современная алгебраич. символика и тем самым завершилась «предыстория» А. Развитие собственно А. происходило в три последующих столетия, причем точка зрения на ее предмет несколько раз существенно менялась.

В 17—18 вв. под А. понималась наука о буквенных вычислениях — тождественных преобразованиях буквенных формул, решения *алгебраических уравнений*

и т. п., — в отличие от *арифметики*, занимавшейся вычислениями над конкретными числами. Предполагалось, однако, что под буквами подразумеваются числа, целые или дробные. Вот краткое содержание одного из лучших руководств того времени — «Введения в алгебру» Л. Эйлера (L. Euler): целые числа, обыкновенные и десятичные дроби, корни, логарифмы, алгебраич. уравнения 1-й — 4-й степеней, прогрессии, соединения, бином Ньютона, диофантовы уравнения. Таким образом, к сер. 18 в. А. сложилась в том приблизительно объеме, к-рый теперь принято наз. «элементарной» А.

А. 18—19 вв. есть прежде всего А. многочленов. Исторически первой задачей А. было решение алгебраич. уравнений с одним неизвестным, т. е. уравнений вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Имелось в виду отыскание формул, выражающих корни уравнения через его коэффициенты при помощи сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней («решение в радикалах»). С древнейших времен математики умели решать уравнения 1-й и 2-й степеней. В 16 в. существенное продвижение было сделано итальянскими математиками — сначала была найдена формула для решения уравнений 3-й степени (см. *Кардано формула*), а затем и метод решения (см. *Феррари метод*) уравнения 4-й степени. В течение почти трех последующих столетий продолжались безуспешные попытки найти аналогичные формулы для решения уравнений высших степеней, в связи с чем приобрела большой интерес задача найти хотя бы «бесформульное» доказательство существования комплексного корня для произвольного алгебраич. уравнения с комплексными коэффициентами. Эта теорема была впервые высказана в 17 в. А. Жираром (A. Girard), но первое строгое доказательство ее дал К. Гаусс (C. Gauss) в конце 18 в. (см. *Алгебры основная теорема*). Наконец, в 1824 Н. Абель (N. Abel) установил, что уравнения выше 4-й степени в общем случае в радикалах не разрешимы, а в 1830 Э. Галуа (E. Galois) указал общий критерий разрешимости алгебраич. уравнения в радикалах (см. *Галуа теория*). Другие задачи отходят в это время на второй план, и под А. понимается «анализ уравнений», как отмечает Ж. Серре (J. Serret) в своем курсе высшей алгебры (1849).

Наряду с теорией алгебраич. уравнений с одним неизвестным развивается теория систем алгебраич. уравнений с несколькими неизвестными, в частности систем линейных уравнений. В связи с исследованием последних возникают понятия *матрицы* и *определителя*. В дальнейшем матрицы становятся предметом самостоят. теории — алгебры матриц, роль к-рой не исчерпывается применением к исследованию систем линейных уравнений.

Начиная с сер. 19 в., центр тяжести в алгебраич. исследованиях постепенно перемещается с теории уравнений на изучение произвольных алгебраич. операций. Первоначальные попытки аксиоматич. изучения алгебраич. операций можно проследить уже в «теории отношений» Евклида, однако они не получили развития из-за невозможности геометрически интерпретировать даже простейшие действия над числами как отношениями длин или площадей. Дальнейший прогресс оказался возможным только после постепенного расширения и углубления понятия *числа*, а также в результате появления разнообразных примеров алгебраич. операций над объектами совсем иной природы, нежели числа,— первыми такими примерами (нач. 19 в.) явились «композиция двоичных квадратичных форм» К. Гаусса и умножение подстановок П. Руффини (P. Ruffini) и О. Коши (A. Cauchy). Явное выделение абстрактного понятия алгебраич. операции было сделано в сер. 19 в.

в связи с исследованиями природы *комплексных чисел*. Возникают *алгебра логики* Дж. Буля (G. Boole), *внешние алгебры* Г. Грассмана (H. Grassmann), *кватернионы* У. Гамильтона (W. Hamilton). А. Кэли (A. Cayley) создает матричное исчисление, К. Жордан (C. Jordan) публикует большой трактат о группах *подстановок*.

Эти работы подготовили вступление А. в конце 19 — нач. 20 вв. в современный этап ее развития, характеризующийся объединением ранее разрозненных алгебраич. идей на общей аксиоматич. основе и существенным расширением области приложений А. Современная точка зрения на А. как на общую теорию алгебраич. операций сформировалась в нач. 20 в. под влиянием работ Д. Гильберта (D. Hilbert), Э. Штейница (E. Steinitz), Э. Артина (E. Artin), Э. Нётер (E. Noether) и окончательно утвердилась с выходом в 1930 монографии Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden) «Современная алгебра».

Предмет, основные разделы алгебры, связь с другими областями математики. Предметом изучения современной А. являются множества с заданными на них алгебраич. операциями (т. е. алгебры, или *универсальные алгебры*, см. терминологич. справку *Алгебра*), рассматриваемые с точностью до *изоморфизма*. Последнее означает, что природа множеств — носителей алгебраич. операций с точки зрения А. безразлична, и в этом смысле подлинным объектом изучения являются сами алгебраич. операции (см. начало статьи).

Фактическому изучению долгое время подвергались сравнительно немногие основные типы универсальных алгебр, естественно выделившиеся в ходе развития математики и ее приложений.

Один из наиболее важных и наиболее изученных типов алгебр — *группы*, т. е. алгебры с одной ассоциативной бинарной операцией, содержащие единицу и для каждого элемента — обратный элемент. Понятие группы явилось исторически первым примером универсальной алгебры и послужило во многих отношениях образцом при перестройке А. и, вообще, математики на рубеже 19 -20 вв. Значительно позже началось самостоятельное изучение таких обобщений групп, как *полугруппы*, *квазигруппы* и *лупы*.

Важнейшие типы алгебр с двумя бинарными операциями — кольца и поля. Операции в них обычно наз. сложением и умножением. Кольцо определяется аксиомами *абелевой группы* для сложения и законами дистрибутивности для умножения относительно сложения (см. *Кольца и алгебры*). Первоначально изучались лишь кольца с ассоциативным умножением, и это требование ассоциативности иногда даже включают в определение кольца (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). В настоящее время вполне сложившимся является общее направление, посвященное изучению неассоциативных колец (см. *Неассоциативные кольца и алгебры*). *Телом* наз. ассоциативное кольцо, все отличные от нуля элементы к-рого образуют группу по умножению. *Поле* — тело с коммутативным умножением. Числовые поля, т. е. совокупности чисел, замкнутые относительно сложения, умножения, вычитания и деления на число, отличное от нуля, неявно фигурировали уже в начальных исследованиях по алгебраич. уравнениям. Ассоциативно-коммутативные кольца и поля являются основными объектами изучения *коммутативной алгебры*, с к-рой тесно связана *алгебраическая геометрия*.

Другой важный тип алгебр с двумя бинарными операциями — *решетки*. Типичные примеры решеток: система подмножеств данного множества с операциями теоретико-множественного объединения и пересечения, множество положительных целых чисел с операциями взятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Линейные (или векторные) пространства над полем можно трактовать как универсальные алгебры с одной бинарной операцией — сложением и набором унарных операций — умножений на скаляры из основного поля. Рассматриваются также линейные пространства над телами. Если за множество скаляров взять кольцо, то получается более широкое понятие модуля. Изучению линейных пространств, модулей, а также их линейных преобразований и смежным вопросам посвящен важный раздел А.— *линейная алгебра*, частью к-рой являются сформировавшиеся еще в 19 в. теория линейных уравнений и теория матриц. К линейной алгебре тесно примыкает *полилинейная алгебра*.

Первые работы по общей теории произвольных универсальных алгебр (иногда сама эта теория наз. универсальной алгеброй) относятся к 30-м гг. 20 в. и принадлежат Г. Биркгофу (G. Birkhoff). В те же годы А. И. Мальцев и А. Тарский (A. Tarski) заложили основы теории *моделей*, т. е. множеств с отмеченными на них отношениями. В дальнейшем теория универсальных алгебр и теория моделей столь тесно переплелись между собой, что привели к возникновению новой дисциплины, пограничной между А. и математич. логикой,— теории *алгебраических систем*, изучающей множества с определенными на них алгебраич. операциями и отношениями.

Ряд дисциплин, пограничных между А. и другими частями математики, определяется внесением в универсальные алгебры дополнительных структур, согласованных с алгебраич. операциями. Сюда относятся *топологическая алгебра*, в т. ч. теория *топологических групп* и *Ли групп*, теория *нормированных колец*, *дифференциальная алгебра*, теории различных упорядоченных алгебраич. образований. К сер. 50-х гг. 20 в. оформилась в самостоятельную дисциплину *гомологическая алгебра*, уходящая своими истоками как в А., так и в топологию.

Роль А. в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей «алгебраизации» математики. Типичный путь изучения многих математич. объектов, порой очень далеких от А., состоит в построении алгебраич. систем, достаточно хорошо отражающих поведение изучаемых объектов. Так, изучение групп Ли во многом сводится к изучению их алгебраич. отражений — *Ли алгебр*. Аналогичный метод используется в топологии — каждому топологич. пространству сопоставляется нек-рым стандартным способом бесконечная серия групп гомологий (см. *Гомологий группа*), и эти серии алгебраич. отражений позволяют очень точно судить о свойствах самих пространств. Именно с помощью А. сделаны последние крупные открытия в топологии (см. *Алгебраическая топология*).

Казалось бы, перевод задач на язык А., решение их на этом языке, а затем обратный перевод только усложняют дело. В действительности такой путь оказывается весьма выгодным, а порой и единственно возможным. Объясняется это тем, что алгебраизация позволяет применить для решения задачи не только чисто словесные рассуждения, но и мощный аппарат формальных алгебраич. вычислений, сокрушающий подчас самые сложные препятствия. Эта роль А. в математич. творчестве напоминает роль современных ЭВМ в задачах практики.

Алгебраич. понятия и методы широко применяются в теории чисел (см. *Алгебраическая теория чисел*), в *функциональном анализе*, в теории дифференциальных уравнений, в геометрии (см. *Инвариантов теория*, *Проективная геометрия*, *Тензорная алгебра*) и в других математич. дисциплинах.

Наряду с фундаментальной ролью внутри математики А. имеет большое прикладное значение — следует

отметить ее выходы в физику (теория представлений конечных групп в квантовой механике, дискретные группы в кристаллографии), в кибернетику *(автоматов теория)*, в математич. экономику *(линейные неравенства)*.

Лит.: [1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Мальцев А. И., К истории алгебры в СССР за первые 25 лет, «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 1, с. 103—18; [3] Математика, ее содержание, методы и значение. Сб. статей, т. 1—3, М., 1956; [4] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [5] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [6] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [7] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

См. также лит. при статьях об отдельных алгебраических дисциплинах.

Ю. И. Мерзляков, А. И. Ширшов.

C^*-АЛГЕБРА — *банахова алгебра* A над полем комплексных чисел, снабженная такой инволюцией, $x \to x^*$, $x \in A$, что норма и инволюция связаны соотношением $\|x^*x\| = \|x\|^2$ для любого элемента $x \in A$. C^*-А. были введены в 1943 (см. [1]) под назв. в полне регулярных колец, их наз. также B^*-алгебрами.

Важнейшие примеры C^*-А. 1) Алгебра $C_0(X)$ непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве X, стремящихся к нулю на бесконечности (т. е. таких непрерывных функций f на X, что для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $|f(x)| \geqslant \varepsilon$, компактно в X); $C_0(X)$ снабжается равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

инволюция в $C_0(X)$ определяется как переход к комплексно сопряженной функции: $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Любая коммутативная C^*-А. A изометрически и симметрически изоморфна C^*-А. (т. е. изоморфна как банахова алгебра A с инволюцией) $C_0(X)$, где X — пространство максимальных идеалов алгебры A, снабженное топологией Гельфанда (см. [1], [2], [3]).

2) Алгебра $L(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, рассматриваемая относительно обычных линейных операций и умножения операторов; инволюция в $L(H)$ определяется как переход к сопряженному оператору, норма — как обычная норма оператора.

Подмножество $M \subset A$ наз. самосопряженным, если $M = M^*$, где $M^* = \{x^*, x \in M\}$. Любая замкнутая самосопряженная подалгебра B C^*-А. A является C^*-А. относительно линейных операций, умножения, инволюции и нормы, заимствованных из A; B наз. C^*-подалгеброй A. Всякая C^*-А. изометрически и симметрически изоморфна C^*-подалгебре нек-рой C^*-А. вида $L(H)$. Любой замкнутый двусторонний идеал I в C^*-А. A самосопряжен (поэтому I есть C^*-подалгебра A), факторалгебра A/I, снабженная естественными линейными операциями, умножением, инволюцией и нормой факторпространства, есть C^*-А. Множество $K(H)$ вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве H есть замкнутый двусторонний идеал в $L(H)$. Если A есть C^*-А., $\tilde{A}$ — алгебра с инволюцией, получаемая из A присоединением единичного элемента, то на $\tilde{A}$ существует единственная норма, превращающая $\tilde{A}$ в C^*-А. и продолжающая норму на A. Кроме того, для C^*-А. определены операции ограниченной прямой суммы и тензорного произведения (см. [3], [4]).

Как и во всякой симметричной банаховой алгебре, в C^*-А. A можно выделить подмножества: действительное линейное пространство A_h эрмитовых элементов; множество нормальных элементов; мультипликативную группу U унитарных элементов (если A содержит единичный элемент); множество A^+ положительных эле-

ментов. Множество A^+ есть замкнутый конус в A_h, $A^+ \cup (-A)^+ = \{0\}$, $A^+ - A^+ = A_h$, и конус A^+ превращает A_h в упорядоченное действительное векторное пространство. Если A содержит единичный элемент 1, то 1 — внутренняя точка конуса $A^+ \subset A_h$. Линейный функционал на A наз. положительным, если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in A^+$; такой функционал непрерывен. Если $x \in B$, где B есть C^*-подалгебра A, то спектр элемента x в B совпадает со спектром x в A. Спектр эрмитова элемента действителен, спектр унитарного элемента лежит на единичной окружности, спектр положительного элемента неотрицателен. Построено функциональное исчисление для нормальных элементов C^*-А. Любая C^*-А. A имеет аппроксимативную единицу, лежащую в единичном шаре алгебры A и образованную положительными элементами из A. Если I, J — замкнутые двусторонние идеалы в A, то $I+J$ — замкнутый двусторонний идеал в A и $(I+J)^+ = I^+ + J^+$. Если I — замкнутый двусторонний идеал в J, J — замкнутый двусторонний идеал в A, то I — замкнутый двусторонний идеал в A. Всякий замкнутый двусторонний идеал есть пересечение содержащих его двусторонних примитивных идеалов; всякий замкнутый левый идеал в A — есть пересечение содержащих его максимальных регулярных левых идеалов.

Любой *-изоморфизм C^*-А. является изометрическим. Любой *-гомоморфизм π банаховой алгебры с инволюцией B в C^*-А. A непрерывен и $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in B$. В частности, все представления банаховой алгебры с инволюцией (т. е. *-гомоморфизм B в C^*-А. вида $L(H)$) непрерывны. Теория представлений C^*-А. составляют существенную часть теории C^*-А., и приложения теории C^*-А. связаны именно с теорией представлений C^*-А. Свойства представлений C^*-А. позволяют построить для каждой C^*-А. A топологич. пространство $\hat{A}$, наз. спектром C^*-А., и снабдить это пространство *Макки борелевской структурой*. Спектр C^*-А., вообще говоря, не удовлетворяет никаким аксиомам отделимости, но является локально бикомпактным *Бэра пространством*.

C^*-А. A наз. CCR-алгеброй (соответственно GCR-алгеброй), если для любого ненулевого неприводимого представления π C^*-А. A в гильбертовом пространстве H выполняется соотношение $\pi(A) = K(H_\pi)$ (соответственно $\pi(A) \supset K(H_\pi)$).

C^*-А. наз. $NGCR$-алгеброй, если A не содержит ненулевых замкнутых двусторонних GCR-идеалов (т. е. идеалов, являющихся GCR-алгебрами). Любая C^*-А. A содержит максимальный двусторонний GCR-идеал I, и факторалгебра A/I есть $NGCR$-алгебра. Всякая GCR-алгебра содержит возрастающее семейство замкнутых двусторонних идеалов I_α, занумерованных порядковыми числами α, $\alpha \leqslant \rho$, такое, что $I_\rho = A$, $I_1 = \{0\}$, $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ есть CCR-алгебра при всех $\alpha < \rho$, и $I_\alpha = \bigcup_{\alpha' < \alpha} I_{\alpha'}$ для предельных порядковых чисел α. Спектр GCR-алгебры содержит открытое всюду плотное отделимое локально бикомпактное подмножество.

C^*-А. A наз. C^*-алгеброй типа I, если для любого представления π C^*-А. A в гильбертовом пространстве H_π *Неймана алгебра*, порожденная семейством $\pi(A)$ в H_π, есть алгебра Неймана типа I. Для C^*-А. A следующие условия эквивалентны: а) A есть C^*-А. типа I; б) A есть GCR-алгебра; в) любое факторпредставление C^*-А. A кратно неприводимому. Если A удовлетворяет этим условиям, то: 1) неприводимые представления C^*-А. A эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра совпадают; 2) спектр C^*-А. A есть T_0-пространство. Если A — сепарабельная C^*-А., то каждое из условий 1) и 2) эквивалентно условиям а) — в). В частности, всякая сепарабельная C^*-А., имеющая единственное с точностью до эквивалентности непривo-

димое представление, изоморфна C^*-А. $K(H)$ для нек-рого гильбертова пространства H.

Пусть A есть C^*-А., P — множество таких элементов $x \in A$, что функция $\pi \to \mathrm{Tr}\pi(x)$ конечна и непрерывна на спектре C^*-А. A. Если линейная оболочка множества P всюду плотна в A, то A наз. C^*-А. с непрерывным следом. Спектр таких C^*-А. отделим, и при нек-рых дополнительных условиях C^*-А. с непрерывным следом можно представить в виде алгебры вектор-функций на спектре $\hat{A}$ (см. [3]).

Пусть A есть C^*-А., F — множество положительных линейных функционалов на A с нормой $\leqslant 1$, $P(A)$ — множество ненулевых крайних точек выпуклого множества F. Тогда $P(A)$ — множество чистых состояний C^*-А. A (см. *Представления симметричных алгебр*). Пусть B есть C^*-подалгебра A. Если A есть GCR-алгебра и B разделяет точки множества $P(A) \cup \{0\}$, т. е. для любых f_1, $f_2 \in P(A) \cup \{0\}$, $f_1 \neq f_2$, существует $x \in B$ такой, что $f_1(x) \neq f_2(x)$, то $B - A$ (теорема Стоуна — Вейерштрасса). Если A — произвольная C^*-А. и B разделяет точки множества $\overline{P(A)} \cup \{0\}$, то $B - A$.

Второе сопряженное пространство A^{**} с C^*-А. A естественным образом снабжается операцией умножения, превращающей A^{**} в C^*-А., изоморфную нек-рой алгебре Неймана; эта алгебра наз. обертывающей алгеброй Неймана C^*-А. (см. [3], [4]).

Теория C^*-А. имеет многочисленные применения в теории представлений групп и симметричных алгебр [3], теории динамич. систем [4], статистич. физике и квантовой теории поля [5], а также в теории операторов в гильбертовом пространстве [6].

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Матем. сб.», 1943, т. 12, № 2, с. 197—213; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., 1956; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [4] Sakai S., C^*-algebras and W^*-algebras, N. Y., 1971; [5] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с франц., М., 1971; [6] Douglas R. G., Banach Algebra Technigues in Operator Theory, N. Y., 1972.

А. И. Штерн.

PI-АЛГЕБРА — алгебра над полем, в к-рой выполняются нек-рые полиномиальные тождества.

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F,

$$F[X] = F[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$$

— *свободная ассоциативная алгебра* (алгебра некоммутативных многочленов) от счетного множества образующих $x = (x_1, \ldots, x_n \ldots)$ над F и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой элемент алгебры $F[x]$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

наз. полиномиальным тождеством алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для любого набора элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Примеры PI-А. и тождеств. В коммутативной алгебре выполняется тождество

$$[x_1 x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

(тождество коммутативности); во внешней алгебре линейного пространства выполняется тождество метабелевости $[[x_1, x_2], x_3] = 0$; алгебра A конечной размерности $n = 1$ над полем F удовлетворяет так наз. стандартному тождеству n-й степени

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} = 0,$$

где S_n — группа подстановок множества, состоящего из первых n натуральных чисел и $(-1)^\sigma = \mathrm{sgn}\sigma$, а также более общему тождеству Капелли

$$K_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \ldots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1} = 0;$$

в алгебре F_n квадратных матриц порядка n над полем F

выполняется стандартное тождество степени $2n$. Тензорное произведение PI-А. является PI-А.

Для всякой PI-А. A над полем F характеристики нуль можно указать такое натуральное число n, что тождества алгебры A исчерпываются степенями тождеств алгебры матриц F_n, причем нек-рая степень любого тождества алгебры F_n является тождеством алгебры A. Таким образом, во всякой PI-А. над полем характеристики нуль выполняется нек-рая степень стандартного тождества.

Совокупность всех левых частей тождеств, выполняющихся в данной алгебре A, образует вполне характеристич. идеал (коротко, Т-*идеал*) свободной алгебры $F[x]$ и обратно, для всякого Т-идеала существует алгебра, совокупность тождеств к-рой совпадает с этим Т-идеалом (ею будет, напр., факторалгебра $F[x]/T$). В случае, когда поле F нулевой характеристики, тождества можно дифференцировать, и Т-идеалы алгебры $F[x]$ — это в точности дифференциально замкнутые односторонние идеалы. Напр., из нильтождества $x^n=0$ многократным дифференцированием получается тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_n)\frac{\partial}{\partial x}(x_{n-1})\dots\frac{\partial}{\partial x}(x_1)\,x^n=$$
$$=\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}=0,$$

к-рое является полилинейным (точнее, n-линейным), т. е. линейным по каждой переменной, входящей в его запись. Причем и обратно, положив в последнем тождестве $x_1=\dots=x_n=0$, можно получить тождество $n!\,x^n=0$, или $x^n=0$. Этот процесс линеаризации тождеств позволяет утверждать (в случае полей нулевой характеристики), что все тождества алгебры являются следствиями ее полилинейных тождеств. Для алгебры с единицей, более того, все тождества вытекают из ее полилинейных тождеств, представимых в виде линейных комбинаций произведений правонормированных *коммутаторов* различных степеней от образующих x_i. Вопрос о том, всякая ли ассоциативная алгебра обладает конечным базисом тождеств, составляет содержание проблемы Шпехта.

Совокупность всех алгебр, удовлетворяющих данной системе тождеств, наз. многообразием. Многообразие может быть определено также как класс алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и подпрямых произведений (см. также *Алгебраических систем многообразие*). Для ряда многообразий алгебр доказана их конечная базируемость (т. е. в этих многообразиях положительно решена проблема Шпехта). Таковы многообразия (все над полем нулевой характеристики) нильпотентных алгебр данного индекса n, алгебр, в к-рых аддитивные коммутаторы длины n равны нулю (Ли-нильпотентные алгебры), многообразие алгебр, определяемое Т-идеалом политождеств M_2—алгебры матриц 2-го порядка. Однако для многообразия, определяемого идеалом тождеств M_n—алгебры матриц порядка $n>2$, вопрос открыт.

Наличие полиномиального тождества жестко определяет структуру ассоциативной алгебры. Примитивная алгебра A, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d, изоморфна алгебре матриц D_n над телом D с центром Z и

$$\dim_Z A\leqslant\left[\frac{d}{2}\right]^2.$$

Поэтому полупростая (в смысле *Джекобсона радикала*) PI-А. разлагается в подпрямую сумму полных матричных алгебр над телами, причем порядки этих алгебр и размерности тел над центрами ограничены в совокупности, и Т-идеал тождеств полупростой алгебры совпадает с нек-рым «матричным» Т-идеалом M_n. Упорядо-

ченная PI-A. коммутативна. Первичная PI-A. A обладает двусторонним классич. кольцом частных $Q(A)$, к-рое изоморфно матричной алгебре D_m над телом D, конечномерным над своим центром Z. Кольцо $Q(A)$ является центральным расширением алгебры A в том смысле, что $Q(A)=AZ$. Идеалы тождеств алгебр A и $Q(A)$ совпадают. PI-A. удовлетворяют ряду условий «бернсайдовского типа» (см. *Бернсайда проблема*). Например, алгебраическая (ниль-) PI-A. локально конечна (локально нильпотентна). Ассоциативная нильалгебра ограниченного индекса n нильпотентна, если характеристика основного поля нулевая или больше n.

PI-A., не имеющая ненулевых нильидеалов, представима матрицами над коммутативным кольцом. Но не всякая PI-A. представима в таком смысле. Напр., внешняя алгебра счетномерного пространства не представима — в ней не выполняется никакое стандартное тождество. Внутренняя характеризация представимости алгебры матрицами над коммутативным кольцом составляет самостоятельное направление исследований в теории PI-A.

Радикал Джекобсона конечно порожденной PI-A. над полем нулевой характеристики является нильидеалом. Вопрос о его нильпотентности пока (1977) открыт. Если радикал Джекобсона PI-A. нильпотентен, то она удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц порядка n для нек-рого n. Для конечно порожденных алгебр доказано и обратное утверждение. Более того, для конечно порожденной алгебры над полем нулевой характеристики нильпотентность радикала Джекобсона эквивалентна выполнимости в ней нек-рого стандартного тождества.

Во многих случаях выполнимость тождества для «части» элементов алгебры влечет за собой выполнимость нек-рого тождества во всей алгебре. Напр., если в алгебре с инволюцией симметрические элементы удовлетворяют тождеству, то она PI-A.; если на алгебре над полем нулевой характеристики действует конечная группа автоморфизмов и подалгебра инвариантов удовлетворяет нек-рому тождеству, то исходная алгебра будет PI-A.

Представляет интерес при каких условиях те или иные алгебры специального типа удовлетворяют полиномиальному тождеству.

Для того чтобы групповая алгебра $F(G)$ группы G над полем нулевой характеристики удовлетворяла некоторому полиномиальному тождеству, необходимо и достаточно, чтобы группа G обладала абелевой подгруппой конечного индекса. Если же характеристика F конечна и равна p, то $F[G]$ является PI-A. тогда и только тогда, когда G обладает p-абелевой подгруппой конечного индекса (группа наз. p-а б е л е в о й, если ее коммутант — конечная p-группа).

Универсальная обертывающая алгебра U_L алгебры Ли L над полем F характеристики нуль есть PI-A. в том и только том случае, когда L абелева (U_L — коммутативна). Если же F — поле конечной характеристики, то U_L является PI-A. тогда и только тогда, когда L обладает абелевым идеалом конечной коразмерности и присоединенное представление алгебры L является алгебраическим ограниченной степени.

Все PI-подалгебры свободной ассоциативной алгебры коммутативны.

Теория PI-A. является естественным обобщением коммутативной алгебры, она содержит глубокие и законченные аналоги теорем коммутативной алгебры, что позволяет говорить о зарождении некоммутативной алгебраич. геометрии.

Во всякой конечно порожденной PI-A. A с образующими $a_1,\ldots,a_k$ над полем F выполняется у с л о в и е о г р а н и ч е н н о с т и в ы с о т, т. е. существуют

конечное число слов $v_1, \ldots, v_m$ от a_i и натуральное число h такие, что всякое слово u от образующих a_i представимо в A в виде линейной комбинации слов

$$v_{i_1}^{S_{i_1}} \ldots v_{i_d}^{S_{i_d}},$$

где $d \leqslant h$, совпадающих по составу относительно a_i со словом u. В коммутативном случае в качестве слов v_i можно взять сами образующие a_i. Свободным некоммутативным аффинным кольцом наз. факторалгебра

$$\mathfrak{A}(F, k, n) = F[x_1, \ldots, x_k]/M_n,$$

где $F[x_1, \ldots, x_k]$ — свободная алгебра с конечным числом образующих x_i над полем F характеристики нуль, а M_n — определенный выше Т-идеал тождеств матричной алгебры F_n. Алгебра $\mathfrak{A}(F, k, n)$ есть PI-А. без делителей нуля, она обладает классич. телом частных $D(F, k, n)$, конечномерным над своим центром Z. Пусть, далее, $(F_n)_k$ - пространство, элементами к-рого являются строки длины k, состоящие из матриц алгебры F_n. Можно говорить о нулях элементов алгебры $\mathfrak{A}(F, k, n)$, лежащих в пространстве $(F_n)_k$, об алгебраич. многообразиях пространства $(F_n)_k$ и т. д. При этом окажутся выполненными основные положения классической алгебраич. геометрии. Так, имеет место некоммутативный аналог *Гильберта теоремы* о нулях. Неприводимым алгебраич. многообразиям соответствуют первичные идеалы алгебры, удовлетворяющие условию нётеровости. Выполняется теорема Крулля о совпадении максимальной из длин цепочек первичных идеалов алгебры $\mathfrak{A}(F, k, n)$ со степенью трансцендентности Z над F, к-рая в рассматриваемом случае равна

$$kn^2 - (n^2 - 1).$$

По аналогии с ассоциативными алгебрами можно определить с помощью элементов свободных алгебр PI-А. в других классах алгебр, обладающих свободными алгебрами (лиевы, альтернативные и др.).

Алгебра Ли над полем нулевой характеристики, удовлетворяющая n-му тождеству Энгеля

$$[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] = 0,$$

локально нильпотентна. Вопрос о том, влечет ли тождество Энгеля нильпотентность (проблема Хигинса), решен положительно лишь для $n = 4$. Для полей положительной характеристики эта проблема имеет отрицательное решение.

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomical identities, N.Y., 1973; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 43 [85], вып. 2, с. 277—83; [6] Кострикин А. И., «Известия АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [7] Higman G., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, part 1, p. 1—4; [8] Higgins P. J., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1954, t. 50, part 1, p. 8—15.

В. Н. Латышев.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ — раздел математической логики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логич. значений (истинности или ложности), и логич. операций над ними.

А. л. возникла в сер. 19 в. в трудах Дж. Буля (см. [1], [2]) и развилась затем в работах Ч. Пирса (C. S. Peirs), П. С. Порецкого, Б. Рассела (B. Russel), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. Создание А. л. представляло собой попытку решать традиционные логич. задачи алгебраич. методами. С появлением теории множеств (70-е гг. 19 в.) основным предметом А. л. стали высказывания и логич. операции над ними. Под высказываниями понимаются предложения, относительно к-рых имеет смысл утверждать, истинны они или лож-

ны; напр., высказывание «кит — животное» истинно, в то время как высказывание «все углы — прямые» ложно. Употребляемые в обычной речи логич. связки «и», «или», «если..., то», «эквивалентно», частица «не» и т. д. позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более «сложные» высказывания. Так, из высказываний «$x>2$», «$x\leqslant 3$» при помощи связки «и» можно получить высказывание «$x>2$ и $x\leqslant 3$», при помощи связки «или» — высказывание «$x>2$ или $x\leqslant 3$» и т. д.

Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний зависит от истинности или ложности исходных высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями. Для обозначения истинности вводится символ «И» и для обозначения ложности — символ «Л». Затем вместо этих символов стали употреблять числа 1 и 0. Связки «и», «или», «если..., то», «эквивалентно» обозначаются соответственно знаками & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность); для отрицания вводится знак $\overline{\ }$ (черточка сверху). Наряду с индивидуальными высказываниями, примеры к-рых приводились выше, стали использоваться также переменные высказывания, т. е. такие переменные, значениями к-рых могут быть любые наперед заданные индивидуальные высказывания. Далее индуктивно вводится понятие формулы, являющееся формализацией понятия сложного высказывания. Пусть A, B, C,... обозначают индивидуальные, а x, y, z,... — переменные высказывания. Каждая из этих букв наз. формулой. Если знак $*$ обозначает любую из перечисленных выше связок, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть формулы, то $(\mathfrak{A}*\mathfrak{B})$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ суть формулы, напр. $((x\,\&\,y)\rightarrow\bar{z})$. Связки и частица «не» стали рассматриваться как операции над величинами, принимающими значения 0 и 1, и результатом применения этих операций также являются числа 0 и 1. Конъюнкция $x\,\&\,y$ равна 1 тогда и только тогда, когда и x, и y равны 1; дизъюнкция $x\vee y$ равна 0 тогда и только тогда, когда и x, и y равны 0; импликация $x\rightarrow y$ равна 0 тогда и только тогда, когда x равен 1, а y равен 0; эквивалентность $x\sim y$ равна 1 тогда и только тогда, когда значения x и y совпадают; отрицание $\bar{x}$ равно 1 тогда и только тогда, когда x равен 0. Введенные операции позволяют каждой формуле при заданных значениях входящих в нее высказываний приписать одно из двух значений 0 или 1. Тем самым каждая формула может одновременно рассматриваться как нек-рый способ задания, или реализации, функций А. л., т. е. таких функций, к-рые определены на наборах из нулей и единиц и к-рые в качестве значений принимают также 0 или 1. При этом формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. равными (обозначение $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$), если они реализуют равные функции. Объектом изучения А. л. стали функции А. л. и различные операции над ними. В последующем класс функций А. л. был расширен до класса функций, аргументы к-рых и сами функции принимают в качестве значений элементы фиксированного конечного множества E; расширился также запас операций над функциями. Иногда под А. л. понимается как раз последняя концепция. Для приложений, однако, наибольшее значение имеет все-таки тот случай, когда мощность указанного множества E равна двум, поэтому он будет рассмотрен особенно подробно. Излагаемые здесь результаты также тесно связаны с другим подходом в изучении высказываний — так наз. *высказываний исчислением*.

Для задания функций А. л. иногда используют таблицы, содержащие все наборы значений переменных и значения функций на этих наборах. Так, напр., свод-

ная таблица, задающая функции $\bar{x}$, $x\&y$, $x\vee y$, $x\to y$, $x\sim y$, имеет вид:

x	y	$\bar{x}$	$x\&y$	$x\vee y$	$x\to y$	$x\sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Аналогично устроены таблицы для произвольных функций А. л. Это — так наз. табличный способ задания функций А. л. Сами таблицы иногда наз. истинностными таблицами. Для преобразования формул в равные формулы важную роль играют следующие равенства:

$$x\&y = y\&x, \quad x \vee y = y \vee x \tag{1}$$

(закон коммутативности),

$$(x\&y)\&z = x\&(y\&z), \qquad (x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z) \tag{2}$$

(закон ассоциативности),

$$x\&(x\vee y) = x, \qquad x\vee(x\&y) = x \tag{3}$$

(закон поглощения),

$$x\&(y\vee z) = (x\&y)\vee(x\&z), \qquad x\vee(y\&z) = (x\vee y)\&(x\vee z) \tag{4}$$

(закон дистрибутивности),

$$x\&\bar{x} = 0 \tag{5}$$

(закон противоречия),

$$x\vee\bar{x} = 1 \tag{6}$$

(закон исключенного третьего),

$$x \longrightarrow y = \bar{x}\vee y, \qquad x \sim y = (x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}). \tag{7}$$

Эти равенства позволяют уже без помощи таблиц получать другие равенства. Методом получения последних являются так наз. тождественные преобразования, к-рые меняют, вообще говоря, выражение, но не функцию, реализуемую этим выражением. Напр., при помощи законов поглощения получается закон идемпотентности $x\vee x = x$. Упомянутые равенства в ряде случаев позволяют существенно упростить запись формул освобождением от «лишних скобок». Так, соотношения (1) и (2) дают возможность вместо формул $(\ldots(\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2)\&\ldots)\&\mathfrak{A}_s)$ и $(\ldots(\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2)\vee\ldots)\vee\mathfrak{B}_s)$ использовать более компактную запись $\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2\,\&\ldots\&\,\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\ldots\vee\mathfrak{B}_s$. Первое из этих соотношений наз. конъюнкцией сомножителей $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_s$, а второе — дизъюнкцией слагаемых $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_s$. Равенства (5), (6), (7) показывают также, что константы 0 и 1, импликацию и эквивалентность, рассматривая их как функции, можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Более того, всякая функция А. л. может быть реализована формулой, записываемой с помощью символов &, $\vee$, $\bar{}$.

Множество всех формул, в построении к-рых участвуют переменные высказывания и нек-рые из символов &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$ и констант 0 и 1, наз. языком над данными символами и константами. Равенства (1)— (7) показывают, что для всякой формулы в языке над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$, 0,1 найдется равная ей формула в языке над &, $\vee$, $\bar{}$, 0, 1, напр.:

$$(x \longrightarrow y) \sim z = ((\bar{x}\vee y)\,\&z)\vee((\overline{\bar{x}\vee y})\,\&\bar{z}).$$

Особую роль в последнем языке играет класс формул, к-рые могут быть записаны в виде $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_s$, 0 или 1, где $s \geqslant 1$ и каждое $\mathfrak{A}_i$ — либо переменное высказывание, либо его отрицание, либо конъюнкция таковых, при этом каждое $\mathfrak{A}_i$ не содержит одинаковых сомножителей и не содержит сомножителей вида x и $\bar{x}$ одновременно и все $\mathfrak{A}_i$ попарно не равны. Здесь скобки опускаются, т. к. предполагается, что операция конъюнкции связывает «сильнее», чем дизъюнкция, т. е. при вычислении по заданным значениям переменных следует сначала вычислять значения $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$. Эти выражения наз. дизъюнктивными нормальными формами (д. н. ф.). Каждую формулу u в языке над &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $^-$, 0, 1, реализующую функцию А. л., отличную от 0, при помощи равенств (1) — (7), можно привести к равной ей д. н. ф., содержащей все переменные формулы u и любое число других переменных, причем каждое $\mathfrak{A}_i$ в этой д. н. ф. содержит одни и те же переменные. Такая д. н. ф. наз. совершенной д. н. ф. формулы u; для 0 совершенной д. н. ф. является сама формула 0. Возможность приведения к совершенной д. н. ф. лежит в основе алгоритма, устанавливающего равенство или неравенство двух наперед заданных формул. Алгоритм этот состоит в следующем: приводят исследуемые формулы u_1 и u_2 к совершенным д. н. ф., содержащим все те переменные, к-рые есть как в u_1, так и в u_2, и смотрят, совпадают полученные выражения или нет; если совпадают, то $u_1 = u_2$, если нет, то $u_1 \neq u_2$. Важную роль в А. л. и ее приложениях играет сокращенная д. н. ф., т. е. такая, для к-рой выполнены следующие условия: 1) в ней нет таких пар слагаемых $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, что всякий сомножитель из $\mathfrak{A}_i$ имеется и в $\mathfrak{A}_j$; 2) для всяких двух слагаемых $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, из к-рых одно содержит сомножителем нек-рое переменное, а другое — отрицание этого переменного (при условии, что другого переменного, для к-рого это же имеет место, в данной паре слагаемых нет), имеется (в этой же д. н. ф.) слагаемое $\mathfrak{A}_k$, равное конъюнкции остальных сомножителей этих двух слагаемых. Всякая д. н. ф. при помощи равенств (1) — (7) может быть приведена к равной ей сокращенной д. н. ф. Напр., сокращенной д. н. ф. для формулы $((x \sim (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \& z))$ является $x\bar{y} \vee z \vee xy$. Формулы u_1 и u_2 равны тогда и только тогда, когда их сокращенные д. н. ф. совпадают. Кроме д. н. ф., употребляются также конъюнктивные нормальные формы (к. н. ф.), т. е. выражения, к-рые можно получить из д. н. ф. путем замены в них знаков $\vee$ на &, а & на $\vee$ и 0 на 1. Напр., из д. н. ф. $x\bar{y} \vee xz$ получается к. н. ф. $(x \vee y) \& (\bar{x} \vee z)$. Операция (или функция) f наз. двойственной для операции ψ, если таблица, задающая f, получается из таблицы, задающей ψ, путем замены в ней всюду 0 на 1 и 1 на 0 (включая замену значений функций). Напр., конъюнкция и дизъюнкция двойственны между собой, отрицание двойственно самому себе, константы 1 и 0 двойственны друг другу и т. д. Преобразование формул, при к-ром знаки всех операций в выражении заменяются на знаки двойственных им операций, константа 0 заменяется на 1, а 1 на 0, наз. преобразованием двойственности. Если верно равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^*$ двойственно $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}^*$ двойственно $\mathfrak{B}$, то верно равенство $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$, наз. двойственным предыдущему; это — так. наз. принцип двойственности. Примерами двойственных равенств являются пары законов (1), (2), (3); равенство (5) двойственно равенству (6), каждая к. н. ф. двойственна нек-рой д. н. ф. Совершенная к. н. ф. и сокращенная к. н. ф. определяются как такие к. н. ф., что двойственные им выражения являются соответственно совершенной д. н. ф. и сокращенной д. н. ф. Совершенные и сокращенные

д. н. ф. и к. н. ф. используются для решения задачи обзора всех гипотез и всех следствий заданной формулы. Под гипотезой формулы $\mathfrak{A}$ понимается такая формула $\mathfrak{B}$, что $(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})=1$; а под следствием формулы $\mathfrak{A}$ — такая формула $\mathfrak{B}$, что $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})=1$. Гипотеза формулы $\mathfrak{A}$ наз. простой, если она есть конъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее сомножителей перестает быть гипотезой формулы $\mathfrak{A}$. Аналогично следствие формулы $\mathfrak{A}$ наз. простым, если оно есть дизъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее слагаемых перестает быть следствием формулы $\mathfrak{A}$. Решение задачи обзора гипотез и следствий основано на указании алгоритма, строящего все простые гипотезы и следствия для заданной формулы, и на получении из них при помощи законов (2) — (7) всех остальных гипотез и следствий. Алгоритм опирается на следующие факты. Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одни и те же гипотезы и следствия, соответственно. Слагаемое д. н. ф. является гипотезой этой д. н. ф., сомножитель к. н. ф.— следствием этой к. н. ф. Если $\mathfrak{A}$ — гипотеза выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ есть тоже гипотеза для $\mathfrak{B}$; если $\mathfrak{A}$ - следствие выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ есть тоже следствие из $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — гипотезы выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ — тоже гипотеза для $\mathfrak{B}$; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — следствия из $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — тоже следствие из $\mathfrak{A}$. У совершенной д. н. ф. нет других гипотез (не содержащих букв, не входящих в эту д. н. ф.), кроме дизъюнкций нек-рых ее слагаемых или д. н. ф., равных им. У совершенной к. н. ф. нет других следствий, кроме конъюнкций нек-рых ее сомножителей или равных им выражений. Сокращенная д. н. ф. есть дизъюнкция всех своих простых гипотез; сокращенная к. н. ф. есть конъюнкция всех своих простых следствий. Сокращенная д. н. ф. имеет важные приложения. Прежде всего следует отметить задачу минимизации функций А. л., являющуюся частью задачи синтеза управляющих систем. Минимизация функций А. л. состоит в построении такой д. н. ф. для заданной функции А. л., к-рая реализует эту функцию и имеет наименьшее суммарное число сомножителей в своих слагаемых, т. е. имеет минимальную сложность. Такие д. н. ф. наз. минимальными. Каждая минимальная д. н. ф. для заданной отличной от константы функции А. л. получается из сокращенной д. н. ф. этой функции путем выбрасывания нек-рых слагаемых. Для отдельных функций сокращенная д. н. ф. может совпадать с минимальной д. н. ф. Это имеет место, напр., для монотонных функций, т. е. таких функций, к-рые реализуются формулами над &, $\vee$, 0, 1.

В языке над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$, 1, $+$, где знак $+$ интерпретируется как сложение по модулю 2, устанавливаются следующие соотношения:

$$x\vee y=((x\&y)+x)+y, \tag{8}$$

$$x\to y=\bar{x}\&y,\quad x\sim y=(x+y)+1, \tag{9}$$

$$x\mid y=(x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}),\quad 1=x\vee\bar{x}. \tag{10}$$

Эти формулы позволяют переводить формулы в языке над &, $\vee$, $\to$, $\bar{}$, 0, 1 в равные им формулы в языке над &, $+$, 1, и обратно. Тождественные преобразования в последнем языке осуществляются при помощи равенств, установленных для конъюнкции, и дополнительных:

$$x+y=y+x, \tag{11}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z), \tag{12}$$

$$x\&(y+z)=x\&y+x\&z, \tag{13}$$

$$x\&x=x,\quad x+(y+y)=x,\quad x\&1=x; \tag{14}$$

здесь по-прежнему считается, что конъюнкция связывает сильнее, чем знак $+$. Этих равенств достаточно, для того чтобы из них при помощи тождественных

преобразований так же, как и при рассмотрении языка над &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $^-$, 0,1, можно было вывести любое верное равенство в языке над &, $+$, 1. Выражение в этом языке наз. приведенным полиномом, если оно либо имеет вид $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_j$ есть или 1, или переменное, или конъюнкция различных переменных без отрицаний, $\mathfrak{A}_i \neq \mathfrak{A}_j$ при $i \neq j$, $s \geqslant 1$, либо равно $1+1$. Напр., выражение $x\&y\&z+x\&y+1$ является приведенным полиномом. Всякую формулу А. л. при помощи тождественных преобразований можно привести к приведенному полиному. Равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда приведенный полином для $\mathfrak{A}$ совпадает с приведенным полиномом для $\mathfrak{B}$. Кроме рассмотренных языков, существуют и другие языки, равносильные им (два языка наз. равносильными, если при помощи нек-рых правил преобразований каждая формула одного из этих языков переводится в нек-рую равную ей формулу в другом языке, и обратно). В основу такого языка достаточно положить любую систему операций (и констант), обладающую тем свойством, что через операции (и константы) этой системы можно представить всякую функцию А. л. Такие системы наз. функционально полными. Примерами полных систем являются $\{\overline{x\vee y}\}$, $\{x\vee y,\ x\}$, $\{x+y,\ 1,\ x\&y\}$ и т. п. Существует алгоритм, к-рый по произвольной конечной системе функций А. л. устанавливает ее полноту или неполноту. Он основан на следующем факте. Система функций А. л. является полной тогда и только тогда, когда она содержит такие функции $f_1(x, y,\ldots, v)$ и $f_2(x, y,\ldots,v)$, что $f_1(0,0,\ldots,\ 0)=1$ и $f_2(1,1,\ldots,1)=0$, а также функции f_3, f_4 и f_5, где $f_3 \neq f_3^*$, f_4 не монотонная, а для f_5 приведенный полином содержит слагаемое $\mathfrak{A}$, в к-ром больше одного сомножителя. Рассматриваются и такие языки, в основе к-рых лежат системы операций, не являющиеся функционально полными, и таких языков бесконечно много. Среди них имеется бесконечно много попарно несравнимых языков (в смысле отсутствия переводимости при помощи тождественных преобразований с одного языка на другой). Однако для всякого языка, построенного на основе тех или иных операций А. л., существует такая конечная система равенств этого языка, что всякое равенство выводимо при помощи тождественных преобразований из равенств этой системы. Такая система наз. дедуктивно полной системой равенств данного языка. Напр., равенства (1) (6) составляют полную систему равенств языка над &, $\vee$, $^-$, 0, 1.

Рассматривая тот или иной из упомянутых выше языков вместе с нек-рой полной системой равенств этого языка, иногда отвлекаются от табличного задания операций, лежащих в основе языка, и от того, что значениями его переменных являются высказывания. Вместо этого допускаются различные интерпретации языка, состоящие из той или иной совокупности объектов (служащих значениями переменных) и системы операций над объектами этого множества, удовлетворяющих равенствам из полной системы равенств языка. Так, язык над &, $\vee$, $^-$, 0, 1 в результате такого шага превращается в язык *булевой алгебры*; язык над &, $+$, 1 превращается в язык *булева кольца* (с единицей), язык над &, $\vee$, $^-$ превращается в язык *дистрибутивной решетки* и т. д.

А. л. развивается гл. обр. под влиянием задач, встающих в области ее приложений. Из них самую важную роль играют приложения в теории электрич. схем. Для описания последних в нек-рых случаях приходится отказываться от использования лишь обычной двузначной А. л. и рассматривать те или иные ее многозначные обобщения (см. *Многозначная логика*).

Лит.: [1] Boole G., The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Oxf.,

1948; [2] его же, An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, N.Y., 1951; [3] Порецкий П. С., О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики, в кн.: Собрание протоколов заседаний секции физико-матем. наук Общества естествоиспытателей при Казанском ун-те, т. 2, Казань, 1884, с. 161—330; [4] Гильберт Д., Аккерман Б., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [5] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [6] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1964. *В. Б. Кудрявцев.*

АЛГЕБРА МЕР — алгебра $M(G)$ комплексных регулярных борелевских мер на локально компактной абелевой группе G, имеющих ограниченную вариацию, с обычными линейными операциями и сверткой в качестве умножения (см. *Гармонический анализ абстрактный*). Свертка $\lambda*\mu$ мер λ, $\mu\in M(G)$ полностью определяется из условия, что для любой непрерывной функции f на G с компактным носителем

$$\int_G f\,d(\lambda*\mu)=\int_G\int_G f(x+y)\,d\lambda(x)\,d\mu(y).$$

Если за норму в $M(G)$ принять полную вариацию меры, то $M(G)$ становится коммутативной *банаховой алгеброй* над полем комплексных чисел. А. м. $M(G)$ обладает единицей, к-рой служит δ-мера, сосредоточенная в нуле группы. Совокупность дискретных мер, содержащихся в $M(G)$, образует замкнутую подалгебру.

Каждой функции f, принадлежащей *групповой алгебре* $L^1(G)$, может быть поставлена в соответствие мера $\mu_f\in M(G)$ по правилу

$$\mu_f(E)=\int_E f\,dx$$

(интеграл по мере Хаара). При этом возникает изометрическое изоморфное вложение $L^1(G)\to M(G)$. Образ при этом вложении является замкнутым идеалом в $M(G)$.

Преобразованием Фурье Стилтьеса меры $\mu\in M(G)$ наз. функция $\hat{\mu}$ на двойственной группе $\hat{G}$, определяемая формулой:

$$\hat{\mu}(\chi)=\int_G\overline{\chi}\,d\mu.$$

При этом $\lambda*\mu\to\hat{\lambda}\cdot\hat{\mu}$ и $\|\mu\|\to 0$, если $\hat{\mu}\equiv 0$. В частности, $M(G)$ есть алгебра без радикала.

Если группа G не дискретна, то А. м. $M(G)$ устроена весьма сложно: она не симметрична, и ее пространство максимальных идеалов обладает рядом патологич. свойств. Напр., это пространство содержит бесконечномерные аналитич. образования, а естественно вложенная в него группа $\hat{G}$ не плотна даже в границе Шилова. Вместе с тем известны идемпотентные меры, т. е. такие, что $\mu*\mu\to\mu$. Каждая идемпотентная мера есть конечная целочисленная комбинация $n_1\mu_1+\ldots+n_k\mu_k$, где $\mu_i=\chi_i\nu_i$, причем ν_i — мера Хаара компактной подгруппы, а χ_i — характер. В случае $G=\mathbb{Z}$ это приводит к тому, что последовательность (c_m) из 0 и 1 тогда и только тогда есть преобразование Фурье — Стилтьеса нек-рой меры на окружности, когда (c_m) не более чем в конечном числе членов отличается от периодич. последовательности.

В общем случае теорема об идемпотентных мерах допускает естественную интерпретацию в терминах нульмерных когомологий пространства максимальных идеалов. Удовлетворительное описание известно и для других групп когомологий пространства максимальных идеалов А. м., что, в частности, позволяет судить о возможности логарифмировать обратимую меру из $M(G)$ (одномерные целочисленные когомологии).

Лит.: [1] Rudin W., Fourier analysis on groups, N.Y.—L., 1962; [2] Taylor J. L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 3—4, p. 195—225. *Е. А. Горин.*

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ — непустая совокупность подмножеств нек-рого множества Ω, замкнутая относительно теоретико-множественных операций (объедине-

ния, пересечения, образования дополнения), производимых в конечном числе. Для того чтобы нек-рый класс подмножеств множества Ω был А. м., достаточно (и необходимо), чтобы он был замкнут относительно образования объединений и дополнений. А. м., замкнутая относительно образования счетных объединений, наз. σ-а л г е б р о й м н о ж е с т в (σ-А. м.). Всякая σ-А. м. замкнута относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе.

П р и м е р ы. 1) Совокупность конечных подмножеств произвольного множества Ω и дополнений к ним есть А. м.; совокупность не более чем счетных подмножеств Ω и дополнений к ним есть σ-А. м.

2) Совокупность конечных объединений интервалов вида

$$\{x \in R' : a \leqslant x < b\}, \quad -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty,$$

образует А. м.

3) Ω — топологич. пространство; σ-А. м. B, порожденная открытыми подмножествами Ω (иными словами, наименьшая σ-А. м., содержащая все открытые подмножества Ω), наз. б о р е л е в с к о й σ-а л г е б р о й подмножеств Ω, а множества, принадлежащие B, наз. б о р е л е в с к и м и м н о ж е с т в а м и.

4) $\Omega = \mathbb{R}^T$, где T — произвольное множество (т. е. Ω - множество всех действительных функций на T); класс A множеств вида

$$\{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_k)) \in E\},$$

где E — борелевское подмножество $\mathbb{R}^k$, образует А. м.; в теории случайных процессов *вероятностная мера* часто задается первоначально лишь для множеств из алгебры этого типа и затем доопределяется на более широком классе множеств (на σ-алгебре, порожденной A).

5) Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^k$ образует σ-А. м.

Алгебры (соответственно σ-алгебры) являются естественной областью определения конечно аддитивных (соответственно σ-аддитивных) мер. По теореме о продолжении меры всякая σ-конечная σ-аддитивная мера, заданная на алгебре A, может быть однозначно продолжена до σ-аддитивной меры, определенной на σ-алгебре, порожденной A.

Лит.: [1] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

АЛГЕБРА С АССОЦИАТИВНЫМИ СТЕПЕНЯМИ — линейная алгебра A над полем F, всякий элемент к-рой порождает ассоциативную подалгебру. Множество всех А. с а. с. над данным полем F образует многообразие алгебр, к-рое в случае, когда характеристика поля F равна 0, задается системой тождеств

$$(x, x, x) = (x^2, x, x) \quad 0,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Если F — бесконечное поле простой характеристики p, то многообразие А. с а. с. не может быть задано никакой конечной системой тождеств, но известна бесконечная независимая система тождеств, определяющая его (см. [3]). Если коммутативная А. с а. с. A характеристики, отличной от 2, обладает идемпотентом $e \neq 0$, то для A имеет место п и р с о в с к о е р а з л о ж е н и е в прямую сумму векторных подпространств:

$$A = A_0(e) \oplus A_{1/2}(e) \oplus A_1(e), \qquad (*)$$

где $A_\lambda(e) = \{a \in A \mid ea = \lambda a\}$, $\lambda = 0, 1/2, 1$. При этом $A_0(e)$ и $A_1(e)$ — подалгебры, $A_0(e)A_1(e) = 0$, $A_{1/2}(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_0(e) + A_1(e)$, $A_\lambda(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_{1-\lambda}(e) + A_{1/2}(e)$ для $\lambda \neq 0; 1$. Разложение $(*)$ играет фундаментальную роль в структурной теории А. с а. с.

Лит.: [1] Albert A. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, № 3, p. 552—93; [2] Гайнов А. Т., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, № 3 (75), с. 141—46; [3] его же, «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 1, с. 9—33. *А. Т. Гайнов.*

АЛГЕБРА С ДЕЛЕНИЕМ — алгебра A над полем F, для любых элементов $a\neq 0$ и b к-рой уравнения $ax=b$, $ya=b$ разрешимы в A. Ассоциативная А. с д., рассматриваемая как кольцо, является телом, а ее центр C — полем и $C\supseteq F$. Если $C=F$, то А. с д. A наз. центральной А. с д. Конечномерные центральные ассоциативные А. с д. над F, рассматриваемые с точностью до изоморфизма, можно отождествить с элементами *Брауэра группы* $B(F)$ поля F. Пусть $[A:F]$ обозначает размерность A над F. Если $A\in B(F)$ и L — максимальное подполе в A ($L\supseteq F$), то $[A:F]=[L:F]^2$. Согласно *Фробениуса теореме*, все ассоциативные конечномерные А. с д. над полем действительных чисел R исчерпываются самим R, полем комплексных чисел и алгеброй *кватернионов*. Поэтому группа $B(R)$ является циклической порядка 2. При отказе от ассоциативности появляется еще один пример А. с д. над полем действительных чисел — *Кэли — Диксона алгебра*. Эта алгебра альтернативна и имеет размерность 8 над R. Если A — конечномерная (не обязательно ассоциативная) А. с д. над R, то $[A:R]$ имеет одно из следующих значений: 1, 2, 4, 8.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [2] Albert A. A., Structure of algebras, 3 ed., Providence, [1968]; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Адамс Дж. Ф., «Математика», 1961, т. 5, № 4, с. 3—86. *Е. Н. Кузьмин.*

АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ — полупростая *коммутативная банахова алгебра* A, реализованная в виде алгебры непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Если $a\in A$ и f — нек-рая функция, определенная на спектре элемента a (т. е. на множестве значений функции $\hat{a}=a$), то $f(a)$ есть нек-рая функция на $\mathfrak{M}$. Условие $f(a)\in A$, конечно, не обязано выполняться. Если, однако, f — целая функция, то $f(a)\in A$ для любого $a\in A$. Использование интегральной формулы Коши позволяет существенно усилить этот результат: если функция f регулярна в нек-рой окрестности спектра элемента a, то $f(a)\in A$, и отображение $f\to f(a)$ является гомоморфизмом А. ф., аналитических в нек-рой окрестности спектра элемента $a\in A$, в алгебру A. Это утверждение остается справедливым и для неполупростых коммутативных банаховых алгебр. Кроме того, класс функций, аналитических в окрестности спектра данного элемента, может оказаться не расширяемым: напр., если $A=L^1(\mathbb{Z})$ и $f(a)\in A$ для всех $a\in A$, спектр к-рых принадлежит отрезку $[0,\ 1]$, то f аналитична в нек-рой окрестности этого отрезка.

В отдельных случаях элемент $f(a)$ можно определить и для многозначных аналитич. функций f, но это определение встречает естественные затруднения. Напр., пусть A — алгебра непрерывных функций в круге $|z|\leqslant 1$, аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию $f'(0)=0$. Единичный круг естественно отождествляется с пространством максимальных идеалов A. Непрерывная на пространстве максимальных идеалов функция $f_1(z)=z$ не принадлежит алгебре A, но является решением квадратного уравнения

$$f_1^2-z^2=0,$$

где $z^2\in A$.

Если A — полупростая алгебра с пространством максимальных идеалов X, $f\in C(X)$,

$$p(f)\equiv f^n+a_1f^{n-1}+\ldots+a_n=0,\quad a_i\in A,$$

$p'(f)\in\varepsilon(A)$ (простой корень), то $f\in A$. Аналогично, если $f\in C(X)$ и $\exp f\in A$, то $f\in A$.

А. ф. наз. алгеброй с равномерной сходимостью, если норма в этой алгебре определяет сходимость, эквивалентную равномерной сходимости

функций $\hat{a}$ на пространстве максимальных идеалов. Если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$, то A — алгебра с равномерной сходимостью. Общим примером алгебры с равномерной сходимостью является замкнутая подалгебра в алгебре ограниченных непрерывных функций на некотором топологич. пространстве, наделенной естественной sup-нормой.

Если A — алгебра с равномерной сходимостью, и ее пространство максимальных идеалов метризуемо, то среди всех кольцевых границ (не только замкнутых) существует минимальная граница Γ_0, замыканием к-рой служит граница Шилова. Множество Γ_0 состоит из «точек пика»: x_0 наз. т о ч к о й п и к а, если существует такая функция $f \in A$, что $|f(x)| < |f(x_0)|$ для всех $x \neq x_0$. В рассматриваемом случае для любой точки из пространства максимальных идеалов существует представляющая мера, сосредоточенная на Γ_0.

А. ф. наз. а н а л и т и ч е с к о й, если всякая функция из этой алгебры, равная нулю на непустом открытом подмножестве пространства максимальных идеалов, равна нулю тождественно. Аналогично определяются алгебры, аналитические относительно границы. Всякая аналитич. алгебра является аналитической относительно границы Шилова; обратное, вообще говоря, неверно.

А. ф. A наз. р е г у л я р н о й, если для любого замкнутого множества F в пространстве X максимальных идеалов алгебры A и любой не содержащейся в F точки x_0 найдется такая функция $f \in A$, что $f(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f(x_0) = 0$. Всякая регулярная алгебра нормальна, т. е. для любой пары непересекающихся замкнутых множеств $F, F_0 \subset X$ существует элемент $f \in A$ такой, что $f(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $f(x_0) = 0$ для всех $x \in F_0$. Более того, в регулярной алгебре для любого конечного открытого покрытия $\{U_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, пространства X имеется разбиение единицы, принадлежащее A, т. е. система функций $f_1, \ldots, f_n \in A$, для к-рых

$$f_1(x) + \ldots + f_n(x) \equiv 1$$

и

$$f_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U_i.$$

Функция g наз. локально принадлежащей А. ф. A, если для любой точки $x_0 \in X$ существует такая окрестность, в к-рой эта функция совпадает с нек-рой функцией из алгебры. Всякая функция, локально принадлежащая регулярной алгебре, сама является элементом этой алгебры.

Элемент f А. ф. наз. в е щ е с т в е н н ы м, если $\hat{f}(x)$ вещественно при всех $x \in X$. Если A — алгебра с вещественными образующими f_α и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \| \exp(itf_\alpha) \| \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

для всех f_α, то A регулярна.

И д е а л в банаховой алгебре наз. п р и м а р н ы м, если он содержится только в одном максимальном идеале. Если A — регулярная А. ф., то в каждом максимальном идеале x_0 имеется наименьший замкнутый примарный идеал $J(x_0)$, к-рый содержится в любом замкнутом примарном идеале, содержащемся в x_0; идеал $J(x_0)$ есть замыкание идеала, образованного функциями $f \in A$, равными нулю в нек-рой (зависящей от f) окрестности точки $x_0 \in X$.

В алгебре абсолютно сходящихся интегралов Фурье с присоединенной единицей всякий максимальный идеал совпадает с соответствующим примарным идеалом.

Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, где X — нек-рый компакт (не обязательно совпадающий с пространством максимальных идеалов алгебры A). Пусть A разделяет точки компакта X, т. е. для

любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ существует такая функция f из алгебры A, для к-рой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Алгебра A наз. симметричной, если вместе с функцией f алгебре принадлежит и функция $\overline{f(x)}$. Согласно теореме Стоуна—Вейерштрасса, если A симметрична, то $A = C(X)$. Алгебра A наз. антисимметричной, если из условий $f \in A$, $\overline{f} \in A$ следует, что f — постоянная функция. Антисимметричными являются, в частности, алгебры аналитич. функций. Подмножество $S \subset X$ наз. множеством антисимметрии (относительно алгебры A), если любая функция $f \in A$, вещественная на S, постоянна на этом множестве. Согласно этому определению алгебра A антисимметрична, если все X являются множеством антисимметрии. В общем случае пространство X можно представить в виде объединения непересекающихся замкнутых максимальных множеств антисимметрии. Каждое максимальное множество антисимметрии является пересечением множеств пика (множество P наз. множеством пика, если существует такая функция $f \in A$, что $f|_P = 1$ и $|f(x)| < 1$ при $x \notin P$). Отсюда следует, что сужение $A|_Y$ алгебры A на максимальное множество антисимметрии есть замкнутая (антисимметричная) подалгебра алгебры $C(Y)$. Если X есть пространство максимальных идеалов алгебры A, то максимальные множества антисимметрии связны. Если непрерывная функция такова, что на каждом максимальном множестве антисимметрии она совпадает с нек-рой функцией из алгебры A, то и сама эта функция принадлежит A. Это обобщение теоремы Стоуна—Вейерштрасса позволяет в принципе свести изучение произвольных алгебр с равномерной сходимостью к изучению антисимметричных алгебр A. Вместе с тем изучение произвольных алгебр A не может быть сведено к аналитическим алгебрам: существует пример алгебры типа $R(X)$ (замкнутой подалгебры алгебры $C(X)$), не совпадающей с $C(X)$, антисимметричной и регулярной.

Пусть $\mathrm{Re}A$ — вещественное пространство функций вида $\mathrm{Re}f$, где $f \in A$; если $\mathrm{Re}A$ — алгебра, или если $\mathrm{Re}A$ замкнуто в $C(X)$, то $A = C(X)$. Пространство X можно рассматривать как часть пространства максимальных идеалов алгебры A; поэтому на X можно рассматривать не только обычную топологию пространства максимальных идеалов, но и метрику, индуцированную вложением X в пространство, сопряженное A. Расстояние в смысле этой метрики обозначим ρ_A. Для любых точек $x_1, x_2 \in X$ имеет место неравенство $\rho_A(x_1, x_2) \leqslant 2$; отношение $\rho_A(x_1, x_2) < 2$ является отношением эквивалентности, и классы эквивалентности наз. долями Глисона. Если X — круг $|z| \leqslant 1$ и A — замкнутая подалгебра в $C(X)$, состоящая из аналитических при $|z| < 1$ функций, то метрика ρ_A неевклидова, а долями Глисона служат одноточечные множества на границе и внутренность круга. Доли Глисона не всегда обладают аналитич. структурой: любое σ-компактное вполне регулярное пространство гомеоморфно доле Глисона пространства максимальных идеалов нек-рой алгебры, такой, что сужение алгебры на эту долю содержит всякую ограниченную непрерывную функцию. Принадлежность двух точек к одной и той же доле Глисона может быть охарактеризована в терминах представляющих мер на границе Шилова: такие две точки обладают взаимно абсолютно непрерывными представляющими мерами с ограниченными производными. Алгебра, для к-рой $\mathrm{Re}A|_\Gamma$ плотно в $C(\Gamma)$, наз. алгеброй Дирихле; если P — доля Глисона в пространстве максимальных идеалов алгебры Дирихле, состоящая более, чем из одной точки, то существует такое непрерывное взаимно однозначное отображение ψ круга $|z| < 1$ на P, что для любой функции $f \in A$ функция $f(\psi(z))$ аналитична при $|z| < 1$. Та-

ким образом, P обладает структурой, относительно к-рой функции $f \in A$ аналитичны; отображение ψ, вообще говоря, не является гомеоморфизмом, если P снабжено обычной топологией пространства максимальных идеалов, но ψ является гомеоморфизмом, если снабдить P метрикой ρ_A.

Лит. см. при статье *Банахова алгебра*. *Е. А. Горин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — алгебра A с ассоциативными степенями (в частности, ассоциативная) над полем F, все элементы к-рой являются алгебраическими (элемент $a \in A$ наз. а л г е б р а и ч е с к и м, если порожденная им подалгебра $F[a]$ конечномерна, или, что равносильно, элемент a обладает аннулирующим многочленом с коэффициентами из основного поля F). Алгебра A наз. А. а. о г р а н и ч е н н о й с т е п е н и, если она алгебраическая и степени минимальных аннулирующих многочленов ее элементов ограничены в совокупности. Подалгебра и гомоморфный образ А. а. (ограниченной степени) являются А. а. (ограниченной степени).

П р и м е р ы А. а.: локально конечные алгебры (в частности, конечномерные), нильалгебры, ассоциативные тела со счетным множеством образующих над несчетным полем.

Рассматриваемые ниже алгебры предполагаются ассоциативными. *Джекобсона радикал* А. а. является нильидеалом. Примитивная А. а. A изоморфна плотной алгебре линейных преобразований векторного пространства над телом, если при этом A ограниченной степени, то A изоморфна кольцу матриц над телом. А. а. без ненулевых нильпотентых элементов (в частности, тело) над конечным полем коммутативна. Отсюда следует коммутативность конечных тел. А. а. ограниченной степени удовлетворяет полиномиальному тождеству (PI-*алгебра*). Алгебраическая PI-алгебра локально конечна. Если основное поле несчетно, то алгебра, полученная из А. а. расширением основного поля, а также тензорное произведение А. а., суть А. а.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Х е р с т е й н И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *В. Н. Латышев.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел математики, изучающий геометрич. объекты, связанные с коммутативными кольцами: *алгебраические многообразия* и их различные обобщения (*схемы*, *алгебраические пространства* и др.).

В «наивной» формулировке предмет А. г. составляет изучение решений алгебраич. уравнений. Геометрич. интуиция появляется, когда все «множество решений» отождествляется с «множеством точек в нек-ром координатном пространстве». Если координаты — действительные числа и пространство имеет размерность два или три, наглядность ситуации несомненна; однако геометрич. язык используется и при более общих обстоятельствах. Этот язык подсказывает задачи, конструкции и типы рассуждений, едва ли естественные с точки зрения чистой алгебры. В свою очередь, алгебра доставляет аппарат гибкий и мощный, равно приспособленный и для превращения правдоподобных рассуждений в доказательства и для формулировки их в наиболее естественном и общем виде.

В А. г. над полем комплексных чисел всякое алгебраич. многообразие является в то же время комплексно-аналитическим, дифференцируемым и топологич. пространством в обычной хаусдорфовой топологии. Это обстоятельство позволяет ввести целый ряд классич. структур, доставляющих такие инварианты алгебраич. многообразий, к-рые лишь с большим трудом или вовсе не удается получить чисто алгебраич. средствами. Понятия и результаты А. г. интенсивно используются в теории чисел (диофантовы уравнения, оценки тригонометрич. сумм), дифференциальной топологии (осо-

бенности и дифференцируемые структуры), теории групп (алгебраич. группы, простые конечные группы, связанные с группами Ли), теории дифференциальных уравнений (*K*-теория и индекс эллиптич. операторов), теории комплексных пространств, теории категорий (топосы, абелевы категории), функциональном анализе (теория представлений). В свою очередь, А. г. использует идеи и методы названных дисциплин.

Возникновение А. г. относится к 17 в., когда в геометрию было введено понятие координат. Тем не менее только в сер. 19 в. А. г. начала оформляться в самостоятельную науку. Применение координат в проективной геометрии привело к тому, что алгебраич. методы стали соперничать с синтетич. методами. Однако достижения этой ветви А. г. относятся собственно к проективной геометрии, хотя и оставили в наследство А. г. традицию рассмотрения проективных алгебраич. многообразий. Современная А. г. возникла как теория *алгебраических кривых*. Исторически первый этап развития теории алгебраич. кривых состоял в выяснении основных понятий и идей этой теории на примере эллиптич. кривых. Комплекс понятий и результатов, к-рый наз. теперь теорией эллиптич. кривых, возник как часть анализа (а не геометрии) — теория интегралов от рациональных функций на эллиптической кривой. Именно эти интегралы и получили первоначально название эллиптических, а потом это название перешло на функции и на кривые (см. *Эллиптический интеграл*).

В самом конце 17 в. Я. и И. Бернулли (Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli) обнаружили новое интересное свойство эллиптич. интегралов. В их исследованиях рассматривались интегралы, выражающие длины дуг нек-рых кривых. Они нашли преобразования одной кривой в другую, сохраняющие длину дуги кривой, хотя соответствующие дуги не могут быть совмещены друг с другом. Аналитически это приводит к преобразованию одного интеграла в другой. В нек-рых случаях возникают преобразования интеграла в себя. В 1-й пол. 18 в. много примеров таких преобразований нашел Дж. Фаньяно (G. Faniano).

Л. Эйлер (L. Euler) исследовал произвольный многочлен 4-й степени $f(x)$ и поставил вопрос о соотношениях между x и y, при к-рых

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}. \qquad (1)$$

Это равенство он рассматривал как дифференциальное уравнение, связывающее x и y. Искомое соотношение является общим интегралом данного уравнения. Причина существования интеграла уравнения (1) и всех его частных случаев, открытых Дж. Фаньяно и Бернулли, — наличие группового закона на эллиптич. кривой с уравнением $s^2 = f(t)$ и инвариантность всюду регулярной дифференциальной формы $s^{-1}\,dt$ относительно сдвигов на элементы группы. Найденные Л. Эйлером соотношения, к-рые связывают x и y в (1), могут быть записаны в виде

$$(x,\ \sqrt{f(x)}) \oplus (c,\ \sqrt{f(c)}) = (y,\ \sqrt{f(y)}),$$

где $\oplus$ означает сложение точек на эллиптической кривой.

Таким образом, эти результаты содержат в себе сразу и групповой закон на эллиптич. кривой, и существование инвариантной дифференциальной формы на этой кривой (см. *Эллиптическая кривая*).

После Л. Эйлера теория эллиптич. интегралов развивалась в основном А. Лежандром (A. Legendre). Его исследования, начавшиеся в 1786, собраны в трехтомном «Трактате по теории эллиптич. функций и эйлеровых интегралов».

Работы Н. Абеля (N. Abel) по теории эллиптич. функций появились в 1827—29. Н. Абель исходил из эллиптич. интеграла

$$\theta \quad \int_0^{\lambda} \frac{dx}{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)},$$

где c и e — комплексные числа, рассматривал его как функцию верхнего предела и ввел обратную функцию $\lambda(\theta)$ и функцию

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1-c^2\lambda^2)(1-e^2\lambda^2)}.$$

Обе эти функции имеют в комплексной области два периода 2ω и $2\tilde{\omega}$:

$$\omega = 2\int_0^{1/c} \frac{dx}{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}, \quad \tilde{\omega} = 2\int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

и тем самым отображение $x=\lambda(\theta)$, $y=\Delta(\theta)$ определяет униформизацию эллиптич. кривой $y^2=(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)$ эллиптич. функциями.

Немного позже Н. Абеля, но независимо от него, К. Якоби (C. Jacobi) также рассмотрел функцию, обратную эллиптич. интегралу, доказал, что она имеет два независимых периода, и получил ряд результатов в проблеме преобразований. Преобразуя в форме рядов найденные Н. Абелем выражения эллиптич. функций в виде произведений, К. Якоби пришел к понятию θ-функций и нашел им многочисленные применения не только в теории эллиптич. функций, но и в теории чисел и в механике.

Занимаясь проблемой преобразований эллиптич. функций, Н. Абель впервые исследовал группу гомоморфизмов одномерных *абелевых многообразий*.

Наконец, после опубликования наследия К. Гаусса (C. Gauss) и, особенно, его дневника стало ясно, что он задолго до работ Н. Абеля и К. Якоби в той или иной мере владел нек-рыми из этих идей. Переход к изучению произвольных алгебраич. кривых произошел все еще в рамках анализа: Н. Абель показал, как основные свойства эллиптич. интегралов могут быть обобщены на интегралы от произвольных алгебраич. функций. Такие интегралы стали впоследствии наз. абелевыми (см. *Абелев интеграл*).

В 1826 Н. Абель написал работу, к-рая явилась началом общей теории алгебраич. кривых. Эта работа содержит понятие рода алгебраич. кривой, эквивалентности дивизоров и дает критерий эквивалентности в терминах интегралов. Она подводит к теории *якобиевых многообразий* алгебраич. кривых.

В диссертации, опубликованной в 1851, Б. Риман (B. Riemann) применил совершенно новый принцип исследования функций комплексного переменного. Он предполагал, что такая функция задана не на плоскости комплексного переменного, а на некоторой поверхности, которая «многолистно распростерта» над этой плоскостью.

Поверхности, введенные Б. Риманом (см. *Риманова поверхность*), близко соответствуют современному понятию одномерного комплексного *аналитического многообразия*; это такие множества, на к-рых определены аналитич. функции. Б. Риман поставил и решил вопрос о связи этого понятия с понятием алгебраич. кривой; соответствующий результат наз. теперь теоремой существования Римана. Исследуя возможные расположения точек ветвления поверхностей, он доказал, что множество классов зависит при $p>1$ от $3p-3$ независимых параметров, к-рые назвал модулями (см. *Модулей проблема*).

С работы Б. Римана начинается изучение топологии алгебраич. кривых; в ней выясняется топологич. смысл размерности p пространства $\Omega^{\tau}[X]$ — это половина размерности одномерной группы гомологий пространства $X(C)$. Аналитич. путем получено неравенство $l(D) \geqslant \deg D - p + 1$. Равенство Римана — Роха было

доказано Э. Рохом (E. Roche), учеником Б. Римана (см. *Римана - Роха теорема*). Наконец, в этой работе впервые выступает поле $k(X)$ как первичный объект, связанный с кривой X, и появляется понятие бирационального изоморфизма. Еще Н. Абелем поставлен вопрос об обращении интегралов от произвольных алгебраич. функций. Другая часть работы Б. Римана об абелевых функциях посвящена связи между θ-функциями и проблемой обращения в общем случае; в ней рассматривается ряд от p переменных

$$\theta(v) = \sum_m e^{F(m) + 2(m, v)}, \qquad (2)$$

где $m = (m_1, \ldots, m_p)$ пробегает все целочисленные p-мерные векторы,

$$v = (v_1, \ldots, v_p), \quad (m, v) = \sum m_i v_i,$$

$$F(m) = \sum \alpha_{jk} m_j m_k, \quad \alpha_{jk} = \alpha_{kj}.$$

Этот ряд сходится для всех значений v, если действительная часть квадратичной формы F отрицательно определена. Основное свойство функции θ — это уравнение

$$\theta(v + \pi i r) = \theta(r), \quad \theta(v + \alpha_j) = e^{L_j(v)}\theta(v), \qquad (3)$$

где r — целочисленный вектор, α_j — столбец матрицы (α_{jk}), а $L_j(v)$ — линейная функция.

Б. Риман доказал, что можно выбрать разрезы $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$, превращающие введенную им поверхность в односвязную, и базис $u_1, \ldots, u_p$ всюду конечных интегралов на этой поверхности так, что интегралы u_j по α_k равны 0 при $j \neq k$ и πi при $j = k$, а интегралы u_j по b_k образуют симметрическую матрицу (α_{jk}), удовлетворяющую условиям, при к-рых сходится ряд (2). Он рассмотрел функцию θ, соответствующую этим коэффициентам α_{jk}. Периоды произвольной $2n$-периодической функций от n переменных удовлетворяют соотношениям, аналогичным тем, к-рые необходимы для сходимости рядов, определяющих θ-функции. Эти соотношения между периодами были явно выписаны Г. Фробениусом (G. Frobenius), к-рый доказал, что они необходимы и достаточны для существования нетривиальных функций, удовлетворяющих функциональному уравнению (3) (см. *Тета-функция*, *Абелева функция*). Эти соотношения необходимы и достаточны для существования мероморфной функции с заданными периодами, к-рая не может быть сведена линейной заменой переменных к функции меньшего числа переменных. Эта теорема была сформулирована К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и доказана А. Пуанкаре (H. Poincaré). В 1921 С. Лефшец (S. Lefschetz) доказал, что при выполнении соотношений Фробениуса θ-функции определяют вложение многообразия C^n/Ω в проективное пространство (Ω — решетка, соответствующая заданной матрице периодов; см. *Комплексный тор*).

Понятия и результаты, составляющие теперь основу теории алгебраич. кривых, создавались под влиянием и в рамках аналитич. теории алгебраич. функций и их интегралов. Независимо от этого направления развивалась и чисто геометрич. теория алгебраич. кривых. Напр., в вышедшей в 1834 книге Ю. Плюккер (J. Plücker) нашел формулы, связывающие класс, степень кривой и число ее двойных точек. Там же он доказал существование девяти точек перегиба у плоской кривой 3-й степени. Но подобного рода исследования занимали второстепенное место в математике того времени, они не были связаны с ее наиболее глубокими идеями.

Только после работ Б. Римана, геометрия алгебраич. кривых заняла важное место в математике наряду с теорией абелевых интегралов и абелевых функций. Это изменение точки зрения связано гл. обр. с работами А. Клебша (A. Clebsch). В то время как у Б. Римана ос-

новной являлась функция, А. Клебш считал основным объектом алгебраич. кривую. В книге А. Клебша и П. Гордана [10] выведена формула для числа p линейно независимых интегралов 1-го рода (т. е. рода кривой X), выражающая его через степень кривой и число особых точек. Там же доказано, что при $p=0$ кривая обладает рациональной параметризацией, а при $p=1$ преобразуется в плоскую кривую 3-й степени.

Для развития алгебро-геометрич. аспекта теории алгебраич. кривых полезной оказалась одна ошибка Б. Римана. При доказательстве своих теорем существования он считал очевидной разрешимость нек-рой вариационной задачи: «принципа Дирихле». Вскоре К. Вейерштрасс показал, что не любая вариационная задача имеет решение. Поэтому нек-рое время результаты Б. Римана оставались необоснованными. Один из выходов заключался в алгебраич. доказательстве этих теорем формулировка их была, по существу, алгебраической. Эти исследования, предпринятые А. Клебшем, в значительной мере способствовали выяснению алгебро-геометрич. характера результатов Н. Абеля и Б. Римана, скрытого под аналитич. оболочкой.

Направление исследований, начатое А. Клебшем, достигло своего расцвета в работах его ученика — М. Нётера (M. Noether). Круг идей М. Нётера особенно ясно намечен в его совместной работе с А. Бриллем (A. Brill). В ней ставится задача развить геометрию на алгебраич. кривой, лежащей в проективной плоскости, как совокупность результатов, инвариантных относительно взаимно однозначных (т. е. бирациональных) преобразований (см. *Бирациональная геометрия*).

К началу 2-й пол. 19 в. было найдено много специальных свойств алгебраич. многообразий размерности большей, чем 1, в основном поверхностей. Напр., были детально исследованы поверхности 3-й степени, и, в частности, Дж. Сальмон (G. Salmon) и А. Кэли (A. Cayley) доказали в 1849, что на любой кубич. поверхности без особых точек лежит 27 различных прямых. Однако эти результаты долго не объединялись к.-л. общими принципами и не были связаны с глубокими идеями, выработанными к тому времени в теории алгебраич. кривых.

Итальянская школа А. г. оказала большое влияние на развитие этой науки. Основателями итальянской геометрич. школы являются Л. Кремона (L. Cremona), К. Сегре (C. Segre), Э. Бертини (E. Bertini). Ее самые значительные представители — Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo), Ф. Энрикес (F. Enriques) и Ф. Севери (F. Severi). Одно из основных достижений итальянской школы — классификация *алгебраических поверхностей*. Первым результатом здесь можно считать работу Э. Бертини 1877, в к-рой дана классификация инволютивных преобразований плоскости, т. е. (в современной терминологии) классификация с точностью до сопряженности в группе бирациональных автоморфизмов плоскости всех элементов 2-го порядка этой группы. Классификация оказывается очень простой, и из нее, в частности, легко вывести, что факторплоскость по группе 2-го порядка является рациональной поверхностью. Иначе говоря, если поверхность X унирациональна и морфизм $f: P^2 \to X$ имеет степень 2, то X рациональна. Общий случай *Люрота проблемы* для алгебраич. поверхностей решил (положительно) Г. Кастельнуово в 1893. Он же поставил и решил вопрос о характеристике рациональных поверхностей численными инвариантами. Классификация поверхностей была получена Ф. Энрикесом в серии работ, завершившейся уже в 10-х гг. 20 в.

Основным средством итальянской школы было исследование семейств кривых на поверхности - линейных и алгебраических (последние называли непрерывными). Это привело к понятию линейной и алгебраич.

эквивалентности. Связь этих понятий впервые исследовал Г. Кастельнуово. Важный вклад в дальнейшую разработку вопроса внес Ф. Севери. Хотя значительная часть понятий возникла в аналитич. форме, их алгебраич. смысл был со временем выяснен. Существует тем не менее ряд понятий и результатов, к-рые, по существу (по крайней мере с современной точки зрения), связаны с анализом.

В самом начале 80-х гг. 19 в. появились работы Ф. Клейна (F. Klein) и А. Пуанкаре (H. Poincaré), посвященные проблеме *униформизации* алгебраич. кривых автоморфными функциями. Их цель заключалась в том, чтобы аналогично тому, как эллиптич. функции униформизируют кривые рода 1, униформизировать любые кривые функциями, к-рые теперь наз. автоморфными. Ф. Клейн исходил при этом из теории модулярных функций. Поле модулярных функций изоморфно полю рациональных функций, но можно рассматривать функции, инвариантные относительно различных подгрупп модулярной группы, и получать таким способом более сложные поля. В частности, Ф. Клейн рассмотрел функции, автоморфные относительно группы, состоящей из всех преобразований $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, в к-рых, a, b, c и d — целые числа, $ad-bc=1$ и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 7.$$

Он показал, что эти функции униформизируют кривую рода 3 с уравнением $x_0^3x_1+x_1^3x_2+x_2^3x_0=0$. Можно деформировать фундаментальный многоугольник этой группы и получать таким путем новые группы, к-рые будут униформизировать кривые рода 3. Подобный ход мыслей лежал в основе работ Ф. Клейна и А. Пуанкаре, причем А. Пуанкаре пользовался для построения автоморфных функций рядами, к-рые носят ныне его имя. Оба они правильно угадали, что любая алгебраич. кривая допускает униформизацию соответствующей группой, и значительно продвинулись в направлении доказательства этого результата. Полное доказательство было получено только в 1907 А. Пуанкаре и независимо от него П. Кёбе (P. Koebe). При этом большую роль сыграло то, что к тому времени в работах А. Пуанкаре было исследовано понятие фундаментальной группы и универсальной накрывающей.

Топология алгебраич. кривых очень проста и была полностью исследована Б. Риманом. Для изучения топологии алгебраич. поверхностей Э. Пикар (E. Picard) развил метод, основанный на изучении слоев морфизма $f: X \to P^1$. Он исследовал, как меняется топология слоя $f^{-1}(a)$ при изменении точки $a \in P^1$, и, в частности, когда этот слой приобретает особую точку. Таким способом, напр., была доказана односвязность гладких поверхностей в P^3 (см. [11], т. 1). Важный вклад в топологию алгебраич. поверхностей внес также А. Пуанкаре.

В 1921 С. Лефшец (S. Lefschetz) начал применять новую науку — топологию — к изучению алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел. Его первоначальной целью было упрощение результатов Э. Пикара и А. Пуанкаре и обобщение их на многомерный случай. Однако он сделал значительно больше и его работы открыли новую область исследований в А. г. Дальнейший вклад С. Лефшеца в А. г. относится к теории алгебраич. циклов на алгебраич. многообразиях. Он доказал, что двумерный цикл на алгебраич. поверхности гомологичен циклу, представляемому алгебраич. кривой, в том, и только том случае, когда регулярные двойные интегралы $\iint R(x, y, z)\, dxdy$ имеют нулевые периоды на нем.

Исследования С. Лефшеца заложили основу современной теории комплексных многообразий. Позднее

были введены мощные средства для их изучения, среди к-рых — теория гармонич. интегралов [У. Ходж (W. Hodge), Ж. де Рам (G. de Rham)] и теория пучков [А. Картан (H. Cartan), Ж. Лере (J. Leray)]. Используя эту технику, удалось показать, что неособые алгебраич. многообразия составляют часть важного класса комплексных многообразий — *кэлеровых многообразий*.

Теория пучков и связанная с ней теория векторных расслоений на комплексных многообразиях позволили дать новую интерпретацию и значительно обобщить многие классич. инварианты алгебраич. поверхностей (арифметич. и геометрич. род, канонич. системы). Одним из важнейших достижений этой теории было создание теории *Чжэня классов* и значительного обобщения классич. теоремы Римана — Роха (Ф. Хирцебрух [7]).

К сер. 20 в. А. г. подверглась значительной переработке на теоретико-множественной и аксиоматич. основе. Область применения А. г. необычайно расширилась в сторону комплексных многообразий и в сторону алгебраич. многообразий над произвольными полями. Интерес к А. г. над «неклассическими» полями возник сначала в связи с теорией сравнений, к-рые можно интерпретировать как уравнения над конечным полем. В своем докладе на Международном конгрессе математиков в 1908 А. Пуанкаре говорил, что к изучению сравнений от двух неизвестных можно применить методы теории алгебраич. кривых. Почва для систематич. построения А. г. была подготовлена общим развитием теории полей и колец в 10 — 20-х гг. 20 в.

Попытка доказательства *Римана гипотезы* (к-рую можно сформулировать для любой алгебраич. кривой над конечным полем) привела в 30-х гг. в работах Х. Хассе (H. Hasse) и его учеников к построению теории алгебраич. кривых над произвольным полем. При этом сама гипотеза была доказана Х. Хассе для эллиптич. кривых. С другой стороны, в серии статей, опубликованных в 1931 39, Б. Л. ван дер Варден (B. L. van der Waerden) продвинулся в построении А. г. над произвольным полем. В частности, им была построена теория пересечений на гладком проективном многообразии.

В 1940 А. Вейлю (A. Weil) удалось доказать гипотезу Римана для произвольной алгебраич. кривой над конечным полем. Он нашел два пути ее доказательства. Один из них основывается на теории соответствий кривой X (т. е. дивизоров на поверхности $X \times X$), а другой — на рассмотрении ее якобиева многообразия. Таким образом, в обоих случаях привлекаются многомерные многообразия. В связи с этим в книге А. Вейля [5] содержится построение А. г. над произвольным полем: теория дивизоров, циклов, пересечений. Здесь впервые определяются «абстрактные» (не обязательно квазипроективные) многообразия путем процесса склеивания аффинных кусков. Работами О. Зариского (O. Zariski), П. Самюэля (P. Samuel), К. Шевалле (C. Chevalley) и Ж. П. Серра (J. P. Serre) были введены в А. г. в нач. 50-х гг. 20 в. мощные методы коммутативной и, в частности, локальной алгебры.

Определение многообразий, основанное на понятии пучка, было дано Ж. П. Серром. Он же построил и теорию *когерентных алгебраических пучков*, причем прообразом ее служила незадолго до того созданная теория *когерентных аналитических пучков*.

В конце 50-х гг. 20 в. А. г. подвергается кардинальной перестройке, предпринятой А. Гротендиком (A. Grothendieck) на основе понятия схемы. Используя язык теории категорий, А. Гротендику удалось значительно обобщить и прояснить многие важные классич. конструкции в А. г., абстрактное определение к-рых было ранее мало геометрично. Им же было основано много новых важных разделов А. г. (см. *Алгебраическая геометрия абстрактная*). Язык теории схем прочно вошел в

обиход современной А. г., органически слил ее с коммутативной алгеброй и принес в исследования арифметич. вопросов алгебраич. многообразий значительный прогресс (см. *Алгебраических многообразий арифметика*). Непосредственное влияние теория схем оказала на одно из важнейших достижений А. г. за последний период - решение проблемы существования неособой бирациональной модели алгебраич. многообразий, определенных над полем характеристики нуль (см. *Разрешение особенностей*).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954—55; [3] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Dieudonné J., «Amer. Math. Monthly», 1972, v. 79, № 8, p. 827—66; [5] Weil A., Foundations of algebraic geometry, N. Y., 1946; [6] Grothendieck A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique, B.— [a.o.], 1971; [7] Hirzebruch F., Topological methods in Algebraic Geometry, B. — [a.o.], 1966; [8] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [9] Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.— [a.o.], 1971; [10] Clebsch A., Gordan P., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1866; [11] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables independantes, t. 1—2, P., 1897—1906.

По материалам «Исторического очерка» книги И. Р. Шафаревича [1].

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ АБСТРАКТНАЯ — раздел алгебраической геометрии, в к-ром изучаются общие свойства *алгебраических многообразий* над произвольными полями, а также их обобщения — *схемы*. Хотя первые работы в А. г. а. появились еще в 19 в., особенно бурное развитие этой области алгебраич. геометрии происходило, начиная с 50-х гг. 20 в., и было связано с созданием А. Гротендиком (A. Grothendieck) общей теории схем. Интерес к алгебраич. геометрии применительно к произвольным полям возник первоначально в связи с теоретико-числовыми задачами и, в частности, с теорией сравнений от двух неизвестных. Особенно существенным для развития А. г. а. было введенное Э. Артином (E. Artin) в 1924 понятие дзета-функции алгебраич. кривой (см. *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии), а также доказательство Х. Хассе (H. Hasse) в 1933 аналога гипотезы Римана для эллиптических кривых. Развитая при этом теория алгебраических кривых над произвольным полем констант играла существенную роль в данном доказательстве.

Почва для систематич. построения многомерной алгебраич. геометрии над произвольными полями констант была подготовлена общим развитием теории колец и полей в 10—20-х гг. 20 в. В цикле статей Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden, 1933 38) в основу А. г. а. была положена теория полиномиальных идеалов. В частности, им была построена *пересечений теория* на неособом проективном алгебраич. многообразии. Результаты работ этого направления подытожены в [4].

В 1940 А. Вейль (A. Weil) обнаружил, что доказательство гипотезы Римана для алгебраич. кривых произвольного рода требует привлечения теории многомерных многообразий над произвольными полями. В связи с этим им была построена теория абстрактных алгебраич. многообразий (не обязательно проективных) над произвольным основным полем, теория дивизоров и теория пересечений для таких многообразий, а также общая теория абелевых многообразий, ранее изучавшихся только в аналитич. случае. Под влиянием книги [9], вышедшей в 1946, общепринятой основой А. г. а. на долгое время стали теория нормирований и теория полей (язык «общих точек» Вейля).

В нач. 50-х гг. в А. г. а. были введены мощные методы коммутативной алгебры (см. [6], [8]). Дальнейшей перестройке А. г. а. послужила работа Ж. П. Серра о *когерентных алгебраических пучках* [7]. В ней впервые в А. г. а. были изложены идеи и методы гомологической алгебры. Развитие А. г. а. шло параллельно с разви-

тием понятия алгебраич. многообразия. После определения А. Вейлем абстрактного алгебраич. многообразия предлагались различные обобщения этого понятия. Самым плодотворным из них оказалось понятие схемы. Систематич. изложение этих идей и построение общей теории схем было начато А. Гротендиком в 1960 в серии мемуаров [5], где введен в А. г. а. язык функторов и теории категорий и кардинально перестроены многие классич. конструкции в алгебраич. геометрии.

Бурное развитие А. г. а. было связано с осознанием того, что рамки теории схем позволяют перенести на «абстрактный случай» практически все известные в классич. комплексном случае понятия и, в частности, теорию когомологий комплексных аналитич. многообразий. Важную роль для развития А. г. а. сыграла гипотеза А. Вейля (1947), предположившего существование теории когомологий, в к-рой была бы верна *Лефшеца формула* для числа неподвижных точек отображения, и установившего глубокие связи этой гипотезы с чисто арифметич. вопросами алгебраич. многообразий (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Понятие *топологизированной категории* (топология Гротендика) нашло многочисленные применения, разработка и развитие к-рых положили начало новым направлениям А. г. а. – теории *представимых функторов*, формальной геометрии (см. *Формальная группа*), *Вейля когомологиям*, *К-теории*, теории *групповых схем*. Развитые при этом идеи и методы нашли свое отражение во многих разделах математики (коммутативная алгебра, теория категорий, теория аналитич. пространств, топология).

Предложенное в конце 60-х гг. новое обобщение алгебраич. многообразия — *алгебраическое пространство* позволило расширить рамки А. г. а. и еще теснее связать ее с другими разделами алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Гротендик А., в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958, М., 1962, с. 116—37; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [3] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5; [4] Gröbner W., Moderne algebraische Geometrie, W.—Innsbruck, 1949; [5] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, t. 1, B., 1971; [6] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [7] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 1, p. 197—278; [8] Zariski O., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge (Mass.), 1950, Providence, 1952, v. 2, p. 77—89; [9] Weil A., Foundations of algebraic geometry, Providence, 1962.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА – группа G, наделенная структурой *алгебраического многообразия*, в к-рой умножение $G\times G\xrightarrow{\mu}G$ и переход к обратному элементу $G\xrightarrow{\nu}G$ являются регулярными отображениями (морфизмами) алгебраич. многообразий. А. г. наз. определенной над полем k, если ее алгебраич. многообразие, а также морфизм μ и ν определены над k. В этом случае множество k-рациональных точек многообразия G является абстрактной группой, к-рая обозначается G_k. А. г. наз. связной, если ее алгебраич. многообразие связно. Размерностью А. г. наз. размерность ее алгебраич. многообразия. В дальнейшем рассматриваются только связные А. г. Подгруппа H А. г. G наз. алгебраической, если она является замкнутым подмногообразием алгебраич. многообразия G. Для таких подгрупп пространство классов смежности (левых или правых) может быть естественным образом наделено структурой алгебраич. многообразия, обладающей универсальным свойством (см. *Факторпространство* алгебраической группы). Если подгруппа H, кроме того, нормальна, то факторгруппа G/H является А. г. относительно указанной выше структуры; она наз. алгебраической факторгруппой. Гомоморфизм $G\xrightarrow{\varphi}G'$ А. г. наз. алгебраическим, если φ — морфизм их алгебраич. многообразий; если φ определен над k, то он наз. k-гомо-

морфизмом. Аналогично определяется *k*-изоморфизм А. г.

Примеры А. г.: полная линейная группа $GL(n, k)$ — группа всех обратимых матриц порядка n с коэффициентами в фиксированном алгебраически замкнутом поле k, группа треугольных матриц, *эллиптическая кривая*.

Существуют два основных типа А. г., совершенно различных по своим свойствам: *абелевы многообразия* и *линейные алгебраические группы*; при этом принадлежность А. г. к одному из этих типов определяется исключительно свойствами многообразия группы. А. г. наз. абелевым многообразием, если ее алгебраич. многообразие полное. А. г. наз. линейной А. г., если она изоморфна алгебраич. подгруппе полной линейной группы. А. г. является линейной тогда и только тогда, когда ее алгебраич. многообразие аффинно. Эти два класса А. г. имеют тривиальное пересечение: если А. г. есть одновременно абелево многообразие и линейная группа, то она единичная группа. Изучение произвольных А. г. в значительной степени сводится к изучению абелевых многообразий и линейных групп. Именно, в произвольной А. г. существует единственная нормальная линейная алгебраич. подгруппа H такая, что факторгруппа G/H есть абелево многообразие. Многочисленные примеры А. г., не являющихся ни линейными А. г., ни абелевыми многообразиями, дает теория обобщенных *Якоби многообразий* для алгебраич. кривых с особенностями (см. [4]). Естественное расширение класса алгебраич. групп приводит к понятию *групповой схемы*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [4] Шевалле К., Теория алгебраических групп, в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, М., 1962; [5] Demazure M., Grothendieck A., Shemas en groupes, t. 1—3, B.—Hdlb.—N. Y., 1970. *Б. Б. Венков, В. П. Платонов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — алгебраическая группа G, действующая регулярно на алгебраич. многообразии V. Точнее, А. г. п. есть тройка (G, V, τ), где τ: $G\times V\to V$ ($\tau(g, x)=gx$) — морфизм алгебраич. многообразий, удовлетворяющий условиям: $ex=x$, $g(hx)=(gh)x$ для всех $x\in V$ и g, $h\in G$ (e — единица G). Если G, V и τ определены над полем k, то (G, V, τ) наз. алгебраич. группой k-преобразований. Напр., (G, G, τ), где τ — присоединенное действие или действие посредством сдвигов, является А. г. п. Если G — алгебраич. подгруппа в $GL(n)$, τ — ее естественное действие в аффинном пространстве $V=k^n$, то (G, V, τ) А. г. п. Для всякой точки $x\in V$ через $G(x)=(gx|g\in G)$ обозначается орбита x, а через $G_x=\{g\in G|gx=x\}$ — стабилизатор x. Орбита $G(x)$ не обязательно замкнута в V, но всегда существуют замкнутые орбиты, напр. замкнутые орбиты минимальной размерности. Иногда под А. г. п. понимается алгебраич. группа G, действующая рационально (но не обязательно регулярно) на алгебраич. многообразии V (это значит, что $\tau: G\times V_1\to V$ — рациональное отображение, а выписанные выше свойства τ выполнены для общих точек). Как показал А. Вейль [3], всегда существует многообразие V^1, бирационально изоморфное V и такое, что действие G на V^1, индуцированное рациональным действием G на V, регулярно. Задачи описания орбит, стабилизаторов, полей инвариантных рациональных функций (см. *Инвариантов теория*) и построения фактормногообразий являются основными в теории А. г. п. и имеют многочисленные применения.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Weil A., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, № 2, p. 355—91. *В. П. Платонов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ — иррациональное *алгебраическое число*. А. и. является корнем неприводимого многочлена степени, не меньшей двух, с рациональными коэффициентами. *А. И. Галочкин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — *алгебраическое многообразие* размерности 1. А. к. является наиболее изученным объектом алгебраической геометрии. В дальнейшем под А. к. понимается, как правило, неприводимая А. к. над алгебраически замкнутым полем.

Наиболее простым и интуитивно ясным является понятие плоской аффинной А. к. Это — множество точек аффинной плоскости A^2_k, удовлетворяющих уравнению $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — многочлен с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля k. Поле рациональных функций неприводимой А. к. над k есть поле алгебраич. функций одного переменного и имеет вид $k(x, y)$, где x и y связаны уравнением $f(x, y)=0$, а $f(x, y)$ — многочлен над k. Это означает, что всякая А. к. бирационально изоморфна плоской аффинной кривой.

Уже давно было замечено, что даже при изучении аффинных кривых глубокие закономерности удается вскрыть только при учете бесконечно удаленных точек и детальном исследовании особенностей. Для изучения всех точек аффинной кривой ее погружают в проективное пространство P^n с последующим замыканием в *Зарисского топологии*. Таким образом получается проективная кривая X, причем исходная аффинная кривая Y может быть получена из X выбрасыванием конечного числа точек. Если Y неприводима, то X и Y бирационально изоморфны. Каждая полная А. к. является проективной. Если X — гладкая проективная кривая (г. п. к.), то все кольца нормирования поля $k(x)$ исчерпываются *локальными кольцами* O_x, $x \in X$. Если две г. п. к. бирационально эквивалентны, то они изоморфны. Нормальная А. к. является гладкой. В частности, всякая неприводимая А. к. бирационально эквивалентна г. п. к. Получаемая в процессе нормализации гладкая проективная модель А. к. лежит в нек-ром пространстве P^n. Любая г. п. к. изоморфна кривой, расположенной в P^3. Каждая плоская А. к. *кремоновым преобразованием* может быть преобразована в кривую с обыкновенными особыми точками.

Дивизоры на гладкой А. к. представляют собой линейные комбинации точек с целыми коэффициентами

$$D=\sum\nolimits_{x \in X} n_x x,\ n_x \in \mathbb{Z},$$

$n_x=0$ почти для всех x. Если все $n_x \geqslant 0$, то дивизор D наз. положительным, или эффективным, что обозначается $D \geqslant 0$. Степенью дивизора D наз. число

$$\deg D=\sum\nolimits_x n_x.$$

Главные дивизоры образуют подгруппу $P(X)$ группы $\mathrm{Div}\ X$ всех дивизоров на X. Факторгруппа $\mathrm{Div}\ X/P(X)$ наз. группой классов дивизоров и обозначается через $\mathrm{Cl}(X)$. Группа $\mathrm{Cl}(X)$ изоморфна группе $\mathrm{Pic}\ (X)$ классов одномерных векторных расслоений на X (см. *Векторное алгебраическое расслоение*). Степень главных дивизоров на г. п. к. равна нулю, поэтому все дивизоры из одного класса имеют одну и ту же степень. В частности, можно говорить о степени класса дивизоров и о подгруппе $\mathrm{Cl}^0(X)$ классов дивизоров степени 0. Справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Cl}^0(X)=\mathbb{Z}.$$

Для прямой P^1, $\mathrm{Cl}(P^1)=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Cl}^0(P^1)=0$, т. е. любой дивизор степени 0 является главным. Это свойство характерно для рациональных г. п. к.

Для любой полной А. к. X число $\pi=\dim H^1(X, O_X)$ наз. арифметическим родом А. к. X. Если

X — гладкая, то π совпадает с размерностью пространства $H^0(X, \Omega_X^1)$ всех регулярных дифференциальных форм на X, эта размерность наз. р о д о м А. к. X. По определению, род А. к. равен роду ее неособой модели. Для любого неотрицательного целого числа g существует А. к. рода g. Рациональные кривые характеризуются равенством $g=0$. Если X проективная плоская кривая порядка m, то

$$\pi = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

а ее род вычисляется по формуле:

$$g = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d,$$

где d — неотрицательное целое число, измеряющее отклонение от гладкости на X. Если X имеет только обыкновенные двойные точки, то d есть просто число особых точек.

В частности, плоская г. п. к. имеет род

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2),$$

откуда следует, что не всякая г. п. к. является плоской. Для пространственной кривой X имеет место оценка

$$g \leqslant \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4}, & \text{если } n \text{ — четно,} \\ \frac{(n-1)(n-3)}{4}, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \end{cases}$$

где n — степень X. Кривые n-й степени максимального рода существуют для каждого значения n и лежат на квадрике (М. Альфан, M. Alphen, 1870, см. [8]).

Степень канонич. класса K_X г. п. к. X связана с родом кривой формулой $\deg K_X = 2g - 2$. Если г. п. к. X лежит на гладкой алгебраич. поверхности F, то имеет место ф о р м у л а п р и с о е д и н е н и я: $K_X = X(X+K_F)$. В частности, $\deg K_X = (X)^2 + (X \cdot K_F)$. Для произвольного дивизора D на X можно рассмотреть подмножество поля $k(X)$, состоящее из нуля и тех функций f, для к-рых $(f)+D \geqslant 0$. Это — линейное пространство над k конечной размерности $l(D)$. Размерность полной *линейной системы*, определяемой дивизором D, равна $l(D)-1$. Вычисление размерности $l(D)$ является важной задачей теории А. к. Наиболее сильный результат в этом направлении — *Римана — Роха теорема*. Для г. п. к. эта теорема заключается в равенстве:

$$l(D) - l(K-D) = \deg D - g + 1,$$

где g — род кривой X. В случае, когда $l(K-D)>0$ (соответственно $l(K-D)=0$), говорят, что дивизор D с п е ц и а л ь н ы й (соответственно н е с п е ц и а л ь н ы й). Для неспециальных дивизоров теорема Римана — Роха дает равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$. Каждый дивизор степени большей $2g-2$ является неспециальным.

Класс дивизоров, линейно эквивалентных дивизору D на г. п. к. X, определяет точку на *Якоби многообразии* $J(X)$ А. к. X. Это многообразие совпадает с *Альбанезе многообразием* и *Пикара многообразием* А. к. X. Точки, соответствующие классам специальных дивизоров, есть особые точки *Пуанкаре дивизора* на $J(X)$. Если G_n^r обозначает подмножество точек $J(X)$, соответствующих классам дивизоров D с $\deg D = n$ и $l(D) = r$, то G_n^r образует подсхему в $J(X)$ и

$$\dim G_n^r \geqslant r(n-r+1) - (r-1)g$$

(т е о р е м а Р и м а н а — Б р и л л я — Н ё т е р а). Эта теорема имеет многочисленные применения, одним из к-рых является следующее. Всякий дивизор D, для к-рого $l(D) \geqslant 1$, определяет рациональное отображение φ_D кривой X в проективное пространство

$P^{l(D)-1}$. Отображение φ_D зависит от класса D. Если $\deg D \geqslant 2g+1$, то φ_D определяет изоморфное вложение кривой X в P^m, причем $\varphi_D(X)$ не содержится ни в каком собственном подпространстве пространства $P^m (m = l(D)-1)$. Наиболее интересным с точки зрения бирациональной классификации кривых являются отображения φ, соответствующие кратности nK канонич. класса кривой X. При $g>1$ класс $3K$ определяет изоморфное вложение г. п. к. в P^{5g-6}. При этом кривые X и X' бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда их образы $\varphi_{3K}(X)$ и $\varphi_{3K}(X')$ получаются друг из друга проективным преобразованием пространства P^{5g-6}. Исследование отображения φ_K позволило получить более тонкую характеристику кривых рода $g>1$. Для этих кривых отображение φ_K: $X \to P^{g-1}$ будет изоморфным вложением в том и только том случае, когда X не является *гиперэллиптической кривой*. В случае, когда φ_K изоморфизм, кривая $\varphi_K(X)$ наз. к а н о н и ч е с к о й; она определена однозначно с точностью до проективных преобразований в P^{g-1}. Важнейшей задачей теории А. к. является классификация кривых с точностью до бирационального изоморфизма. В этом направлении получен ряд сильных результатов, но исчерпывающего решения задачи пока (1977) не имеется.

Г. п. к. можно разбить на следующие 4 класса:

1) кривые рода 0 бирационально эквивалентны P^1;

2) кривые рода 1 (эллиптич. кривые) бирационально эквивалентны гладкой кубической кривой в P^2;

3) гиперэллиптич. кривые;

4) негиперэллиптич. кривые рода $g>1$ бирационально эквивалентны канонич. кривой в P^{g-1} (А. к. о с н о в н о г о т и п а).

Род кривой не характеризует полностью бирациональный класс А. к. Единственное исключение составляют кривые рода 0. В случае, когда k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, множество классов изоморфных друг другу эллиптич. кривых описывается точками факторпространства H/G, где H — верхняя полуплоскость, G — модулярная группа, состоящая из дробно-линейных преобразований с целыми коэффициентами и определителем, равным $+1$. Пространство H/G имеет строение аналитич. многообразия, изоморфного $\mathbb{C}$ (см. *Эллиптическая кривая*). Классы бирационально эквивалентных кривых рода $g>1$ описываются точками некоторого алгебраич. многообразия M_g размерности $3g-3$, называемого многообразием модулей кривых рода g. Это многообразие неприводимо. Есть гипотеза, что M_g унирационально, но она доказана только для $g<11$ (Ф. Севери, F. Severi).

Имеют место следующие результаты о группе $\mathrm{Aut}(X)$ автоморфизмов г. п. к. X. 1) Если X есть P^1_k, то $\mathrm{Aut}(X)$ —группа дробно-линейных преобразований $\mathrm{PGL}(1, k)$. 2) Если X — эллиптическая кривая, то $\mathrm{Aut}(X)$ есть алгебраич. группа, связная компонента единицы к-рой совпадает с группой точек $X(k)$. 3) Если X кривая рода $g>1$, то $\mathrm{Aut}(X)$ всегда конечная группа. Ее порядок ограничен числом $84(g-1)$ (см. [6]). В последнем случае важную роль при изучении группы $\mathrm{Aut}(X)$ играют *Вейерштрасса точки* на X.

Другой способ изучения группы $\mathrm{Aut}(X)$ дает тот факт, что каждая г. п. к. является конечным (разветвленным) накрытием проективной прямой.

Пусть X — г. п. к., определенная над полем $\mathbb{C}$. Множество точек кривой $X(\mathbb{C})$ снабжается естественным строением одномерного компактного аналитич. многообразия, к-рое наз. также компактной *римановой поверхностью*. Обратное тоже верно, т. е. всякая компактная риманова поверхность может быть получена из нек-рой г. п. к. Обычно употребляется один и тот же символ X для обозначения г. п. к. и соответствующего ей одномерного комплексного многообразия. Всякое

связное комплексное многообразие представимо в виде фактора $\tilde{X}/G$, где $\tilde{X}$ — связное односвязное комплексное многообразие, G — группа автоморфизмов многообразия $\tilde{X}$, действующая на $\tilde{X}$ дискретно и свободно. Весьма примечательно, что одномерных связных односвязных аналитических многообразий, с точностью до изоморфизма, всего три. Это — проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ (риманова сфера), аффинная прямая $\mathbb{C}$ (конечная плоскость) и внутренность единичного круга $D=\{z, |z|<1\}$ (плоскость Лобачевского). Все г. п. к. можно разбить на три класса в зависимости от того, к какому из трех типов относится их универсальная накрывающая.

Вопрос о классификации г. п. к. данного типа сводится к изучению дискретных групп преобразований универсальных накрывающих, действующих свободно с относительно компактной фундаментальной областью. В случае проективной прямой G — единичная группа; в случае аффинной прямой G изоморфна подгруппе Ω аддитивной группы $\mathbb{C}$, являющейся двумерной решеткой в $\mathbb{C}$; в случае внутренности единичного круга G — подгруппа движений в плоскости Лобачевского, определяемая нек-рым неевклидовым ограниченным многоугольником. Таким образом, первый класс содержит единственную кривую P^1, второй класс состоит из комплексных торов $\mathbb{C}/\Omega$, и все они имеют строение одномерного абелевого многообразия (эллиптич. кривой), причем сложение точек на торе определяет групповую структуру на соответствующей кривой. Всякая гладкая эллиптич. кривая получается таким образом. Поле рациональных функций $C(X)$ на эллиптич. кривой $X\simeq\mathbb{C}/\Omega$ изоморфно полю мероморфных двоякопериодических (эллиптических) функций с группой периодов Ω. Если $f(x, y)=0$ — уравнение аффинной модели кривой X, то существует его параметризация $x=\varphi(z), y=\psi(z)$ эллиптич. функциями (униформизация кривой X). Третий класс состоит из всех г. п. к. X рода $g>1$. Поле $C(X)$ в этом случае изоморфно полю мероморфных на D функций, инвариантных относительно группы G. Такие функции наз. а в т о м о р ф н ы м и. Любая А. к. рода $g>1$ униформизуется автоморфными функциями (см. *Униформизация*). Задача классификации эллиптич. кривых также приводила к рассмотрению фактора D/G, но там ситуация существенно отличалась от только что рассмотренной. Во-первых, группа G имела неподвижные точки в D, во-вторых, многообразие D/G было некомпактным, хотя обладало конечной площадью по Лобачевскому. Рассмотрение в общем случае таких групп и соответствующих факторов играет важную роль в современных арифметич. исследованиях.

Если А. к. X определена над незамкнутым полем k, то одним из важнейших является вопрос о существовании и нахождении рациональных точек $X(k)$ кривой X. Для г. п. к. X над конечным полем k доказано неравенство $|N-q-1|\leqslant 2g\sqrt{q}$, где N — число точек кривой X, рациональных над конечным расширением L поля k, q — число элементов поля L, а g — род кривой X. Это неравенство эквивалентно гипотезе Римана о нулях ζ-функции кривой X — все нули ζ-функции лежат на вертикальной прямой $\sigma=1/2$ (см. *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии).

Пусть теперь X — А. к., определенная над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда для кривых рода 0 точки $X(\mathbb{Q})$ находятся сравнительно легко, для эллиптич. кривых рациональные точки составляют группу с конечным числом образующих (если $X(\mathbb{Q})$ не пусто), для кривых рода $g\geqslant 2$ имеется пока не доказанная (1977) *Морделла гипотеза* о том, что $X(\mathbb{Q})$ конечно.

Если основное поле k есть поле рациональных функций $k_0(B)$ г. п. к. B, то каждая г. п. к. X над k изоморф-

на общему слою X_η морфизма $f: V \to B$ гладкой проективной алгебраич. поверхности V над k_0. Этот морфизм будет однозначно определен, если потребовать, чтобы в его слоях не было исключительных кривых рода 1. Множество рациональных точек $X(k)$ находится в биективном соответствии с множеством сечений $V(B)$ морфизма f и $X(k)$ конечно для кривых рода $g \geqslant 2$. Кривые рода 0 и 1 над полем $k_0(B)$ изучаются в теории алгебраич. поверхностей (см. *Эллиптическая поверхность*, *Линейчатая поверхность*).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [5] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [6] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [7] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [8] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170.

В. Е. Воскресенский.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ — понятие теории *расширений* полей. Пусть K нек-рое расширение поля k. Элементы $b_1, \ldots, b_n \in K$ наз. алгебраически независимыми над k, если для всякого не равного тождественно нулю многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из поля k $f(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. В противном случае элементы $b_1, \ldots, b_n$ наз. алгебраически зависимыми. Бесконечное множество элементов наз. алгебраически независимым, если независимо каждое его конечное подмножество, и зависимым в противном случае. Определение А. н. может быть распространено на случай, когда K—кольцо и k—его подкольцо (см., напр., [1]).

Алгебраическая независимость чисел. Комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ наз. алгебраически независимыми, если они алгебраически независимы над полем алгебраич. чисел, т. е. для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_n)$ с алгебраич. коэффициентами, из к-рых не все равны нулю, имеет место $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. В противном случае $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ наз. алгебраически зависимыми. Понятие А. н. чисел является обобщением понятия трансцендентности числа (случай $n=1$). Если несколько чисел алгебраически независимы, то каждое из них трансцендентно. Доказательство А. н. каких-либо чисел сопряжено обычно с большими трудностями. Существующие аналитич. методы в теории трансцендентных чисел позволяют решать эту проблему для значений нек-рых классов аналитич. функций. Так, установлено, что значения показательной функции e^z при алгебраических линейно независимых над полем рациональных чисел значениях аргумента алгебраически независимы. Аналогичный результат получен для функций Бесселя (см. *Зигеля метод*). Установлен также ряд общих теорем об А. н. значений в алгебраич. точках E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из поля рациональных функций [2]. [3]. Доказана А. н. чисел α^β и α^{β^2}, где $\alpha \neq 0, 1$ алгебраич. число, а β кубическая иррациональность, и, кроме того, ряд теорем об алгебраич. невыражаемости чисел — понятии, близком к понятию А. н.

Качественному понятию А. н. чисел можно придать количественную характеристику, если рассмотреть *алгебраической независимости меру* этих чисел. Упомянутые аналитич. методы позволяют получать оценки снизу для меры А. н. нек-рых классов чисел. Установлены общие теоремы об оценке меры А. н. значений E-функций [3].

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 3—81; [3] Шидловский А. Б., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 169—202.

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ, n-арная операция, на множестве A — отображение

$$\omega: A^n \longrightarrow A$$

n-й декартовой степени множества A в само множество A. Число n наз. арностью А. о. Исторически сначала возникли понятия бинарной ($n=2$) и унарной ($n=1$) операций. Нульарные операции — это фиксированные элементы множества A, наз. также выделенными элементами, иногда нулями. В 20 в. появилось понятие бесконечноместной операции, т. е. отображения $\omega: A^{\alpha} \to A$, где α — произвольное кардинальное число. Множество с системой определенных на нем А. о. наз. *универсальной алгеброй*. *Т. М. Баранович.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — двумерное *алгебраическое многообразие*. Вместе с *алгебраическими кривыми* А. п. представляют собой наиболее изученный класс алгебраич. многообразий. Богатство задач и идей, применяемых для их решения, делает теорию А. п. одним из самых интересных разделов алгебраич. геометрии.

В отличие от алгебраич. кривых, две бирационально изоморфные А. п. могут не быть бирегулярно изоморфными. На классич. этапе развития алгебраич. геометрии (1868—1920) под А. п. понимался фактически класс по бирациональной эквивалентности, а его представители считались погруженными в комплексное трехмерное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$, где они задавались одним однородным алгебраич. уравнением $f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$. Начало теории А. п. положили работы А. Клебша (A. Clebsch) и М. Нётера (M. Noether) (конец 60-х — начало 70-х гг. 19 в.), в к-рых были определены первые важные инварианты А. п. геометрич. род и канонич. класс. Дальнейшей разработкой теории А. п. занимались представители итальянской школы алгебраич. геометрии К. Сегре (C. Segre), Л. Кремона (L. Cremona), Э. Бертини (E. Bertini), Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo), Ф. Энрикес (F. Enriques), Ф. Севери (F. Severi) и др. Топологические и трансцендентные методы в теорию А. п. были введены Э. Пикаром (E. Picard), А. Пуанкаре (H. Poincaré) и С. Лефшецем (S. Lefschetz). Многие полученные в этих работах общие факты об А. п. оказались затем справедливыми для алгебраич. многообразий и схем произвольной размерности. Часть же результатов до сих пор не поддается обобщению на многомерный случай. Таковы, напр., классификация А. п. с помощью численных инвариантов, критерии рациональности и линейчатости А. п., теория минимальных моделей. Большинство из них были критически пересмотрены и передоказаны современными когомологическими методами в 50—60-х гг. 20 в. (см. [1], [5], [8]).

Общие факты об алгебраических поверхностях. Всюду в дальнейшем, если не оговорено специально, под А. п. понимается проективная А. п. над алгебраически замкнутым полем k.

а) Разрешение особенностей. Первые строгие доказательства существования неособой модели А. п. были даны в 30-х гг. 20 в. (Р. Уокер, R. Walker; О. Зарисский, O. Zariski). Ранее существовавшие геометрич. доказательства итальянских геометров содержали пробелы (см. [9]). В случае положительной характеристики основного поля существование неособой модели А. п. было доказано в 1956 (см. *Разрешение особенностей*).

Каждая неособая А. п. может быть бирационально спроектирована в $\mathbb{C}P^3$ на поверхность с обыкновенными особенностями — двойными обыкновенными кривыми с конечным числом на них обыкновенных каспидальных точек и тройных точек, являющихся трипланарными особыми точками поверхности. Именно такие поверх-

ности являлись основными объектами исследования на классич. этапе развития теории А. п. Теорема о разрешении особенностей А. п. позволяет применить для локального изучения особых точек А. п. глобальные методы теории схем. Основополагающей в этом направлении явилась работа Д. Мамфорда (D. Mumford, 1961), в к-рой были введены важные инварианты двумерных особенностей и доказано, что топологич. пространство нормальной А. п. является топологич. многообразием в том и только том случае, когда поверхность неособая.

б) Численные инварианты А. п. Обобщением понятия рода алгебраич. кривой в теории А. п. является понятие геометрич. рода $p_g(V)$ А. п. V — максимальное число линейно независимых регулярных двумерных дифференциалов на V (см. *Геометрический род*). Виртуальный арифметич. род дивизоров из канонич. системы $|K_V|$ А. п. V наз. линейным родом и обозначается через $p^{(1)}$. Для неособой А. п. имеет место равенство

$$p^{(1)} = (K_V^2) + 1 = \deg(c_1^2) + 1,$$

где $c_1 = -K_V$ — первый *Чжэня класс* касательного расслоения к поверхности V. Кратные канонич. системы $|K_i| = |iK_V|$ наз. плюриканоническими системами А. п. V. Число $\dim|K_i|+1$ наз. i-родом и обозначается через P_i; оно совпадает с размерностью всюду регулярных i-кратных двумерных дифференциальных форм на V.

Согласно формуле постулации Кэли — Нётера, число N_m линейно независимых форм достаточно большой степени m, проходящих через пространственную кривую степени d рода p с t тройными точками и τ двойными точками, дается формулой

$$N_m = \binom{m+3}{3} - dm + 2t + \tau + p - 1.$$

Для А. п. с обыкновенными особенностями в 1875 был введен в рассмотрение арифметич. род $p_a(V)$, определяемый формулой:

$$p_a(V) = \binom{n-1}{3} - d(n-1) + 2t + \tau + p - 1;$$

здесь d — степень, τ — число двойных точек, p — род, а t — число тройных точек двойной кривой V (для неособых поверхностей считается $t = r - d = 0$, $p = 1$). Позже были даны другие эквивалентные определения $p_a(V)$ (см. *Арифметический род*).

Разность $p_g(V) - p_a(V)$ всегда неотрицательна, она наз. иррегулярностью А. п. V и обозначается через $q(V)$. А. п. наз. регулярной (соответственно иррегулярной), если $q(V) = 0$ (соответственно $q(V) > 0$). Первые примеры иррегулярных поверхностей были приведены в конце 19 в. (А. Кэли, A. Cayley; Г. Кастельнуово). Иррегулярность может быть охарактеризована как максимальная недостаточность линейной системы, высекаемой системой $|C + K_V|$ на кривой C (Ф. Энрикес, 1896, см. [9]). Когомологич. определение p_a и q для неособых А. п. дается формулами:

$$p_a(V) = -\dim_k H^1(V, O_V) + \dim_k H^2(V, O_V) = \chi(V, O_V) - 1,$$

$$q(V) = \dim_k H^1(V, O_V).$$

Арифметич. род $p_a(V)$ неособой А. п. V выражается через классы Чжэня касательного расслоения к V по формуле:

$$1 + p_a(V) = \frac{\deg(C_1^2) + \deg(C_2)}{12},$$

наз. формулой Нётера. Число $I = \deg(C_2) - 4$ наз. инвариантом Цейтена — Сегре.

в) Теорема Римана — Роха для А. п. Обобщение теоремы Римана — Роха для алгебраич. кривых на случай А. п. принадлежит Г. Кастельнуово (1897). Для неособой А. п. V и полной линейной системы $|D|$ дивизоров виртуальной степени $n=(D^2)$ и виртуального рода $\pi=\frac{(D^2)+(DK_V)}{2}+1$ теорема Римана — Роха утверждает существование неравенства

$$\dim|D|\geqslant n-\pi+p_a(V)+1-i.$$

Здесь число $i=\dim|K_V-D|$ наз. индексом специальности дивизора D. Когомологич. доказательство этой теоремы (см. *Римана — Роха теорема*) позволяет дать необходимое и достаточное условие для превращения предыдущего неравенства в равенство. Оно состоит в обращении в нуль пространства когомологий $H^1(V, O_V(D))$. Для любого дивизора D и достаточно больших чисел n доказано, что $H^i(V, O_V(D+nH))=0$, где $i>0$, а H — гиперплоское сечение поверхности V (Ж. П. Серр, J. P. Serre, 1955). В случае нулевой характеристики основного поля неравенство превращается в равенство для любого обильного дивизора D. Этот результат обобщает классич. теорему Пикара — Севери о регулярности присоединенной системы (см. [9]).

г) Системы кривых на А. п. Основным методом в исследованиях итальянских геометров была созданная ими теория линейных и алгебраич. систем кривых на А. п. С этой теорией тесно связаны понятия алгебраич. и линейной эквивалентностей дивизоров. Эти понятия не совпадают только для иррегулярной А. п. (Г. Кастельнуово, 1896). Всякая достаточно общая кривая на А. п. V иррегулярности q содержится в максимальном алгебраич. семействе, к-рое расслаивается на линейные системы одинаковой размерности, а базой расслоения служит многообразие размерности q (Ф. Энрикес, 1904). Это многообразие является абелевым многообразием и наз. многообразием Пикара А. п. V (см. *Пикара схема*). Доказательство приведенного выше результата Ф. Энрикеса (носящего назв. «фундаментальной теоремы в теории иррегулярных поверхностей», или «теоремы о полноте характеристического ряда»), так же как и последующие доказательства Ф. Севери, содержало пробелы. Первое строгое трансцендентное доказательство этой теоремы получено в 1910 А. Пуанкаре, и только через 50 лет было дано алгебраич. доказательство (А. Гротендик, A. Grothendieck, см. [5]). В случае положительной характеристики основного поля эта теорема, вообще говоря, неверна (Д. Игуса, J. Igusa, 1955). В общем случае доказано, что q не меньше размерности многообразия Пикара.

Несовпадение алгебраической и линейной эквивалентностей на А. п. влечет существование на ней всюду регулярных одномерных дифференциалов. Размерность пространства таких дифференциалов в случае $k=\mathbb{C}$ совпадает с иррегулярностью (Г. Кастельнуово, Ф. Севери, 1905). Этот факт является частным случаем равенства $\dim H^p(V, \Omega^q)=\dim H^q(V, \Omega^p)$, справедливого для произвольных компактных *кэлеровых многообразий* V. В случае $\mathrm{char}\ k>0$ этот результат перестает быть верным.

Группа классов дивизоров относительно алгебраич. эквивалентности конечно порождена (см. *Иерона — Севери группа*). Ее ранг обозначается через ρ и наз. числом Пикара А. п. V. Порядок подгруппы кручения этой группы обозначается через σ и наз. делителем Севери А. п. V (см. [9]).

Ф. Севери положено также начало теории нульмерных циклов на А. п., в к-рой осталось еще много интересных нерешенных вопросов.

д) Топологические свойства А. п. Неособая проективная А. п. над полем комплексных

чисел представляет собой компактное 4-мерное ориентированное вещественное многообразие, в частности для такой А. п. определены группы целочисленных гомологий $H_i(V, \mathbb{Z})$ и когомологий $H^i(V, \mathbb{Z})$, удовлетворяющие *Пуанкаре двойственности*. Каждый дивизор на А. п. V определяет двумерный цикл, при этом алгебраически эквивалентные нулю дивизоры соответствуют гомологичным нулю циклам. Индекс пересечения дивизоров совпадает с топологич. индексом пересечения циклов. Имеют место равенства: σ равно порядку группы кручения группы $H_2(V, \mathbb{Z})$, $b_1(V) = 2q(V)$, где $b_1(V)$ — первое число Бетти поверхности V ([4], [9]).

Для исследования топологии А. п. был развит метод, основанный на рассмотрении линейного пучка кривых на поверхности и изучении поведения топологии кривых, варьируемых в этом пучке. Таким способом была доказана односвязность неособых гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^3$ (см. [6]). Этот метод позже нашел применение также для изучения топологии многообразий высшей размерности.

Теория этальных когомологий схем позволяет сформулировать и доказать алгебраич. аналоги многих классич. утверждений о топологии А. п. для поверхностей, определенных над полем произвольной характеристики. В частности, определены группы *l-адических когомологий* $H^i_l(V)$, *фундаментальная группа* и *гомотопический тип* А. п. (см. [9]).

Начало теории интегралов на А. п. положили работы Э. Пикара [6]. В дальнейшем его результаты были обобщены на многообразия высшей размерности (В. Ходж, W. Hodge, 30 - 40-е гг. 20 в.). Из этих результатов, в частности, следует неравенство $b_2(V) \geqslant \rho + 2p_g(V)$. Кроме того, доказано, что число положительных квадратов в квадратичной форме, определяемой на $H_2(V, \mathbb{Z})$ индексом пересечения, равна $2p_g(V) + 1$. Аналоги этих результатов для случая поля конечной характеристики неверны. Развитие трансцендентной теории А. п. связано с работами Ф. Гриффитса (P. Griphits).

е) Проективные погружения А. п. В связи с возникновением понятия абстрактного алгебраич. многообразия встал вопрос о существовании (абстрактных) А. п., непогружаемых в проективное пространство. Доказано, что неособая полная А. п. всегда является проективной [8]. Существуют полные особые непроективные А. п. Имеются различные численные критерии проективности А. п. (см. *Обильный пучок*). Каждое неособое двумерное алгебраич. пространство является А. п.

Минимальные модели алгебраических поверхностей. Неособая А. п. V наз. минимальной моделью, если каждый бирациональный морфизм $V \to V'$ на неособую А. п. V' является изоморфизмом. В каждом классе по бирациональной эквивалентности существует минимальная модель. За исключением классов линейчатых поверхностей, эта минимальная модель единственна с точностью до изоморфизма ([2], [8], [1]). Для того чтобы А. п. была минимальной моделью, необходимо и достаточно, чтобы на ней не было исключительных кривых 1-го рода, т. е. неприводимых кривых, стягивающихся в неособую точку при нек-ром бирациональном морфизме. Впервые такие кривые были исследованы в 1895 М. Нётером. Они характеризуются условиями: C — рациональная неособая кривая и $(C^2) = -1$ (см. [1], [2]). Минимальные модели линейчатых поверхностей полностью классифицированы.

Классификация алгебраических поверхностей. Согласно классификации Ф. Энрикеса (см. [2]), каждая неособая А. п. над полем нулевой характеристики с точностью до бирациональной эквивалентности принадлежит к одному из следующих типов: а) *линейчатые поверхности*; б) двумерные *абелевы многообразия*;

в) *K3-поверхности*; г) *эллиптические поверхности*; д) *основного типа алгебраические поверхности*. Эта классификация во многом аналогична классификации алгебраич. кривых. При этом рациональным кривым соответствуют линейчатые поверхности, поверхности типов б) — г) соответствуют эллиптич. кривым, поверхности основного типа — кривым рода $g>1$. Тип минимальной модели А. п. определяется значениями ее числовых инвариантов. Линейчатые поверхности характеризуются условием $p_{12}=0$; А. п. типа б) — условиями $p_{12}=1$, $p_g=1$, $p_a=-1$; А. п. типа в) — условиями $K_V=0$, $q=0$; А. п. типа г) — условиями $(K_V^2)=0$ и $p_{12}>1$ либо $p_{12}=1$ и $p_g=0$. Наконец, А. п. основного типа характеризуются условиями $(K_V^2)>0$ и $p_{12}>1$.

В классе линейчатых поверхностей содержатся *рациональные поверхности*, характеризующиеся условиями $p_2=p_a=0$ (что позволяет дать утвердительный ответ в двумерном случае на *Люрота проблему*).

Многие разрозненные результаты в теории классификации А. п. посвящены задаче построения А. п. с заданными численными инвариантами. Наиболее часто встречающийся способ построения А. п. состоит в представлении ее в виде двойного накрытия проективной плоскости со специально подобранной кривой ветвления (см. *Двойная плоскость*). Неизвестно (1977), какие значения инвариантов $p^{(1)}$ и p_a могут принимать поверхности основного типа. Часть результатов о классификации А. п. была распространена в последнее время на случай поля произвольной характеристики. Для *аналитических поверхностей* классификационные результаты Ф. Энрикеса были обобщены К. Кодаирой (K. Kodaira).

Проблема модулей для алгебраических поверхностей. Содержанием проблемы модулей для А. п. является классификация А. п. с точностью до изоморфизма. Первая формула для числа параметров (модулей), от к-рых зависит А. п. с заданными инвариантами p_a, p_g и $p^{(1)}$ для одного класса А. п., была дана М. Нётером (1888). Нелинейчатые поверхности с заданными инвариантами p_a, p_g и $p^{(1)}$ зависят от M модулей, где

$$M=10p_a-p_g-2p^{(1)}+12+\Theta, \qquad (*)$$

Θ - некоторый бирациональный инвариант рассматриваемых А. п. (см. [2], [9]).

Современная теория деформаций дает следующую интерпретацию этого классич. результата. Число модулей M есть не что иное, как размерность касательного пространства Зарисского к локальной (или, в алгебраич. случае, к формальной) схеме модулей S_α для поляризованной поверхности $(V,\ \alpha)$ из данного класса А. п. Кроме того, если

$$0\longrightarrow O_V\longrightarrow E_\alpha\longrightarrow T_V\longrightarrow 0$$

есть канонич. расширение касательного пучка T_V к поверхности V с помощью структурного пучка O_V, определяемое фундаментальным классом поляризации α, то

$$M=\dim \operatorname{Im}(H^1(V,\ E_\alpha)\longrightarrow H^1(V,\ T_V)).$$

Формула $(*)$ является следствием этой точной последовательности и теоремы Римана — Роха. При этом число Θ оказывается суммой

$$\dim_k H^2(V,\ E_2)+\dim_k H^2(V,\ T_V).$$

Имеет место неравенство

$$\dim_k H^2(V,\ E_\alpha)\geqslant 2p_g-p_a-1$$

(см. [9]). Локальная схема модулей S_α может быть особой даже в случае $\operatorname{char} k=0$. Это показывает, что «настоящее» число модулей, т. е. $M'=\dim S_\alpha$, может быть меньше M. Разность $\omega=M-M'$ наз. числом препятствий к деформации; известна оценка

$\omega \leqslant \dim_h H^2(V, E_\alpha)$. Существование глобального многообразия модулей А. п. доказано только в некоторых случаях. Для поверхностей основного типа и К3-поверхностей многообразие модулей существует как *аналитическое пространство* либо как *алгебраическое пространство*.

Автоморфизмы алгебраических поверхностей. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V)$ полной А. п. V есть группа k-точек нек-рой схемы групп, связная компонента к-рой $\mathrm{Aut}^0(V)$ является алгебраич. группой. Если V не является линейчатой поверхностью и $\dim \mathrm{Aut}^0(V) > 0$, то $p_a = -1$. При этом если $p_g \neq 1$ либо $p_g = 1$ и $p_2 > 1$, то V — эллиптич. поверхность, а $\mathrm{Aut}^0(V)$ — одномерное абелево многообразие. В остальных случаях V и $\mathrm{Aut}^0(V)$ — абелевы поверхности (см. [2]). Для поверхностей основного типа группа $\mathrm{Aut}(V)$ есть конечная подгруппа проективной группы. Хорошо изучена группа $\mathrm{Aut}(V)$ для К3-поверхностей над полем комплексных чисел и для линейчатых поверхностей. Если поверхность V не является линейчатой, то группа $\mathrm{Aut}(V)$ совпадает с группой бирациональных преобразований поверхности V. Последняя группа для линейчатых поверхностей не обладает алгебраической структурой и мало изучена (см. *Кремоны группа*). Интенсивно изучается группа автоморфизмов аффинных алгебраических поверхностей (см. *Алгебраического многообразия автоморфизм*).

Алгебраические поверхности над алгебраически незамкнутыми полями. Теоретико-числовые вопросы в теории А. п. связаны с диофантовыми задачами (см. *Диофантова геометрия*). До настоящего времени (1977) остается непроверенной последняя из гипотез Вейля для А. п. над конечным полем. Однако для нек-рых классов А. п. это сделано (рациональные поверхности, абелевы поверхности и К3-поверхности, поднимаемые в нулевую характеристику). Завершена начатая Ф. Энрикесом, А. Комессатти (A. Comessatti) и Б. Сегре (B. Segre) классификация рациональных поверхностей над незамкнутыми полями. Для некоторого класса таких поверхностей изучена группа бирациональных автоморфизмов.

Результаты теории А. п. применяются к изучению алгебраических кривых над функциональными полями (см. *Мордделла гипотеза*). Обобщение некоторых результатов теории А. п. (минимальные модели, теория пересечений) на более широкий класс регулярных двумерных схем [7] позволяет ввести геометрический язык при изучении алгебраических кривых над числовыми полями.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [3] Jung H., Algebraische Flächen, Hannover, 1925; [4] Lefschitz S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [5] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [6] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, t. 1—2, P., 1897—1906; [7] Safarevich I., Lectures on minimal models and birational transformations of twodimensional schemes, Bombay, 1966; [8] Zariski O., Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Tokyo, 1958; [9] его же, Algebraic surfaces, 2 ed., B., 1971; [10] его же, An introduction to the theory of algebraic surfaces, B., 1969.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ топологического пространства — различные связанные с размерностью числовые инварианты кольца непрерывных функций на данном пространстве.

П. С. Александров.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА, компактно порожденная решетка,— решетка, каждый элемент к-рой является объединением (т. е. точной верхней гранью) нек-рого множества *компактных элементов*. Решетка изоморфна решетке подалгебр нек-рой *универсальной алгебры* тогда и только тогда, когда она полная и алгебраическая. Эти же условия являются

необходимыми и достаточными, для того чтобы решетка была изоморфна решетке конгруэнций нек-рой универсальной алгебры (теорема Грэтцера — Шмидта). В обоих случаях арность операций универсальной алгебры предполагается конечной.

Лит.: [1] Birkhoff G., Lattice theory, «Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.», 1967, v.25. *Т. С. Фофанова.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — множество с определенными на нем операциями и отношениями. А. с. принадлежат к числу основных математич. структур и имеют глубоко разработанную общую теорию, сформировавшуюся в начале 50-х гг. 20 в. на грани между алгеброй и математич. логикой.

Основные понятия. Алгебраической системой наз. объект $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$, состоящий из непустого множества A, семейства O *алгебраических операций* $o_i\colon A^{n_i}\to A$ $(i\in I)$ и семейства R *отношений* $r_j\subseteq A^{m_j}$ $(j\in J)$, заданных на множестве A. Показатели n_i, m_j рассматриваемых декартовых степеней множества A предполагаются целыми неотрицательными числами и наз. арностями соответствующих операций и отношений. Множество A наз. носителем, или основным множеством, А. с. $\boldsymbol{A}$, а его элементы — элементами этой системы. Мощность $|A|$ множества A наз. мощностью, или порядком, А. с. $\boldsymbol{A}$. Образ $o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ элемента $(a_1, \ldots, a_{n_i})\in A^{n_i}$ при отображении $o_i\colon A^{n_i}\to A$ наз. значением операции o_i в точке $(a_1, \ldots, a_{n_i})$. Аналогично, если $(a_1, \ldots, a_{m_j})\in r_j$, то говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_{m_j}$ из A находятся в отношении r_j, и пишут $r_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Операции o_i $(i\in I)$ и отношения r_j $(j\in J)$, в отличие от других операций и отношений, к-рые могут быть определены на множестве A, наз. основными, или главными.

Пара семейств $\langle\{n_i\colon i\in I\};\ \{m_j\colon j\in J\}\rangle$ наз. типом А. с. $\boldsymbol{A}$. Две А. с. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ однотипны, если $I=I'$, $J=J'$ и $n_i=n_i'$, $m_j=m_j'$ для всех $i\in I$, $j\in J$. Основные операции o_i, o_i' и основные отношения r_j, r_j' однотипных А. с. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, имеющих одинаковые индексы в I, J соответственно, наз. одноименными.

А. с. $\boldsymbol{A}$ наз. конечной, если множество A конечно, и конечного типа, если множество IUJ конечно. А. с. $\boldsymbol{A}$ конечного типа записывают в виде $A=\langle A; o_1, \ldots, o_s, r_1, \ldots, r_t\rangle$.

А. с. $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ наз. *универсальной алгеброй*, или алгеброй, если множество R основных отношений ее является пустым, и *моделью*, или реляционной системой, если множество O основных операций ее пустое. Классическими А. с. являются группы, кольца, линейные пространства, линейные алгебры, линейно упорядоченные множества, линейно упорядоченные группы, линейно упорядоченные кольца, решетки и т. д.

Непустое подмножество B основного множества A А. с. $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ наз. замкнутым, если для любых элементов $b_1, \ldots, b_{n_i}$ из B значение $o_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$ каждой основной операции $o_i\in O$ также принадлежит множеству B. Рассматривая операции из O и отношения из R на замкнутом подмножестве B, мы получим А. с. $\mathbf{B}=\langle B, O', R'\rangle$, однотипную данной и наз. подсистемой А. с. $\boldsymbol{A}$. Подсистемы алгебр наз. подалгебрами, а подсистемы моделей — подмоделями. Понятие подалгебры существенно зависит от множества основных операций рассматриваемой алгебры. Напр., группоид $\boldsymbol{G}$ есть алгебра типа $\langle 2\rangle$, т. е. алгебра с одной основной операцией $G\times G\to G$. Группоид $\boldsymbol{H}$ с выделенной единицей e есть алгебра типа $\langle 2, 0\rangle$, выделенный элемент к-рой обладает по отношению к основной операции $o\colon H\times H\to H$ свойством $o(e, h)=o(h, e)=h$ для всех $h\in H$. Поэтому всякий под-

группоид группоида $\boldsymbol{H}$ с выделенной единицей e содержит e, тогда как подгруппоид группоида $\langle H, o\rangle$ не обязан содержать элемент e. В отличие от алгебр, любое непустое подмножество модели может рассматриваться как подмодель.

А. с. $\boldsymbol{A}$ и з о м о р ф н а однотипной А. с. $\boldsymbol{A}'$, если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества A на множество A', что

$$\varphi(o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = o'_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})), \quad (1)$$

$$r_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Longleftrightarrow r'_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})) \quad (2)$$

для всех $a_1, a_2, \ldots$ из A и для всех $i \in I$, $j \in J$. Отображение φ с этими свойствами наз. и з о м о р ф и з м о м.

Под классом алгебраич. систем понимается в дальнейшем только абстрактный класс, т. е. такой класс однотипных А. с., к-рый содержит с каждой системой $\boldsymbol{A}$ и все изоморфные ей системы. При рассмотрении того или иного класса $\mathfrak{K}$ А. с. все системы из этого класса записывают обычно в определенной сигнатуре следующим образом. Пусть класс $\mathfrak{K}$ имеет тип $\langle\{n_i\colon i \in I\}, \{m_j\colon j \in J\}\rangle$. Каждому $i \in I$ сопоставляют нек-рый символ F_i, наз. ф у н к ц и о н а л ь н ы м, а каждому $j \in J$ — символ P_j, наз. п р е д и к а т н ы м. Если А. с. $\boldsymbol{A}$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и $o_i\colon A^{n_i} \to A$ — основная операция в ней, то элемент $o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ из A записывают в виде $F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$. Аналогично, если $r_j \subseteq A^{m_j}$ — основное отношение в $\boldsymbol{A}$ и элемент $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \in r_j$, то пишут $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = И$ (истинно) или просто $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Если же $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \notin r_j$, то пишут $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = Л$ (ложно) или $\neg P(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Пусть $\Omega_f \{F_i\colon i \in I\}$, $\Omega_p = \{P_j\colon j \in J\}$ и ν — отображение объединения $\Omega_f \cup \Omega_p$ в множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$, определяемое формулами: $\nu(F_i) = n_i\ (i \in I)$, $\nu(P_j) = m_j\ (j \in J)$. Объект $\Omega = \langle \Omega_f, \Omega_p, \nu\rangle$ наз. с и г н а т у р о й класса $\mathfrak{K}$. Конечную сигнатуру записывают в виде строки $\langle F_1^{(n_1)}, \ldots, F_s^{(n_s)}, P_1^{(m_1)}, \ldots, P_t^{(m_t)}\rangle$ или короче $\langle F_1, \ldots, F_s; P_1, \ldots, P_t\rangle$. А. с. $\boldsymbol{A}$, записанная в сигнатуре Ω, наз. Ω-с и с т е м о й и обозначается $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega\rangle$.

Условия (1), (2) изоморфизма однотипных систем $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ упрощаются, если эти системы рассматривать в одной сигнатуре Ω. Так, если сигнатурными символами будут $F_i\ (i \in I)$, $P_j\ (j \in J)$, то (1), (2) примут вид

$$\varphi(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})), \quad (3)$$

$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Longleftrightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})). \quad (4)$$

Г о м о м о р ф и з м о м Ω-системы $\boldsymbol{A}$ в Ω-систему $\boldsymbol{A}'$ наз. всякое отображение $\varphi\colon A \to A'$, удовлетворяющее условию (3) и условию

$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Rightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})) \quad (5)$$

для всех $F_i \in \Omega_f$, $P_j \in \Omega_p$ и для всех $a_1, a_2, \ldots$ из A. Гомоморфизм $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ наз. с и л ь н ы м, если для любых элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$ из A' и для любого предикатного символа P_j из Ω_p соотношение $P_j(b_1, \ldots, b_{m_j}) = И$ влечет существование в A таких прообразов $a_1, \ldots, a_{m_j}$ элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$, для к-рых $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = И$. Понятия гомоморфизма и сильного гомоморфизма алгебр совпадают. Для моделей существуют гомоморфизмы, к-рые не являются сильными, и взаимно однозначные гомоморфизмы, к-рые не являются изоморфизмами. При гомоморфизме $\varphi\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ образами в $\boldsymbol{A}'$ подсистем из $\boldsymbol{A}$ и непустыми полными прообразами в $\boldsymbol{A}$ подсистем из $\boldsymbol{A}'$ являются подсистемы.

Эквивалентность $\theta \subseteq A \times A$ наз. конгруэнцией Ω-системы $\boldsymbol{A}$, если

$$\theta(a_1, b_1), \ldots, \theta(a_{n_i}, b_{n_i}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \theta(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i}), F_i(b_1, \ldots, b_{n_i}))$$

для всех $a_1, b_1, \ldots, a_{n_i}, b_{n_i}$ из A и для всех $F_i \in \Omega_f$. Для каждого гомоморфизма φ А. с. $\boldsymbol{A}$ бинарное отношение $\theta(a, b)$, истинное тогда и только тогда, когда $\varphi(a) = \varphi(b)$, является конгруэнцией в $\boldsymbol{A}$, к-рая наз. ядерной. Для произвольной конгруэнции θ Ω-системы $\boldsymbol{A}$ и для каждого элемента $a \in A$ множество $a\theta = \{x \in A : \theta(x, a)\}$, наз. смежным классом А. с. $\boldsymbol{A}$ по конгруэнции θ. Полагая для каждых $F_i \in \Omega_f$, $P_j \in \Omega_p$,

$$F_i(a_1/\theta, \ldots, a_{n_i}/\theta) = F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})/\theta$$

и

$$P_j(b_1/\theta, \ldots, b_{m_j}/\theta) = И$$

тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_{m_j}$ в A, что $\theta(b_1, c_1), \ldots, \theta(b_{m_j}, c_{m_j})$ и $P_j(c_1, \ldots, c_{m_j})$, мы получим А. с. $\boldsymbol{A}$ θ, однотипную данной и наз. факторсистемой А. с. $\boldsymbol{A}$ по конгруэнции θ. Для каждой конгруэнции θ А. с. $\boldsymbol{A}$ канонич. отображение $\varphi(a) = a/\theta$ $(a \in A)$ является гомоморфизмом А. с. $\boldsymbol{A}$ на факторсистему $\boldsymbol{A}/\theta$, для которого данная конгруэнция θ ядерная. Если φ есть гомоморфизм А. с. $\boldsymbol{A}$ на А. с. $\boldsymbol{A}'$ и θ — ядерная конгруэнция для φ, то отображение $\psi(a/\theta) = \varphi(a)$ является гомоморфизмом факторсистемы $\boldsymbol{A}/\theta$ на А. с. $\boldsymbol{A}'$. Если при этом гомоморфизм φ сильный, то ψ есть изоморфизм.

Декартовым произведением Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha = \langle A_\alpha, \Omega \rangle$ $(\alpha \in \Lambda \neq \varnothing)$ наз. Ω-система $\boldsymbol{D} = \langle D, \Omega \rangle$, в к-рой D есть декартово произведение основных множеств A_α $(\alpha \in \Lambda)$, а основные операции и основные отношения на D задаются условиями: $F_i(d_1, \ldots, d_{n_i})$ $(d_1, \ldots, d_{n_i} \in D, F_i \in \Omega_f)$ есть элемент $d \in D$ с координатами $d(\alpha) = F_i(d_1(\alpha), \ldots, d_{n_i}(\alpha))$ $(\alpha \in \Lambda)$, $P_j(d_1, \ldots, d_{m_j}) = И$ $(P_j \in \Omega_p)$ тогда и только тогда, когда $P_j(d_1(\alpha), \ldots, d_{m_j}(\alpha)) = И$ для всех $\alpha \in \Lambda$.

Язык 1-й ступени. Основным формальным языком теории А. с. является язык 1-й ступени L, к-рый строится следующим образом. Алфавит языка L в заданной сигнатуре $\Omega = \langle \Omega_f, \Omega_p, \nu \rangle$, $\Omega_f = \{F_i;\ i \in I\}$, $\Omega_p = \{P_j;\ j \in J\}$, состоит из предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$, функциональных символов $F_i (i \in I)$, предикатных символов $P_j (j \in J)$, символов логич. связок:

$$\&, \vee, \rightarrow, \neg, =$$

кванторов:

$\forall x_k$ — «для каждого элемента x_k»,

$\exists x_k$ — «существует такой элемент x_k»

и вспомогательных символов: скобок и запятых. Для выражения свойств (1-й ступени) Ω-систем употребляются конечные последовательности алфавитных символов, или слова, составленные по определенным правилам и наз. термами и формулами. Индуктивно полагают, что каждое слово вида x_k или F_i при $\nu(F_i) = 0$ есть терм; если $f_1, \ldots, f_n$ термы и $n = \nu(F_i)$, то $F_i(f_1, \ldots, f_n)$ — также терм.

Если $\boldsymbol{A}$ есть Ω-система и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры Ω, содержащий предметные переменные $x_1, \ldots, x_k$, то, заменяя $x_1, \ldots, x_k$ к.-н. элементами $a_1, \ldots, a_k$ из A и выполняя над последними операции в $\boldsymbol{A}$, соответствующие входящим в терм символам из Ω_f, получают элемент $f(a_1, \ldots, a_k)$ из A, называемый значением терма $f(x_1, \ldots, x_k)$ при $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$. Если φ — гомоморфизм Ω-системы $\boldsymbol{A}$ в Ω-систему $\boldsymbol{A}'$, то

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_k)) = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Понятие формулы сигнатуры Ω, с в о б о д н ы х и с в я з а н н ы х предметных переменных в ней определяется также индуктивно:

1) Если P - какой-нибудь предикатный символ из Ω или знак равенства $=$, $m = \nu(P)$ или 2 соответственно, а $f_1, \ldots, f_m$ - произвольные термы сигнатуры Ω, то слово $P(f_1, \ldots, f_m)$ есть формула, в к-рой все предметные переменные свободны.

2) Если $\mathfrak{F}$ — формула, то $\neg\mathfrak{F}$ — также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg\mathfrak{F}$ те и только те, к-рые являются свободными (связанными) в $\mathfrak{F}$.

3) Если $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — формулы и предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то слова

$$\mathfrak{F}_1 \,\&\, \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \mathfrak{F}_2 \qquad (6)$$

— также формулы.

Предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, наз. свободными (связанными) и в формулах (6).

4) Если предметное переменное x_k входит свободно в формулу $\mathfrak{F}$, то слова $(\forall x_k)\,\mathfrak{F}$, $(\exists x_k)\mathfrak{F}$ снова являются формулами, в к-рых переменное x_k связанное, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу $\mathfrak{F}$ свободно или связанно, остаются такими же и в формулах $(\forall x_k)\,\mathfrak{F}$, $(\exists x_k)\,\mathfrak{F}$.

Если заданы Ω-система A и формула $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω, то придавая всем свободным предметным переменным $x_1, \ldots, x_k$ в $\mathfrak{F}$ какие-нибудь значения $a_1, \ldots, a_k$ из A и интерпретируя функциональные и предикатные символы, входящие в $\mathfrak{F}$, как соответствующие основные операции и основные отношения в A, мы получим конкретное высказывание, к-рое будет истинным или ложным. В соответствии с этим формуле $\mathfrak{F}$ приписывают значение $И$ или $Л$ при $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$, обозначаемое $\mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_k)$. Если φ — изоморфное отображение Ω-системы A на Ω-систему A', то

$$\mathfrak{F}\ (a_1, \ldots, a_k) - \mathfrak{F}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$$

для всех $a_1, \ldots, a_k$ из A.

Формула $\mathfrak{F}$ наз. з а м к н у т о й, если она не содержит свободных предметных переменных. Для любой замкнутой формулы $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω и произвольной Ω-системы A можно говорить об истинности или ложности $\mathfrak{F}$ в A. Совокупность S замкнутых формул данной сигнатуры Ω наз. в ы п о л н и м о й, или с о в м е с т н о й, если существует Ω-система, в к-рой истинны все формулы из S.

Т е о р е м а к о м п а к т н о с т и или л о к а л ь н а я т е о р е м а Г ё д е л я — М а л ь ц е в а. Если выполнима каждая конечная часть бесконечной совокупности S замкнутых формул какой-то сигнатуры Ω, то выполнима и вся совокупность S.

Аксиоматизируемые классы. Пусть S — некоторая совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω. Класс всех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S, будет обозначаться KS. Совокупность $\mathrm{Th}\,\mathfrak{K}$ всех замкнутых формул сигнатуры Ω, истинных во всех Ω-системах из заданного класса $\mathfrak{K}$, наз. элементарной теорией класса $\mathfrak{K}$. В частности, если (A) — класс Ω-систем, изоморфных данной Ω-системе A, то $\mathrm{Th}(A)$ наз. элементарной теорией Ω-системы A и обозначается просто $\mathrm{Th}A$. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. а к с и о м а т и з и р у е м ы м, если $\mathfrak{K} = K\mathrm{Th}\,\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда существует такая совокупность S замкнутых формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K} = KS$.

Наряду с общим понятием аксиоматизируемости рассматривают аксиоматизируемость при помощи формул 1-й ступени специального вида. Наиболее важными в алгебре специальными формулами заданной сигнатуры Ω являются:

Тождества — формулы вида

$$(\forall x_1)\ \ldots\ (\forall x_s) P(f_1, \ldots, f_m),$$

где P — к.-л. предикатный символ из Ω или знак равенства $=$, а $f_1, \ldots, f_m$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$.

Квазитождества — формулы вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s)\ [P(f_1, \ldots, f_k) \& \ldots \& Q(g_1, \ldots, g_m) \longrightarrow \longrightarrow R(h_1, \ldots, h_n)],$$

где $P, \ldots, Q, R$ — нек-рые предикатные символы из Ω_p или знаки равенства, а $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$.

Универсальные формулы — формулы вида $(\forall x_1) \ldots (\forall x_s)\ \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формула сигнатуры Ω, не содержащая кванторов.

Если задано множество S тождеств (квазитождеств или универсальных формул) сигнатуры Ω, то класс KS наз. многообразием (квазимногообразием или универсальным классом) Ω-систем.

Теорема Биркгофа. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем, декартовых произведений и гомоморфных образов.

Если $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — некоторая Ω-система, то, заменяя каждый функциональный символ F_i из Ω_f предикатным символом F_i^* арности $n_i + 1$ (на 1 выше) и полагая для элементов $a_1, \ldots, a_{n_i}, a$ из A

$$F_i^*(a_1, \ldots, a_{n_i}, a) \Longleftrightarrow F_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) = a,$$

мы получим модель $\boldsymbol{A}^* = \langle A, \Omega^* \rangle$, для которой $\Omega_p^* = \Omega_p \cup \{F_i^* : F_i \in \Omega_f\}$. Подмодели модели $\boldsymbol{A}^*$ наз. подмоделями Ω-системы $\boldsymbol{A}$. Для любых непустых конечных подмножеств $A_\alpha \subseteq A$, $\Omega_\beta^* \subseteq \Omega^*$ модель $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta} = \langle A_\alpha, \Omega_\beta^* \rangle$ наз. конечным обеднением конечной подмодели $\boldsymbol{A}_\alpha = \langle A_\alpha, \Omega^* \rangle$ Ω-системы $\boldsymbol{A}$. Ω-система $\boldsymbol{A}$ наз. локально вложимой в класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем, если для каждого конечного обеднения $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ любой конечной подмодели $\boldsymbol{A}_\alpha$ Ω-системы $\boldsymbol{A}$ существует в классе $\mathfrak{K}$ такая Ω-система $\boldsymbol{B}$ (зависящая от выбранного конечного обеднения $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$), что модель $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta} = \langle A_\alpha, \Omega_\beta^* \rangle$ изоморфна модели $\boldsymbol{B}_{\alpha\beta} = \langle B_\alpha, \Omega_\beta^* \rangle$ для подходящего подмножества $B_\alpha \subseteq B$.

Подкласс $\mathfrak{L}$ класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. универсальным (или универсально аксиоматизируемым) в $\mathfrak{K}$, если существует такая совокупность S универсальных формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{L} = KS \cap \mathfrak{K}$.

Теорема Тарского — Лося. Подкласс $\mathfrak{L}$ класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем универсален в $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ содержит все системы из $\mathfrak{K}$, локально вложимые в $\mathfrak{L}$.

Фильтрованные произведения. Пусть $\boldsymbol{D} = \prod \boldsymbol{A}_\alpha$ — декартово произведение Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha (\alpha \in \Lambda,\ \Lambda \neq \varnothing)$ и Φ — некоторый *фильтр* над Λ. Отношение

$$d \equiv_\Phi h \Longleftrightarrow \{\alpha \in \Lambda : d(\alpha) = h(\alpha)\} \in \Phi\ (d, h \in D)$$

есть эквивалентность на основном множестве D Ω-системы $\boldsymbol{D}$. Для каждого элемента $d \in D$ пусть d/Φ есть смежный класс по этой эквивалентности и $D/\Phi = \{d/\Phi : d \in D\}$. Полагая

$$F_i(d_1/\Phi, \ldots, d_{n_i}/\Phi) = d\Phi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{\alpha : F_i(d_1(\alpha), \ldots, d_{n_i}(\alpha)) = d(\alpha)\} \in \Phi\ (F_i \in \Omega_f),$$

$$P_j(d_1/\Phi, \ldots, d_{m_j}/\Phi) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{\alpha : P_j(d_1(\alpha), \ldots, d_{m_j}(\alpha))\} \in \Phi\ (P_j \in \Omega_p),$$

можно получить Ω-систему $\boldsymbol{D}/\Phi = \langle D/\Phi, \Omega \rangle$, которая наз. фильтрованным по фильтру Φ произведением Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha (\alpha \in \Lambda)$. Ω-системы

$A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ наз. сомножителями этого произведения. Если Φ - *ультрафильтр* над Λ, то фильтрованное произведение D/Φ наз. ультрапроизведением Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$.

Теорема об ультрапроизведениях. Если D/Φ — ультрапроизведение Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ и $\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_k)$ - произвольная формула сигнатуры Ω, в к-рой свободными предметными переменными являются $x_1, \ldots, x_k$, то для любых элементов $d_1, \ldots, d_k \in D$

$$\mathfrak{F}(d_1/\Phi, \ldots, d_k/\Phi) = И \iff$$
$$\iff \{\alpha : \mathfrak{F}(d_1(\alpha), \ldots, d_k(\alpha)) = И\} \in \Phi.$$

В частности, замкнутая формула $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω истинна в ультрапроизведении D/Φ Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ тогда и только тогда, когда множество номеров сомножителей, в к-рых формула $\mathfrak{F}$ истинна, принадлежит ультрафильтру Φ. Поэтому всякий аксиоматизируемый класс Ω-систем замкнут относительно ультрапроизведений.

Класс L Ω-систем универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем и ультрапроизведений.

Ω-система $E = \langle \{e\}, \Omega \rangle$ наз. единичной, если ее основное множество состоит из одного элемента, скажем e, и $P_f(e, \ldots, e) = И$ для всех $P_f \in \Omega_p$.

Теорема Мальцева. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он содержит единичную Ω-систему и замкнут относительно подсистем и фильтрованных (по произвольному фильтру) произведений.

Полнота и категоричность. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. категоричным, если все Ω-системы из $\mathfrak{K}$ изоморфны между собой. Всякий категоричный аксиоматизируемый класс Ω-систем состоит из одной (с точностью до изоморфизма) конечной Ω-системы.

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. категоричным в мощности $\mathfrak{m}$, если он содержит Ω-систему мощности $\mathfrak{m}$ и все Ω-системы из $\mathfrak{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны между собой. Напр., класс алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики категоричен в любой несчетной бесконечной мощности. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. полным, если для любых Ω-систем A, B из $\mathfrak{K}$ имеет место равенство $\mathrm{Th}\, A = \mathrm{Th}\, B$.

Теорема Воота. Если аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем категоричен в нек-рой мощности $\mathfrak{m} \geqslant |\Omega_f \cup \Omega_p|$ и все Ω-системы из $\mathfrak{K}$ бесконечны, то $\mathfrak{K}$ - полный класс.

В частности, класс всех алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики является полным.

См. также *Алгебраической системы автоморфизм*, *Алгебраических систем квазимногообразие*, *Алгебраических систем класс*, *Алгебраических систем многообразие*.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Grätzer G., Uneversal algebra, Princeton, 1968; [4] Bell J. L., Slomson A. B., Models and ultraproducts, Amst.—L., 1969; [5] Chang C. C., Keisler H. J., Model theory, Amst. — N.Y., 1973. *Д. М. Смирнов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ *K*-ТЕОРИЯ — раздел алгебры, к-рый в основном занимается изучением *K-функторов* (K_0, K_1 и др.); по существу - это часть общей линейной алгебры. Она имеет дело со структурной теорией проективных модулей и их групп автоморфизмов. Упрощенно, это - обобщение результатов о существовании и единственности (с точностью до автоморфизма) базиса векторного пространства и других общих теоретико-групповых фактов о линейных группах над полями. При переходе от поля к произвольному кольцу R эти теоремы, как правило, уже неверны, а группы Гротендика $K_0(R)$ и Уайтхеда $K_1(R)$, в нек-ром смысле, являются мерой отклонения от их истинности. Аналогичные обобщения структурных теорем линейной алгебры

возникают и в топологии. Векторное пространство можно рассматривать как частный случай *векторного расслоения*. Гомотопич. теория векторных расслоений и топологич. *К-теория* делают возможными рассмотрения такого рода. Существенную роль играет тот факт, что проективный модуль можно рассматривать как модуль сечений векторного расслоения. Это объясняет выбор именно класса проективных модулей в качестве объекта теории. В А. *К*-т. широко используются теория колец, гомологич. алгебра, теория категорий и теория линейных групп.

А. *К*-т. имеет два различных историч. источника, оба лежащих в геометрии. Первый связан с нек-рыми топологич. препятствиями. Исходным пунктом было введение понятия *Уайтхеда кручения*, связанного с гомотопич. эквивалентностью конечных комплексов и лежащего в группе Уайтхеда, являющейся нек-рой факторгруппой группы $K_1(R)$, где $R = \mathbb{Z}\Pi$ — целочисленное групповое кольцо фундаментальной группы Π. Следующий шаг связан с рассмотрением топологич. пространства X, доминируемого конечным комплексом, и его обобщенной *эйлеровой характеристики* $\chi(A)$, лежащей в группе $K_0(\mathbb{Z}\pi)$. Вычисление групп Уайтхеда и L-групп, являющееся в принципе алгебраич. задачей о групповых кольцах, и было одной из первых целей А. *К*-т. K_2 и другие высшие функторы имеют топологич. приложения такого же типа (напр., препятствие для деформации псевдоизотопии замкнутого многообразия в изотопию лежит в нек-рой факторгруппе группы $K_2(\mathbb{Z}\pi)$). Алгебраич. изучение группы Уайтхеда началось в 40-х гг. 20 в. Сюда же примыкает изучение структуры линейных групп над произвольными кольцами, в частности теория определителей над телами (см. [10]).

Второй источник А. *К*-т. – алгебраич. доказательство А. Гротендиком (A. Grothendieck) в 1957 теоремы Римана – Роха (см. [7]) и ее обобщений. В этом доказательстве был введен *К*-функтор $K(X)$ как группа значений универсальной аддитивной функции на когерентных пучках на гладком алгебраич. многообразии. Впрочем, хорошо известные ранее кольца представлений, *Витта кольца* классов квадратичных форм и т. п. являются родственными конструкциями. Затем *К*-функтор был перенесен в топологию, где нашел многочисленные применения, сделав возможным решение многих недоступных ранее задач.

Кроме того, выяснилось, что эта конструкция открывает новые перспективы в понимании старых проблем анализа (вопрос об индексе эллиптических операторов), топологии (экстраординарные теории гомологий), теории представлений групп. Развитию А. *К*-т. для колец (начавшемуся с установления соответствия (аналогии) между проективными конечно порожденными модулями и векторными расслоениями) препятствовало, однако, отсутствие в алгебре адекватного аналога понятия надстройки в топологии.

В 50 60-х гг. 20 в. подверглись систематич. изучению проективные модули над конечными группами, была развита одна из важнейших идей, лежащая в основе А. *К*-т.,— идея «стабилизации», состоящая, грубо говоря, в том, что общие закономерности проявляются более отчетливо при переходе к пределу по размерности рассматриваемых объектов (напр., линейных групп или проективных модулей). Были обнаружены связи А. *К*-т. с *взаимности законами* в теории алгебраич. чисел и алгебраич. функций, исследованы вопросы, связанные с *конгруэнц-подгруппами*, получен алгебраич. аналог *Ботта теоремы периодичности* — теория полиномиальных расширений.

Для кольца R с единицей г р у п п а Г р о т е н д и к а $K_0(R)$ определяется как абелева группа, образующими к-рой служат классы изоморфных конечно поро-

жденных проективных R-модулей, с определяющими соотношениями

$$[P_1]+[P_2]=[P_1 \oplus P_2],$$

где $[P]$ — класс модулей, изоморфных модулю P. Пусть $\mathrm{GL}(n, R)$ — полная линейная группа над R, $A \to \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ — вложение $\mathrm{GL}(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n+1, R)$, $\mathrm{GL}(R)$ — прямой предел групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $E(R)$ — подгруппа в $\mathrm{GL}(R)$, порожденная элементарными матрицами e_{ij}^{λ}, т. е. матрицами с элементом $\lambda \in R$ на i, j-м месте, и совпадающая с единичной матрицей на остальных местах. Тогда $E(R)$ совпадает с коммутантом группы $\mathrm{GL}(R)$. Факторгруппа $\mathrm{GL}(R)/E(R)$ обозначается через $K_1(R)$ и наз. группой Уайтхеда. Наконец, группа Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ при $n \geqslant 3$ определяется в образующих x_{ij}^{λ}, $\lambda \in R$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, соотношениями

$$x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} = x_{ij}^{\lambda+\mu};$$

$$\left[x_{ij}^{\lambda}, x_{jl}^{\mu}\right] = x_{il}^{\lambda\mu} \text{ при } i \neq l;$$

$$\left[x_{ij}^{\lambda}, x_{kl}^{\mu}\right] = 1 \text{ при } j \neq k, \ i \neq l.$$

Переходя к прямому пределу, получают группу $\mathrm{St}(R)$ и естественный гомоморфизм

$$\varphi : \mathrm{St}(R) \longrightarrow E(R),$$

при к-ром

$$\varphi(x_{ij}^{\lambda}) = e_{ij}^{\lambda}.$$

Ядро $\ker \varphi$ обозначается через $K_2(R)$ (группа Милнора). Оно совпадает с центром группы $\mathrm{St}(R)$. Таким образом, K_0, K_1, K_2 — функторы из категории колец в категорию абелевых групп. Каждый из функторов K_0 и K_1 может быть охарактеризован как функтор, сопоставляющий конечно порожденному проективному модулю абелеву группу, удовлетворяющий нек-рым свойствам и универсальный относительно этих свойств. Такая «универсальная» характеризация позволяет определить аналог функторов K_0 и K_1 на «достаточно хороших» категориях. В частности, для категории нётеровых R-модулей получаются весьма близкие к $K_i(R)$ функторы $G_i(R)$.

Примеры групп $K_i(R)$. Если R — тело, R^* — его мультипликативная группа, то $K_0(R)=\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, $K_1(R)=R^*/[R^*, R^*]$; $K_2(\mathbb{Z})$ — циклич. группа 2-го порядка. Если R — конечное поле, то $K_2(R)=0$.

Важным результатом в А. K-т. является точная последовательность Майера — Вьеториса для *декартова квадрата*. Именно, если диаграмма —

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h_2} & R_2 \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ R_1 & \xrightarrow[f_1]{} & R' \end{array}$$

декартов квадрат гомоморфизмов колец, в к-ром f_1 — эпиморфизм, то точна последовательность

$$K_1(R) \longrightarrow K_1(R_1) \oplus K_1(R_2) \longrightarrow K_1(R') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(R_1) \oplus K_0(R_2) \longrightarrow K_0(R');$$

причем, если f_2 также эпиморфизм, то последовательность дополняется членами

$$K_2(R) \longrightarrow K_2(R_1) \oplus K_2(R_2) \longrightarrow K_2(R') \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow \ldots$$

Если I — двусторонний идеал кольца R, то последовательность Майера — Вьеториса позволяет (см. [8]) определить относительные функторы $K_i(R, I)$, дающие точную последовательность

$$K_2(R, I) \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow K_2(R/I) \longrightarrow K_1(R, I) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_1(R/I) \longrightarrow K_0(R, I) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(R/I).$$

Достаточно полно исследован вопрос о поведении K-функторов при переходе от кольца R к его локализации по центральной мультипликативно замкнутой системе. В частности, при соответствующих условиях на кольцо R для функтора $G_0(R)$ получена точная последовательность

$$\bigcup_{s \in S} G_0(R/(s)) \longrightarrow G_0(R) \longrightarrow G_0(S^{-1}R) \longrightarrow 0.$$

Если кольцо R коммутативно, то группа $K_0(R)$ превращается в кольцо с единицей путем введения умножения, индуцируемого тензорным произведением модулей. Существует расщепляющийся эпиморфизм кольца $K_0(R)$ на кольцо $H(R)$ непрерывных целочисленных функций (кольцо $\mathbb{Z}$ рассматривается в дискретной топологии) на *спектре* кольца R. Ядро этого гомоморфизма обозначается $\tilde{K}_0(R)$. Известно, что $K_0(R)$ является нильрадикалом кольца $K_0(R)$, причем если R — нётерово и размерность его максимального спектра равна α, то $\tilde{K}_0(R)^{\alpha+1} = 0$. Если же эта размерность не превосходит 1, то группа $\tilde{K}_0(R)$ изоморфна *Пикара группе* Pic (K).

Для колец арифметич. типа существуют теоремы конечности для функторов $K_i(R)$ и $G_i(R)$. Именно, если A является кольцом целых чисел или кольцом многочленов над конечным полем, а R является R-порядком и одновременно R-решеткой в полупростой конечномерной алгебре над полем частных кольца A, то группы $K_i(R)$ и $G_i(R)$ конечно порождены ($i = 0, 1$).

Развитию K-т. способствовали исследования по проблеме конгруэнц-подгрупп: каждая ли подгруппа конечного индекса в арифметич. группе содержит некоторую конгруэнц-подгруппу? Этот вопрос тесно связан с проблемой вычисления группы $K_1(R, I)$ для идеалов I в R.

Из результатов о стабильном строении проективных модулей следует отметить теорему: если R — коммутативное нётерово кольцо, максимальный спектр к-рого имеет размерность d, а A — конечномерная R-алгебра, то любой конечно порожденный проективный A-модуль P такой, что

$$P_{\mathfrak{m}} \cong A^d_{\mathfrak{m}} \oplus Q$$

для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ кольца R изоморфен $A \oplus N$ (здесь $M_{\mathfrak{m}}$ — локализация модуля M по $\mathfrak{m}$). Другой важной теоремой о строении проективных модулей является теорема о сокращении: пусть кольца R, A и модуль P — такие же, как выше, Q — конечно порожденный проективный A-модуль и M, N — произвольные A-модули. Тогда из

$$Q \oplus P \oplus M \cong Q \oplus N$$

следует

$$P \oplus M \cong N.$$

С вопросами стабильного строения проективных модулей тесно связан *стабильный ранг* кольца R. Напр., если R — коммутативное кольцо стабильного ранга меньше d, то

$$K_1(R) \cong \mathrm{CL}(d+r, R)/E(d+1, R).$$

В связи с теорией индуцированных представлений групп изучались функторы K_i от групповых колец. Один из результатов этого направления: если G — конечная группа порядка n и C — семейство циклич. подгрупп группы G, то показатель подгруппы

$$\sum_{c \in C} \mathrm{Im}\,(K_i(RC) \longrightarrow K_i(RG))$$

в группе $K_i(RG)$ при $i = 0, 1, 2$ делит n.

О полиномиальных расширениях колец известно, что если R — регулярное кольцо, то

$$K_0(R[t]) \cong K_0(R[t, t^{-1}]) \cong K_0(R),$$
$$K_1(R[t]) \cong K_1(R).$$

Кроме того, для произвольного кольца R точна последовательность

$$0 \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_1(R[t, t^{-1}]) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow 0.$$

Одним из результатов о вычислении функтора $K_2(R)$ является теорема Мацумото: если R — поле, то группа $K_2(R)$ задается образующими $l(a)$ (взаимно однозначно сопоставленным всем ненулевым элементам a поля R) и соотношениями $l(a)\ l(1-a)=1$ при $a \neq 1$.

В 70-х гг. 20 в. появились многочисленные варианты определения функторов K_i при $i \geqslant 2$. Было доказано [9] совпадение этих теорий, дающих классич. функторы K_n при $n \leqslant 2$. В ряде случаев найдены эффективные средства вычисления высших K-групп. Начала развиваться унитарная K-теория (см. [9], т. 3), изучающая аналогичные вопросы для модулей, на к-рых определены квадратичные и билинейные формы.

Лит.: [1] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] Bass H., Topics in algebraic K-theory. Tata institute of Fundamental research, Bombay, 1966; [3] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [4] Swan R. G., Algebraic K-theory, B.—Heidelberg—N.Y., 1968; [5] Swan R. G., Evans E. G., K-theory finite groups and orders, B.—Heidelberg—N.Y., 1970; [6] Algebraic K-theory and its Geometric Applications, B.—Heidelberg—N.Y., 1969; [7] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86; [8] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [9] Algebraic K-theory, v. I—III, B.—Heidelberg—N.Y., 1973; [10] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969. *А. В. Михалев, А. И. Немытов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, основной задачей к-рого является изучение свойств целых чисел полей K *алгебраических чисел* конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Все целые числа поля K $\mathbb{Q}$ *расширения* K поля $\mathbb{Q}$ степени n — могут быть получены с помощью фундаментального базиса $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, если в линейной форме $x_1\omega_1+x_2\omega_2+\ldots+x_n\omega_n$ каждое x_i пробегает все целые рациональные числа. При этом такое представление для каждого целого числа из K единственно.

Переход от целых рациональных чисел к целым алгебраическим не сопровождается ожидаемыми аналогиями. Первое нарушение аналогии относится к *единицам*. В то время как поле рациональных чисел имеет только две единицы: $+1$ и -1, в общих полях алгебраич. чисел может быть даже бесконечно много единиц. Пусть, напр., имеется вещественное квадратичное поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $D>1$ — целое рациональное число, не равное точному квадрату. Его фундаментальный базис имеет вид $(1, \sqrt{D})$, $D \not\equiv 1 \pmod 4$. У двучленного *Пелля уравнения* $x^2-Dy^2=1$ бесконечно много целочленных решений (x, y). Любое из них порождает единицу $x+y\sqrt{D}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Именно,

$$(x+y\sqrt{D})(x-y\sqrt{D})=1,$$
и $1/(x+y\sqrt{D})=x-y\sqrt{D}$

тоже является целым числом поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Единицы этого поля образуют бесконечную мультипликативную группу (группу единиц Пелля). Возникает вопрос о том, как устроена эта группа.

Второе нарушение аналогии, при переходе от поля рациональных чисел к полю алгебраич. чисел, связано с теоремой об однозначном разложении целых рациональных n на простые множители:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}.$$

Для алгебраич. чисел это уже не так. Пусть, напр., имеется поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; в нем число 6 можно разложить двумя существенно различными способами: $6=2\cdot 3$, $6=(1+\sqrt{-5})\ (1-\sqrt{-5})$. При переходе к полям более высокой степени картина усложняется. Возникает во-

прос: что происходит с теоремой об однозначном разложении и имеет ли она вообще смысл в полях алгебраич. чисел.

Третье нарушение аналогий доставляют простые числа. При переходе к полям алгебраич. чисел они, вообще говоря, перестают быть простыми. Так, простое число 5 в поле гауссовых чисел $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ распадается на два: $5=(2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})$. Но в этом же поле число 7 остается простым. Возникает вопрос: существуют ли общие законы, управляющие поведением простых чисел при переходе к полям алгебраич. чисел более высокой степени. Другими словами, можно ли найти правила, к-рые давали бы однозначный ответ на вопрос — остается данное простое число простым при переходе к полю $K/\mathbb{Q}$ или распадается в нем, и если распадается, то на сколько множителей.

И наконец, последний (четвертый) вопрос касается общей структуры полей алгебраич. чисел. Поле $\mathbb{Q}$ является минимальным полем с нулевой характеристикой и не содержит собственных подполей. Любое другое поле алгебраич. чисел уже имеет подполя. Так, $\mathbb{Q}$ служит подполем любого поля алгебраич. чисел. Возникает вопрос: сколько подполей содержит данное поле $K/\mathbb{Q}$ - конечное или бесконечное — и как они устроены.

Эти четыре вопроса являются главными в А. т. ч., и ответы на них составляют ее содержание. Естественно начать рассмотрение с четвертого вопроса, так как ответ на него прольет свет и на первые три. Соответствующая задача была решена Э. Галуа (E. Galois) в 20-х гг. 19 в. (см. *Галуа теория*). Конечность числа подполей расширения $K/\mathbb{Q}$ степени n над $\mathbb{Q}$ следует из существования взаимно однозначного соответствия (основного соответствия Галуа) между всеми подполями поля K и всеми подгруппами его группы Галуа, порядок (число элементов) к-рой конечен (и не превосходит $n!$).

Строение группы единиц поля было выяснено П. Дирихле (P. Dirichlet). Основную идею можно проследить на примере группы единиц Пелля (см. выше). Любая степень такой единицы (как положительная, так и отрицательная) будет единицей. Существует основная единица $\eta=x_0+y_0\sqrt{D}$, а все остальные являются ее целыми степенями, т. е. единицы Пелля составляют бесконечную циклич. группу с одной образующей. Этот факт есть частный случай общей теоремы Дирихле о единицах поля алгебраич. чисел: если поле $K/\mathbb{Q}$ имеет степень $n=r_1+2r_2$, где r_1 — число вещественных, а r_2 число пар комплексно сопряженных полей для $K/\mathbb{Q}$, то бесконечная группа единиц поля $K/\mathbb{Q}$ имеет $r=r_1+r_2-1$ образующих единиц $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$, а все остальные являются произведениями их целочисленных степеней $\eta_1^{n_1}\ \eta_2^{n_2}\ \ldots\ \eta_r^{n_r}$. Таким образом, бесконечная группа единиц поля $K/\mathbb{Q}$ является произведением r бесконечных циклич. подгрупп. Если домножить ее на конечную циклич. подгруппу корней из единицы, к-рые могут быть в $K/\mathbb{Q}$, то будет получена самая общая картина строения группы единиц поля. Норма любой единицы поля, т. е. произведение этой единицы и всех ей сопряженных, равна единице поля $\mathbb{Q}$.

Проблема неоднозначного разложения целых чисел в алгебраич. полях была решена Э. Куммером (E. Kummer), к-рый, как и Э. Галуа, начал с частной задачи — попытки доказать великую теорему Ферма о невозможности решить в целых числах уравнение $x^p+y^p=z^p$ для любого простого $p>2$. Э. Куммер разложил левую часть по корням p-й степени из 1, и задача была сведена к целым числам поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Если бы для них существовало однозначное разложение на простые множители в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, то достаточно было бы показать, что не все

простые множители левой части имеют степень, кратную p. Вначале Э. Куммер так и считал, но П. Дирихле обратил его внимание на отсутствие однозначности. Именно для преодоления этой трудности Э. Куммер ввел идеальные числа, и это преобразило в дальнейшем все здание А. т. ч. Понятие идеального числа происходит из того, что если в поле k нет простых чисел, на к-рые однозначно распадалось бы любое целое число из k, то найдется другое поле K/k конечной степени над k, в к-ром существует необходимое количество чисел, играющих роль простых для поля k. Эти числа Э. Куммер назвал идеальными (так как они не принадлежат исходному полю k). С привлечением идеальных чисел теорема об однозначности разложения в поле k восстанавливается. При этом два числа поля, отличающиеся только единицей Дирихле (так наз. ассоциированные числа), имеют одни и те же идеальные множители. Понятие идеального числа относительно для другого поля k' строится поле K' k' другой степени над k', в к-ром содержатся идеальные числа поля k'.

Э. Куммер ввел также понятие класса идеальных чисел: два идеальных числа принадлежат одному классу, если их отношение лежит в первоначальном поле k. Он получил важный результат: число этих классов h конечно, и они образуют абелеву группу по умножению. Таким образом, любое идеальное число можно считать корнем h-й степени из нек-рого числа первоначального поля k. Число классов h явно выписывается через константы поля (регулятор, дискриминант, степень поля n).

В дальнейшем понятие идеального числа было заменено эквивалентным понятием *идеала*, к-рое удается описать средствами самого поля k, и уже в сер. 20 в. идеал уступил место более емкому понятию *дивизора*. Поэтому современная теория Куммера излагается на языке дивизоров. Но для полей алгебраич. чисел классич. понятие идеала совпадает с понятием дивизора. Далее всюду идет речь лишь о таких полях. Понятие идеала тесно связано с понятием неассоциированных чисел, что способствует пониманию глубоких связей теории Куммера и теории единиц Дирихле. Хотя Э. Куммеру и не удалось решить проблему Ферма, но его идеи вышли далеко за рамки этой задачи, и понятие идеала ныне является одним из главных для всей математики.

В связи с относительностью понятия простого идеального числа, или, в современной терминологии, простого идеала, третий вопрос о распадении простых чисел поля $\mathbb{Q}$ при переходе к полям алгебраич. чисел может быть поставлен в общем виде. Пусть дано поле k и его простой идеал $\mathfrak{p}$. Ставится вопрос о том, остается ли идеал простым при переходе от поля k к его расширению $K=k(\theta)$ или распадается в произведение простых идеалов поля K, и если распадается, то по какому закону. Этот вопрос приводит к *полей классов теории* — центральной части всей современной А. т. ч. Первое решение этого вопроса было дано Э. Куммером, показавшим, что если θ — корень неприводимого многочлена $f(x)$, то простой идеал $\mathfrak{p}$ распадается в $k(\theta)$ по тому же закону, что и $f(x)$ при переходе к полю вычетов (mod $\mathfrak{p}$). Другими словами, разложение $\mathfrak{p}$ в $k(\theta)$ определяется сравнением

$$f(x) \equiv f_1^{a_1}(x) f_2^{a_2}(x) \dots f_m^{a_m}(x) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Параллельное равенство наз. формулой (или разложением) Куммера:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{a_1}\mathfrak{P}_2^{a_2}\dots\mathfrak{P}_m^{a_m}, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{P}_i$ — простые идеалы поля $K=k(\theta)$.

Это равенство в принципе решает третью задачу А. т. ч., но оно локально в том смысле, что требует

проверки каждого простого идеала в отдельности. Задача же о разбиении всех простых идеалов на классы так, чтобы в одном классе закон разложения был один и тот же и чтобы, кроме того, можно было найти простые правила задания этих классов, решается теорией полей классов для расширения K/k с абелевой группой Галуа $G(K/k)$.

Предварительное понятие класса можно получить из равенства (1). Пусть n — степень поля K/k, f_i — относительная степень идеала $\mathfrak{p}_i$. Вычисление относительной нормы $N_{K/k}$ обеих частей (1) приводит к равенству

$$n = a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m, \tag{2}$$

где a_i, f_i — натуральные. При фиксированном n уравнение (2) имеет конечное число решений, так что все простые идеалы поля k можно разбить на конечное число классов и собрать в один класс те из них, разложению Куммера к-рых соответствует один и тот же набор пар (a_i, f_i) из решения (2). Интерес представляют лишь бесконечные классы, поэтому можно оставить в стороне те классы, где имеется $a_i \geqslant 2$. Число простых идеалов с таким свойством конечно, и все они являются делителями дискриминанта $\mathfrak{D}$ поля K/k.

Для упрощения задачи поле K/k считается нормальным. В таких полях выполняется условие

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_m.$$

Поэтому все $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}$ разбиваются на $d(n)$ классов, где $d(n)$ — функция числа делителей. Особый интерес представляет класс с условием $m = n$, где

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1;$$

в нем $\mathfrak{p}$ имеет максимальное число простых делителей поля K/k:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n. \tag{3}$$

Такие $\mathfrak{p}$ наз. вполне разложимыми, а их класс наз. главным классом поля k относительно K/k. В теории полей классов он является основным объектом изучения. Определение главного класса с помощью (3) требует доказательства того, что в поле k такие идеалы на самом деле существуют и что их бесконечно много. Поэтому основная задача теории полей классов состоит в том, чтобы определить главный класс средствами самого поля k, из к-рого бы следовала его бесконечность. Эта задача полностью решена для абелевых расширений K/k.

Для более подробного ознакомления с идеями теории полей классов необходимо общее понятие группы классов идеалов. Приведенное выше определение Куммера соответствует современному понятию абсолютной группы классов идеалов. Современные общие понятия группы классов принадлежат Г. Веберу (H. Weber) и Т. Такаги (T. Takagi) (см. [5]).

Г. Вебером введено понятие ведущего модуля группы классов. Пусть $\mathfrak{m}$ - целый идеал поля k, $L_{\mathfrak{m}}$ — подгруппа главных идеалов α поля k, заданных сравнением $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, $A_{\mathfrak{m}}$ — подгруппа всех идеалов поля k, взаимно простых с $\mathfrak{m}$. Любая подгруппа $H_{\mathfrak{m}}$ с условием $L_{\mathfrak{m}} \subseteq H_{\mathfrak{m}} \subseteq A_{\mathfrak{m}}$ может быть объявлена главной, таким образом и будет построена группа классов $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$. При $\mathfrak{m} = 1$ и $H_1 = L_1$ получается определение Куммера. В общем случае $H_{\mathfrak{m}}$ состоит из прогрессий $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$, вычеты к-рых образуют подгруппу всей мультипликативной группы $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$. Порядок $h_{\mathfrak{m}}$ этой общей группы классов лежит в пределах $1 \leqslant h_{\mathfrak{m}} \leqslant h \cdot \varphi(\mathfrak{m})$, где h — порядок абсолютной группы Куммера, φ — функция Эйлера. Для разных модулей $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ группы классов могут быть эквивалентными, если $H_{\mathfrak{m}_1}$ и $H_{\mathfrak{m}_2}$ состоят фактически из одних и тех же прогрессий по $(\mathrm{mod}\ f)$, где $f = (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$. Если ус-

ловиться не различать эквивалентные группы классов, то будет получено понятие группы классов в смысле Вебера с ведущим модулем f, к-рый равен наибольшему общему делителю всех эквивалентных модулей. Полем классов в смысле Вебера наз. поле K/k, в к-ром простые идеалы его главного класса H_f и только они, вполне разложимы. Их бесконечность следует из теоремы Дирихле о простых идеалах в прогрессиях, к-рая справедлива для любого поля k. В нек-рых частных случаях Г. Вебер доказал изоморфность группы Галуа поля классов $G(K/k)$ и группы классов A_f/H_f поля k.

К Д. Гильберту (D. Hilbert) восходит совершенно новая точка зрения на теорию полей классов, к-рая сохранилась до настоящего времени. Он понял, что между всеми относительно абелевыми расширениями поля k и всеми полями классов для этого поля должно существовать взаимно однозначное соответствие. Это соответствие выглядит так. Если для нек-рого ведущего модуля f построить группу классов Вебера, то найдется только одно нормальное расширение K/k, в к-ром простые идеалы главного класса Вебера, и только они, будут целиком распадаться, причем группа Галуа поля K/k изоморфна группе классов Вебера, а дискриминант D поля K/k состоит из тех же простых идеалов, что и ведущий модуль f. Верно и обратное: если дано нек-рое абелево расширение K/k с группой Галуа $G(K/k)$, то существует правило (сформулированное впоследствии Т. Такаги), по к-рому можно однозначно построить главный класс H_f так, что группа классов A_f/H_f изоморфна группе Галуа $G(K/k)$, и только простые идеалы главного класса H_f вполне разложимы в K, а ведущий модуль f имеет те же простые делители, что и дискриминант D поля K/k. Эта двойственность полей классов и абелевых расширений была высказана Д. Гильбертом в 1900 в качестве гипотезы (доказательства были даны им лишь для частных случаев). В общем виде она доказана Т. Такаги.

Следующий важный этап в развитии теории полей классов связан с именем Э. Артина (E. Artin), выявившего особую роль канонич. изоморфизма между группой Галуа и группой классов идеалов и показавшего, что эту роль играет *Фробениуса автоморфизм* $\sigma_\mathfrak{p}$ абелевого расширения K/k, к-рый задается сравнением

$$a^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma_\mathfrak{p} a \pmod{\mathfrak{p}},$$

где $N\mathfrak{p}$ — абсолютная норма идеала $\mathfrak{p}$, a пробегает все числа поля K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля k. Автоморфизм $\sigma_\mathfrak{p}$ (имеющий теперь обозначение $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ зависит только от класса идеалов, к-рому принадлежит $\mathfrak{p}$, и обладает мультипликативным свойством.

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_2}\right) = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right),$$

причем символ в правой части понимается как автоморфизм класса, к-рому принадлежит $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. На основании этого Э. Артин ввел символ $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ на всей группе A_f идеалов $\mathfrak{a}$ поля k, взаимно простых с ведущим модулем f. Он наз. символом Артина и осуществляет изоморфизм группы классов A_f/H_f и группы Галуа $G(K/k)$, явный вид к-рого выражается законом взаимности Артина

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = 1$$

только в том случае, если $\mathfrak{a} \in H_f$ (взаимность понимается пока в групповом смысле, как соответствие между $G(K/k)$ и A_f/H_f). Отсюда можно получить классич. форму *взаимности закона* на языке символа Кум-

мера степенного вычета (рассмотрев поле $K=k(\sqrt[n]{a})$. Из этой формы, в свою очередь, можно получить закон взаимности на языке символа Гильберта. Во всех трех видах закон взаимности рассматривается как изоморфизм групп, а символы Артина, Куммера и Гильберта – как групповые элементы, осуществляющие этот изоморфизм. Но каждый из них имеет и численное значение, равное нек-рому корню n-й степени из 1. Поэтому закон взаимности может быть сформулирован в следующей форме. Если известно значение символа $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n$, то требуется выяснить, каково значение взаимного к нему символа $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n$, т. е. выяснить явный вид функции от (α, β), определяющий произведение $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$. Именно в такой форме этот закон и появился впервые у К. Гаусса (см. *Гаусса закон взаимности*) для квадратичного поля и у Э. Куммера для кругового поля простой степени. В дальнейшем К. Якоби (C. Jacobi), Ф. Г. М. Эйзенштейн (F. G. M. Eisenstein), Д. Гильберт, Х. Хассе (H. Hasse) и др. продолжали исследование закона взаимности в таком виде, но ими были получены лишь частные результаты. В общем виде эта проблема была решена в 1948 И. Р. Шафаревичем [6] на основе идеи, состоящей в выявлении связи между арифметич. определением символа $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ с аналитич. определением абелевого дифференциала $\alpha\cdot d\beta$ на римановой поверхности, И. Р. Шафаревичем была создана конструкция символа $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, к-рая в точности соответствует определению вычета абелева дифференциала $\alpha\cdot d\beta$ в $\mathfrak{p}$-адическом поле. Для этого он ввел E-функции, наз. также функциями Шафаревича, на языке к-рых и получил явный вид закона взаимности в общем случае.

В конце 20-х гг. 20 в. Х. Хассе ввел в теорию полей классов локальный принцип и передоказал многие теоремы для случая абелевого расширения K_p локального поля k_p. Первоначально этот принцип играл второстепенную роль (он получался в качестве следствия глобальной теории). Но в конце 30-х гг. К. Шевалле (C. Chevalley) показал необычайную важность локальной точки зрения для всего здания теории полей классов. Он ввел понятие группы иделей и на ее языке изложил общую теорию полей классов с локальной точки зрения. После этого в теории полей классов утвердился локально глобальный принцип. В дальнейшем он развивался и дополнялся (см. [5]), и в результате теория полей классов для абелевых расширений приняла стройный и завершенный вид. Встал вопрос о создании неабелевой теории полей классов для нормальных расширений с неабелевой группой Галуа.

Все вышеизложенное относилось к качественным сторонам А. т. ч. В вопросах количественных оценок и методов их получения А. т. ч. тесно переплетается с аналитич. теорией чисел. Она также базируется в значительной мере на свойствах ζ-функций и L-рядов алгебраич. полей.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963; [3] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [4] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [6] Шафаревич И. Р., «Матем. сб.», 1950, т. 26, в. 1, с. 113—46; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] Artin E., Tate J., Class field theory, N.Y.—[a.o.], 1967; [9] Weil A., Basic number theory, B.,—[a.o.], 1967; [10] Lang S., Algebraic numbers, Reading [Mass.], 1964; [11] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. И. Виноградов.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ — область математики, возникшая для изучения таких свойств геометрич. фигур (в широком смысле — любых объектов, где можно говорить о непрерывности) и их отображений

друг в друга, к-рые не меняются при непрерывных деформациях (гомотопиях). В принципе, целью А. т. является полное перечисление таких свойств. Само назв. «А. т.» происходит от определяющей роли алгебраич. понятий и методов в решении задач этой области. Наиболее фундаментальными классами объектов, свойства к-рых изучаются в А. т., являются: *комплексы* (многогранники, полиэдры) — симплициальные, клеточные и др.; *многообразия* — замкнутые, открытые, с краем (границей), подразделяющиеся в свою очередь на гладкие (дифференцируемые), аналитические, комплексно аналитические, кусочно линейные и, наконец, чисто непрерывные (топологические); косые произведения (*расслоения*) и их сечения. Основные типы отображений, рассматриваемые в А. т., - это произвольные непрерывные, кусочно линейные, гладкие отображения или их важнейшие подклассы: *гомеоморфизмы*, в частности непрерывные кусочно линейные или гладкие (*диффеоморфизмы*); вложения одного объекта в другой, а также погружение (локальное вложение, иммерсия).

Важнейшим понятием А. т. является понятие *деформации*. Деформации подвергается отображение какого-то класса одного объекта в другой. Основными типами деформаций являются: гомотопия, или произвольная непрерывная (гладкая, кусочно линейная) деформация, непрерывного отображения; изотопия (непрерывная, гладкая, кусочно линейная) — деформация гомеоморфизма, вложения или погружения, где в процессе деформации в каждый момент времени отображение остается гомеоморфизмом, вложением или погружением.

Главные внутренние проблемы А. т. — это проблема классификации многообразий относительно гомеоморфизмов (непрерывных, гладких, кусочно линейных), классификация вложений (или погружений) относительно изотопий (регулярных гомотопий), классификация общих непрерывных отображений относительно гомотопий. Важную промежуточную роль в решении этих задач играет проблема классификации комплексов или многообразий относительно так наз. гомотопич. эквивалентности или *гомотопического типа*.

Большую роль в развитии А. т. играли следующие задачи, носящие несколько более частный характер.

1) Обычно проблему вложения понимают не в самой общей форме, а лишь для вложений в евклидово пространство. Особо важным частным случаем здесь является *узлов теория* (и зацеплений) в трехмерном пространстве, к-рая послужила одним из главных истоков А. т. К этому случаю примыкает также *кос теория*.

2) Заметную роль в истории А. т. играла теория гомологич. инвариантов расположения различных множеств в евклидовом пространстве и законов двойственности (см. *Двойственность* в алгебраич. топологии), связывающих гомологии множества и дополнения к нему.

3) Ряд фундаментальных результатов был получен о вычислении алгебраич. числа неподвижных точек отображения многообразия в себя; особенно много глубоких фактов было здесь открыто для неподвижных точек компактных гладких групп преобразований — даже циклич. групп конечного порядка.

4) Большую технич. роль в развитии А. т. сыграли методы, развитые для решения так наз. задачи о кобордизме: найдется ли многообразие с краем (*кобордизм*), границей к-рого служит заданное замкнутое многообразие. Вопросы такого рода возникли впервые в связи с вычислением *гомотопических групп* сфер. Важны случаи, когда задача о кобордизме решается до конца на языке *характеристических классов*.

5) Накоплено много фактов о гомологич. инвариантах особенностей векторных, реперных, тензорных полей и особенностей гладких отображений многообра-

зий друг в друга и, в частности, в евклидово пространство. Решение этой задачи приводит, в частности, к характеристич. классам. Особо важным случаем являются стационарные точки гладких функций на многообразиях или различных функционалов на пространствах путей (экстремалей) — их связь с *гомологий теорией* играет большую роль в выяснении геометрич. строения многообразий, оценке снизу числа экстремалей.

6) Исследование алгебро-топологич. свойств важнейших специальных пространств — *Ли групп* — тесно связано с их алгебраич. структурой, их представлениями, вариационным исчислением на группах Ли. Результаты о топологич. строении групп Ли лежат в основе многих методов и фактов А. т., относящихся к любым многообразиям. К группам Ли по методам примыкает А. т. однородных многообразий.

7) Особую роль в А. т. играют специальные инварианты, связанные с различными алгебраич. структурами над *фундаментальной группой*. Простейшие инварианты такого типа появились в теории узлов и трехмерных многообразий; в дальнейшем их алгебраич. теория существенно развилась и выделилась в алгебраич. дисциплину — стабильную алгебру, или *алгебраическую K-теорию*.

8) Анализ геометрич. строения громадного числа примеров простейших наиболее часто встречающихся типов многообразий (напр., групп Ли, однородных пространств, многообразий линейных элементов, многообразий с дискретными группами движений), а также фундаментальные основы римановой геометрии приводят к понятию косого произведения (расслоения), составленного из сомножителей — базы и слоя, всего пространства произведения вместе с проекцией на базу, структурной группы преобразований слоя. В связи с этим к числу центральных проблем А. т. относятся также проблема классификации косых произведений и проблема классификации их сечений относительно гомотопии. Особо важными являются *главные расслоения* и *векторные расслоения*.

Метод, с помощью к-рого решаются все основные вопросы А. т., состоит в построении алгебраич. инвариантов, эффективно вычислимых в конкретных примерах и принимающих какую-то дискретную совокупность значений; значение инварианта не должно меняться при деформациях в соответствующем классе отображений, для изучения к-рого этот инвариант построен. Большое количество необходимых инвариантов, богатство алгебраич. связей между ними и трудность их вычисления определили, в конечном счете, современное лицо А. т.

Вычисление алгебро-топологич. инвариантов простейших часто встречающихся многообразий не всегда является легким делом. Напр., вычисление гомологич. инвариантов групп Ли и многих однородных пространств потребовало больших усилий и использования сложных методов. Еще труднее вычислять гомотопич. группы. Ряд наиболее важных гомотопич. групп для групп Ли был неожиданным образом вычислен с помощью вариационной теории геодезических; знание таблицы этих гомотопич. групп для групп Ли позволило классифицировать векторные расслоения.

Большинство алгебро-топологич. инвариантов представляет собой так наз. *функтор* на категории топологич. пространств изучаемого типа. Это означает, грубо говоря, что значения инварианта естественно преобразуются при отображениях пространств друг в друга: напр., фундаментальные группы любых пространств или их группы (кольца) гомологий (когомологий) испытывают гомоморфизмы при непрерывных отображениях; характеристич. классы (отмеченные элементы в гомологиях) переходят друг в друга при гомеоморфизмах многообразий; результат применения когомологич.

операции к элементу гомологий (когомологий) переходит, после непрерывного отображения пространства, в результат применения этой операции к образу этого элемента и т. д.

Одно из главных свойств, лежащее в основе изучения и применений почти всех алгебро-топологич. инвариантов, заключается в том, что их эффективное построение, как правило, связано с существенно дополнительной геометрич. структурой: построение всех основных инвариантов гомеоморфизма для комплексов требует разбиения на симплексы или клетки, в то время как результат построения должен быть инвариантен относительно всех непрерывных гомеоморфизмов и даже гомотопич. эквивалентностей — напр., фундаментальная группа, *эйлерова характеристика*, *гомологии группа* (группа Бетти), *когомологий кольцо*, *когомологические операции*. Точно так же построение всех основных инвариантов гомеоморфизма для гладких многообразий требует либо их предварительной триангуляции и тем самым сведения к комплексам, либо существенного использования средств анализа; напр., построение кольца когомологий через дифференциальные формы (кососимметрич. тензоры) и дифференциальные операции над ними, либо построение характеристич. классов через особенности векторных, реперных или тензорных полей. Более того, иногда необходимо использовать средства римановой геометрии — напр., существенную роль играет определение характеристич. классов многообразия или косого произведения через риманову кривизну, хотя результат инвариантен относительно всех непрерывных гомеоморфизмов. В связи с этим в истории топологии появление основных эффективно вычислимых инвариантов было связано с трудным вопросом о том, как доказать инвариантность этой величины. Это — еще один тип проблем, существовавших в А. т. Напр., рациональные характеристич. классы (или интегралы от классов по циклам) оказались топологически инвариантными, а гомотопически неинвариантными. Полные целочисленные характеристич. классы оказались неинвариантными относительно непрерывных и даже кусочно линейных гомеоморфизмов.

Напротив, если инвариант строится так, что он с самого начала — по определению — инвариантен относительно непрерывных гомеоморфизмов (или более общего класса преобразований — гомотопич. эквивалентностей), то этот инвариант, как правило, трудно вычислять. Важнейшим таким инвариантом являются гомотопич. группы или классы гомотопных отображений сферы в изучаемое пространство. Даже в ряде простейших примеров вычисление гомотопич. групп приводит к большим трудностям. Так, гомотопич. группы самих сфер неизвестны полностью, несмотря на большое количество методов, к-рые были найдены для их вычисления в процессе развития А. т.

В основе методов классификации гомотопич. классов отображений лежит теория гомологий в соединении с теорией косых произведений, где возникает аппарат спектральных последовательностей, а также когомологич. операции и их обобщения. Алгебраич. дисциплина, возникшая на базе сложных вычислительных средств А. т., связанных с теорией гомологий, наз. *гомологической алгеброй*.

Все основные первичные построения теории гомологий для комплексов и гладких многообразий через триангуляцию или дифференциальные формы носят эффективный комбинаторно-алгебраич. или аналитич. характер. Вместе с тем в процессе развития А. т. было замечено, что теория гомологий полностью определяется небольшим набором своих формальных свойств (аксиом), к-рые и лежат в основе всех ее вычислительных средств:

1) Гомотопическая инвариантность групп гомологий.

2) При непрерывных отображениях пространств их группы гомологий отображаются друг в друга гомоморфно, причем суперпозиции отображений соответствует суперпозиция этих гомоморфизмов (функториальность).

3) Постулируется определенная форма связи между когомологиями комплекса, подкомплекса и факторкомплекса (аксиома точности).

4) Так наз. аксиома вырезания.

5) Нормировка: надо знать группы гомологий лишь для точки и знать,что они равны нулю в ненулевых размерностях.

Позднее было замечено, что объекты совершенно различной геометрич. природы могут обладать всеми этими свойствами, кроме последнего (нет нормировки). Такие объекты были названы обобщенными, или экстраординарными теориями гомологий; они использованы для усовершенствования вычислительных методов А. т. Важнейшим примером является *K-теория*, построенная из линейных (векторных) косых произведений над изучаемым пространством вместо его циклов или дифференциальных форм, из к-рых строились обычные группы гомологий. Другой важный пример теория кобордизмов (бордизмов), где вместо любых циклов берутся только отображения замкнутых многообразий в изучаемое пространство, а вместо любых пленок - только отображения многообразий с краем какого-то класса.

Соединение методов А. т. с небольшим числом непосредственно геометрич. фактов о строении многообразий и их групп гомеоморфизмов привело, в конечном счете, к более или менее полному с современной точки зрения решению задачи о классификации многообразий относительно всех видов гомеоморфизмов (гладких, кусочно линейных, непрерывных), а также к решению основных задач о классификации вложений и погружений. Исключение представляют, как ни странно, задачи, связанные с трехмерными и четырехмерными многообразиями, где основные проблемы не решены (1977).

Ввиду завершенности ряда основных внутренних проблем собственно А. т., ее современные усилия постепенно переключаются на применение сложившихся идей к различным задачам других областей.

Лит.: [1] Атья М. Ф., Лекции по *K*-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [3] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [4] его же, Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [5] его же, Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [6] его же, «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [7] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [8] Хусыцзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [9] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [10] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [11] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., 1961; [12] Чжень Шэншень, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [13] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [14] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [15] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд.. М., 1976; [16] его же, Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [17] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [18] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969; [19] Новиков С. П. [и др.], «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, вып. 5; [20] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.

С. П. Новиков.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ, алгебраическая особая точка, изолированная точка ветвления a конечного порядка аналитич. функции $f(z)$, обладающая тем свойством, что для любого элемента аналитич. продолжения этой функции, регулярного в области, имеющей точку a границ-

ной точкой, существует предел $\lim_{z\to a} f(z)$. Точнее, точка a плоскости комплексного переменного z, являющаяся особой для полной *аналитической функции* $f(z)$ при продолжении нек-рого правильного элемента e_0 этой функции с центром z_0 вдоль путей, проходящих через a, наз. а л г е б р а и ч е с к о й т о ч к о й в е т в л е н и я, если выполняются следующие условия. 1) Существует такое положительное число ρ, что элемент e_0 может быть продолжен вдоль любой непрерывной кривой, лежащей в кольце $D=\{z;\ 0<|z-a|<\rho\}$. 2) Существует такое натуральное $k>1$, что если z_1 — любая точка кольца D, то аналитич. продолжение элемента e_0 в кольце D дает в точности k различных элементов функции $f(z)$ с центром z_1; если e_1 — какой-либо элемент с центром z_1, то все остальные $k-1$ элементов с центром z_1 получаются аналитич. продолжением по замкнутым путям, охватывающим точку a. 3) Значения всех элементов, получаемых из e_0 продолжением в D в точках z кольца D, стремятся к определенному, конечному или бесконечному, пределу, когда z стремится к a, оставаясь в D.

Число $k-1$ наз. п о р я д к о м А. т. в. Все ветви функции $f(z)$, получаемые аналитич. продолжением элемента e_0 в кольце D, могут быть представлены в проколотой окрестности точки a при помощи обобщенного ряда Лорана (р я д а П ю и з ё):

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k},\quad m\geqslant 0.$$

Бесконечно удаленная точка $a=\infty$ наз. А. т. в. для функции $f(z)$, если точка $b=0$ является А. т. в. функции $g(w)=f(1/w)$.

Может существовать несколько (и даже бесконечно много) различных А. т. в. и правильных точек полной аналитич. функции с одним и тем же аффиксом a.

Лит.: [1] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 3, гл. 4.

Е. Д. Соломенцев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$F(y, x_1, \ldots, x_n)=0, \qquad (1)$$

где F — неприводимый многочлен от y, $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из нек-рого поля K, наз. п о л е м к о н с т а н т. А. ф., заданная над этим полем, наз. А. ф. над полем K. Многочлен $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ часто записывается по степеням переменного y, так что уравнение (1) приобретает вид

$$P_k(x_1, \ldots, x_n)\,y^k+P_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)\,y^{k-1}+\ldots+$$
$$+P_0(x_1, \ldots, x_n)=0,$$

где $P_k(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_0(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, причем $P_k(x_1, \ldots, x_n)\not\equiv 0$. Число k — степень многочлена F относительно y, наз. степенью А. ф. В случае $k=1$ А. ф. может быть представлена в виде отношения

$$y=-\frac{P_0(x_1, \ldots, x_n)}{P_1(x_1, \ldots, x_n)}$$

многочленов и наз. рациональной функцией от $x_1, \ldots, x_n$. При $k=2, 3, 4$ А. ф. может быть выражена через квадратные и кубич. радикалы от рациональных функций переменных $x_1, \ldots, x_n$; при $k>4$ это, вообще говоря, невозможно.

Исторически сложилось три подхода к теории А. ф.: теоретико-функциональный, возникновение к-рого связано в первую очередь с работами Н. Абеля (N. Abel), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) и Б. Римана (B. Riemann), арифметико-алгебраический, восходящий к Р. Дедекинду (R. Dedekind), Г. Веберу (H. Weber) и К. Гензелю (K. Hensel) и алгебро-геометрический, бе-

ружий свое начало от работ А. Клебша (A. Clebsh), М. Нётера (M. Noether) и др. (см. *Алгебраическая геометрия*). Первое направление в теории А. ф. одного переменного связано с изучением А. ф. над полем комплексных чисел и рассмотрением их как мероморфных функций на римановых поверхностях и комплексных многообразиях; важнейшие применяемые здесь методы — геометрич. и топологич. методы теории аналитич. функций. Арифметико-алгебраич. подход связан с изучением А. ф. над произвольными полями. Применяемые методы — чисто алгебраические. Особенно большое значение имеют теории нормирований и расширений полей. При алгебро-геометрич. подходе А. ф. рассматриваются как *рациональные функции* на алгебраич. многообразии, а их изучение ведется методами алгебраич. геометрии. Первоначально эти подходы различались не только по методам и по способу изложения, но и по терминологии. На современном этапе такое разделение направлений представляется в значительной мере условным, ибо в функциональном направлении широко используются алгебраич. методы, а многие результаты, полученные в первом направлении с помощью теоретико-функциональных и топологич. методов, успешно переносятся на случай более общих полей при помощи алгебраич. аналогов функциональных и топологич. методов.

Алгебраические функции одного переменного. Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел А. ф. одного переменного $y=f(x)$ [в упрощенной записи — $y(x)$] является k-значной аналитич. функцией. Если обозначить через $D(x)$ дискриминант многочлена

$$F(x,\ y)=P_k(x)\,y^k+\ldots+P_1(x)\,y+P_0(x), \qquad (2)$$
$$P_k(x)\not\equiv 0,$$

(т. е. многочлена, для к-рого $F(x,\ f(x))=0$), получающийся исключением y из уравнений

$$F(x,\ y)=0,\quad \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=0,$$

и составить уравнение

$$P_k(x)\,D(x)=0,$$

то корни $x_1,\ \ldots,\ x_m$ этого последнего уравнения наз. критическими значениями А. ф. $y=f(x)$. Дополнительное множество $G=\mathbb{C}\setminus\{x_1,\ \ldots,\ x_m\}$ наз. некритическим множеством. Для любой точки $x_0\in G$ уравнение (2) имеет k различных корней $y_0^1,\ \ldots,\ y_0^k$, причем выполняются условия

$$\frac{\partial F(x_0,\ y_0^j)}{\partial y}\neq 0,\quad j=1,\ \ldots,\ k.$$

По теореме о неявных функциях, в окрестности точки x_0 существует k однозначных аналитич. функций $f_0^1(x)$, $\ldots$, $f_0^k(x)$, удовлетворяющих условиям

$$f_0^j(x_0)=y_0^j,\ F(x,\ f_0^j(x))\equiv 0$$

и разлагающихся в сходящиеся ряды

$$f_0^j(x)=y_0^j+\alpha_1^j(x-x_0)+\alpha_2^j(x-x_0)^2+\ldots \qquad (3)$$

Таким образом, для каждой точки $x_0\in G$ строится k элементов аналитич. функций, наз. функциональными элементами с центром в точке x_0. Для любых двух точек $x_1,\ x_2\in G$ любые элементы $f_1^j(x)$ и $f_2^j(x)$ с центрами, соответственно, x_1 и x_2, получаются друг из друга аналитич. продолжением вдоль нек-рой кривой, лежащей в G; в частности, таким способом связаны и любые два элемента с одним центром. Если x_0 — критич. точка А. ф., то возможны два случая: 1) x_0 — корень дискриминанта, т. е. $D(x_0)=0$, но $P_k(x_0)\neq 0$; 2) $P_k(x_0)=0$.

Случай 1. Пусть K_0 — малый круг с центром в x_0, не содержащий других критич. точек, а $f_1'(x), \ldots, f_k'(x)$ — система регулярных элементов с центром в $x' \in K_0$, $x' \neq x_0$. Эти функции остаются ограниченными при $x \to x_0$. Пусть, далее, D — окружность с центром x_0, проходящая через x'; она целиком лежит внутри K_0. Аналитич. продолжение нек-рого элемента, напр., $f_1'(x)$, вдоль окружности D (скажем, обходя x_0 по часовой стрелке) приводит к элементу $f'(x)$, также принадлежащему системе элементов с центром x'. Эта система состоит из k элементов, и нек-рое (минимальное) конечное число $a_1 \leqslant k$ таких обходов приводит к исходному элементу $f_1'(x)$. Получается подсистема $f_1'(x)$, $f_2'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)$ элементов с центром x'; каждый из этих элементов может быть получен аналитическим продолжением другого путем обходов вокруг точки x_0; такая подсистема наз. цикл ом. Вся система $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ разбивается на нек-рое число непересекающихся циклов

$$\{f_1'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)\}, \{f_{a_1+1}'(x), \ldots, f_{a_1+a_2}'(x)\}, \ldots,$$

$$\{f_{a_1+\ldots+a_{s-1}+1}'(x), \ldots, f_{a_1+\ldots+a_s}'(x)\},$$

$a_1+a_2+\ldots+a_{s-1}+a_s=k$. Элемент $f_1'(x)$ не является (в случае $a_1>1$) однозначной функцией от x в круге K_0, но будет однозначной аналитич. функцией от параметра $\tau=\sqrt[a_1]{x-x_0}$ в окрестности точки $\tau=0$. В нек-рой окрестности этой точки элементы $f_1'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)$ первого цикла представимы в виде сходящихся рядов

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 (x-x_0)^{i/a_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{a_1}'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} (x-x_0)^{i/a_1}; \end{aligned} \tag{4}$$

аналогичные разложения имеют место для элементов других циклов. Такие разложения элементов по дробным степеням разности $x-x_0$, где x_0 — критич. точка, наз. рядами Пюизё. Преобразованием $\tau \to t\tau$, $t=e^{2\pi i/a}$, соответствующим однократному обходу вокруг x_0, ряды Пюизё элементов одного цикла переводятся друг в друга в циклич. порядке, т. е. происходит циклич. перестановка рядов и соответствующих элементов. Обходам вокруг критич. точки соответствуют перестановки элементов с центром в этой точке; эти перестановки состоят из циклов порядков $a_1, \ldots, a_s$, $\sum a_i = k$. Определяемые таким способом подстановки составляют группу монодромии А. ф. Если хотя бы одно из a_i больше 1, критич. точка x_0 наз. алгебраической точкой ветвления А. ф.; числа a_i (иногда a_i-1) наз. индексами (или порядками) ветвления А. ф.

Случай 2. Заменой функции y на $P_k(x)y$ сводится к 1); получаются разложения, аналогичные разложениям (4), к-рые могут содержать конечное число членов с отрицательными показателями:

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i \tau^i = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i (x-x_0)^{i/a}. \tag{5}$$

При $p>0$ точка x_0 является полюсом порядка p А. ф. Обычно А. ф. рассматриваются на сфере Римана S, т. е. на комплексной плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой $x=\infty$. Введение переменной $\tau=1/x$ сводит этот случай к предыдущему; в окрестности точки $\tau=0$ ($x=\infty$) имеет место разложение

$$y(x) = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j \tau^{j/a} = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j x^{-j/a}. \tag{6}$$

При $r>0$ точка $x=\infty$ является полюсом порядка r.

Параметр разложения в рядах (3), (4), (5), (6) наз. локальной униформизующей для А. ф. Если x_0 некритич. точка А. ф., таким параметром может быть $\tau = x - x_0$; если же x_0 — критич. точка, за параметр может быть принят корень $\sqrt[a]{x - x_0}$, где a — натуральное число. Совокупность всех описанных выше элементов А. ф. образует полную А. ф. в смысле Вейерштрасса. А. ф. не имеют других особенностей, кроме, быть может, алгебраич. точек ветвления и полюсов. Верно и обратное: функция $y = f(x)$, аналитическая и не более чем s-значная во всех точках сферы Римана, за исключением конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$ и $x = \infty$, а в этих точках имеющая лишь полюсы или алгебраич. точки ветвления, есть А. ф. степени $k \leqslant s$.

Риманова поверхность полной А. ф. компактна и является k-листным накрытием сферы Римана, точками разветвления к-рого являются, быть может, критич. точки и точка $x = \infty$. А. ф. представляют собой единственный класс функций, риманова поверхность к-рых компактна. Род римановой поверхности А. ф. играет важную роль; он наз. родом А. ф. Он вычисляется по *Римана — Гурвица формуле*. Род рациональной функции равен 0; ее риманова поверхность есть сфера Римана. Риманова поверхность эллиптич. функций, удовлетворяющих уравнениям 3-й и 4-й степеней, есть тор; род этих функций равен 1.

Универсальная накрывающая римановой поверхности А. ф. является односвязным двумерным многообразием, т. е. имеет тривиальную фундаментальную группу и конформно эквивалентна либо сфере Римана, либо комплексной плоскости, либо внутренности единичного круга. В первом случае А. ф. является рациональной, во втором — эллиптич. функцией; третий случай является общим.

С теорией римановых поверхностей А. ф. тесно связана проблема *униформизации* А. ф. Функция $y = f(x)$ может быть униформизована, если y и x представимы как однозначные аналитич. функции

$$y = y(t), \quad x = x(t)$$

параметра t, тождественно удовлетворяющие уравнению (2). Локально проблема униформизации решается при помощи локальной униформизующей; однако интерес представляет ее решение «в целом». При $k = 1$, т. е. когда $y(x)$ есть рациональная функция от x, за этот параметр может быть принято переменное $x - x_0$; при $k = 2$ униформизация достигается посредством рациональных или тригонометрич. функций. Напр., если $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y^2 - x^2 = 1,$$

то можно положить

$$y = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad x = \frac{2t}{t^2-1} \quad \text{или} \quad y = \sec t, \; x = \operatorname{tg} t.$$

При $k = 3$, 4, в случае А. ф. рода 1, униформизация достигается посредством *эллиптических функций*. Наконец, при $k > 4$, в случае А. ф. рода > 1, униформизация осуществляется при помощи *автоморфных функций*.

Алгебраические функции многих переменных. Если f — А. ф. от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то множество всех рациональных функций $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ образует поле K_f, совпадающее с полем рациональных функций на алгебраич. гиперповерхности в пространстве $(n+1)$ измерений, задаваемой уравнением $F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Если поле констант k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а $n = 1$, то поле K_f совпадает с полем мероморфных функций на римановой поверхности А. ф. f. Поле K_f является расширением конечного типа поля констант k степени трансцендентности n (см. *Расширение* поля). В частности, любые $n+1$ элементов этого поля связаны алгебраич. уравнением и тем самым каждый из них определяет А.ф. от остальных элементов. Любое расширение

K конечного типа поля k степени трансцендентности n наз. полем алгебраических функций от n переменных (иногда функциональным полем). Каждое такое поле содержит чисто трансцендентное расширение $k(x_1, \ldots, x_n)$ поля k (называемое полем рациональных функций от n переменных). Любой элемент $y \in K$ удовлетворяет нек-рому алгебраич. уравнению $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)=0$ и может рассматриваться как А. ф. от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Каждое поле K А. ф. от n переменных изоморфно полю рациональных функций на нек-ром *алгебраическом многообразии* размерности n, называемом моделью поля K. Если поле констант k является алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то каждое поле А. ф. имеет неособую проективную модель (см. *Разрешение особенностей*). Пусть S множество всех нетривиальных *нормирований* поля А. ф. K, неотрицательных на поле констант. Снабженное естественной топологией, оно наз. абстрактной римановой поверхностью поля K [1]. В случае полей А. ф. от одной переменной риманова поверхность совпадает с множеством неособой проективной модели, к-рая в этом случае определена однозначно с точностью до изоморфизма. Многие понятия и результаты алгебраич. геометрии модели поля K можно переформулировать на языке теории нормирований поля (см. [1], [6]). Особенно близкая аналогия существует для полей А. ф. одного переменного, теория к-рых фактически совпадает с теорией алгебраич. кривых.

Каждое поле А. ф. от одного переменного является полем частных дедекиндова кольца, благодаря этому многие результаты и понятия теории делимости в полях алгебраич. чисел переносятся на случай функциональных полей [12]. Многие задачи и построения в теории алгебраич. чисел служат мотивировкой для аналогичных задач и построений в полях А. ф., и наоборот. Так, напр., перенос разложения Пюизё в теорию алгебраич. чисел привел к созданию К. Гензелем p-адического метода в теории чисел. Теория полей классов, первоначально относящаяся к алгебраич. числам, была позже перенесена на функциональный случай (см. [2]). Особенно близкая аналогия существует между полями алгебраич. чисел и полями А. ф. над конечным полем констант. Напр., для последних определяется понятие дзета-функции и доказывается аналог гипотезы Римана (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [2] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Чеботарёв Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [6] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [7] Appell P., Coursat E., Théorie des fonctions algébriques, t. 1—2, P., 1929 -30; [8] Dedekind R., Weber H., «J. reine und angew. Math.», 1879, Bd 92, S. 181—290; [9] Hensel K., Landsberg G., Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraischen Kurven und Abelsche Integrale, Lpz., 1902; [10] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendants, t. 1—2, P., 1897, 1906; [11] Jung H. W. E., Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, B., 1951; [12] Hasse H., Zahlentheorie, 2 Aufl., B., 1963; [13] Lang S., Algebraic functions, N.Y.—Amst., 1965.

А. Б. Жижченко.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТОЕ ПОЛЕ — поле k, в к-ром всякий многочлен ненулевой степени над k имеет хотя бы один корень. В действительности, из алгебраич. замкнутости поля будет следовать, что каждый многочлен степени n над k имеет в k ровно n корней, т. е. каждый неприводимый многочлен из кольца многочленов $k[x]$ имеет степень 1. Поле k алгебраически замкнуто тогда и только тогда, когда оно не имеет собственного алгебраич. расширения (см. *Расширение* поля). Существует единственное с точностью до изоморфизма алге-

браич. расширение поля k, являющееся А. з. п.; оно наз. алгебраическим замыканием поля k и обычно обозначается через k. Всякое А. з. п., содержащее k, содержит подполе, изоморфное k.

Алгебраич. замыканием поля действительных чисел является поле комплексных чисел. Его алгебраич. замкнутость устанавливается *Алгебры основной теоремой*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, пер. с англ., М., 1963; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968. *О. А. Иванова.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ — многочлен, наименее уклоняющийся от заданной функции. Точнее, пусть измеримая функция $f(x)$ интегрируема с p-й степенью ($p \geqslant 1$) на $[a, b]$ и H_n — множество алгебраич. многочленов степени не выше n. Величину

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n(x) \in H_n} \| f(x) - P_n(x) \|_{L_p[a, b]} \qquad (*)$$

наз. *наилучшим приближением*, а многочлен, для к-рого нижняя грань достигается, наз. алгебраическим многочленом наилучшего приближения в $L_p[a, b]$. Многочлены, наименее уклоняющиеся от данной непрерывной функции в равномерной ($p = \infty$) метрике, впервые встретились (1852) у П. Л. Чебышева и были исследованы им в 1856 (см. [1]). Доказательство существования А. м. н. п. дано Э. Борелем [2]. П. Л. Чебышев показал, что $P_n^0(x)$ является А. м. н. п. в равномерной метрике тогда и только тогда, когда у разности $f(x) - P_n^0(x)$ существует *чебышевский альтернанс*; в этом случае такой многочлен единствен. При $p > 1$ А. м. н. п. единствен в силу строгой выпуклости пространства L_p. При $p = 1$ единственности нет, но для непрерывных функций единственность А. м. н. п. доказана Д. Джексоном [3]). Скорость стремления $E_n(f)_p$ к нулю оценивается в *Джексона теореме*.

Аналогично (*) определяется А. м. н. п. для большого числа m переменных. Если число переменных $m \geqslant 2$, то А. м. н. п. (в равномерной метрике), вообще говоря, не единствен.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 2, М., 1947, с. 478, с. 152—236; [2] Borel E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynômes, P., 1905; [3] Jackson D., «Amer. J. Math.», 1924, v. 46; [4] Гаркави А. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969. *Ю. Н. Субботин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТОР — *алгебраическая группа*, изоморфная над нек-рым расширением основного поля прямому произведению конечного числа мультипликативных групп G_m. Группа $\hat{T}$ всех гомоморфизмов А. т. T в G_m наз. группой характеров А. т. T; она является свободной абелевой группой ранга, равного размерности А. т. T. Если А. т. T определен над полем k, то $\hat{T}$ наделяется структурой G-модуля, где G есть группа Галуа алгебраич. замыкания поля k. Функтор $T \to \hat{T}$ определяет двойственность между категорией А. т. над k и категорией $\mathbb{Z}$-свободных G-модулей конечного ранга. А. т., изоморфный произведению групп G_m над своим полем определения k, наз. расщепимым над k; всякий А. т. расщепляется над конечным сепарабельным расширением поля k. В теории алгебраич. групп А. т. играет роль, весьма схожую с ролью торов в теории групп Ли. Изучение А. т., определенных над полем алгебраич. чисел, занимает важное место в вопросах арифметики и классификации алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*, *Тамагавы число*).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Ono T., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 101—39; [3] его же, «Ann. Math.», 1963, v. 78, p. 47—73. *В. Е. Воскресенский.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ЦИКЛ на алгебраическом многообразии — элемент *свободной абе-*

левой группы, множество свободных образующих к-рой — все замкнутые неприводимые подмногообразия данного алгебраич. многообразия. Подгруппа группы $C(x)$ алгебраич. циклов на многообразии X, порожденная подмногообразием коразмерности p, обозначается через $C^p(X)$. Группа $C(X)$ представима в виде прямой суммы

$$C(X) = \oplus_p C^p(X).$$

Подгруппа $C^1(X)$ совпадает с группой *дивизоров* Вейля на X.

В дальнейшем X обозначает неособое проективное алгебраич. многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем k. Если k - поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то каждый А. ц. $Z \in C^p(X)$ определяет $(2n-2p)$-мерный класс гомологий $[Z] \in H_{2n-2p}(X, \mathbb{Z})$ и, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\gamma(Z) \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$. Классы гомологий (соответственно когомологий) вида $[Z]$ (соответственно $\gamma(Z)$) наз. алгебраическими классами гомологий (соответственно когомологий). Каждый аналитич. цикл гомологичен А. ц. Имеется предположение (гипотеза Ходжа), что целочисленный $(2n-2p)$-мерный цикл Γ на X гомологичен А. ц. тогда и только тогда, когда интегралы всех замкнутых дифференциальных форм типа $(2p-q, q)$, $q \neq p$, по Γ равны 0. Эта гипотеза доказана лишь в случаях $p=1$ (для $n=2$ см. [6], для всех n см. [7]) и $p=n-1$, а также для отдельных классов многообразий (см. [4]).

Если $W = \sum n_i W_i$ - А. ц. на произведении двух многообразий $X \times T$, то множество циклов на X вида

$$\sum n_i W_i \cap (X \times \{t\})$$

наз. семейством А. ц. на X, параметризованным базой T. При этом обычно требуют, чтобы проекция каждого подмногообразия W_i на T была плоским морфизмом. Если $W = W_i$ определяется неприводимым подмногообразием, то соответствующее семейство А. ц. на X наз. семейством алгебраических подмногообразий. В частности, для любого плоского морфизма $f: X \to Y$ алгебраич. многообразий его слои X_y образуют семейство алгебраич. подмногообразий X, параметризованное базой Y. Другим частным случаем этого понятия являются *линейные системы*. Все члены семейства алгебраич. подмногообразий (соответственно алгебраич. циклов) проективного многообразия X, параметризованного связной базой, имеют одинаковый *Гильберта многочлен* (соответственно виртуальный *арифметический род*).

А. ц. Z и Z' на многообразии X наз. алгебраически эквивалентными (что обозначается $Z \widetilde{\text{alg}} Z'$), если они принадлежат одному и тому же семейству, параметризованному связной базой. Интуитивно эквивалентность А. ц. означает, что Z можно алгебраически деформировать в Z'. Если в этом определении требовать, чтобы в качестве базы T можно было выбрать рациональное многообразие, то А. ц. Z и Z' наз. рационально эквивалентными (что обозначается $Z \widetilde{\text{rat}} Z'$). В случае, когда $Z, Z' \in C^1(X)$, понятие рациональной эквивалентности сводится к понятию линейной эквивалентности дивизоров. Подгруппа А. ц., рационально (соответственно алгебраически) эквивалентных нулю, обозначается $C_{\text{rat}}(X)$ (соответственно $C_{\text{alg}}(X)$). Каждая из этих групп является прямой суммой своих компонент:

$$C^p_{\text{rat}}(X) = C_{\text{rat}}(X) \cap C^p(X),$$

$$C^p_{\text{alg}}(X) = C_{\text{alg}}(X) \cap C^p(X).$$

Факторгруппа $C^1(X)/C^1_{\text{alg}}(X)$ конечно порождена и наз. группой Нерона—Севери многообразия X. Вопрос о конечной порожденности при $p>1$ фактор-

группы $C^p(X)/C^p_{\mathrm{alg}}(X)$ остается открытым (1977). Факторгруппа $C^1_{\mathrm{alg}}(X)/C^1_{\mathrm{rat}}(X)$ обладает структурой абелева многообразия (см. *Пикара схема*). Операция пересечения циклов позволяет определить умножение в факторгруппе $C(X)/C_{\mathrm{rat}}(X)$, превращающее ее в коммутативное кольцо, наз. кольцом Чжоу многообразия X (см. *Пересечений теория*).

Для любой теории когомологий Вейля $H^*(X)$ существует однозначно определенный гомоморфизм групп

$$\gamma: C^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X).$$

А. ц. Z и Z' наз. гомологически эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\mathrm{hom}}{\sim} Z'$), если $\gamma(Z) = \gamma(Z')$. Подгруппа А. ц., гомологически эквивалентных нулю, обозначается $C_{\mathrm{hom}}(X)$. Имеет место вложение $C_{\mathrm{alg}}(X) \subset C_{\mathrm{hom}}(X)$. Факторгруппа $C(X)/C_{\mathrm{hom}}(X)$ конечно порождена и является подкольцом в кольце $H^*(X)$, к-рое обозначается через $A^*(X)$ и наз. кольцом алгебраических классов когомологий Вейля. Неизвестно (1977), зависит ли $A^*(X)$ от выбранной теории когомологий Вейля.

А. ц. Z и Z' наз. τ-эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\tau}{\sim} Z'$), если существует $m \geqslant 1$ такое, что $mZ \underset{\mathrm{alg}}{\sim} mZ'$. Подгруппа А. ц., τ-эквивалентных нулю, обозначается через $C_\tau(X)$. А. ц. Z и Z' из $C^p(X)$ наз. численно эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\mathrm{num}}{\sim} Z'$), если для любого $W \in C^{n-p}(X)$ имеет место равенство $WZ = WZ'$, при условии, что обе части равенства определены. Подгруппа А. ц., численно эквивалентных нулю, обозначается через $C_{\mathrm{num}}(X)$. Имеют место включения

$$C_\tau(X) \subset C_{\mathrm{hom}}(X) \subset C_{\mathrm{num}}(X).$$

Для дивизоров группы $C_\tau(X) \cap C^1(X)$, $C_{\mathrm{hom}}(X) \cap C^1(X)$ и $C_{\mathrm{num}}(X) \cap C^1(X)$ совпадают [6]. Однако (как показывает построенный в [5] для случая $k = \mathbb{C}$ контрпример)

$$C_\tau(X) \neq C_{\mathrm{hom}}(X),$$

где $C_{\mathrm{hom}}(X)$ рассматривается относительно обычной теории когомологий с рациональными коэффициентами. Аналогичный контрпример построен для поля k произвольной характеристики и l-адической теории когомологий Вейля. Остается открытым (1977) вопрос о совпадении групп $C_{\mathrm{hom}}(X)$ и $C_{\mathrm{num}}(X)$.

Пусть X вложено в проективное пространство и L_X - класс когомологий гиперплоского сечения. Алгебраич. класс когомологий

$$x \in A^p(X) = A^*(X) \cap H^{2p}(X)$$

наз. примитивным, если $xL_X^{n-p} = 0$. В случае, когда k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, билинейная форма

$$(a, b) \longrightarrow (-1)^n L_X^{n-2p} ab$$

положительно определена на подпространстве примитивных классов в $A^p(X)$. Аналогичное утверждение для произвольного k, тесно связанное с гипотезами Вейля о дзета-функции на алгебраич. многообразии, доказано лишь для $n \leqslant 2$.

Если многообразие X определено над полем k, не являющимся алгебраически замкнутым полем, то группа Галуа сепарабельного алгебраич. замыкания $G(k, k)$ поля k действует на когомологиях Вейля $H^*(\bar{X})$, где $\bar{X} = X \underset{k}{\otimes} k$. Каждый элемент из $A^*(X)$ инвариантен относительно нек-рой подгруппы конечного индекса группы $G(k, k)$. Имеется предположение (гипотеза Тейта об алгебраических циклах), что обратное утверждение также справедливо, если k конечно порождено над своим простым подполем. На

этом предположении основаны многие гипотезы о дзета-функции алгебраич. многообразия [2].

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Тэйт Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 27—40, пер. с англ.; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77—170; [4] Kleiman S. L., в сб.: Dix exposés sur cohomologie des schémas, Amst.—P., 1968, p. 359—86; [5] Griffiths P. A., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, p. 496—541; [6] Lefschetz S., L'Analysis situs et la géométrie algébrique, P., [1924]; [7] Hodge W., The theory and applications of harmonic integrals, Camb., 1941; [8] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B., 1973.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ-ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — изолированная особая точка z_0 аналитич. функции $f(z)$, обладающая тем свойством, что в ее окрестности функция $f(z)$ может быть представлена как сумма конечного числа слагаемых вида

$$(z-z_0)^{-s}\,[\ln(z-z_0)]^k\,g(z),$$

где s — комплексное число, k — целое неотрицательное число и $g(z)$ — регулярная аналитич. функция в точке z_0, причем $g(z_0)\neq 0$.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ АРИФМЕТИКА, арифметическая алгебраическая геометрия,— направление в алгебраич. геометрии, изучающее свойства алгебраич. многообразий, определенных над полями так наз. арифметического типа, т. е. конечными, локальными и глобальными полями алгебраич. чисел или алгебраич. функций. В случае конечных полей основным является изучение числа рациональных точек алгебраич. многообразия в этих полях и их конечных расширениях. Используемая для такого изучения *дзета-функция* многообразия оказала большое влияние на развитие методов алгебраич. геометрии. Большое значение имеют также оценки числа точек снизу (см. [1], [4]).

Если X - алгебраич. многообразие (или схема) над локальным полем K с полем вычетов k, то рассмотрение множества $X(K)$ рациональных точек со значениями в K позволяет связать две совершенно различные задачи: нахождение решений сравнений (или точек многообразий над конечными полями) и целочисленных или рациональных решений диофантовых уравнений (см. *Хассе принцип*). Задавая многообразие X системой уравнений с коэффициентами из кольца A целых элементов поля K, можно определить редукцию этого многообразия той же системой уравнений, но с коэффициентами, взятыми по модулю максимального идеала кольца A. Получаются «многообразие» X_0 над полем вычетов k и канонич. отображение, или редукция:

$$\mathrm{Red}\colon X(K)\longrightarrow X_0(k).$$

Приведенное описание редукции трудно объяснить в рамках классич. алгебраич. геометрии. Это явилось одной из причин введения понятия *схем*, на языке к-рых описанный процесс допускает строгое определение. Основная задача состоит в определении образа отображения Red, т. е. в нахождении тех точек $x\in X_0(k)$, к-рые поднимаются до рациональных K-точек многообразия; *Гензеля лемма* утверждает, что это так, если x неособая точка. Наиболее общие результаты об этом см. [4].

Другим кругом вопросов, относящихся к локальной А. м. а., является изучение форм над такими полями. Пусть F — форма от n переменных степени d над локальным полем; гипотеза Артина утверждает, что при $n>d^2$ уравнение $F=0$ имеет нетривиальное решение. В функциональном случае справедливость этого утверждения известна. Для p-адических полей доказано, что для каждого d имеется такое конечное число простых $A(d)$, что гипотеза Артина верна для форм степени d; если $p\notin A(d)$. В 1966 было показано, что уже мно-

жество A (L) не пусто, тем самым гипотеза Артина была опровергнута (см. [4]). Неизвестно (1977), верна ли она для форм нечетной степени.

А. м. а. над глобальными полями представляет собой наиболее обширную и разветвленную область алгебраич. геометрии. Сюда относятся диофантова геометрия, теория полей классов, теории дзета-функций многообразий, комплексное умножение абелевых функций (или многообразий). Все эти теории развиваются параллельным образом для числовых и функциональных полей. Впервые такая возможность была продемонстрирована развитием теории полей классов в 30-х гг. 20 в., она основана на глубокой аналогии между этими полями, получившей наиболее полное воплощение в конструкциях теории схем.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Вейль А., «Математика», 1958, т. 2, № 4; [3] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique I, B., 1971; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—152; [5] Swinnerton-Dyer H. P. F., в кн.: Proceedings of Symposia in pure mathematics, v. 20, 1969, Providence, 1971.

А. Н. Паршин.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ — класс алгебраич. систем (Ω-систем), аксиоматизируемый при помощи специальных формул логич. языка 1-й ступени, к-рые наз. квазитождествами, или условными тождествами, и имеют вид:

$$(\forall x_1)\ \dots\ (\forall x_s)$$
$$\left[P_1\left(f_1^{(1)},\ \dots,\ f_{m_1}^{(1)}\right)\ \&\ \dots\ \&\ P_k\left(f_1^{(k)},\ \dots,\ f_{m_k}^{(k)}\right)\longrightarrow\right.$$
$$\left.\longrightarrow P_0\left(f_1^{(0)},\ \dots,\ f_{m_0}^{(0)}\right)\right],$$

где $P_0, P_1, \dots, P_k \in \{\Omega, -\}$, а $f_1^{(0)}, \dots, f_{m_k}^{(k)}$ — термы сигнатуры Ω от предметных переменных $x_1, \dots, x_s$. В силу теоремы Мальцева [1], А. с. к. $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω может быть определено также как абстрактный класс Ω-систем, содержащий единичную Ω-систему E и замкнутый относительно подсистем и фильтрованных произведений (см. [1], [2]). Аксиоматизируемый класс Ω-систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он содержит единичную Ω-систему E и замкнут относительно подсистем и декартовых произведений. Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие сигнатуры Ω, то подкласс $\mathfrak{K}_1$ тех систем $\mathfrak{A}$, которые изоморфно вложимы в подходящие системы из некоторого квазимногообразия $\mathfrak{K}'$ сигнатуры $\Omega' \supseteq \Omega$, сам является квазимногообразием. Напр., класс полугрупп, вложимых в группы, есть квазимногообразие; класс ассоциативных колец без делителей нуля, вложимых в ассоциативные тела, также является квазимногообразием.

Квазимногообразие $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω наз. конечно определимым (или обладающим конечным базисом квазитождеств), если существует такое конечное множество S квазитождеств сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из множества S. Напр., квазимногообразие всех полугрупп с сокращением определяется двумя квазитождествами

$$zx = zy \longrightarrow x = y,\ xz = yz \longrightarrow x = y.$$

и потому конечно определимо. Напротив, квазимногообразие полугрупп, вложимых в группы, не имеет конечного базиса квазитождеств (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{K}$ — произвольный (не обязательно абстрактный) класс Ω-систем, то наименьшее среди квазимногообразий, содержащих $\mathfrak{K}$, наз. импликативным замыканием класса $\mathfrak{K}$. Оно состоит из подсистем изоморфных копий фильтрованных произведений Ω-систем из класса $\mathfrak{K} \cup \{E\}$, где E — единичная Ω-система. Если $\mathfrak{K}$ — импликативное замыкание класса Ω-систем $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ наз. порождающим клас-

сом квазимногообразия $\mathfrak{K}$. Квазимногообразие $\mathfrak{K}$ порождается одной системой тогда и только тогда, когда для любых двух систем $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ из $\mathfrak{K}$ существует в классе $\mathfrak{K}$ система $\boldsymbol{C}$, содержащая подсистемы, изоморфные системам $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ (см. [1]). Всякое квазимногообразие $\mathfrak{K}$, содержащее неодноэлементную систему, обладает свободными системами любого ранга, к-рые являются одновременно свободными системами в эквациональном замыкании класса $\mathfrak{K}$. Квазимногообразия Ω-систем, содержащиеся в к.-л. фиксированном квазимногообразии $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω, составляют полную решетку относительно теоретико-множественного включения. Атомы решетки всех квазимногообразий сигнатуры Ω наз. минимальными квазимногообразиями сигнатуры Ω. Минимальное квазимногообразие $\mathfrak{M}$ порождается любой своей неединичной системой. Каждое квазимногообразие $\mathfrak{K}$, обладающее неединичной системой, содержит хотя бы одно минимальное квазимногообразие. Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие Ω-систем конечной сигнатуры Ω, то все его подквазимногообразия составляют группоид относительно мальцевского $\mathfrak{K}$-умножения (см. [3]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мальцев А. И., «Сиб. матем. ж.», 1967, т. 8, № 2, с. 346—65. *Д. М. Смирнов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ КЛАСС — класс однотипных алгебраических систем. Все системы любого данного типа предполагаются записанными в определенной сигнатуре Ω и наз. Ω-системами. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. абстрактным, если он содержит вместе с каждой своей системой $\boldsymbol{A}$ и все изоморфные ей Ω-системы.

Пусть $\mathfrak{K}$ — абстрактный класс Ω-систем. Говорят, что Ω-система $\boldsymbol{A}$ обладает локальной совокупностью $\mathfrak{K}$-подсистем, если существует направленное по включению множество $\{A_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$ подсистем A_α системы $\boldsymbol{A}$, к-рые покрывают систему $\boldsymbol{A}$ (т. е. $\bigcup A_\alpha = \boldsymbol{A}$) и принадлежат классу $\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ наз. локальным, если каждая Ω-система $\boldsymbol{A}$, обладающая локальной совокупностью $\mathfrak{K}$-подсистем, принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Теоремы, устанавливающие локальность тех или иных абстрактных классов, принято наз. локальными (см. *Мальцева локальные теоремы*).

Ω-система $\boldsymbol{A}$ наз. $\mathfrak{K}$-аппроксимируемой (или $\mathfrak{K}$-резидуальной), если для любого предиката $P\in\{\Omega_p, -\}$ (т. е. для любого основного предиката, а также для предиката, совпадающего с отношением равенства в $\boldsymbol{A}$) и для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\boldsymbol{A}$, для к-рых $P(a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{\mathit{И}}$, существует гомоморфизм φ: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ системы $\boldsymbol{A}$ в нек-рую систему $\boldsymbol{B}$ из класса $\mathfrak{K}$, при к-ром снова $P(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \boldsymbol{\mathit{И}}$. Любая подсистема $\mathfrak{K}$-аппроксимируемой системы сама $\mathfrak{K}$-аппроксимируема. Если $\mathfrak{K}$ — класс всех конечных Ω-систем, то $\mathfrak{K}$-аппроксимируемая система $\boldsymbol{A}$ наз. финитно аппроксимируемой (или резидуально конечной). Если абстрактный класс $\mathfrak{K}$ обладает единичной системой $E = \langle\{e\}, \Omega\rangle$, то Ω-система $\boldsymbol{A}$ $\mathfrak{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфно вложима в декартово произведение систем из класса $\mathfrak{K}$ (см. [3]). Класс $\mathfrak{K}$ наз. резидуальным, если всякая $\mathfrak{K}$-аппроксимируемая система принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ наз. гомоморфно замкнутым, если он содержит с каждой своей Ω-системой $\boldsymbol{A}$ и все Ω-системы, являющиеся гомоморфными образами системы $\boldsymbol{A}$. Всякий резидуальный гомоморфно замкнутый класс — локальный (см. [5]).

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. (конечно) аксиоматизируемым, если существует такая (конечная) совокупность S замкнутых формул 1-й ступени сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S. Конечно аксиомати-

зируемые классы наз. иначе э л е м е н т а р н ы м и к л а с с а м и. При помощи обобщенной гипотезы континуума доказано (см. [5]), что: 1) А. с. к. $\mathfrak{K}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно ультрапроизведений и его дополнение (в классе всех Ω-систем) замкнуто относительно ультрастепеней; 2) А. с. к. $\mathfrak{K}$ элементарен тогда и только тогда, когда он и его дополнение замкнуты относительно ультрапроизведений. Теория аксиоматизируемых А. с. к. изучает связи между структурными свойствами рассматриваемых классов и синтаксич. особенностями формального языка, на к-ром эти классы могут быть заданы. Среди аксиоматизируемых классов особенно важную роль в алгебре играют многообразия (см. *Алгебраических систем многообразие*) и квазимногообразия (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*), к-рые локальны и резидуальны.

Наряду с аксиоматизируемостью замкнутыми формулами 1-й ступени рассматривают также аксиоматизируемость при помощи специальных замкнутых формул 2-й ступени. К сигнатурным функциональным и предикатным символам $F_i (i \in I)$, $P_j (j \in I)$ фиксированной сигнатуры Ω присоединяют предикатные переменные R_1, R_2, ... Пусть $\mathfrak{F}$ бескванторная формула 1-й ступени, составленная из сигнатурных функциональных и предикатных символов, предикатных переменных $R_1, \ldots, R_s$ и предметных переменных $x_1, \ldots, x_r$. Формула 2-й ступени $Q\,\mathfrak{F}$, где Q — нек-рая последовательность кванторов вида $(\forall R_i)$, $(\exists R_i)$ или $(\forall x_k)$, наз. к р и п т о у н и в е р с а л ь н о й. Формула 2-й ступени, образованная из криптоуниверсальных формул без свободных предметных переменных при помощи логич. связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ с последующим навешиванием квантора всеобщности $\forall$ на все свободные предикатные переменные, встречающиеся в записях криптоуниверсальных формул, наз. б у л е в о - у н и в е р с а л ь н о й ф о р м у л о й сигнатуры Ω. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. к в а з и у н и в е р с а л ь н ы м, если существует такая совокупность S булево-универсальных формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S. Квазиуниверсальный класс Ω-систем локален (т е о р е м а М а л ь ц е в а). Имеется более сложное определение квазиуниверсального класса, данное А. И. Мальцевым [4].

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., «Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та», 1941, т. 1, в. 1, с. 3—9; [2] е г о ж е, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 3, с. 313—36; [3] е г о ж е, Алгебраические системы, М., 1970; [4] е г о ж е, в кн.: Тр. четвертого всес. матем. съезда. Ленинград, 1961, т. 1, Л., 1963; [5] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [6] C l e a v e J. P., «J. London Math. Soc.», 1969, v. 44, pt 1, № 173, p. 121—30.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраических систем класс* фиксированной сигнатуры Ω, аксиоматизируемый при помощи тождеств, т. е. формул вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s)\, P\,(f_1, \ldots, f_n),$$

где P — к.-л. предикатный символ из Ω или знак равенства, а $f_1, \ldots, f_n$ — термы сигнатуры Ω от предметных переменных $x_1, \ldots, x_s$. А. с. м. наз. иначе э к в а ц и о н а л ь н ы м и к л а с с а м и, иногда п р и м и т и в н ы м и к л а с с а м и. Многообразие сигнатуры Ω может быть определено также (т е о р е м а Б и р к г о ф а) как непустой класс Ω-систем, замкнутый относительно подсистем, гомоморфных образов и декартовых произведений.

Пересечение всех многообразий сигнатуры Ω, содержащих данный (не обязательно абстрактный) класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем, наз. э к в а ц и о н а л ь н ы м з а м ы к а н и е м класса $\mathfrak{K}$ (или многообразием, порожденным классом $\mathfrak{K}$) и обозначается $\mathrm{var}\mathfrak{K}$. В частности, если класс $\mathfrak{K}$ состоит из одной Ω-системы $\boldsymbol{A}$, то его эквациональное замыкание обозначают $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$. Если система $\boldsymbol{A}$

конечна, то все конечно порожденные системы в многообразии $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ также конечны [1], [2].

Пусть $\mathscr{L}$ — нек-рый класс Ω-систем, $S\mathscr{L}$ — класс подсистем систем из $\mathscr{L}$, $H\mathscr{L}$ — класс гомоморфных образов систем из $\mathscr{L}$, $\Pi\mathscr{L}$ — класс изоморфных копий декартовых произведений систем из $\mathscr{L}$. Для произвольного непустого класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем имеет место соотношение (см. [1], [2]):

$$\mathrm{var}\,\mathfrak{K} = HS\Pi\mathfrak{K}.$$

Многообразие наз. т р и в и а л ь н ы м, если в каждой его системе истинно тождество $x=y$. Всякое нетривиальное многообразие $\mathfrak{M}$ обладает свободными системами $F_m(\mathfrak{M})$ любого ранга m и $\mathfrak{M}=\mathrm{var}\,F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ (см. [1], [2]).

Пусть S — множество тождеств сигнатуры Ω и KS — класс всех Ω-систем, в к-рых истинны все тождества из S. Если для многообразия $\mathfrak{M}$ сигнатуры Ω выполняется равенство $\mathfrak{M}=KS$, то S наз. б а з и с о м для $\mathfrak{M}$. Многообразие $\mathfrak{M}$ наз. к о н е ч н о б а з и р у е м ы м, если оно имеет конечный базис S. Для любой системы $\boldsymbol{A}$ базис многообразия $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ наз. также б а з и с о м т о ж д е с т в системы $\boldsymbol{A}$. Если $\mathfrak{M}$ — конечно базируемое многообразие алгебр конечной сигнатуры и все алгебры из $\mathfrak{M}$ имеют дистрибутивные решетки конгруэнций, то каждая конечная алгебра $\boldsymbol{A}$ из $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис тождеств (см. [10]). В частности, любая конечная решетка $\langle \boldsymbol{A}, \vee, \wedge\rangle$ обладает конечным базисом тождеств. Конечный базис тождеств имеет любая конечная группа [3]. Напротив, существует 6-элементная полугруппа [5] и 3-элементный группоид [6], у к-рых нет конечного базиса тождеств.

Многообразия Ω-систем, содержащиеся в к.-л. фиксированном многообразии $\mathfrak{M}$ сигнатуры Ω, составляют по включению полную решетку $L(\mathfrak{M})$ с нулем и единицей, к-рая наз. р е ш е т к о й п о д м н о г о о б р а з и й многообразия $\mathfrak{M}$. Нулем этой решетки служит многообразие с базисом $x=y$, $P(x_1, \ldots, x)$ $(P\in\Omega)$, а единицей — многообразие $\mathfrak{M}$. Если многообразие $\mathfrak{M}$ нетривиально, то решетка $L(\mathfrak{M})$ антиизоморфна решетке всех *вполне характеристических конгруэнций* свободной в $\mathfrak{M}$ системы $F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ счетного ранга [1]. Решетка L_Ω всех многообразий сигнатуры Ω бесконечна, кроме случая, когда множество Ω конечно и состоит лишь из предикатных символов. Известно точное значение мощности бесконечной решетки L_Ω (см. [1]). Решетка всех многообразий решеток $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ дистрибутивна и имеет мощность континуума [7], [8]. Решетка всех многообразий групп $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ модулярна, но не дистрибутивна [3], [4]. Решетка многообразий коммутативных полугрупп не модулярна [9].

Атомы решетки L_Ω всех многообразий сигнатуры Ω наз. м и н и м а л ь н ы м и м н о г о о б р а з и я м и сигнатуры Ω. Каждое многообразие, обладающее неединичной системой, содержит хотя бы одно минимальное многообразие. Если Ω-система $\boldsymbol{A}$ конечна и конечного типа, то многообразие $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ содержит лишь конечное число минимальных подмногообразий [1].

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — подмногообразия фиксированного многообразия $\mathfrak{M}$ Ω-систем. М а л ь ц е в с к и м п р о и з в е д е н и е м $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ наз. класс тех систем $\boldsymbol{A}$ из $\mathfrak{M}$, к-рые обладают такой конгруэнцией θ, что $(\boldsymbol{A}/\theta)\in\mathfrak{B}$, а все смежные классы a/θ $(a\in\boldsymbol{A})$, являющиеся системами из $\mathfrak{M}$, принадлежат $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех групп, а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — его подмногообразия, то произведение $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ совпадает с произведением в смысле Х. Нейман [3]. Произведение многообразий полугрупп может не быть многообразием. Многообразие $\mathfrak{M}$ Ω-систем наз. п о л я р и з о в а н н ы м, если существует такой терм $e(x)$ сигнатуры Ω, что в каждой системе из $\mathfrak{M}$ истинны тождества $e(x)=e(y)$, $F(e(x), \ldots, \ldots, e(x))=e(x)$ $(F\in\Omega)$. Если $\mathfrak{M}$ — поляризованное мно-

гообразие алгебр и в каждой алгебре из $\mathfrak{M}$ конгруэнции перестановочны, то мальцевское произведение $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ любых подмногообразий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{M}$ есть многообразие. В частности, можно говорить о группоиде $G_I(\mathfrak{M})$ подмногообразий любого многообразия $\mathfrak{M}$ групп, колец и т. п. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех групп или всех алгебр Ли над фиксированным полем P характеристики нуль, то $G_I(\mathfrak{M})$ – свободная полугруппа [1].

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [4] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [5] Perkins P., «J. of Algebra», 1969, v. 11, № 2, p. 298—314; [6] Мурский В. Л., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18; [7] Jónsson B., «Math. Scand.», 1967, v. 21, № 1, p. 110—21; [8] Baker K. A., «Pacific J. of Math.», 1969, v. 28, № 1, p. 9—15; [9] Schwabauer R., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 20, № 2, p. 503—04; [10] Baker K. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 190, p. 125—50.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ АВТОМОРФИЗМ — обратимый морфизм алгебраич. многообразия (или схемы) в себя. Группа всех А. м. а., обозначаемая обычно $\mathrm{Aut}\,X$, - важный инвариант многообразия X. Изучение действий группы А. м. а. на объектах, функториально связанных с X, таких, как *Пикара группа*, *Чжоу кольцо*, *К-функтор*, группа когомологий, является средством изучения самих многообразий. Группа А. м. а. участвует при образовании *форм* алгебраич. многообразия. Для полных алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел группа А. м. а. совпадает с группой биголоморфных автоморфизмов.

Для ряда простых алгебраич. многообразий строение группы $\mathrm{Aut}\,X$ известно. Напр., если X проективное n-мерное пространство P^n над полем k, то любой его автоморфизм является линейным проективным преобразованием и $\mathrm{Aut}\,\mathrm{P}^n$ совпадает с проективной линейной группой $\mathrm{PGL}(n+1, k)$. Группа автоморфизмов эллиптич. кривой и, вообще, любого абелева многообразия A является расширением группы G автоморфизмов, сохраняющих структуру абелева многообразия, при помощи группы $A(k)$ сдвигов на точки многообразия A, т. е. последовательность групп

$$1 \longrightarrow A(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,A \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

точна. Если X - гладкая полная алгебраич. кривая рода $g>1$, то группа $\mathrm{Aut}\,X$ конечна; известна оценка ее порядка в зависимости от g (см. *Алгебраическая кривая*). Об автоморфизмах поверхностей см. *Алгебраическая поверхность*.

Для алгебраич. многообразий с обильным канонич. или антиканонич. обратимым пучком группа автоморфизмов является алгебраич. подгруппой группы $\mathrm{PGL}(N, k)$ для нек-рого N. Группа автоморфизмов гладкой поверхности размерности $n\geqslant 2$ и степени $d\geqslant 3$ конечна [1].

Во всех приведенных выше примерах $\mathrm{Aut}\,X$ обладает естественной структурой алгебраич. группы, быть может, с бесконечным числом связных компонент; это верно и в общем случае [2].

Современный подход к изучению группы А. м. а. состоит в рассмотрении семейств автоморфизмов. Семейством автоморфизмов многообразия X со схемой параметров T наз. автоморфизм произведения $X\times T$, перестановочный с проекцией на второй множитель; множество семейств автоморфизмов со схемой параметров T обозначается $\mathrm{Aut}_T(X\times T)$. Сопоставление $T\mapsto \mathrm{Aut}_T(X\times T)$ является контравариантным функтором от T. Если многообразие X полное, то этот функтор представим (см. *Представимый функтор*) локально алгебраич. схемой групп с не более чем счетным числом связных компонент [3]. Для проективных многообразий этот факт был доказан А. Гротендиком (A. Grothendieck); существует обобщение этой теоремы на случай собственных плоских морфизмов схем. Представляющая схема

не обязательно является приведенной, даже в случае, когда X - гладкая проективная поверхность; однако, если характеристика основного поля равна 0, либо если X — гладкая кривая или гладкая гиперповерхность, то связная компонента единицы этой схемы является многообразием.

Для неполных многообразий функтор автоморфизмов не всегда представим в категории схем. Для аффинного многообразия функтор автоморфизмов представим в категории индуктивных пределов схем.

Для аффинных пространств, кроме простого случая аффинной прямой, известна только группа автоморфизмов аффинной плоскости. Она является свободным произведением с объединенным пересечением двух своих подгрупп — подгруппы линейных аффинных преобразований и подгруппы треугольных автоморфизмов, т. е. преобразований вида

$$x' = ax + b,$$
$$y' = cy + f(x),$$

где a, b, $c \in k$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, а $f(x)$ — произвольный многочлен от x (см. [4], [5]). Об аффинных алгебраич. поверхностях, на к-рых группа автоморфизмов действует транзитивно, см. [6].

Лит.: [1] Matsumura H., Monsky P., «J. Math. Kyoto Univ.», 1964, v. 3, p. 347—61; [2] Matsusaka T., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 1, p. 45—82; [3] Matsumura H., Oort F., «Invent Math.», 1967, v. 4, № 1, p. 1—25; [4] Engel W., «Math. Ann.», 1958, v. 136, p. 319—25; [5] Shafarevich I. R., «Rend. Math.», 1966, v. 25, p. 208—12; [6] Гизатуллин М. Х., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1047—71; [7] Roth L., Algebraic threefolds, B.—[u.a.], 1955.

В. И. Данилов, В. А. Исковских.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ для *минора* M - число, равное

$$(-1)^{s+t} \det A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

где M — минор порядка k, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ некоторой квадратной матрицы A порядка n; $\det A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — определитель матрицы порядка $n-k$, полученной из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов минора M; $s = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, $t = j_1 + j_2 + \ldots + j_k$. Справедлива теорема Лапласа: если в определителе порядка n фиксировать к.-л. r строк, то сумма произведений миноров r-го порядка, принадлежащих фиксированным строкам, на их А. д. равна величине данного определителя. А. д. наз. также адъюнктой.

В. Н. Ремесленников.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗАМЫКАНИЕ поля k — алгебраич. *расширение* поля k, являющееся *алгебраически замкнутым полем*. Такое расширение для любого поля k существует и определено однозначно с точностью до изоморфизма. А. з. поля действительных чисел является поле комплексных чисел (см. *Алгебры основная теорема*).

В. Н. Ремесленников.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — один из основных объектов изучения алгебраич. геометрии. Современное определение А. м. над полем k как приведенной *схемы* конечного типа над полем k претерпело длительную эволюцию. Классич. определение А. м. ограничивалось аффинными и проективными алгебраич. множествами над полями действительных или комплексных чисел (см. *Аффинное алгебраическое множество*, *Проективное алгебраическое множество*). Начиная с кон. 20-х гг. 20 в. в работах Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden), Э. Нётер (E. Noether) и др понятие А. м. подверглось существенной алгебраизации, позволившей перейти к рассмотрению А. м. над произвольными полями. А. Вейль [6] перенес на А. м. идею конструкции дифференцируемых многообразий с помощью склейки. Полученное таким образом абстрактное А. м. определяется как система (V_α)

аффинных алгебраич. множеств над полем k, в каждом из к-рых выделены открытые подмножества $W_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$, согласованно изоморфные открытым подмножествам $W_{\beta\alpha} \subset V_\beta$. На такие А. м. удалось перенести все основные понятия классической алгебраич. геометрии. Примеры абстрактных А. м., неизоморфных алгебраич. подмножествам проективного пространства, были затем построены М. Нагатой (M. Nagata) и Х. Хиронака (H. Hironaka) (см. [2], [3]). Аналогом проективных алгебраич. множеств при этом служили *полные алгебраические многообразия*.

Ж. П. Серром [5] было обнаружено, что единое определение дифференцируемых многообразий и аналитич. пространств как окольцованных топологич. пространств имеет свой аналог и в алгебраич. геометрии. А. м. стало наз. *окольцованное пространство*, локально изоморфное аффинному алгебраич. множеству над полем k с топологией Зарисского и пучком ростков регулярных функций на нем. Дополнительная структура окольцованного пространства на А. м. позволяет упростить различные конструкции с абстрактными А. м., а также ввести в их изучение методы гомологич. алгебры, связанные с теорией пучков.

В 1958 на Международном математич. конгрессе в Эдинбурге А. Гротендик (A. Grothendieck) наметил перспективы дальнейшего обобщения понятия А. м., связанного с теорией схем. После того как были заложены [4] основы этой теории, под А. м. стали пониматься приведенные схемы конечного типа над полем k, причем такие аффинные (соответственно проективные) схемы стали наз. аффинными (соответственно проективными) многообразиями. Включение А. м. в более широкие рамки схем оказалось полезным в ряде вопросов классической алгебраич. геометрии (*разрешение особенностей*, *модулей проблема* и др.).

Другое обобщение понятия А. м. связано с понятием *алгебраического пространства*.

Над полем комплексных чисел каждое А. м. обладает структурой комплексного *аналитического пространства*, что позволяет привлекать к изучению топологические и трансцендентные методы (см. *Кэлерово многообразие*).

Многие вопросы теории чисел (теория сравнений, диофантовы уравнения, модулярные формы и др.) приводят к изучению А. м. над конечными полями и полями алгебраич. чисел (см. *Алгебраических многообразий арифметика*, *Диофантова геометрия*, *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М., 1972, с. 47—112; [4] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, t. 1—Le langage des schémas, P., 1960; [5] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 2, p. 197—278; [6] Weil A., Foundations of algebraic geometry, N.Y., 1946 (2 ed., 1962).

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — обобщение понятия *схемы* и *алгебраического многообразия*. К этому обобщению приводят нек-рые конструкции алгебраич. геометрии: схемы Гильберта, схемы Пикара, многообразия модулей, стягивания, не выполнимые зачастую в категории схем и требующие расширения ее. В то же время категория А. п. замкнута относительно таких конструкций, что позволяет считать А. п. естественным объектом алгебраич. геометрии.

Любая схема S определяет нек-рый пучок в *этальной топологии* категории схем, к-рый в свою очередь однозначно определяет схему S. Алгебраическим пространством называется пучок множеств F в этальной топологии схем, удовлетворяющей условию локальной представимости (в этальной топологии): существует схема U и морфизм пучков $\tilde{U} \to F$ такие, что для любой схемы V и морфизма

$\tilde{V} \to F$ расслоенное произведение $\tilde{U} \underset{F}{\times} \tilde{V}$ представляется схемой Z, причем индуцированный морфизм схем $Z \to V$ есть сюръективный этальный морфизм. Схема U при этом называется этальным покрытием пучка F, к-рый является факторпучком пучка $\tilde{U}$ по этальному отношению эквивалентности $\tilde{U} \underset{F}{\times} \tilde{U}$. Последнее вскрывает геометрический смысл А. п. как факторсхемы по этальному отношению эквивалентности. Морфизмы А. п. определяются как морфизмы пучков; категория схем отождествляется при этом с полной подкатегорией категории А. п.

На А. п. распространяются многие понятия теории схем: точка, локальное кольцо, этальная топология, топология Зарисского, поле функций, структурный пучок, когерентные пучки. Многие результаты теории схем, таких, как критерий аффинности Серра (см. *Аффинная схема*), теорема конечности и существования для собственного морфизма, переносятся на А. п.

Более тонкие результаты — представимость функторов Пикара и Гильберта в категории А. п. Если на А. п. задано плоское отношение эквивалентности, то факторизация по нему дает А. п. (такая ситуация возникает, например, при свободном действии на пространстве конечной группы). Наконец, А. п. допускает стягивание подпространства с обильным конормальным пучком.

Каждое А. п. содержит открытое и плотное в топологии Зарисского подпространство, являющееся схемой. Одномерные и неособые двумерные А. п. будут схемами, однако это уже не верно для трехмерных и особых двумерных А. п.; группа в категории А. п. над полем есть схема. Полные А. п. размерности n над полем комплексных чисел имеют естественную структуру компактного аналитич. пространства с n алгебраически независимыми мероморфными функциями.

Лит.: [1] Артин М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1 (157), с. 181—205; [2] Knutson D., Algebraic spaces, B., 1971.

В. И. Данилов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ — сравнение вида:

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}, \qquad (1)$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

— многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с целыми рациональными коэффициентами $a_{i_1}, \ldots, i_n$. Максимальное значение величины

$$d(i_1, \ldots, i_n) = i_1 + \ldots + i_n,$$

где максимум берется по всевозможным наборам $i_1, \ldots, i_n$, для к-рых $a_{i_1, \ldots, i_n} \not\equiv 0 \pmod{m}$, наз. степенью по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$, или степенью алгебраического сравнения (1). Максимальное значение величины i_s, $1 \leqslant s \leqslant n$, где максимум берется по тем же наборам $i_1, \ldots, i_n$, наз. степенью алгебраического сравнения (1) по переменной x_s.

Основным вопросом в теории А. с. является вопрос о числе решений того или иного сравнения. При этом можно ограничиться лишь случаем простого модуля, поскольку вопрос о числе решений А. с. (1) по составному модулю m, за исключением нек-рых вырожденных случаев, сводится к вопросу о числе решений сравнений $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$ по простым модулям p, делящим m.

Среди А. с. $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ от одной переменной наиболее изучены *двучленные сравнения*

$$x^n \equiv a \pmod{p}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Исследование вопроса о числе решений сравнения в случае многочлена $F(x)$ общего вида встречает значительные трудности и при его решении получены лишь отдельные частные результаты.

Систему сравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \qquad (2)$$

можно трактовать как систему алгебраич. уравнений:

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

над простым конечным полем $\mathbb{Z}/(p)$, состоящим из p элементов; число решений этой системы сравнений будет числом $\mathbb{Z}/(p)$-рациональных точек *алгебраического многообразия*, определяемого системой уравнений (2). Поэтому, наряду с теоретико-числовыми методами, к изучению А. с. или систем А. с. применяются методы алгебраич. геометрии.

Среди А. с. от нескольких переменных более полно исследованы сравнения вида

$$F(x, y) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Именно, для числа решений N_p А. с. этого вида, где $F(x, y)$ — абсолютно неприводимый многочлен, получена оценка

$$|N_p - p| \leqslant 2g\sqrt{p}.$$

Здесь константа g зависит лишь от многочлена и равна роду кривой $F(x, y)=0$. В первом нетривиальном случае — для эллиптич. сравнения

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

такую оценку получил Х. Хассе (H. Hasse) в 1934, основываясь на формуле сложения точек *Якоби многообразия* кривой $y^2 = x^3 + ax + b$. Позже метод Хассе был распространен А. Вейлем [4] на случай абсолютно неприводимых многочленов F. В [3] указанная оценка была получена с помощью элементарных методов.

А. с. с числом переменных $n \geqslant 3$ изучены значительно слабее. В качестве общего результата можно отметить теорему Шевалле, утверждающую, что если $F(x_1, \ldots, x_n)$ — форма, степень к-рой строго меньше числа переменных, то число решений сравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \pmod{p}$$

положительно и делится на p; для однородных многочленов существование решения не гарантируется; но делимость на p остается в силе (теорема Варнинга). Существуют обобщения последней теоремы на случай систем сравнений.

Теория А. с. имеет многочисленные применения в других разделах теории чисел — в теории диофантовых уравнений, задачах аддитивной теории чисел, теории алгебраич. чисел и т. д.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Степанов С. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [4] Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948.

С. А. Степанов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида $f_n = 0$, где f_n — *многочлен* n-й степени от одного или нескольких переменных ($n \geqslant 0$). А. у. с одним неизвестным наз. уравнение вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Здесь n — целое неотрицательное число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ наз. коэффициентами уравнения и являются данными, x наз. неизвестным и является искомым. Коэффициенты А. у. (1) предполагаются не все равными нулю. Если $a_0 \neq 0$, то n наз. степенью уравнения.

Значения неизвестного x, к-рые удовлетворяют уравнению (1), т. е. при подстановке вместо x обращают уравнение в тождество, наз. корнями уравнения (1), а также корнями многочлена

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n. \quad (2)$$

Корни многочлена связаны с его коэффициентами по формулам Виета (см. *Виета теорема*). Решить уравнение — значит найти все его корни, лежащие в рассматриваемой области значений неизвестного.

Для приложений наиболее важен случай, когда коэффициенты и корни уравнения — числа той или иной природы (напр., рациональные, действительные или комплексные). Рассматривается также и случай, когда коэффициенты и корни - элементы произвольного *поля*.

Если данное число (или элемент поля) c — корень многочлена $f_n(x)$, то согласно *Безу теореме* $f_n(x)$ делится на $x-c$ без остатка. Деление можно выполнять по *Горнера схеме*.

Число (или элемент поля) c наз. k-кратным корнем многочлена $f(x)$ (k — натуральное число), если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$. Корни кратности 1 наз. простыми корнями многочлена.

Каждый многочлен $f(x)$ степени $n>0$ с коэффициентами из поля P имеет в поле P не более n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность (и, значит, не более n различных корней).

В *алгебраически замкнутом поле* каждый многочлен степени n имеет ровно n корней (считая их кратность). В частности, это справедливо для поля комплексных чисел.

Уравнение (1) степени n с коэффициентами из поля P наз. неприводимым над полем P, если многочлен (2) неприводим над этим полем, т. е. не может быть представлен в виде произведения других многочленов над полем P, степени к-рых меньше n. В противном случае многочлен и соответствующее уравнение наз. приводимыми. Многочлены нулевой степени и сам нуль не причисляются ни к приводимым, ни к неприводимым. Свойство данного многочлена быть приводимым или неприводимым над полем P зависит от рассматриваемого поля. Так, многочлен x^2-2 неприводим над полем рациональных чисел, т. к. иначе он имел бы рациональные корни, но приводим над полем действительных чисел: $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Аналогично, многочлен x^2+1 неприводим над полем действительных чисел, но приводим над полем комплексных чисел. Вообще, над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени, и всякий многочлен может быть разложен на линейные множители. Над полем действительных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени и многочлены 2-й степени, не имеющие действительных корней (и всякий многочлен разлагается в произведение линейных и неприводимых квадратных многочленов). Над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любых степеней, таковы, напр., многочлены вида x^n+2. Неприводимость многочлена над полем рациональных чисел устанавливается критерием Эйзенштейна: если для многочлена (2) степени $n>0$ с целыми коэффициентами существует простое число p такое, что старший коэффициент a_0 не делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, а свободный член a_n не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел.

Пусть P — произвольное поле. Для любого многочлена $f(x)$ степени $n>1$, неприводимого над полем P, существует такое *расширение* поля P, в к-ром содержится хотя бы один корень многочлена $f(x)$; более того, существует поле разложения многочлена $f(x)$, т. е. расширение поля P, в к-ром этот много-

член может быть разложен на линейные множители. Любое поле имеет алгебраически замкнутое расширение.

Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Всякое А. у. степени, не превосходящей 4, решается в радикалах. Решение задач, приводящихся к частным видам уравнений 2-й и 3-й степеней, можно найти еще в древнем Вавилоне (2000 лет до н. э.) (см. *Квадратное уравнение*, *Кубическое уравнение*). Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге Диофанта «Арифметика» (3 в. н. э.). Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней с буквенными коэффициентами было получено итальянскими математиками в 16 в. (см. *Кардано формула*, *Феррари метод*). В течение почти 300 лет после этого делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнение с буквенными коэффициентами 5-й и более высоких степеней. Наконец, в 1826 Н. Абель (N. Abel) доказал, что такое решение невозможно.

Современная формулировка теоремы Абеля: пусть (1) — уравнение степени $n>4$ с буквенными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$; K — любое поле и P — поле рациональных функций от $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с коэффициентами из K; тогда корни уравнения (1) (лежащие в нек-ром расширении поля P) нельзя выразить через коэффициенты этого уравнения при помощи конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления (имеющих смысл в поле P) и знаков корня (имеющих смысл в расширении поля P). Иными словами, общее уравнение степени $n>4$ неразрешимо в радикалах (см. [3], с. 226).

Теорема Абеля не исключает, однако, того, что каждое А. у. с данными числовыми коэффициентами (или коэффициентами из данного поля) решается в радикалах. Уравнения любой степени n нек-рых частных видов решаются в радикалах (напр., *двучленные уравнения*). Полное решение вопроса о том, при каких условиях А. у. разрешимо в радикалах, было получено ок. 1830 Э. Галуа (E. Galois).

Основная теорема *Галуа теории* о разрешимости А. у. в радикалах формулируется следующим образом: пусть $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из поля K, неприводимый над K; тогда: 1) если хотя бы один корень уравнения $f(x)=0$ выражается в радикалах через коэффициенты этого уравнения, причем показатели радикалов не делятся на характеристику поля K, то группа Галуа этого уравнения над полем K разрешима; 2) обратно, если группа Галуа уравнения $f(x)=0$ над полем K разрешима, причем характеристика поля K или равна нулю, или больше всех порядков композиционных факторов этой группы, то все корни уравнения представляются в радикалах через его коэффициенты, причем все показатели встречающихся радикалов $\sqrt[n]{a}$ — простые числа, а соответствующие этим радикалам двучленные уравнения $x^n-a=0$ неприводимы над полями, к к-рым эти радикалы присоединяются.

Э. Галуа доказал эту теорему для случая, когда K — поле рациональных чисел; при этом все условия на характеристику поля K, содержащиеся в формулировке теоремы, становятся ненужными.

Теорема Абеля является следствием теоремы Галуа, так как группа Галуа уравнения степени n с буквенными коэффициентами над полем P рациональных функций от коэффициентов уравнения с коэффициентами из любого поля K — симметрич. группа S_n и при $n>4$ неразрешима. Для любого $n>4$ существуют уравнения степени n с рациональными (и даже целыми) коэффициентами, неразрешимые в радикалах. Примером такого уравнения для $n=5$ может служить уравнение $x^5-p^2x-p=0$, где p — простое число. В теории Галуа применяется метод сведения решения данного А. у.

к цепочке более простых уравнений, наз. *резольвентами* данного уравнения.

Разрешимость уравнений в радикалах тесно связана с вопросом о геометрич. построениях с помощью циркуля и линейки, в частности задача о делении окружности на n равных частей (см. *Деления круга многочлен*, *Первообразный корень*).

Алгебраические уравнения с одним неизвестным с числовыми коэффициентами. Для отыскания корней А. у. с коэффициентами из поля действительных или комплексных чисел степени выше 2-й, как правило, используются методы приближенных вычислений (напр., *Парабол метод*). При этом удобно сначала освободиться от кратных корней. Число c является k-кратным корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен и его производные до порядка $k-1$ включительно обращаются в нуль при $x=c$, а $f^{(k)}(c)\neq 0$. Если разделить $f(x)$ на наибольший общий делитель $d(x)$ этого многочлена и его производной, то получится многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $f(x)$, но только первой кратности. Можно даже построить многочлены, имеющие в качестве простых корней все корни многочлена $f(x)$ одинаковой кратности. Многочлен имеет кратные корни тогда и только тогда, когда его *дискриминант* равен нулю.

Часто возникают задачи определения границ и числа корней. За верхнюю границу модулей всех корней (как действительных, так и комплексных) А. у. (1) с любыми комплексными коэффициентами можно взять число

$$1+\frac{\max\limits_{i>0}|a_i|}{|a_0|}.$$

В случае действительных коэффициентов более точную границу обычно дает *Ньютона метод*. К определению верхней границы положительных корней сводится определение нижней границы положительных, а также верхней и нижней границ отрицательных корней.

Для определения числа действительных корней проще всего применить *Декарта теорему*. Если известно, что все корни данного многочлена действительны (как, напр., для характеристич. многочлена действительной симметрич. матрицы), то теорема Декарта дает точное число корней. Рассматривая многочлен $f(-x)$, можно с помощью этой же теоремы найти число отрицательных корней $f(x)$. Точное число действительных корней, лежащих на данном интервале (в частности, число всех действительных корней) многочлена с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней, можно найти по *Штурма правилу*. Теорема Декарта является частным случаем *Будана — Фурье теоремы*, дающей оценку сверху числа действительных корней многочлена с действительными коэффициентами, заключенных в нек-ром фиксированном интервале.

Иногда интересуются разысканием корней специального вида, так, напр., критерий Гурвица дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения (с комплексными коэффициентами) имели отрицательные действительные части (см. *Рауса — Гурвица критерий*).

Для многочлена с рациональными коэффициентами существует метод вычисления всех его рациональных корней. Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами имеет те же корни, что и многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами, получающийся из $f(x)$ умножением на общее кратное всех знаменателей коэффициентов $f(x)$. Рациональными корнями многочлена $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$, $b_n\neq 0$ с целыми коэффициентами могут быть только те несократимые дроби вида p/q, у к-рых p — делитель числа b_n, а q — делитель числа b_0 (и даже только те из этих дробей, для к-рых при любом целом m число $g(m)$ делится на $p-mq$).

Если $b_0=1$, то все рациональные корни многочлена $g(x)$ (если они у него вообще есть) — целые числа, являющиеся делителями свободного члена, и могут быть найдены перебором.

Системы алгебраических уравнений. О системах А. у. 1-й степени см. *Линейное уравнение*.

Систему двух А. у. любых степеней с двумя неизвестными x и y можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y)=a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,\\ g(x,\ y)=b_0(x)\,y^s+b_1(x)\,y^{s-1}+\ldots+b_s(x)=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

где $a_i(x)$, $b_j(x)$ — многочлены от одного неизвестного x. Если x придать нек-рое числовое значение, получится система двух уравнений от одного неизвестного y с постоянными коэффициентами a_i, b_j. *Результантом* этой системы будет следующий определитель:

$$R(f,\ g)=\left|\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ldots & a_n\\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & \ldots\ldots & b_s \end{array}\right\}\begin{array}{l} s\\ \text{строк}\end{array}\quad\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\begin{array}{l} n\\ \text{строк}\end{array}$$

Справедливо утверждение: число x_0 тогда и только тогда является корнем результанта $R(f,\ g)$, когда или многочлены $f(x_0,\ y)$ и $g(x_0,\ y)$ имеют общий корень y_0, или оба старших коэффициента $a_0(x_0)$ и $b_0(x_0)$ равны нулю.

Таким образом, для решения системы (3) надо найти все корни результанта $R(f,\ g)$, подставить каждый из этих корней в систему (3) и найти общие корни этих двух уравнений с одним неизвестным y. Кроме того, надо найти общие корни двух многочленов $a_0(x)$ и $b_0(x)$ и также подставить их в систему (3) и проверить, не имеют ли полученные уравнения с одним неизвестным y общих корней. Иными словами, решение системы двух А. у. с двумя неизвестными сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным и вычислению общих корней двух уравнений с одним неизвестным (общие корни двух или нескольких многочленов с одним неизвестным являются корнями их наибольшего общего делителя).

Аналогично рассмотренному случаю решается система любого числа А. у. с любым числом неизвестных. Эта задача приводит к громоздким вычислениям. Она связана с так наз. *исключения теорией*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [2] Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.— Л., 1941; [3] Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., ч. 1—2, 2 изд., М.— Л., 1947; [4] Манин Ю. И., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963, с. 205—27; [5] Доморяд А. П., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 2, М., 1951, с. 313—411.

И. В. Проскуряков.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — комплексное (в частности, действительное) число, являющееся корнем многочлена

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\quad(1)$$

с рациональными коэффициентами, из к-рых не все равны нулю. Если α — А. ч., то среди всех многочленов с рациональными коэффициентами, имеющих α своим корнем, существует единственный многочлен $\varphi(x)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, и, следовательно, неприводимый (см. *Неприводимый многочлен*). Он наз. каноническим, или минимальным, многочленом А. ч. α. Степень n канонич. многочлена $\varphi(x)$ наз. степенью А. ч. α. Существование неприводимых многочленов любой степени n обусловливает существование А. ч. степени n. Все рациональ-

ные числа, и только они, являются А. ч. 1-й степени. Число i есть А. ч. 2-й степени как корень многочлена x^2+1, а $\sqrt[n]{2}$ при любом натуральном n есть А. ч. степени n как корень неприводимого многочлена x^n-2.

Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ канонич. многочлена наз. числами, с о п р я ж е н н ы м и с А. ч. α, и тоже являются А. ч. степени n. Все числа, сопряженные с α, различны. Важной характеристикой А. ч., кроме степени, является его высота (аналог знаменателя рациональной дроби). Высотой А. ч. α наз. наибольшая из абсолютных величин коэффициентов в неприводимом и примитивном многочлене с целыми рациональными коэффициентами, имеющем α своим корнем. Сумма, разность, произведение и частное двух А. ч. (кроме деления на нуль) суть А. ч., т. е. множество всех А. ч. образует *поле*. Корень многочлена с алгебраич. коэффициентами есть А. ч.

А. ч. наз. ц е л ы м, если все коэффициенты в его канонич. многочлене — целые рациональные числа. Напр., i и $1+\sqrt{2}$ — целые А. ч. как корни многочленов x^2+1 и x^2-2x-1.

Понятие целого А. ч. является обобщением понятия целого рационального числа (целое рациональное число m есть целое А. ч. как корень многочлена $x-m$). Многие свойства целых рациональных чисел сохраняются и для целых А. ч. Так, целые А. ч. образуют кольцо. Однако действительные целые А. ч. образуют всюду плотное множество, в то время как целые рациональные — дискретное множество. В 1872 Г. Кантор (G. Kantor) доказал, что множество всех А. ч. счетно, откуда следовало существование *трансцендентных чисел*.

Корень любого (не обязательно неприводимого) многочлена с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице, является целым А. ч. Более того, корень многочлена с целыми алгебраич. коэффициентами и старшим коэффициентом 1 есть целое А. ч. В частности, корень любой степени k из целого А. ч. есть целое А. ч. Для всякого А. ч. α существует такое натуральное r, что $r\alpha$ — целое А. ч. (аналогия с рациональными числами). В качестве наименьшего возможного числа r можно взять модуль старшего коэффициента в неприводимом и примитивном многочлене с целыми рациональными коэффициентами, имеющем α своим корнем. Все сопряженные целого А. ч.— тоже целые А. ч.

Говорят, что целое А. ч. β делится на целое А. ч. α ($\alpha\neq 0$), если существует целое А. ч. γ, для к-рого $\beta=\gamma\alpha$. Для целых А. ч. справедливы многие свойства делимости, к-рые имеют место для целых рациональных чисел.

Целое А. ч. ε наз. а л г е б р а и ч. е д и н и ц е й (коротко — е д и н и ц е й), если оно делит число 1, т. е. если $1/\varepsilon$ — целое А. ч. Единица делит любое целое А. ч. Число, обратное единице, есть единица; числа, сопряженные с единицей, суть единицы; каждый делитель единицы есть единица; произведение конечного числа единиц есть единица. Целое А. ч. будет единицей тогда и только тогда, когда произведение всех его сопряженных равно ± 1. Корни k-й степени из числа 1 являются единицами, причем каждая из них по модулю равна 1. Существует бесконечное множество других единиц, не равных по модулю 1. Напр., числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ являются единицами как корни многочлена x^2-4x+1. Но среди их степеней найдутся единицы, сколь угодно малые и сколь угодно большие по величине. В поле рациональных чисел имеются лишь две единицы $+1$ и -1.

Два целых А. ч. наз. а с с о ц и и р о в а н н ы м и, если они отличаются множителем, являющимся единицей. Имеется еще одно важное отличие кольца целых

А. ч. от кольца целых рациональных чисел. В первом — нельзя ввести понятие неразложимого целого числа (аналог простого числа). Это видно хотя бы из того, что корень из любого целого А. ч. есть целое А. ч. Понятие неразложимого числа (с точностью до класса ассоциированных чисел) можно ввести в нек-рых подполях поля всех А. ч., так наз. алгебраических полях. Но оказывается, что в таких полях разложение целого А. ч. на неразложимые сомножители не всегда однозначно.

А. ч. не допускают слишком хорошее приближение рациональными и алгебраич. числами (теорема Лиувилля). Этот факт впервые позволил в 1844 доказать существование трансцендентных чисел. Проблема приближения А. ч. рациональными является одной из труднейших в теории чисел; в ее решении получены очень важные результаты (теоремы Туэ, Туэ — Зигеля, Туэ — Зигеля — Рота), но она еще далека от окончательного завершения. Другой труднейшей проблемой теории чисел является вопрос о разложении А. ч. в цепные дроби. Действительные А. ч. 2-й степени (квадратичные иррациональности) представляются в виде бесконечных периодических цепных дробей. О характере разложения действительных А. ч. степеней выше 3-й в обыкновенные цепные дроби до сих пор (70-е гг. 20 в.) ничего не известно.

Комплексное число наз. алгебраическим числом над полем P, если оно является корнем многочлена (1) с коэффициентами из P. Для А. ч. над полем P аналогично определяются канонич. многочлен, степень над полем P, сопряженные числа над полем P. Корень многочлена, коэффициенты к-рого — алгебраические числа над P, есть А. ч. над P.

Не над любым полем P могут существовать А. ч. любой степени n. Напр., над полем комплексных чисел существуют только А. ч. 1-й степени — сами числа этого поля. Одно и то же А. ч. может относительно различных полей иметь разные степени. Так, число i является А. ч. 2-й степени, но имеет 1-ю степень относительно поля комплексных чисел. Множество всех А. ч. над полем P образует числовое поле.

Впервые А. ч. и алгебраич. поле систематически стал рассматривать К. Гаусс (C. Gauss) (гауссовы числа вида $a+bi$, где a и b — рациональные числа). Для обоснования теории биквадратичных вычетов он развил арифметику целых гауссовых чисел. Изучая теорию кубических вычетов, К. Якоби (C. Jacobi) и Ф. Эйзенштейн (F. Eisenstein) создали арифметику чисел вида $a+b\rho$, где $\rho=-(1+\sqrt{-3})/2$ — кубич. корень из числа 1, а a и b — рациональные числа. Попытки доказать *Ферма теорему* привели Э. Куммера (E. Kummer) к глубокому изучению полей деления круга (см. *Круговое поле*), введению понятия идеала и созданию элементов теории А. ч. В работах П. Дирихле (P. Dirichlet), Л. Кронекера (L. Kronecker), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. теория А. ч. получила свое дальнейшее развитие. Большой вклад в нее внесли русские математики Е. И. Золотарев (теория идеалов), Г. Ф. Вороной (кубич. иррациональности, единицы кубич. полей), А. А. Марков (кубич. поле), Ю. В. Сохоцкий (теория идеалов) и др.

Понятие А. ч. и связанное с ним понятие алгебраич. поля — важнейшие понятия теории чисел и алгебры. А. ч., являясь обобщением рациональных чисел, выделяют в полях действительных и комплексных чисел подполя А. ч., обладающих специальными алгебраич. свойствами. Развитие теории А. ч. оказало большое влияние на создание и развитие общей теории колец и полей.

А. ч. находит большое применение в различных разделах теории чисел, алгебры и др. разделах математики;

теории форм, диофантовых уравнениях, диофантовых приближениях, трансцендентных числах, геометрии чисел, алгебраической геометрии, теории Галуа и др.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1—2, М.— Л., 1934—37; [2] Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, пер. с нем., М.— Л., 1940; [3] Landau E., Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Lpz.—B., 1918; [4] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd 3, Lpz., 1927; [5] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966.

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МЕРА чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — функция

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; n, H) = \min |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|,$$

где минимум берется по всем многочленам степени не выше n, с целыми рациональными коэффициентами, из к-рых не все равны нулю, и высоты, не превосходящей H. Подробнее см. *Трансцендентности мера.*

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМОРФИЗМ — изоморфное отображение алгебраической системы на себя. Автоморфизмом (А.) Ω-системы $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega \rangle$ наз. всякое взаимно однозначное отображение φ множества A на себя, обладающее свойствами:

$$\varphi(F(x_1, \ldots, x_n)) = F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)), \quad (1)$$

$$P(x_1, \ldots, x_m) \Longleftrightarrow P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) \quad (2)$$

для всех $x_1, x_2, \ldots$ из A и для всех F, P из Ω. Другими словами, А. Ω-системы $\boldsymbol{A}$ есть изоморфное отображение системы $\boldsymbol{A}$ на себя. Пусть G — множество всех А. системы $\boldsymbol{A}$. Если $\varphi \in G$, то обратное отображение φ^{-1} также обладает свойствами (1), (2) и поэтому $\varphi^{-1} \in G$. Произведение $\alpha = \varphi\psi$ А. φ, ψ системы $\boldsymbol{A}$, определяемое формулой $\alpha(x) = \psi(\varphi(x))$, $x \in A$, снова является А. системы $\boldsymbol{A}$. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ есть группа, наз. группой всех А. системы $\boldsymbol{A}$ и обозначаемая через $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. Подгруппы группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ наз. просто группами А. системы $\boldsymbol{A}$.

Пусть φ — А. системы $\boldsymbol{A}$ и θ — конгруэнция этой системы. Полагая

$$(x, y) \in \theta_\varphi \Longleftrightarrow (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \in \theta, \quad x, y \in A,$$

получим снова конгруэнцию θ_φ системы $\boldsymbol{A}$. А. φ наз. IC-автоморфизмом, если $\theta_\varphi = \theta$ для любой конгруэнции θ системы $\boldsymbol{A}$. Множество $IC(\boldsymbol{A})$ всех IC-автоморфизмов системы $\boldsymbol{A}$ является нормальным делителем группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$, и факторгруппа $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})/IC(\boldsymbol{A})$ изоморфна нек-рой группе А. решетки всех конгруэнций системы $\boldsymbol{A}$ [1]. В частности, всякий внутренний А. $x \to a^{-1}xa$ группы, определяемый к.-л. фиксированным элементом a этой группы, является IC-автоморфизмом. Однако пример циклич. группы простого порядка показывает, что не всякий IC-автоморфизм группы — внутренний.

Пусть $\mathfrak{K}$ — нетривиальное многообразие Ω-систем или к.-л. другой класс Ω-систем, обладающий свободными системами любого (ненулевого) ранга. А. φ системы $\boldsymbol{A}$ из класса $\mathfrak{K}$ наз. I-автоморфизмом, если существует терм $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Ω от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, для к-рого: 1) в системе $\boldsymbol{A}$ существуют такие элементы $a_2, \ldots, a_n$, что для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\varphi(x) = f_\varphi(x, a_2, \ldots, a_n),$$

2) для любой системы $\boldsymbol{B}$ из класса $\mathfrak{K}$ отображение

$$x \longrightarrow f_\varphi(x_1\ x_2\ \ldots, x_n) \quad (x \in B)$$

является А. этой системы при любом выборе элементов $x_2, \ldots, x_n$ в системе $\boldsymbol{B}$. Множество $I(\boldsymbol{A})$ всех I-автоморфизмов каждой системы $\boldsymbol{A}$ из класса $\mathfrak{K}$ является нормальным делителем группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. В классе $\mathfrak{K}$ всех групп понятие I-автоморфизма совпадает с понятием

внутреннего А. группы [2]. Более общее понятие формульного А. Ω-системы см. в [3].

Пусть A — алгебраич. система. Заменяя каждую основную операцию F в A предикатом

$$R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = y$$
$$(x_1, \ldots, x_n, y \in A),$$

получим так наз. модель A^*, представляющую систему A. Справедливо равенство $\mathrm{Aut}(A^*) = \mathrm{Aut}(A)$. Если системы $A = \langle A, \Omega \rangle$, $A' = \langle A, \Omega' \rangle$ имеют общий носитель A и $\Omega \subset \Omega'$, то $\mathrm{Aut}(A) \supseteq \mathrm{Aut}(A')$. Если Ω-система A с конечным числом порождающих финитно аппроксимируема, то группа $\mathrm{Aut}(A)$ также финитно аппроксимируема (см. [1], с. 432). Пусть $\mathfrak{K}$ — класс Ω-систем и пусть $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс всех изоморфных копий групп $\mathrm{Aut}(A)$, $A \in \mathfrak{K}$, а $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс подгрупп групп из класса $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Класс $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ состоит из групп, изоморфно вложимых в группы $\mathrm{Aut}(A)$, $A \in \mathfrak{K}$.

В исследовании групп А. алгебраич. систем выделились следующие две проблемы.

1) Пусть дан класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем. Что можно сказать о классах $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ и $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$?

2) Пусть дан (абстрактный) класс K групп. Существует ли класс Ω-систем $\mathfrak{K}$ данной сигнатуры Ω такой, что $K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ или хотя бы $K = S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$? Доказано, что для любого аксиоматизируемого класса $\mathfrak{K}$ моделей класс групп $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ универсально аксиоматизируем [1]. Доказано также [1], [4], что если $\mathfrak{K}$ — аксиоматизируемый класс моделей, имеющий бесконечные модели, $\langle B, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество и G — группа А. модели $\langle B, \leqslant \rangle$, то существует модель $A \in \mathfrak{K}$ такая, что $A \supseteq B$ и для каждого элемента $g \in G$ существует А. φ системы A такой, что $g(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in B$. Группа G наз.: 1) универсальной, если $G \in S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ для любого аксиоматизируемого класса $\mathfrak{K}$ моделей, обладающего бесконечными моделями; 2) группой порядковых А. упорядочиваемой группы H (см. *Линейно упорядоченная группа*), если G изоморфна нек-рой группе А. группы H, сохраняющих фиксированный линейный порядок $\leqslant$ этой группы (т. е. $a \leqslant b \Rightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ для всех $a, b \in H$, $\varphi \in G$).

Пусть l — класс линейно упорядоченных множеств $\langle M, \leqslant \rangle$, U — класс универсальных групп, RO — класс правоупорядочиваемых групп, OA — класс групп порядковых А. свободных абелевых групп. Тогда (см. [4] — [6]):

$$S\mathrm{Aut}(l) = \mathfrak{U} = RU = OA.$$

Каждая группа изоморфна группе всех А. нек-рой Ω — алгебры. Если $\mathfrak{K}$ — класс всех колец, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс всех групп (см. [1], с. 117, 118). Но если $\mathfrak{K}$ — класс всех групп, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K}) \neq \mathfrak{K}$; напр., циклич. группы C_3, C_5, C_7 порядков 3, 5, 7, соответственно, не принадлежат классу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Не существует также топологич. группы, для к-рой группа всех топологич. А. была бы изоморфна группе C_5 (см. [7]).

Лит.: [1] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [2] Csákány B., «Publ. Math. Debrecen», 1965, v. 12, p. 331—33; [3] Grant I., «Pacif. J. Math.», 1973, v. 44, № 1, p. 107—15; [4] Rabin M. O., в кн.: The theory of models, Amst., 1965, p. 274—84; [5] Cohn P. M., «Mathematika», 1957, v. 4, № 7, p. 41—50; [6] Смирнов Д. М., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, № 6, с. 41—59; [7] Wille R. J., «Quart. J. Math. Oxford», ser. 2, 1967, v. 18, № 69, p. 53—57.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРЫ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, утверждающая, что любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень в поле комплексных чисел. А. о. т. была высказана впервые А. Жираром (A. Girard, 1629) и Р. Декартом (R. Descartes, 1637) в формулировке, отличной от современной. К. Маклорен (C. Maclaurin) и Л. Эйлер (L. Euler) уточнили формулировку А. о. т., придав ей форму, эквивалентную современной: всякий многочлен с действительными коэффициентами

можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert) первым в 1746 опубликовал доказательство А. о. т. Во 2-й пол. 18 в. появляются доказательства Л. Эйлера, П. Лапласа (P. Laplace), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. Во всех этих доказательствах предполагается заранее, что какие-то «идеальные» корни многочлена существуют, а затем доказывается, что, по крайней мере, один из них является комплексным числом. К. Гаусс (C. Gauss) первый доказал А. о. т. без предположения, что корни существуют. Его доказательство, по существу, содержит построение поля разложения многочлена. Во всех доказательствах А. о. т. используются в той или иной форме топологич. свойства действительных и комплексных чисел. Роль топологии была сведена в конечном итоге к единственному предложению, согласно к-рому многочлен с действительными коэффициентами нечетной степени имеет действительный корень.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 9, М., 1968, с. 147—55, 345—49; [2] Ленг С., Алгебра, М., 1968, с. 230—31; [3] Башмакова И. Г., сб. «Историко-математические исследования», 1957, в. 10, с. 257—304.

В. Н. Ремесленников.

АЛГОЛ — общее название ряда *алгоритмических языков*, предназначенных для *автоматизации программирования* и для публикации алгоритмов (сокращение от слов ALGOrithmic и Language).

Первый вариант А. был разработан группой ученых разных стран в 1958. На международной конференции в Париже (1960) был принят язык «алгол-60», к-рый объединил многие удачные свойства существовавших ранее языков программирования. Этот язык получил самое широкое распространение и обычно подразумевается под термином «А.». А. особенно удобен для описания алгоритмов численного анализа. В А. не учитываются конкретные особенности вычислительных машин и не предусмотрены развитые канонизированные средства для задания операций ввода и вывода информации. Для различных машин могут быть разработаны различные конкретные представления эталонного языка А., каждое из к-рых является языком, воспринимаемым транслятором для данной машины. Как правило, переход от эталонного языка А. к конкретному представлению является естественным и не представляет большого труда. Основными символами в А. являются десятичные цифры, строчные и заглавные латинские буквы, знаки препинания, знаки арифметич. и логич. операций, прочие специальные знаки и нек-рые английские слова [в частности, begin («начало»), end («конец»), real («вещественный»), integer («целый»), array («массив»)]. Из основных символов языка по определенным правилам образуются числа, идентификаторы (имена), простые переменные, элементы массивов, указатели функций, выражения, описания, примечания и операторы. Предусмотрено несколько основных типов операторов: оператор присваивания, оператор перехода, условный оператор, к-рый в зависимости от значения входящего в него логич. выражения выбирает для выполнения один из содержащихся в нем внутренних операторов, и оператор цикла. Группа операторов может быть объединена в составной оператор или в блок, содержащий описания. В запись алгоритма на А. могут быть включены описания процедур. Описание процедуры состоит из заголовка и тела. Тело процедуры может представлять собой оператор (чаще всего блок), записанный по обычным правилам А. Для придания языку А. большей гибкости допускается применение процедур, описанных на к.-л. другом языке (напр., на машинном языке). Процедуру можно вызвать с помощью оператора процедуры, состоящего из идентификатора процедуры и списка фактич. параметров, к-рые соответствуют формальным параметрам, преду-

смотренным в заголовке процедуры с данным идентификатором. Выражение может содержать указатель функции, означающий вызов процедуры, предназначенной для вычисления одной величины. Допускается рекурсивный вызов процедур, т. е. такой вызов, при к-ром в процессе выполнения процедуры происходит вызов той же процедуры. В конкретных представлениях А. часто сокращаются языковые возможности, имеющиеся в эталонном А. С целью унификации таких сокращений разработан алгоритмич. язык, наз. подмножеством алгол-60 и представляющий собой упрощенный вариант эталонного А., из к-рого исключены возможности, вызывающие особые трудности при разработке трансляторов для небольших машин. В качестве преемника алгола-60 был предложен язык *алгол-68*, к-рый существенно отличается по структуре от алгола-60, содержит много новых понятий и возможностей и рассчитан на более мощные машины.

Лит.: [1] Алгоритмический язык АЛГОЛ-60, пер. с англ., М., 1965; [2] Лавров С. С., Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60), 2 изд., М., 1967; [3] Ван Вейнгаарден А. [и др.], Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—145; 1970, № 1, с. 13—160.

В. В. Мартынюк.

АЛГОЛ-68 — универсальный *алгоритмический язык*, разработанный в 1964—68 коллективом ученых 12 стран в составе рабочей группы по *алголу* Международной федерации по обработке информации для обмена алгоритмами, для эффективного их выполнения на различных вычислительных машинах и как средство для изучения алгоритмов. Сохраняя стилистич. связь с алголом-60, А.-68 существенно отличается от него богатством и общностью конструкций. Основными видами данных, в дополнение к типам алгола-60 «вещественный», «целый» и «логический», могут быть «литерный» (для буквенно-цифровой информации), «форматный» (для описания формата внешней информации), имя и процедура. Таким образом, имена и процедуры могут «вычисляться» при выполнении программы на А.-68, хотя это вычисление ограничивается динамич. выбором значения имени или процедуры из явно заданной конечной совокупности. Из основных видов можно индуктивно строить новые, составные виды, представляющие либо однородные индексируемые последовательности данных одного вида (мультизначения), либо упорядоченные наборы данных произвольного вида (структуры).

В дополнение к обычному аппарату описания процедур А.-68 содержит средства для описания так наз. инфиксных операций типа $x+y$. Наличие описания приоритета позволяет задавать отношения старшинства между вводимыми инфиксными операциями. Характерное для А.-68 описание тождества является универсальной конструкцией для описания переменных, задания начальных значений, организации подстановки фактич. параметров в процедуры и для задания синонимии.

В А.-68 в позиции выражения может стоять оператор присваивания или даже любая цепочка операторов, вырабатывающая нек-рое значение. В сочетании с возможностью вычисления имен и процедур, а также введением парных скобок для условных выражений это приводит к допустимости в А.-68 конструкций, поясняемых следующим примером:

1) Алгол-68:

если $x > 0$, **то** u **иначе** z **все**

$:= a + (m < n \mid sin \mid cos)\,(t := x \uparrow 2)$,

2) Алгол-60:

$t := x \uparrow 2;$

$r :=$ $a +$ **если** $m < n$ **то** $sin\,(t)$ **иначе**

$\cos(t)$; **если** $x > 0$ **то** $u := r$ **иначе** $z := r$.

Программа в А.-68 состоит из замкнутых, последовательных, условных и совместных предложений. Первые

три обобщают такие понятия алгола-60, как блок, составной оператор и условные выражение и оператор. Совместные предложения обозначают неупорядоченные совокупности составляющих фраз, являясь, в частности, основным средством для указания параллельных ветвей в общем ходе выполнения программы.

Описание семантики А.-68 характерно углубленной проработкой основных концепций алгоритмич. языков, позволяющей с помощью небольшого числа независимых фундаментальных понятий точно описывать процесс выполнения программы. Различаются внешние (относящиеся к конструкциям программы) и внутренние (относящиеся к данным, в том числе к процедурам и именам) объекты. Аксиоматически вводятся отношения между внешними (E) и внутренними (I) объектами, напр. «E_1 содержит E_2», «E_1 идентифицирует E_2», «E обладает I», «I_1 именует I_2», «I_1 является компонентой I_2» и т. п. Выполнение программы описывается в терминах введенных отношений как функция разбора программы.

Особенностью синтаксиса А.-68 является его задание в виде двухступенчатой грамматики, когда порождающие правила А.-68 являются сами допустимыми текстами в нек-ром метаязыке, заданном своей порождающей грамматикой. Грамматич. правила А.-68 имеют, напр., вид:

список ПОНЯТИЙ разделенных РАЗДЕЛИТЕЛЕМ: ПОНЯТИЕ; список ПОНЯТИЙ разделенных разделителем, РАЗДЕЛИТЕЛЬ, ПОНЯТИЕ.

оператор присваивания ВИДА: выражение вырабатывающее имя ВИДА,:=, выражение вырабатывающее вид.

Слова, выраженные большими буквами,— это грамматич. единицы метаязыка, порождающие правила для к-рых имеют, напр., вид:

ПОНЯТИЕ: идентификатор, оператор.

РАЗДЕЛИТЕЛЬ: запятая, точка с запятой.

ВИД: целый, логический, имя ВИДА.

Нек-рые понятия метаязыка, напр. ВИД, могут иметь бесконечное число порождений. Собственно порождающие правила А.-68 получаются систематич. заменой понятий метаязыка в грамматич. правилах на любое одно и то же их порождение. Результирующие правила в металингвистич. обозначениях алгола-60 выглядят, напр., так:

⟨список идентификаторов разделенных запятыми⟩ ::= ⟨идентификатор⟩|⟨список идентификаторов разделенных запятыми⟩⟨запятая⟩⟨идентификатор⟩

⟨оператор присваивания целого⟩ ::= ⟨выражение вырабатывающее имя целого⟩ := ⟨выражение вырабатывающее целое⟩.

Использование двухступенчатой грамматики позволяет, во-первых, сократить число однотипных порождающих правил и, во-вторых, выразить средствами синтаксиса атрибутную информацию понятий и нек-рые контекстные зависимости, к-рые в противном случае формулируются в виде содержательных ограничений.

Лит.: [1] Ван Вейнгаарден А. [и др.], Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—145; 1970, № 1, с. 13—160; [2] Линдси Ч., Мюйлен С., Неформальное введение в АЛГОЛ-68, пер. с англ., М., 1973.

А. П. Ершов.

АЛГОРИТМ, алгорифм,— точное предписание, к-рое задает вычислительный процесс (называемый в этом случае алгоритмическим), начинающийся с произвольного исходного данного (из нек-рой совокупности возможных для данного А. исходных данных) и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата. А. являются, напр., известные из начальной школы правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком; в этих А. возможными результатами

служат натуральные числа, записанные в десятичной системе, а возможными исходными данными — упорядоченные пары таких чисел. Вообще говоря, не предполагается, что результат будет обязательно получен: процесс применения А. к конкретному возможному исходному данному (т. е. алгоритмич. процесс, развертывающийся начиная с этого данного) может также оборваться безрезультатно (в этом случае говорят, что произошла б е з р е з у л ь т а т н а я о с т а н о в к а) или не закончиться вовсе. В случае, если процесс заканчивается (соответственно не заканчивается) получением результата, говорят, что А. п р и м е н и́ м (соответственно н е п р и м е н и́ м) к рассматриваемому возможному исходному данному. (Можно построить такой А. α, для к-рого не существует А., распознающего по произвольному возможному для α исходному данному, применим к нему α или нет; такой А. α можно, в частности, построить так, чтобы совокупностью его возможных исходных данных служил натуральный ряд.)

Понятие А. занимает одно из центральных мест в современной математике, прежде всего вычислительной. Так, проблема численного решения уравнений данного типа заключается в отыскании А., к-рый всякую пару, составленную из произвольного уравнения этого типа и произвольного положительного рационального числа ε, перерабатывает в число (или набор чисел), отличающееся (отличающихся) от корня (корней) этого уравнения меньше, чем на ε. Усовершенствование цифровых вычислительных машин дает возможность реализовать на них все более сложные А. Однако встретившийся в описывающей понятие А. формулировке термин «вычислительный процесс» не следует понимать в узком смысле только цифровых вычислений: уже в школьном курсе алгебры говорят о буквенных вычислениях, да и в арифметич. вычислениях появляются отличные от цифр символы (скобки, знак равенства, знаки арифметич. действий). Целесообразно, таким образом, рассматривать А., оперирующие с произвольными символами и их комбинациями. Простейшим случаем такой комбинации является линейная последовательность символов, образующая *слово*, однако можно рассматривать и «нелинейные» комбинации — такие, как алгебраич. матрицы, знакосочетания в смысле Н. Бурбаки (N. Bourbaki), фразы того или иного языка с расставленными стрелками синтаксич. управления и, вообще, размеченные тем или иным способом графы. Наиболее общее интуитивное понимание состоит в том, что исходными данными и результатами А. могут служить самые разнообразные *конструктивные объекты*. Это открывает возможность широкого применения понятия А. Можно говорить об А. перевода с одного языка на другой, об А. работы поездного диспетчера (перерабатывающего информацию о движении поездов в приказы) и др. примерах алгоритмич. описания процессов управления; именно поэтому понятие А. является одним из центральных понятий кибернетики.

Пример алгоритма. Пусть возможными исходными данными и возможными результатами служат всевозможные слова в *алфавите* $\{a, b\}$. Условимся называть переход от слова X к слову Y «допустимым» в следующих двух случаях (ниже P обозначает произвольное слово): 1) X имеет вид aP, а Y имеет вид Pb; 2) X имеет вид baP, а Y имеет вид $Paba$. Формулируется предписание: «взяв к.-л. слово в качестве исходного, делай допустимые переходы до тех пор, пока не получится слово вида aaP; тогда остановись, слово P и есть результат». Это предписание образует А., к-рый обозначим $\mathfrak{A}$. Возьмем в качестве исходного данного слово *babaa*. После одного перехода получим *baaaba*, после второго *aabaaba*. В силу предписания мы должны остановиться, результат есть *baaba*. Возьмем в качестве исходного данного слово *baaba*. Получим последовательно *abaaba*,

baabab, *abababa*, *bababab*, *babababa*, ... Можно доказать, что процесс никогда не кончится (т. е. никогда не возникает слово, начинающееся с *aa*, и для каждого из получающихся слов можно будет совершить допустимый переход). Возьмем теперь в качестве исходного данного слово *abaab*. Получим *baabb*, *abbaba*, *bbabab*. Далее мы не можем совершить допустимый переход, и в то же время нет сигнала остановки. Произошла безрезультатная остановка. Итак, $\mathfrak{A}$ применим к слову *babaa* и неприменим к словам *baaba* и *abaab*.

Значение алгоритмов. А. встречаются в науке на каждом шагу: умение решать задачу «в общем виде» всегда означает, по существу, владение нек-рым А. Говоря, напр., об умении человека складывать числа, имеют в виду не то, что он для любых чисел рано или поздно сумеет найти их сумму, а то, что он владеет нек-рым единообразным приемом сложения, применимым к любым двум конкретным записям чисел, т. е., иными словами, А. сложения (примером такого А. и является известное правило сложения чисел столбиком). Понятие задачи «в общем виде» уточняется при помощи понятия массовая *алгоритмическая проблема* (м. а. п.). М. а. п. задается серией отдельных, единичных проблем и состоит в требовании найти единый А. их решения (когда такого А. не существует, говорят, что рассматриваемая м. а. п. н е р а з р е ш и м а). Так, проблема численного решения уравнений данного типа и проблема *автоматического перевода* суть м. а. п.: образующими их единичными проблемами являются в 1-м случае проблемы численного решения отдельных уравнений данного типа, а во 2-м случае — проблемы перевода отдельных фраз. Ролью м. а.п. и определяется как значение, так и сфера приложения понятия А.: напр., а алгебре возникают м. а. п. проверки алгебраич. равенств различных типов, в математич. логике — м. а. п. распознавания выводимости предложений из заданных аксиом и т. п. (для математич. логики понятие А. существенно еще и потому, что на него опирается центральное для математич. логики понятие *исчисления*, служащее обобщением и уточнением интуитивных понятий «вывода» и «доказательства»). Установление неразрешимости к.-л. м. а. п. (напр., проблемы распознавания истинности или доказуемости для к.-л. логико-математич. языка) является важным познавательным актом, показывающим, что для решения конкретных единичных проблем данной серии принципиально необходимы специфические для каждой отдельной проблемы методы.

Содержательные явления, к-рые легли в основу образования понятия «А.», издавна занимали важное место в науке. С древнейших времен многие задачи математики заключались в поисках тех или иных конструктивных методов. Эти поиски, особенно усилившиеся в связи с созданием удобной символики, а также осмысления принципиального отсутствия искомых методов в ряде случаев (задача о квадратуре круга и подобные ей) — все это было мощным фактором развития научных знаний. Осознание невозможности решить задачу прямым вычислением привело к созданию в 19 в. теоретико-множественной концепции. Лишь после периода бурного развития этой концепции (в рамках к-рой вопрос о конструктивных методах в современном их понимании вообще не возникает) оказалось возможным в сер. 20 в. вновь вернуться к вопросам конструктивности, но уже на новом уровне, обогащенном выкристаллизовавшимся понятием А. Это понятие легло в основу конструктивного направления в математике.

Само слово «А.» происходит от algoritmi, являющегося, в свою очередь, латинской транслитерацией арабского имени хорезмийского математика 9 в. аль-Хорезми. В средневековой Европе А. назывались десятичная позиционная система счисления и искусство счета в

ней, поскольку именно благодаря латинскому переводу (12 в.) трактата аль-Хорезми Европа познакомилась с позиционной системой.

Строение алгоритмического процесса. Алгоритмич. процесс есть процесс последовательного преобразования конструктивных объектов (к. о.), происходящий дискретными «шагами»; каждый шаг состоит в смене одного к. о. другим. Так, при применении А. $\mathfrak{A}$ к слову *baaba* возникают последовательно *baaba*, *abaaba*, *baabab* и т. д. А при применении, скажем, А. вычитания столбиком к паре $\langle 307, 49 \rangle$ последовательно возникнут такие к. о.:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{r} 307 \\ -\ 49 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} \dot{3}0\dot{7} \\ -\ 49 \\ \hline 8 \end{array} & \begin{array}{r} \dot{3}\dot{0}\dot{7} \\ -\ 49 \\ \hline 58 \end{array} & \begin{array}{r} \dot{3}0\dot{7} \\ -\ 49 \\ \hline 258 \end{array} \end{array}$$

При этом в ряду сменяющих друг друга к. о. каждый последующий полностью определяется (в рамках данного А.) непосредственно предшествующим. При более строгом подходе предполагается также, что переход от каждого к. о. к непосредственно следующему достаточно «элементарен» — в том смысле, что происходящее за один шаг преобразование предыдущего к. о. в следующий носит локальный характер (преобразованию подвергается не весь к. о., а лишь нек-рая, заранее ограниченная для данного А. его часть, и само это преобразование определяется не всем предыдущим к. о., а лишь этой ограниченной частью).

Таким образом, наряду с совокупностями возможных исходных данных и возможных результатов для каждого А. имеется еще совокупность возможных п р о м е ж у т о ч н ы х р е з у л ь т а т о в, представляющая собой ту рабочую среду, в к-рой развивается алгоритмич. процесс. Для $\mathfrak{A}$ все три совокупности совпадают, а для А. вычитания столбиком — нет: возможными исходными данными служат пары чисел, возможными результатами — числа (все в десятичной системе), а возможные промежуточные результаты суть «трехэтажные» записи вида $\begin{array}{r} \bar{p} \\ -\ q \\ \hline r \end{array}$, где q — запись числа в десятичной системе, r — такая же запись или пустое слово, а p — запись числа в десятичной системе с допущением точек над нек-рыми цифрами. Как правило, для данного А. можно выделить 7 характеризующих его (не независимых) параметров: 1) совокупность возможных исходных данных, 2) совокупность возможных результатов, 3) совокупность возможных промежуточных результатов, 4) правило начала, 5) правило непосредственной переработки, 6) правило окончания, 7) правило извлечения результата.

«Уточнения» понятия алгоритма. Понятие А. в его общем виде принадлежит к числу основных первоначальных понятий математики, не допускающих определения в терминах более простых понятий. Возможные уточнения понятия А. приводят, строго говоря, к известному сужению этого понятия. Каждое такое уточнение состоит в том, что для каждого из указанных 7 параметров А. точно описывается нек-рый класс, в пределах к-рого этот параметр может меняться. Выбор таких классов и отличает одно уточнение от другого. Поскольку 7 параметров однозначно определяют нек-рый А., то выбор 7 классов изменения этих параметров определяет нек-рый класс А. Однако такой выбор может претендовать на название «уточнения», лишь если имеется убеждение, что для произвольного А., имеющего допускаемые данным выбором совокупности возможных исходных данных и возможных результатов, может быть указан равносильный ему А. из определенного данным выбором класса А. Это убеждение формулируется для каждого уточнения в виде основной гипотезы, к-рая — при современном уровне наших пред-

ставлений — не может быть предметом математич. доказательства.

Первые уточнения описанного типа предложили в 1936 Э. Л. Пост (E. L. Post, см. [5]) и А. М. Тьюринг (A. M. Turing, см. [3], [4]), их конструкции во многом предвосхитили идеи, заложенные в основу современных цифровых вычислительных машин. Известны также уточнения, сформулированные А. А. Марковым (см. [10], [11], *Нормальный алгорифм*) и А. Н. Колмогоровым (см. [12],[13]; последний предложил трактовать конструктивные объекты как топологич. комплексы определенного вида, что дало возможность уточнить свойство «локальности» преобразования). Для каждого из предложенных уточнений соответствующая основная гипотеза хорошо согласуется с практикой. В пользу этой гипотезы говорит и то, что, как можно доказать, все предложенные уточнения в нек-ром естественном смысле эквивалентны друг другу.

В качестве примера рассмотрим уточнение, предложенное А. М. Тьюрингом. В своем оригинальном виде это уточнение заключалось в описании нек-рой абстрактной вычислительной машины, состоящей из: 1) бесконечной ленты, разбитой на следующие друг за другом в линейном порядке ячейки, причем в каждой ячейке записан к.-л. символ из так наз. «внешнего алфавита» машины, и 2) каретки, находящейся в каждый момент в нек-ром «состоянии» (из заданного конечного списка состояний), способной перемещаться вдоль ленты и изменять содержимое ячеек; А. вычислений на такой машине («тьюрингов А.») задается в виде программы, управляющей действиями каретки. Более подробное и точное описание см. в статье *Тьюринга машина*; здесь приводится модернизированное изложение конструкции Тьюринга в терминах, указанных выше 7 параметров. Чтобы задать тьюрингов А., надо указать: а) попарно непересекающиеся алфавиты $Б$, $Д$, $Ч$ с выделенной в $Д$ буквой λ и выделенными в $Ч$ буквами α и ω, б) набор пар вида $\langle p\xi, \eta Tq\rangle$, где p, $q \in Ч$, ξ, $\eta \in Б \cup Д$, а T есть один из трех знаков $-$, 0, $+$, причем предполагается, что в этом наборе (наз. программой) нет 2 пар с одинаковыми первыми членами. Параметры А. задаются так: возможными исходными данными и возможными результатами служат слова в $Б$, а возможными промежуточными результатами — слова в алфавите $Б \cup Д \cup Ч$, содержащие не более одной буквы из $Ч$. Правило начала: исходное слово P переводится в слово $\lambda\alpha P\lambda$. Правило окончания: заключительным является промежуточный результат, содержащий ω. Правило извлечения результата: результатом объявляется цепочка всех тех букв заключительного промежуточного результата, к-рая идет вслед за ω и предшествует первой букве, не принадлежащей $Б$. Правило непосредственной переработки, переводящее A в A', состоит в следующем. Приписываем к A слева и справа букву λ; затем в образовавшемся слове часть вида $\varepsilon p\xi$, где $p \in Ч$, $\varepsilon\xi \in Б \cup Д$, заменяем на слово Q по следующему правилу: в программе ищется пара с первым членом $p\xi$; пусть второй член этой пары есть ηTq; если T есть $-$, то $Q = q\varepsilon\eta$; если T есть 0, то $Q = \varepsilon q\eta$; если T есть $+$, то $Q = \varepsilon\eta q$. Возникающее после этой замены слово и есть A'.

Лит. см. [3]—[5], [10]—[13] при ст. *Алгоритмов теория.*

В. А. Успенский.

АЛГОРИТМ В АЛФАВИТЕ A — «точное общепонятное предписание, определяющее потенциально осуществимый процесс последовательного преобразования абстрактных слов в *алфавите* A, процесс, допускающий любое слово в A в качестве исходного» (см. [1], с. 51).

А. в а. представляют собой частный случай общего понятия *алгоритма*. Исходными данными и возможными результатами применения А. в а. являются *конструктивные объекты* достаточно общего типа — *слова*, и это обстоятельство определяет роль понятия А. в а.

в математике. К 70-м гг. 20 в. были выработаны различные уточнения (стандартизации) понятия А. в а.; наибольшую известность среди них получили *нормальные алгорифмы* А. А. Маркова и алгоритмы, определяемые на основе понятия *Тьюринга машины*. При построении конкретных А. в а., иногда по соображениям технического характера, связанным с деталями определения алгоритма или кодировки исходных данных, приходится расширять исходные алфавиты путем введения дополнительных букв и рассматривать алгоритмы в так расширенных алфавитах. В таких ситуациях удобным инструментом является понятие а л г о р и т м а н а д д а н н ы м а л ф а в и т о м, т. е. алгоритма в нек-ром расширении этого алфавита. Для двух алгоритмов над данным алфавитом могут быть естественным образом введены понятия эквивалентности и полной эквивалентности относительно него этих алгоритмов.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42. *Н. М. Нагорный.*

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНЫЙ — алгоритм, устанавливающий свойства элементов множества и использующий на каждом шаге при этом только информацию об окрестности элемента. В терминах А. л. естественно формулируются и решаются задачи о существовании или несуществовании эффективных алгоритмов для различных дискретных экстремальных задач.

Пусть задано семейство $\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \in M\}$ множеств, и пусть каждой паре $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, сопоставлено множество $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ такое, что: 1) $\mathfrak{A} \in S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, 2) $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$, 3) если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_2$ и $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) \subseteq \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$, то $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$. Тогда множество $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ наз. о к р е с т н о с т ь ю $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$. Примерами окрестностей служат окрестности конъюнкции в сокращенной нормальной форме (см. *Булевых функций минимизация*).

Пусть Γ — конечный неориентированный *граф*, $\Gamma = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ — множество вершин Γ, $M_2 = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{r_p}, a_{r_t})\}$ — множество ребер Γ. Окрестность $S_1(R, \Gamma)$ ребра $R = (a_i, a_j)$ графа Γ состоит из всех вершин ребер, инцидентных ребру R, а также из всех ребер, вершины к-рых входят в окрестность $S_1(R, \Gamma)$. Пусть определена окрестность $S_{n-1}(R, \Gamma)$, тогда окрестность $S_n(R, \Gamma)$ состоит из всех вершин ребер, инцидентных вершинам окрестности $S_{n-1}(R, \Gamma)$, и всех ребер, вершины к-рых принадлежат окрестности $S_n(R, \Gamma)$. Аналогично вводятся окрестности $S_1(a_j, \Gamma), \ldots, S_n(a_j, \Gamma), \ldots$ для произвольной вершины a_j графа Γ.

Пусть на парах $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, определена система двуместных предикатов $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}), \ldots, P_l(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, к-рая разбита на два непересекающихся подмножества $\langle P_1, \ldots, P_r \rangle$ и $\langle P_{r+1}, \ldots, P_l \rangle$. Элементы первого подмножества наз. о с н о в н ы м и п р е д и к а т а м и, второго — в с п о м о г а т е л ь н ы м и п р е д и к а т а м и. Вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м, если $\alpha_i \in \{0, 1, \Delta\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Вектор $\tilde{\alpha}$ наз. д о п у с т и м ы м для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, если для всех $\alpha_i \neq \Delta$ выполнено равенство $\alpha_i = P_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Множество $J(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ всех информационных векторов, допустимых для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м м н о ж е с т в о м $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q\}$ и $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{il}) \in J(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{M})$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Множество $\mathfrak{M}^* = \{\mathfrak{A}^{\alpha_{11} \ldots \alpha_{1l}}, \ldots, \mathfrak{A}^{\alpha_{q1} \ldots \alpha_{ql}}\}$ наз. д о п у с т и м ы м для $\mathfrak{M}$. Класс $J(\mathfrak{M})$ всех допустимых для $\mathfrak{M}$ множеств $\mathfrak{M}^*$ наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м к л а с с о м множества $\mathfrak{M}$ по системе предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_l$. Очевидно, что окрестность $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ определяет окрестность $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)$.

Введем систему функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ таких, что $\varphi_i(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)) = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$. Функции φ_i

определены на всех парах $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ таких, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$, и удовлетворяют следующим условиям: 1) $\alpha_i = \beta_j$, если $j \neq i$; 2) множество $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$, которое получается из $\mathfrak{M}^*$ заменой элемента $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, допустимо для $\mathfrak{M}$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{M}}^* \in J(\mathfrak{M})$. Для краткости пары $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ обозначаются через $(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$.

На нек-рых из описанных множеств вводится частичный порядок: 1) на множестве $M_1 = \{0, 1, \Delta\} - \Delta < 0$, $\Delta < 1$, 2) на множестве M_2 информационных векторов длины l — $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, l$; 3) на множестве элементов с отметками — $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \leqslant \mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \dots, \beta_l)$; 4) на множестве $M^* = \bigcup_{\mathfrak{M} \in M} J(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}_1^* \leqslant \mathfrak{M}_2^*$, если, во-первых, $\mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{M}_2^*$ принадлежат одному информационному классу $J(\mathfrak{M})$ и, во-вторых, из того, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l} \in \mathfrak{M}_2^*$, следует $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \dots, \beta_l)$; 5) на множестве окрестностей вида $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*) - S_1 \leqslant S_2$, где $S_1 = S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}_1^*)$ и $S_2 = S(\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}, \mathfrak{M}_2^*)$, тогда и только тогда, когда $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$ и из условий $\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l} \in S_1$, $\mathfrak{B}^{\delta_1 \dots \delta_l} \in S_2$ следует, что $(\gamma_1, \dots, \gamma_l) \leqslant (\delta_1, \dots, \delta_l)$.

Пусть A и B — элементы одного из множеств 1) — 5). Если $A \leqslant B$ и $A \geqslant B$, то элементы A и B наз. р а в н ы м и п о и н ф о р м а ц и и, что обозначается $A \curlywedge B$. Функция $\varphi(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$ наз. м о н о т о н н о й, если из соотношения $S_1 \leqslant S_2$ следует, что для $i = 1, 2, \dots, l$

$$\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S_1, \mathfrak{M}_1^*) \leqslant \varphi_i(\mathfrak{A}, \beta_1, \dots, \beta_l, S_2, \mathfrak{M}_2^*).$$

Для определения А. л. необходимо также ввести а л г о р и т м A_π у п о р я д о ч и в а н и я. Пусть M — произвольное множество, составленное из элементов с информационными векторами, а $N = \{1, 2, \dots, l\}$. Рассмотрим множество $M \widetilde{\times} N$ всех пар $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$ таких, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in M$, $j \in N$, $\alpha_j = \Delta$. Алгоритм A_π упорядочивает множество $M \widetilde{\times} N$. А. л. A полностью определяется системой предикатов $P_1, \dots, P_l$, разбиением этой системы на основные $P_1, \dots, P_r$ и вспомогательные $P_{r+1}, \dots, P_l$ предикаты, системой монотонных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_l$, $\varphi_i = \varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$, и алгоритмом A_π.

Пусть $\mathfrak{M}^* = \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\alpha_{i1} \dots \alpha_{il}}$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$. Первый шаг А. л. состоит в следующем. К множеству $M \widetilde{\times} N$, где $M = \mathfrak{M}^*$, применяется алгоритм A_π; для первой по порядку пары $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$ вычисляется $\varphi_j(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ и элемент $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ заменяется на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$; если $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то берется вторая пара, и т. д.; если для всех элементов $(\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l}, i)$ выполнено равенство $\varphi_i(\mathfrak{B}, \gamma_1, \dots, \gamma_l, S, \mathfrak{M}^*) - (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$, то А. л. A заканчивается после просмотра всех пар из $M \widetilde{\times} N$. В противном случае, после замены вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ на новый вектор $(\beta_1, \dots, \beta_l)$, если нет больше элементов, у к-рых на первых r местах в информационных векторах имеется хотя бы один символ Δ, алгоритм A заканчивается; если они есть, то заканчивается первый шаг А. л. Пусть выполнено n шагов А. л. A. Описание $(n+1)$-го шага в точности повторяет описание первого, если вместо множества $\mathfrak{M}^*$ рассматривать множество $\mathfrak{M}_n^*$, в к-рое перешло $\mathfrak{M}^*$ после первых n шагов А. л. A. В силу монотонности функций φ_i, $i = 1, 2, \dots, l$, А. л. A закончится после конечного числа шагов.

Исходными теоремами для А. л. являются т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и и т е о р е м а с у щ е-

ствования наилучшего алгоритма. Первая теорема утверждает, что результат вычислений основных предикатов не зависит от алгоритма A_π (порядка обхода элементов множества $\mathfrak{M}^*$). Вторая теорема утверждает существование в весьма общих предположениях наилучшего А. л., т. е. А. л., к-рый по заданной фиксированной системе окрестностей вычисляет заданные основные предикаты при фиксированных вспомогательных предикатах всегда, когда это делает любой другой А. л. с той же системой окрестностей, основных и вспомогательных предикатов.

Задача получения наилучшего А. л. в явной форме решена для алгоритмов синтеза минимальных покрытий. Пусть задан набор $\langle \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q, \mu_1, \ldots, \mu_q, M \rangle$, где $\mathfrak{A}_i$ – множество, μ_i – сложность $\mathfrak{A}_i$, $\mu_i > 0$, $i=1, 2, \ldots, q$, $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} \mathfrak{A}_i$. Сложность набора $(\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_p})$ есть $\sum_{j=1}^{p} \mu_{i_j}$. Требуется построить покрытие M множествами из числа $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q$ с минимальной сложностью. Система окрестностей $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ для каждого $\mathfrak{A}_i$ вводится аналогично системе окрестностей для конъюнкций. Наилучший А. л. строится для системы окрестностей S_k при фиксированных предикатах: множество вспомогательных предикатов пусто; в качестве основных рассматриваются предикаты $P_1(\mathfrak{A}, M)$ («$\mathfrak{A}$ не входит ни в одно минимальное покрытие M») и $P_2(\mathfrak{A}, M)$ («$\mathfrak{A}$ входит во все минимальные покрытия M»). Наилучшие А. л. построены также для вычисления простых свойств ребер графа. Большое число различных А. л. было предложено для решения задач минимизации булевых функций, дискретного линейного программирования и т. д.

Важное место в теории А. л. занимают задачи о невычислимости экстремальных свойств в классе А. л. Если на парах $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \in M$, задана система вложенных окрестностей: $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \ldots \subseteq S_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \ldots$ и А. л. работает по системе окрестностей $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, где $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, то говорят, что А. л. имеет индекс k. Число предикатов $P_1, \ldots, P_l$ в определении А. л. естественно считать величиной памяти А. л. Пусть задано множество $\mathcal{P}$ предикатов $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Считается, что все предикаты, участвующие в определении А. л., принадлежат $\mathcal{P}$. Пусть $A(\mathfrak{M}^*)$ – результат применения А. л. A к $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M} \in M$. Про предикат $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ говорят, что он не является (k, l)-вычислимым, если для всякого А. л. индекса k с величиной памяти l, основным предикатом P_1 и вспомогательными $P_2, \ldots, P_l$ из $\mathcal{P}$ найдется множество $\mathfrak{M}^*$ такое, что в $A(\mathfrak{M}^*)$ предикат P_1 будет вычислен не для всех элементов.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – совокупность всех *булевых функций* от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ – предикат «конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит хотя бы в одну минимальную дизъюнктивную нормальную форму». При естественных ограничениях на класс предикатов $\mathcal{P}$ установлено, что предикат $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ не является (k, l)-вычислимым, если $kl < \text{const} \cdot 2^n$. Интересно отметить, что предикат $P(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ «конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит хотя бы в одну тупиковую дизъюнктивную нормальную форму f» (см. *Булевых функций нормальные формы*) является $(2, 1)$-вычислимым, но не $(1, 1)$-вычислимым. Аналогичные результаты получены для предикатов, описывающих вхождение ребра в минимальный путь между заданными вершинами графа.

Лит.: [1] Журавлев Ю. И., «Кибернетика», 1965, № 1, с. 12—19; 1966, № 2, с. 1—11; [2] Хуторянская И. В., «Кибернетика», 1971, № 1, с. 29—33; [3] Журавлев Ю. И., сб. «Проблемы кибернетики», 1962, вып. 8, с. 5—44.

См. также лит. при статье *Булевых функций минимизация.*

Ю. И. Журавлев.

АЛГОРИТМА ИЗОБРАЖЕНИЕ — *конструктивный объект* определенного вида (как правило, натуральное число или слово), содержащий в себе закодированную по фиксированным для алгоритмов данного типа правилам полную информацию об этом алгоритме. Обычно определение А. и. формулируется таким образом, чтобы процедуры получения А. и. по исходному алгоритму и восстановления исходного алгоритма по А. и. осуществлялись по возможности более просто.

И з о б р а ж е н и е $\mathfrak{A}^{И}$ *нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ в алфавите A (не содержащем букв α, β и γ) определяется как слово в алфавите $A\alpha\beta\gamma$, получаемое следующим образом (см. [1], с. 163). В каждой формуле подстановки схемы $\mathfrak{A}$ стрелка заменяется буквой α, точка (если она имеется) — буквой β, а в конце так построенного слова приписывается буква γ. Затем полученные слова выписываются друг за другом в том порядке, в каком соответствующие им формулы подстановки шли в схеме $\mathfrak{A}$. По существу, $\mathfrak{A}^{И}$ представляет собой всего лишь несколько иначе — в виде слова — записанную схему нормального алгорифма $\mathfrak{A}$. По соображениям, связанным с технич. деталями определения нормального алгорифма, несколько более удобным оказывается другой тип изображения нормального алгорифма — так называемая з а п и с ь нормального алгорифма (см. [1], с. 187), являющаяся результатом перевода слова $\mathfrak{A}^{И}$ в к.-л. двухбуквенный алфавит (обычно 01). Аналогичным образом может быть построено изображение программы *Тьюринга машины*. Роль изображения *рекурсивной функции* играет гёделев номер системы определяющих эту функцию равенств (см. [2], с. 221).

При к.-л. уточнении общего понятия алгоритма А. и. определяется с таким расчетом, чтобы оно (фактически — изображаемый им алгоритм) могло входить в состав исходных данных для алгоритмов такого типа. При этом открывается возможность доказывать так наз. «теоремы об универсальных алгоритмах», трактующие об осуществимости алгоритмов, способных моделировать по А. и. работу любого алгоритма рассматриваемого типа.

Если для к.-л. алгоритма А. и. является допустимым исходным данным, то этот алгоритм наз. с а м о п р и м е н и м ы м, если он применим к своему А. и., и н е с а м о п р и м е н и м ы м — в противном случае. Рассуждением, представляющим собой вариант «парадокса Рассела» (см. *Антиномия*) применительно к данной ситуации, можно показать, что естественно возникающая при этом алгоритмич. проблема распознавания самоприменимых алгоритмов среди прочих алгоритмов того же типа оказывается неразрешимой. Этот результат лежит в основе многих теорем о неразрешимости алгоритмич. проблем.

Длина А. и. является одной из естественных мер *алгоритма сложности* (объем памяти, требующейся для запоминания программы алгоритма).

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42); [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Н. М. Нагорный.

АЛГОРИТМА СЛОЖНОСТЬ в ы ч и с л е н и й — функция, дающая числовую оценку трудности (громоздкости) процессов применения алгоритма к исходным данным. Уточнением А. с. вычислений служит понятие с и г н а л и з и р у ю щ е й ф у н к ц и и (или просто с и г н а л и з и р у ю щ е й) — функции, к-рая задается разрешимым отношением между объектами применения алгоритма и натуральными числами и имеет область определения, совпадающую с областью применимости алгоритма.

Чаще всего рассматриваются временны́е и пространственные характеристики алгоритмич. процессов. Так, для *Тьюринга машины* M с и г н а л и з и р у ю щ а я

функция времени (время работы) $T_M(P)$ есть число t тактов работы M при преобразовании исходных слов P в заключительные; сигнализирующая память (или емкости) $S_M(P)$ определяется как количество ячеек ленты, в к-рых хотя бы раз побывала головка машины при работе над P. Сходным образом определяются сигнализирующие времени и емкости для *нормальных алгорифмов*, итеративных сетей, многоголовочных и многоленточных машин Тьюринга и т. п.

Общей особенностью этих двух конкретных типов сигнализирующих является наличие эффективной процедуры, позволяющей для любого алгоритма α (т. е., в частности, для машины Тьюринга, или, точнее, для ее программы), всякого исходного данного x и натурального числа t установить, верно ли, что процесс применения α к x заканчивается со сложностью t. Это обстоятельство положено в основу аксиоматич. построения теории сложности вычислений (см. [1]). Эффективная процедура r наз. мерой вычислений, если она: 1) всегда заканчивается результатом 0 или 1 применительно к тройкам вида ⟨алгоритм, исходное данное, натуральное число⟩, 2) обладает тем свойством, что для любого алгоритма α и исходного данного x равенство $r(\alpha, x, t)=1$ верно не более чем при одном натуральном t, причем такое t существует тогда и только тогда, когда процесс применения α к x заканчивается. Вводится сигнализирующая функция R_α по мере r для α: $R_\alpha(x)=t$ тогда и только тогда, когда $r(\alpha, x, t)=1$.

Таким образом, последнее равенство объявляется эквивалентом высказывания «сложность вычисления α на x равна t (по мере r)».

Фиксируя ту или иную меру вычислений, можно ставить задачи о сложности вычисления конкретных функций f, напр. об отыскании алгоритма α, вычисляющего f «лучше других алгоритмов». Однако, как показывает теорема ускорения (см. ниже), подобная постановка не всегда правомерна, и речь может идти скорее об описании скорости роста тех сигнализирующих R_α, для к-рых α вычисляет f [напр., об отыскании верхней и нижней границ сложности вычисления f — двух функций $G(x)$ и $g(x)$ таких, что существует вычисление α функции f, для к-рого $R_\alpha(x)\leqslant G(x)$, и для всякого алгоритма β, вычисляющего f, функция R_β в каком-то смысле мажорирует g].

Другим важным направлением в теории сложности вычислений является изучение классов сложности — множеств функций, для к-рых существуют вычисления со сложностью, не превышающей к.-л. границы из множества границ, задающих класс. К этому направлению можно отнести и задачи сравнения сложности вычисления для различных типов алгоритмов (автоматов): переход к иной алгоритмич. системе и мере сложности обычно равносилен рассмотрению подходящей новой меры для исходной концепции алгоритмов.

Укажем нек-рые фундаментальные результаты, не зависящие от выбора меры сложности (в том числе и от выбора конкретного уточнения понятия алгоритма) — лишь бы существовала, напр., эффективная возможность взаимного моделирования алгоритмов рассматриваемого типа и обыкновенных машин Тьюринга. (Для простоты можно представить себе дело так, что речь идет о времени вычисления на машинах Тьюринга натуральнозначных функций натурального аргумента.) Пусть T и h суть вычислимые натуральнозначные функции (см. *Вычислимая функция*) на объектах применения алгоритмов, f — функция, определенная на тех же объектах и принимающая лишь два значения (например, 0 и 1).

Во-первых, существуют сколь угодно сложно вычислимые функции. Точнее, для любой функции T су-

ществует вычислимая функция f такая, что для всякого алгоритма α, вычисляющего f, неравенство

$$R_\alpha(x) > T(x)$$

неверно лишь в ограниченном числе случаев.

Во-вторых, существуют функции, любое вычисление к-рых в принципе может быть улучшено как угодно сильно. Точнее, имеет место теорема ускорения: для любой функции h (напр., $h(t)=2^t$) можно указать вычислимую функцию f такую, что для всякого алгоритма α, вычисляющего f, не может не найтись (здесь эффективная процедура не предполагается) алгоритм β, тоже вычисляющий f и такой, что для всех x (кроме конечного множества)

$$h(R_\beta(x)) < R_\alpha(x);$$

в случае $h(t)=2^t$ это приводит к

$$R_\beta(x) < \log_2 R_\alpha(x)$$

для почти всех x.

Для мер вычислений, определяющих время работы и объем памяти, заключение теоремы ускорения верно для большинства вычислений в такой форме: если f вычислима со сложностью $R(n)$, то она вычислима и со сложностью $R(n)/2$ (говорят, что f вычислима со сложностью $R(n)$, если для нек-рого α, вычисляющего ее, $R_\alpha(P) \leqslant R(n)$ для всех слов P длины n в рассматриваемом алфавите). Поэтому временна́я и объемная сложности вычислений конкретных функций часто оцениваются с точностью до порядка. Ниже приведены нек-рые конкретные результаты.

Установлено, что время распознавания равенства слов равно (по порядку) n^2 для машин Тьюринга и нормальных алгорифмов; что всякое свойство слов, распознаваемое на машинах Тьюринга за время, по порядку меньшее функции $n \log_2 n$, распознается и за время n; что вычисления на машинах Тьюринга со временем $T(n)$ (для $T(n) \geqslant n^2$ по порядку) моделируются на машинах Тьюринга с объемом памяти $\sqrt{T(n)}$. Доказано, что умножение двух n-разрядных чисел на многоленточных машинах Тьюринга осуществимо за время $n^{1+\varepsilon}$, но всегда более n по порядку, а итеративные сети могут умножать в реальное время, т. е. i-й младший разряд произведения появляется на выходе с подачей на вход i-х разрядов сомножителей. При моделировании алгоритмич. процессов одного типа с помощью других сложность вычислений, вообще говоря, меняется. Так, уменьшение размерности итеративных сетей приводит к увеличению времени. В то же время замена многоголовочных машин Тьюринга многоленточными не меняет времени вычисления функций. Для многих типов алгоритмов доказывается возможность их моделирования на машинах Тьюринга с полиномиальным (обычно даже квадратичным) возрастанием времени работы и незначительным увеличением объема памяти.

Сложностный подход оказывается полезным при изучении известных иерархий классов *общерекурсивных функций*, связанных с логическими и алгебраическими их особенностями. Так, напр., примитивно рекурсивные функции оказываются в точности теми функциями, к-рые вычислимы на машинах Тьюринга с объемом памяти, ограниченным определенной функцией. Факты существования достаточно сложно распознаваемых свойств, не зависящие от выбора вычислений, доказываются применением диагонального процесса. Их естественные аналоги были обнаружены для нек-рых разрешимых элементарных теорий и в областях, примыкающих к математич. лингвистике. В то же время для многих практически важных проблем получение хороших нижних границ сопряжено со значительными трудностями. Так, в частности, обстоит дело с задачами

переборного характера, к-рые уточняются (в одном из вариантов) как задачи об отыскании среди слов определенной длины слова, удовлетворяющего вычислимому за полиномиальное время условию. Упомянем еще о сложности вычислений на недетерминированных автоматах и *автоматах вероятностных*. В первом случае речь идет о процессах с элементами произвола, и под сложностью вычислений понимается сложность «самого простого» варианта процесса. Во втором — конкретный ход процесса определяется, помимо программы и аргумента, последовательностью показаний датчика случайных чисел, а результат должен с большой вероятностью совпадать со значением вычисляемой функции. В обоих случаях удается доказать иногда уменьшение сложности вычислений по сравнению с детерминированными процессами.

Качество алгоритмов оценивают не только с точки зрения А. с. вычислений, но и с точки зрения *алгоритма сложности* описания. Имеются результаты, совмещающие оба подхода.

Лит.: [1] Хартманис Дж., Хопкрофт Дж. Э., «Кибернетический сборник», 1974, вып. 11, с. 131—76.

Н. В. Петри.

АЛГОРИТМА СЛОЖНОСТЬ описания — величина, характеризующая длину описания алгоритма. В зависимости от точной концепции алгоритма А. с. описания уточняется по-разному. Единого достаточно устоявшегося уточнения к настоящему моменту (1977) не существует. Ниже рассмотрены наиболее часто встречающиеся случаи.

Под сложностью описания *нормального алгорифма* обычно понимают длину его изображения, т. е. длину записи всех его формул подстановок в одну строку (между формулами проставляется специальная разделительная буква). Под сложностью описания *Тьюринга машины* обычно понимают число ее внутренних состояний и внешних символов. Иногда для характеристики сложности машины Тьюринга используют число команд данной машины. Для *рекурсивных функций*, задаваемых схемами рекурсий, в качестве меры сложности обычно используют число букв в этих схемах.

Предложено также и аксиоматическое определение А. с. описания (см. [2]). Рассмотрим это определение применительно к машинам Тьюринга. Пусть (M_i), $i=0, 1, 2, \ldots,$ — естественная нумерация машин Тьюринга, характеризующаяся тем, что по номеру машины можно эффективно восстановить саму машину (т. е. ее программу), а по машине (т. е. программе) — ее номер. Общерекурсивная функция s наз. мерой сложности машин (при этом $s(i)$ наз. сложностью машины M_i) тогда и только тогда, когда: а) для любого y существует не более чем конечное число машин, имеющих сложность y; б) существует эффективная процедура, позволяющая определить для любого y все те машины, к-рые имеют сложность y.

Пусть s — произвольная мера сложности машин Тьюринга. Если U — произвольный эффективно (т. е. алгоритмически) перечислимый бесконечный подкласс машин Тьюринга, то существует машина T, принадлежащая U, и существует машина T' (не обязательно из U) такая, что T' и T вычисляют одну и ту же функцию, и сложность T' значительно меньше, чем сложность T. Отсюда, в частности, вытекает существование примитивно рекурсивных функций, наименьшая сложность к-рых в примитивно рекурсивной форме (т. е. через схемы примитивной рекурсии) значительно больше, чем их наименьшая сложность в общерекурсивной форме (т. е. через схемы общей рекурсии). Пусть под сложностью нормальных алгорифмов и машин Тьюринга понимаются, соответственно, длина изображения и число внутренних состояний. Тогда любую функцию алгебры

логики от N переменных (см. *Булева функция*) можно реализовать (см. [3]): а) нормальным алгорифмом в m-буквенном алфавите со сложностью $\sim 2^N/\log_2 m$; б) машиной Тьюринга с m-буквенным внешним алфавитом со сложностью $\sim 2^N/N(m-1)$.

С 60-х гг. 20 в. начато изучение сложности алгоритмов, решающих конечные куски алгоритмически неразрешимых *массовых проблем* (так наз. ограниченные алгоритмич. проблемы). А. А. Марков рассмотрел следующую задачу: для любой функции алгебры логики от N переменных построить изображение нормального алгорифма в алфавите $\Phi=\{0, 1, a, b, c\}$, реализующего данную функцию и имеющего минимальную сложность среди всех таких алгорифмов. Показано (см. [1], [4]), что сложность нормального алгорифма, решающего эту задачу, имеет порядок 2^N. Изучен также вопрос о сложности алгоритмов, решающих для первых n натуральных чисел проблему вхождения в рекурсивно перечислимое множество (с л о ж н о с т ь n-к у с к о в р е к у р с и в н о п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в). Показано, что в случае нормальных алгорифмов эта сложность по порядку не превосходит $\log_2 n$ и что в общем случае эта оценка не может быть понижена. В то же время существуют множества, задаваемые с помощью достаточно простых логич. средств, к-рые имеют сложность n-кусков порядка n. Показано также, что при общерекурсивном ограничении времени работы алгорифмов сложность n-кусков рекурсивно перечислимых множеств может возрастать экспоненциально и по порядку достичь величины n.

Понятие А. с. описания используется в основном при уточнении вопроса о том, какова минимальная сложность алгоритма, строящего тот или иной конечный объект. Эту минимальную сложность часто наз. просто с л о ж н о с т ь ю к о н е ч н о г о о б ъ е к т а (при данном уточнении понятия А. с. описания).

Определение сложности конечных объектов впервые было предложено А. Н. Колмогоровым (см. *Алгоритмическая теория информации*). Оказывается, что между сложностью $K(x)$ по Колмогорову, сложностью $M_m(x)$ этих же объектов, выражаемой через длину изображения нормального алгорифма в m-буквенном алфавите, и сложностью $T_m(x)$, выражаемой числом внутренних состояний машины Тьюринга с m-буквенным внешним алфавитом, существуют асимптотически точные соотношения

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log m}, \quad T_m(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1)\log_2 K(x)}.$$

Лит.: [1] М а р к о в А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 168—208; [2] Б л ю м М., сб. «Проблемы математической логики», М., 1970, с. 423—31; [3] К у з ь м и н В. А., сб. «Проблемы кибернетики», 1965, вып. 13, с. 75—96; [4] П е т р и Н. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 185, № 1, с. 37—39; [5] З в о н к и н А. К., Л е в и н Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, вып. 6, с. 85—127.

Я. М. Барздинь.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА — проблема, в к-рой требуется найти единый метод (*алгоритм*) для решения бесконечной серии однотипных единичных задач. Такие проблемы иногда наз. также м а с с о в ы м и п р о б л е м а м и. А. п. возникали и решались в различных областях математики на протяжении всей ее истории; однако нек-рые из них долгое время не поддавались решению. Причина этого выяснилась лишь после того, как в 30-х гг. 20 в. в математич. логике было выработано точное определение понятия алгоритма. Оказалось, что А. п. могут быть неразрешимыми, т. е. искомые в них алгоритмы могут не существовать. Таким образом, представление математиков об А. п. значительно изменилось: теперь уже новые А. п. стали формулировать как проблемы решения вопроса о существовании алгоритма для решения данной бесконечной серии однотипных задач и нахождения такого алгоритма в случае, если он существует.

В *алгоритмов теории* почти одновременно появилось несколько различных по форме уточнений понятия алгоритма, к-рые по существу оказались эквивалентными. Каждое из этих уточнений заключается в том, что выделяется тот или иной достаточно широкий класс конкретных алгоритмов, замкнутый относительно естественных операций соединения алгоритмов. Каждое утверждение о неразрешимости той или иной А. п. представляет собой математически строго доказанную теорему о невозможности решения рассматриваемой А. п. с помощью алгоритмов данного класса. В такой форме эти теоремы можно было бы рассматривать как специфич. теоремы, связанные с данным классом алгоритмов. Однако все результаты такого рода можно перенести на общепонятный для математиков язык алгоритмов, понимаемых в интуитивном смысле. Этот перенос основан на так наз. т е з и с е Ч ё р ч а (в зависимости от формы уточнения понятия алгоритма его наз. еще т е з и с о м Т ь ю р и н г а, или п р и н ц и п о м н о р м а л и з а ц и и), к-рый утверждает, что рассматриваемый класс алгоритмов универсален, т. е. с помощью алгоритмов этого класса по существу можно выполнить работу любого алгоритма, понимаемого в интуитивном смысле. Этот тезис есть естественнонаучный факт, подкрепленный историей математики: все известные в математике алгоритмы удовлетворяют ему; все попытки построить примеры алгоритмов, выходящих за указанные рамки, не увенчались успехом. Наконец, эквивалентность различных по форме уточнений понятия алгоритма также служит подкреплением этого тезиса. Тезис Чёрча не может быть доказан, поскольку относится к математически расплывчатому понятию алгоритма в интуитивном смысле; однако он очень важен для математики, так как позволяет говорить о неразрешимости тех или иных А. п. в широком и общепонятном для математиков смысле.

Первые примеры неразрешимых А. п. были обнаружены в самой теории алгоритмов. К ним относятся проблема распознавания принадлежности данному нерекурсивному множеству натуральных чисел, проблема остановки универсальной машины Тьюринга, проблема распознавания самоприменимости *нормальных алгорифмов* и др.

Из А. п., выходящих за рамки самой теории алгоритмов, прежде всего следует отметить проблему распознавания тождественной истинности формул исчисления предикатов 1-й ступени, неразрешимость к-рой впервые была доказана А. Чёрчем (A. Church) в 1936. К этому результату по существу примыкают многочисленные исследования А. п. в *моделей теории*. Теория моделей, изучающая непустые множества с определенными на них отношениями с помощью исчисления предикатов, возникла в 30-х гг. в работах А. И. Мальцева и А. Тарского (A. Tarski). Им же принадлежат точные постановки многих А. п. в теории моделей и ряд фундаментальных результатов в этом направлении. Э л е м е н т а р н о й т е о р и е й данного класса K моделей наз. совокупность всех замкнутых формул исчисления предикатов 1-й ступени, к-рые истинны во всех моделях класса K. Класс K может состоять из одной модели. Элементарная теория T наз. р а з р е ш и м о й или н е р а з р е ш и м о й в зависимости от того, существует или нет алгоритм для распознавания по любой формуле, принадлежит она теории T или нет. Нек-рый обзор методов исследования А. п. в теории моделей и результатов, полученных в этом направлении, имеется в [3]. Из указанных в [3] и оставшихся пока (1977) нерешенными проблем наиболее интересен вопрос о разрешимости элементарной теории свободных групп.

Многочисленные и разнообразные А. п. возникают также при конструктивном истолковании различных разделов математики. Ниже приведены основные ре-

зультаты, относящиеся к А. п. в традиционных разделах математики.

Долгое время оставался открытым естественный вопрос: являются ли неразрешимые А. п. специфическими для теории алгоритмов и математич. логики? Иначе говоря, существуют ли неразрешимые А. п. в традиционных разделах математики, далеких от математич. логики? Первый результат такого рода был получен в 1947 независимо друг от друга А. А. Марковым и Э. Л. Постом (E. L. Post). Они доказали неразрешимость проблемы равенства слов (тождества) для полугрупп, к-рая была поставлена А. Туэ (A. Thue) еще в 1914. В этой проблеме рассматриваются полугруппы, заданные с помощью конечного числа образующих (алфавита)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (1)$$

и определяющих соотношений

$$A_i = B_i, \ i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2)$$

Элементарным преобразованием рассматриваемой полугруппы П наз. переход от слова вида PA_iQ к слову PB_iQ или обратно, где P и Q — произвольные слова в алфавите (1). Два слова X и Y в алфавите (1) наз. эквивалентными в П, если они либо совпадают графически, либо одно из них получается из другого с помощью конечной последовательности элементарных преобразований. Множество всех классов эквивалентности с операцией умножения, к-рая определяется естественным образом через операцию приписывания слов, и есть полугруппа П, заданная образующими (1) и определяющими соотношениями (2). Проблема равенства слов (тождества) полугруппы П заключается в отыскании алгоритма для распознавания по любой паре слов X и Y полугруппы П, эквивалентны они в П или нет, т. е. тождественны определенные ими элементы полугруппы П или нет. А. А. Марков и Э. Л. Пост построили конкретные полугруппы, для к-рых уже невозможен алгоритм, решающий проблему равенства (см. [1]).

Наиболее замечательный результат в этом направлении был получен П. С. Новиковым [4], [5]. Он доказал неразрешимость классич. проблемы тождества теории групп, к-рая была поставлена М. Деном (M. Dehn) в 1912 и привлекала внимание многих алгебраистов мира. Эта проблема формулируется аналогично проблеме тождества для полугрупп с тем отличием, что рассматриваются только такие системы соотношений (2), к-рые гарантируют существование в рассматриваемой полугруппе обратных элементов для всех образующих (1). П. С. Новиков доказал также неразрешимость очень важной для теории групп проблемы изоморфизма, к-рая заключалась в отыскании алгоритма для распознавания по любым двум группам, изоморфны они или нет. Позже было показано [6], что для всякой фиксированной группы G невозможен алгоритм, к-рый проверял бы по произвольной группе, изоморфна она группе G или нет.

А. А. Марков исследовал проблемы распознавания инвариантных свойств полугрупп, т. е. таких свойств, к-рые сохраняются при переходе к изоморфным полугруппам [2]. Он доказал, что если для инвариантного полугруппового свойства α существует полугруппа со свойством α и другая полугруппа, не вложимая ни в какую полугруппу с этим свойством, то невозможен алгоритм для распознавания по любой полугруппе, обладает она свойством α или нет. Это по существу означает, что почти все инвариантные полугрупповые свойства алгоритмически не распознаваемы в классе полугрупп. В теории групп также был получен аналог этой фундаментальной теоремы (см. [7], [8], [9]). Из нее, в частности, вытекает следствие: пусть K_α есть класс всех групп,

обладающих инвариантным свойством α; с каждым таким классом связаны две А. п.— проблема тождества для групп из класса K_α и проблема распознавания по любой группе, принадлежит она классу K_α или нет. Оказывается, что для любого непустого класса K_α по крайней мере одна из этих двух А. п. неразрешима. Аналогичная ситуация имеет место и для полугрупп.

Исследовался вопрос о возможно простых заданиях групп и полугрупп с неразрешимой проблемой равенства слов. Из многочисленных исследований в этом направлении следует отметить доказательство неразрешимости проблемы равенства слов для полугруппы, заданной 7 простыми определяющими соотношениями:

$$ac=ca,\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=db,$$
$$eca=ce,\ edb=de,\ cca=ccae$$

(см. [10]). Позже был построен пример полугруппы с 3 определяющими соотношениями и неразрешимой проблемой равенства [11]. Даже для полугрупп с одним определяющим соотношением до сих пор (1977) не найден алгоритм, решающий проблему тождества в общем случае. Такой алгоритм построен только для несократимого определяющего соотношения [12]. Для групп с одним определяющим соотношением алгоритм, решающий проблему равенства, был построен давно [13]; но уже для двух соотношений вопрос остается открытым. Минимальное число определяющих соотношений, при к-ром известны примеры групп с неразрешимой проблемой тождества, равно 12. Доказана разрешимость проблемы равенства слов для коммутативных полугрупп. Для коммутативных групп разрешима также и проблема изоморфизма. Проблема равенства слов разрешима для конечных групп, для конечно определенных простых групп, для нильпотентных групп, а также для разрешимых групп ступени 2. Но уже в классе разрешимых групп ступени 5 можно указать группу с неразрешимой проблемой равенства, заданную с помощью соответствующего тождества ступени 5 и конечного числа определяющих соотношений (см. [15]).

Исследование проблемы тождества для групп с ограниченной мерой налегания определяющих слов, т. е. левых частей определяющих соотношений, было начато еще до того, как была доказана неразрешимость общей проблемы тождества. Самым сильным результатом в этом направлении в настоящее время (1977) является доказательство разрешимости проблемы тождества в классе групп, задаваемых системами определяющих соотношений, в к-рых определяющие слова могут налегать друг на друга лишь менее чем на $^1/_6$ своей длины [14]. Если допустить налегание на $^1/_3$ длины определяющих слов, то пример группы с неразрешимой проблемой тождества строится довольно просто. Для промежутка между $^1/_6$ и $^1/_3$ вопрос остается открытым. Аналогичные исследования проводились и для полугрупп. Оказалось, что для полугрупп с максимальной мерой налегания определяющих слов, меньшей $^1/_2$, проблема тождества разрешима, в то время как известны примеры полугрупп с неразрешимой проблемой тождества и с максимальной мерой налегания определяющих слов, равной $^1/_2$.

Из топологич. А. п. прежде всего выделяется классич. проблема распознавания гомеоморфизма для n-мерных многообразий. А. А. Марков построил пример 4-мерного многообразия $\mathfrak{M}$, для к-рого невозможен алгоритм, распознающий по любому 4-мерному многообразию, гомеоморфно оно $\mathfrak{M}$ или нет [17]. Известно, что при $n=2$ эта проблема имеет положительное решение; при $n=3$ вопрос остается открытым; для n-мерных многообразий при $n\geqslant 4$ неразрешимы также проблемы распознавания комбинаторной и гомотопич. эквивалентностей многообразий. Заметим также, что *если*

взять полиэдр P, фундаментальная группа к-рого имеет неразрешимую проблему тождества, то для P невозможен алгоритм, распознающий связанную гомотопность (или свободную гомотопность) двух произвольных путей на P, проходящих через данную точку. Получено положительное решение проблемы сопряженности в группах кос, к-рая эквивалентна топологич. проблеме распознавания эквивалентности кос [16].

Одной из наиболее знаменитых А. п. математики являлась 10-я проблема Гильберта, в к-рой требовалось найти алгоритм для распознавания по любой системе диофантовых уравнений с целочисленными коэффициентами, имеет она целочисленное решение или нет. После появления многочисленных результатов о неразрешимых А. п. возникла гипотеза о том, что и эта проблема неразрешима. Более того, группе американских математиков удалось установить, что неразрешимость 10-й проблемы Гильберта следует из существования двуместного диофантова предиката экспоненциального роста (см. [18], [19]). Однако построить такой предикат им не удалось. Они доказали лишь неразрешимость проблемы распознавания существования целочисленных решений показательных уравнений. Искомый диофантов предикат экспоненциального роста впервые был построен в 1970 (см. [20], [21]). Тем самым впервые была доказана неразрешимость 10-й проблемы Гильберта.

В теории алгоритмов доказано существование неразрешимых А. п. различных *неразрешимости степеней*. Многочисленные исследования возникающих в математике А. п. показали, что каждая из этих А. п. в общем случае имеет максимальную степень неразрешимости, а в своих частных вариантах (например, проблема тождества в конкретных полугруппах или группах) может иметь любую наперед заданную степень неразрешимости.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Марков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 1—376; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [4] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, № 4, с. 709—12; [5] Новиков П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1955, т. 44, с. 1—444; [6] Адян С. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [7] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, № 1, с. 9—12; [8] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1958, т. 123, № 1, с. 13—16; [9] Rabin M. O., «Ann. math.», 1958, v. 67, № 1, p. 172—94; [10] Цейтин Г. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 172—89; [11] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 6, с. 1264—6; [12] Адян С. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 85, с. 1—123; [13] Магнус В., «Успехи матем. наук», 1941, Bd 8, с. 365—76; [14] Lyndon R. C., «Math. Ann.», 1966, Bd. 166, № 3, S. 208—28; [15] Ремесленников В. Н., «Алгебра и логика», 1973, т. 12, № 5, с. 577—602; [16] Гарсайд Ф. А., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 113—32; [17] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 123, № 6, с. 978—80; [18] Дэвис М., Путнам Х., Робинсон Дж., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 69—79; [19] Робинсон Дж., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 3—14; [20] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [21] Матиясевич Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 1, с. 3—30.

С. И. Адян.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СВОДИМОСТЬ — одно из основных понятий *алгоритмов теории* и ее приложений. Возникло в связи с тем, что неразрешимость (и разрешимость) многих *алгоритмических проблем* устанавливается большей частью не непосредственно, а путем сведения к исследуемой проблеме такой алгоритмич. проблемы, неразрешимость к-рой уже доказана (или исследуемой проблемы к нек-рой уже решенной проблеме). Так, неразрешимость проблемы гомотопии путей в полиэдре доказывается путем сведения к ней проблемы равенства слов в соответствующей фундаментальной группе.

Ниже приведены простейшие примеры А. с. теоретико-числовых (т. е. определенных на натуральных числах) предикатов и функций:

$$P(x) \equiv Q(2x+1),$$

где P и Q — предикаты. Проблема разрешения предиката P, т. е. установления истинности и ложности P для разных x, сводится к проблеме разрешения Q, или, короче, P сводится к Q. Говорят также, что множество истинности P, т. е. $\{x|P(x)\}=M_P$, сводится к $M_Q-\{x|Q(x)\}$.

Пусть

$$f(x)=\sum_{u=1}^{x!}\prod_{y=1}^{u} g(u,\ y),$$

где $f(x)$ и $g(u,\ y)$ — теоретико-числовые функции. Проблема вычисления функции f сводится к проблеме вычисления g, или, короче, f сводится к g.

Понятие А. с. было уточнено А. М. Тьюрингом (A. M. Turing): если, грубо говоря, нек-рая *Тьюринга машина* перерабатывает последовательность закодированных значений функции g в последовательность закодированных значений функции f, то функция f сводится к функции g. Близкое понятие относительной вычислимости С. К. Клини (S. C. Kleene) уточнил с помощью рекурсивных схем равенств (см. [1]). После арифметизации каждая алгоритмич. проблема сводится к проблеме вычисления нек-рой теоретико-числовой функции f. Если f сводится к g по Тьюрингу, $f\leqslant_T g$, а g сводится к f, $g\leqslant_T f$, то говорят, что f и g имеют одну и ту же степень неразрешимости, или $f\equiv_T g$. Отношение $\leqslant_T$ рефлексивно и транзитивно. Таким образом, все функции (и множества натуральных чисел или их характеристич. предикаты) разбиваются на классы эквивалентности, наз. тьюринговыми степенями или T-степенями (см. [3]). Большинство алгоритмич. проблем, рассматриваемых в логике и математике, являются проблемами разрешения (рекурсивно) перечислимых множеств конструктивных объектов. В связи с этим Э. Л. Пост [2] в 40-х гг. 20 в. предпринял исследование перечислимых множеств и ввел наряду с тьюринговой нек-рые специальные виды А. с., сформулировав проблему (сводимости): сводятся ли (по Тьюрингу) друг к другу различные перечислимые неразрешимые множества? Позже было установлено, что перечислимые множества образуют бесконечную весьма богатую систему T-степеней. При этом был найден так наз. метод приоритета, широко используемый в теории алгоритмов.

В дальнейшем степени неразрешимости нашли применение в других областях математики. Так, напр., для всяких T-степеней a и b перечислимых множеств при $a\leqslant_T b$ существует конечно определенная группа, в к-рой проблема равенства слов имеет степень a, а проблема сопряженности — степень b. Имеется тесная связь между степенями (относительно различных видов А. с.) перечислимых множеств и скоростью роста сложности начальных фрагментов перечислимых множеств. Специальный вид сводимости — полиномиальная сводимость, или p-сводимость (сводимость с нек-рым ограничением на время),— используется при доказательстве универсальности алгоритмич. проблем «переборного типа», т. е. проблем комбинаторного характера из разных областей математики (см. [5]; более подробную лит. см. в [1]). В свою очередь, при исследовании степеней стали применять методы теории меры (см. [1], гл. 16) и *вынуждения метод* (см. [4]).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972, гл. 9, 10, 13, 16; [2] Post E. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 5, p. 284—316; [3] Kleene S. C., Post E. L., «Ann. Math.», ser. 2, 1954, v. 59, № 3, p. 379—407; [4] Selman A. L., «Proc. Lond. Math. Soc.», ser. 3, 1972, v. 25, № 4, p. 586—602; [5] Карп Р., в кн.: Кибернетический сборник, в. 12, М., 1975.

А. А. Мучник.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ — раздел математич. логики, уточняющий и изучаю-

щий на базе понятий *алгоритма* и *вычислимой функции* основные понятия теории информации. А. т. и. стремится обосновать эти понятия без помощи обращения к теории вероятностей и так, чтобы понятия энтропии и количества информации были применимы к индивидуальным объектам. Наряду с этим она порождает и свои собственные проблемы, связанные с изучением энтропии конкретных индивидуальных объектов.

Центральным понятием А. т. и. является понятие энтропии индивидуального объекта, называемое сложностью объекта (по Колмогорову). Интуитивно под этим понимается минимальное количество информации, необходимое для восстановления данного объекта. Точное определение понятия сложности индивидуального объекта и на основе этого понятия количества информации в индивидуальном объекте y относительно индивидуального объекта x было дано А. Н. Колмогоровым в 1962—65, что и послужило началом развития А. т. и.

Без существенных ограничений общности можно рассматривать только двоичные слова (что в дальнейшем и будет делаться). Под сложностью слова x понимается длина $l(p)$ самого короткого (двоичного) слова p, содержащего всю информацию, необходимую для восстановления x при помощи к.-л. фиксированного способа декодирования. Точное определение этого понятия следующее.

Пусть $F(s)$ — произвольная словарная *частично рекурсивная функция*. Тогда под сложностью слова x по F понимается:

$$K_F(x) = \begin{cases} \min l(p),\ F(p) = x, \\ \infty, \text{ если нет такого } p, \text{ что } F(p) = x. \end{cases}$$

Слово p такое, что $F(p) = x$, наз. кодом, или программой, по к-рой F восстанавливает слово x. Имеет место теорема: существует частично рекурсивная функция F_0 (называемая оптимальной) такая, что для любой частично рекурсивной функции F выполняется неравенство:

$$K_{F_0}(x) \leqslant K_F(x) + C_F,$$

где C_F — константа, не зависящая от x. Эта теорема позволяет дать инвариантное (с точностью до аддитивной константы) определение сложности: сложностью $K(x)$ слова x наз. сложность $K_{F_0}(x)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной частично рекурсивной функции F_0. Очевидно, $K(x) \leqslant l(x) + C$, где C — константа, не зависящая от x.

Используя $K(x)$, можно определить также сложность $K(x, y)$ пар слов (x, y): для этого пары (x, y) эффективно кодируются в виде одного слова $c(x, y)$, и под сложностью $K(x, y)$ понимается $K(c(x, y))$.

П. Мартином-Лёфом (P. Martin-Löf) был исследован вопрос о том, как ведет себя сложность начальных кусков бесконечных двоичных последовательностей. Пусть ω_n означает начальный кусок последовательности ω, составленной из первых n знаков. Тогда почти все (относительно меры Лебега) бесконечные двоичные последовательности ω обладают свойствами: а) для бесконечно многих натуральных n справедливо неравенство $K(\omega_n) \geqslant n - c$, где c — нек-рая константа; б) для всех натуральных n, бо́льших нек-рого n_ε, $K(\omega_n) \geqslant n - (1+\varepsilon)\log_2 n$, где ε — произвольное положительное число (теорема Мартина-Лёфа). С другой стороны, для любой последовательности ω существует бесконечно много натуральных n таких, что $K(\omega_n) \leqslant n - \log_2 n$.

Понятие сложности используется также при изучении алгоритмич. проблем. Здесь более естественной является так наз. сложность разрешения

слова x. Интуитивно под этим понимается минимальное количество информации, к-рую надо иметь, чтобы по каждому числу $i \leqslant l(x)$ найти i-й знак слова x (длину слова x при этом можно и не знать). Точнее, под сложностью разрешения слова $x = x_1 x_2 \ldots x_{l(x)}$ по частично рекурсивной функции $G(s, t)$ понимается

$$KR_G(x) = \begin{cases} \min l(p) : \forall i \leqslant l(x)\ G(p, i) = x_i, \\ \infty, \text{ если нет такого } p. \end{cases}$$

Имеет место теорема: существует частично рекурсивная функция G_0 (называемая оптимальной) такая, что для любой другой частично рекурсивной функции G выполняется неравенство $KR_{G_0}(x) \leqslant KR_G(x) + C_G$, где C_G — константа, не зависящая от x. Сложностью разрешения $KR(x)$ слова x наз. сложность $KR_{G_0}(x)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной частично рекурсивной функции G_0. Очевидно, $KR(x) \leqslant K(x) + C$ и $K(x) \leqslant KR(x) + 2l(x) + C$. Используя $KR(x)$, можно для любого множества натуральных чисел M определить сложность $K(M, n)$ для n-куска множества M: $K(M, n) = KR(\omega_n)$, где $\omega = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots$ — характеристическая последовательность множества M ($x_i = 1$, если $i \in M$, и $x_i = 0$, если $i \notin M$).

Алгоритмич. проблемы обычно могут быть представлены в виде проблемы вхождения в нек-рое рекурсивно перечислимое множество M. Если мы фиксируем нек-рое n и ограничиваемся рассмотрением проблемы вхождения в M только для первых n натуральных чисел, то мы получаем ограниченную алгоритмическую проблему. Величина $K(M, n)$ интуитивно выражает количество информации, к-рую надо иметь, чтобы можно было решить данную ограниченную проблему. В частности, множество M рекурсивно тогда и только тогда, когда $K(M, n)$ ограничено сверху нек-рой константой.

Из теоремы Мартина-Лёфа следует существование множеств, для к-рых $K(M, n) \sim n$. При этом оказывается, что максимально сложные множества уже существуют среди множеств, задаваемых арифметич. предикатами с двумя кванторами. Однако в случае рекурсивно перечислимых множеств имеет место теорема: а) для любого рекурсивно перечислимого множества M и любого n справедливо неравенство $K(M, n) \leqslant \log_2 n + C$, где C не зависит от n; б) существует рекурсивно перечислимое множество M такое, что для любого n имеет место неравенство $K(M, n) > \log_2 n$. В то же время существуют такие рекурсивно перечислимые множества M, что при ограничении времени вычислений произвольной общерекурсивной функцией t имеет место оценка $K^t(M, n) \geqslant n/c_t$, где c_t не зависит от n.

В указанных терминах можно дать также характеристику универсальных по нек-рому типу сводимости множеств (см. *Универсальное множество*): множество M является слабо таблично универсальным тогда и только тогда, когда существует неограниченная общерекурсивная функция $f(n)$ такая, что для любого n имеет место неравенство $K(M, n) \geqslant f(n)$.

При изучении сложности ограниченных алгоритмич. проблем иногда используются и другие меры сложности, как, напр., минимальная длина изображения *нормального алгорифма*, решающего данную ограниченную проблему. Но оказывается, что между введенными выше сложностями и аналогами этих сложностей, выраженными через минимальную длину изображения нормального алгорифма (или через минимальное число внутренних состояний машины Тьюринга), существуют асимптотически точные соотношения (см. *Алгоритма сложность*).

При построении А. т. и. вводится еще понятие условной сложности слова x при известном y по частично рекурсивной функции $G(s, t)$:

$$K_G(x \mid y) = \begin{cases} \min l(p): G(p, y) = x, \\ \infty, \text{ если нет такого } p, \text{ что } G(p, y) = x. \end{cases}$$

Для этого понятия также имеет место теорема о существовании оптимальной функции G_0, и условная сложность $K(x|y)$ слова x при известном y определяется как сложность $K_{G_0}(x|y)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной функции G_0; $K(x|y)$ интуитивно обозначает минимальное количество информации, к-рое необходимо добавить к информации, содержащейся в слове y, чтобы можно было восстановить слово x. Очевидно, $K(x|y) \leqslant K(x) + C$.

Следующим центральным понятием А. т. и. является понятие количества информации в индивидуальном объекте y относительно индивидуального объекта x:

$$I(y : x) = K(x) - K(x|y).$$

Величину $I(y : x)$ наз. алгоритмическим количеством информации в y об x. Соответственно величины $K(x)$ и $K(x|y)$ наз. иногда алгоритмической энтропией x и алгоритмической условной энтропией x при заданном y. Формулы разложения энтропии $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$ и коммутативности информации $I(X : Y) = I(Y : X)$ верны в алгоритмич. концепции лишь с точностью до членов порядка $O(\log H(X, Y))$:

$$|K(x, y) - [K(x) + K(y \mid x)]| \leqslant O(\log K(x, y)),$$

$$|I(x:y) - I(y:x)| \leqslant O(\log K(x, y)).$$

Между алгоритмич. и классич. определениями количества информации (точнее, между сложностью слова по Колмогорову и энтропией распределения частот по Шеннону) существует определенная связь (А. Н. Колмогоров): пусть задано число r и пусть слово x длины $i \cdot r$ состоит из i слов длины r, причем k-е слово длины r входит в x с частотой q_k ($k = 1, 2, \ldots, 2^r$), тогда

$$\frac{K(x)}{i} \leqslant H + \alpha(i),$$

где

$$H = -\sum_{k=1}^{2^r} q_k \log_2 q_k$$

и $\alpha(i) \to 0$ при $i \to \infty$. В общем случае более тесную связь между энтропией и сложностью установить нельзя. Это объясняется тем, что энтропия приспособлена для изучения текстов, не имеющих других закономерностей, кроме частотных. Следовательно, для случайных последовательностей ω по мере, соответствующей независимым испытаниям, между рассматриваемыми величинами можно установить полную связь:

$$\lim_{i \to \infty} (K(\omega_{ir})/i) = H.$$

Аналогичный факт имеет место и для произвольного эргодического стационарного случайного процесса.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, вып. 1, с. 3—11; [2] его же, «Проблемы передачи информации», 1969, т. 5, вып. 3, с. 3—7; [3] Звонкин А. К., Левин Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, вып. 6, с. 85—127; [4] Барздинь Я. М., «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 6, с. 1249—1252; [5] Кановичъ М. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 3, с. 500—503.

Я. М. Барздинь.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — см. *Рекурсивная теория множеств.*

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ЯЗЫК, формальный язык программирования, — *формальный язык*, предназначенный для описания вычислительных процессов, или, что то же, для записи алгоритмов, подлежащих выполнению на вычислительных машинах.

Различают проблемно-ориентированные А. я. (А. я. высокого уровня), предназначенные для записи алгоритмов безотносительно к к.-л. определенным вычислительным машинам, и машинно-ориентированные А. я. (А. я. низкого уровня), уже учитывающие особенности той или иной вычислительной машины (список команд, характеристики запоминающего устройства и т. д.). Обычно под термином «А. я.» понимают проблемно-ориентированный язык, противопоставляя его машинному языку, т. е. средству записи, воспринимаемой машиной непосредственно. Над законченными текстами (*программами*) в А. я. определен универсальный алгоритм их однозначного выполнения, что отличает А. я. от неалгоритмических языков программирования, в к-рых процесс выполнения текста сугубо неоднозначен или текст служит только материалом для синтеза алгоритма решения задачи.

Подобно естественным языкам, А. я. строится над алфавитом основных символов (в к-ром записывается программа) в виде иерархич. системы своих грамматич. элементов с заданными на них отношениями (подобно словам, словосочетаниям и предложениям в естественном языке, связанным синтаксич. правилами). Элементы низшего уровня, образованные цепочками основных символов, наз. лексемами. Для вхождений лексем в программу определена их принадлежность к некрому классу и к области действия — к.-л. однозначно выделяемой части программы, к к-рой относятся все входящие в нее экземпляры лексемы. Среди всех вхождений лексемы выделяется одно, к-рое наз. определяющим; остальные вхождения лексемы в область действия наз. использующими.

Следующие уровни элементов А. я. образуются понятиями. Между понятиями А. я. задается отношение быть (прямой) конституентой (т. е. непосредственной составной частью), а между конституентами данного понятия — отношение конкатенации (текстуального следования). Транзитивное замыкание конституентного отношения однозначно сопоставляет понятию нек-рое подслово текста программы, наз. порождением этого понятия. Существует одно начальное понятие, порождением к-рого является весь текст программы. Среди понятий выделяются позиции и субституенты. Субституента занимает нек-рую позицию, являясь ее прямой конституентой. Дерево, корень к-рого — начальное понятие, концевые вершины — лексемы и основные символы, внутренние вершины — понятия, а дуги — конституентные отношения, наз. деревом разбора программы. Построение этого дерева наз. синтаксическим анализом программы.

Понятия и лексемы обладают атрибутами, т. е. нек-рыми фиксированными описанием А. я. множествами, элементы к-рых сопоставляются элементам А. я. в качестве их характеристик. Нахождение атрибутов элементов А. я., входящих в программу, наз. ее семантическим анализом. Нахождение атрибутов лексем начинается с анализа их определяющих вхождений, к-рые обычно содержат информацию об атрибутах в явном виде. Затем атрибутивная информация в пределах соответствующей области действия переносится на все использующие вхождения лексемы (идентификация). Атрибуты нек-рого понятия находятся индукцией по дереву разбора как функции атрибутов его конституент. Существенной частью семантич. анализа, имеющей большое значение для контроля правильности программы, является проверка на совместимость атрибутов позиции и ее субституенты (приведение). Почти во всех А. я. действуют те или иные правила умолчания, т. е. приписывание не специфицированному явно атрибуту нек-рого

значения как функции контекста данного понятия. Таким контекстом могут быть: позиция, область действия, вся программа и, наконец, само описание А. я.

Правила синтаксич. анализа задаются либо порождающей грамматикой А. я. (см. *Грамматика порождающая*), либо анализирующим *автоматом* (точнее, его различными обобщениями), преобразующим текст программы в дерево разбора. Правила семантич. анализа описываются обычно неформально, однако предпринимались попытки формализовать определение атрибутивной информации и учет контекста с помощью механизма двухступенчатых грамматик (см. *Алгол-68*).

Алгоритм выполнения программ А. я. задается сопоставлением вершинам дерева разбора различных исполнительных процедур (называемых также трансдукторами, семантическими процедурами). Каждая процедура выполняет нек-рые действия как функцию атрибутов и того или иного контекста данного понятия (или лексемы), а затем определяет последующую процедуру. Действия процедуры либо непосредственно задают вычислительный процесс в терминах нек-рой абстрактной машины (семантика интерпретирующего типа), либо трансформируют порождение данного понятия во фрагмент программы в нек-ром языке низшего уровня (семантика трансляционного типа).

В конкретных А. я. алфавит основных символов обычно состоит из букв латинского (иногда с добавлением русского) алфавита, цифр, парных ограничителей (скобок), разделителей (знаков препинания) и нек-рых знаков операций. В связи с ограниченностью алфавита существуют правила кодирования основных символов комбинациями знаков, воспринимаемых входными устройствами машины. Основные классы лексем — нумералы для изображения чисел, литералы для изображения текстов, идентификаторы для обозначения различных объектов программы, определяемых в ней самой. Основными объектами являются переменные величины, метки (наименования различных частей программы) и процедуры (функциональные обозначения). Смысл и назначение нек-рых идентификаторов фиксируется описанием А. я. (закрепленные слова).

Среди понятий А. я. выделяются базовые конструкции — описания, выражения и операторы. Описания являются источником атрибутивной информации, приписываемой определяющему вхождению лексемы. В основном атрибуты характеризуют тип (вид) значений, вычисляемых при выполнении программы, их представление и режим хранения в памяти ЭВМ. Для составных значений (векторов, матриц, структурных величин) указывается также способ доступа к их элементарным компонентам. Выражения являются источником значений; операторы — единицами законченных действий в программе; базовые операторы — это оператор присваивания значения выражения переменной величине, оператор передачи управления (безусловной или по условию), оператор вызова процедуры, оператор цикла.

Циклы и процедуры являются наиболее характерными средствами А. я. для сокращенной записи сколь угодно длинных вычислений. Оператор цикла организует повторное выполнение нек-рой части программы (тела цикла), управляемое заданным условием на число повторений. Описание процедуры вводит сокращенное параметризованное функциональное обозначение для нек-рой части программы (тело процедуры). Выполнение тела процедуры впоследствии может трактоваться как элементарное действие, инициируемое вызовом процедуры, вносящим одновременно в тело процедуры фактич. значения параметров.

Важное свойство А. я. — возможность регуляризации структуры программы, облегчающей ее написание, изучение и проверку правильности. Основными средствами регуляризации являются ограничения на структуру областей действия, тел процедур и циклов, а также регламентация употребления операторов передачи управления, ограничивающая ветвимость цепочек выполнения базовых операторов параллельно-последовательной структурой.

Программирование с использованием А. я. для вычислительной машины требует включения в ее программное обеспечение специальных программирующих процессоров — посредников между программами на А. я. и машиной. Процессор в своем развернутом составе выполняет следующие функции: ввод программы, лексический (выделение и классификация лексем), синтаксический и семантич. анализы с сигнализацией о формальных ошибках, синтез промежуточной формы (представление программы на внутреннем языке нек-рой абстрактной вычислительной машины, удобное для последующей обработки или выполнения программы), оптимизация (систематич. преобразование промежуточной формы, улучшающее такие характеристики программы, как ее размер, скорость и объем расходуемой памяти), генерация (построение машинной программы), выполнение программы. В процессорах транслирующего типа (трансляторы, компиляторы, программирующие программы) выполнение программы происходит после полного построения машинной программы. В процессорах интерпретирующего типа (шаговые, диалоговые, отладочные трансляторы) программа выполняется с помощью нек-рого механизма интерпретации ее либо промежуточной формы, либо дерева разбора, либо даже исходного текста.

Различают одно-, двух- и многофазные схемы трансляции программ. В однофазной схеме все функции транслятора объединены в один просмотр текста программы. Оптимизация и промежуточная форма отсутствуют, а выделяемые вершины дерева разбора тут же порождают машинные команды программы. В двухфазных трансляторах обычно на первом просмотре программы строится дерево разбора, а на втором просмотре семантич. анализ объединяется с генерацией. Многофазные схемы с использованием промежуточной формы применяются в оптимизирующих трансляторах или в системах со сменной генерацией для различных типов машин, а для нек-рых А. я. требуются в силу сложности синтаксич. и семантич. анализов.

Количество разнообразных А. я., созданных для работы на вычислительных машинах, весьма велико (больше тысячи), однако только нек-рые из них получили широкое распространение. К ним относятся языки *алгол*, *алгол-68*, *кобол*, *лисп*, *ПЛ/1*, *симула*, *фортран*, а в СССР также *алгамс*, *альфа*, *рефал*.

Лит.: [1] Ингерман П., Синтаксически ориентированный транслятор, пер. с англ., М., 1969; [2] Языки программирования, пер. с англ., М., 1972; [3] Хопгуд Ф., Методы компиляции, пер. с англ., М., 1972; [4] Хигман Б., Сравнительное изучение языков программирования, пер. с англ., М., 1974.

А. П. Ершов.

АЛГОРИТМОВ СОЧЕТАНИЯ — название, установившееся за рядом конкретных способов конструирования новых *алгоритмов* из нескольких заданных.

В применении к *нормальным алгорифмам* наибольшую известность получили следующие А. с.: нормальная композиция $(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A})$ двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, нормальное объединение $(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B})$ двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, нормальное разветвление $(\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}\mid\mathfrak{C})$ двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, управляемое нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}$, нормальное повторение $(\mathfrak{A}\circlearrowright\mathfrak{C})$ нормального алгорифма $\mathfrak{A}$, уп-

равляемое нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — нормальные алгорифмы в нек-ром алфавите A, то упомянутые их сочетания являются нормальными алгорифмами в нек-ром фиксированном расширении A и удовлетворяют следующим условиям: а) для любого слова P в A имеет место $(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A})\llcorner P\lrcorner \simeq \mathfrak{B}\llcorner\mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner\lrcorner$ (теорема композиции); б) для любого слова P в A имеет место $(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B})\llcorner P\lrcorner \simeq \mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner\mathfrak{B}\llcorner P\lrcorner$ (теорема объединения); в) для любого слова P в A

$$(\mathfrak{A}\ \mathsf{Y}\ \mathfrak{B}|\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner, \text{ если } \mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner \overline{\in} \Lambda, \\ \mathfrak{B}\llcorner P\lrcorner, \text{ если } \mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner \overline{\notin} \Lambda, \end{cases}$$

причем если $(\mathfrak{A}\ \mathsf{Y}\ \mathfrak{B}|\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner$ определено, то определено и $\mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner$ (теорема разветвления); г) для любых слов P и Q в A *графическое равенство* $(\mathfrak{A}\bigcirc\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner \overline{\in} Q$ имеет место тогда и только тогда, когда может быть указан ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_k$ $(k\geqslant 1)$ в алфавите A таких, что

$$P_0 \overline{\in} P,$$

$$P_k \overline{\in} Q,$$

$$P_i \overline{\in} \mathfrak{A}\llcorner P_{i-1}\lrcorner \quad (i=1, \ldots, k),$$

$$\mathfrak{C}\llcorner P_k\lrcorner \overline{\notin} \Lambda \quad (i=1, \ldots, k-1),$$

$$\mathfrak{C}\llcorner P_k\lrcorner \overline{\in} \Lambda$$

(теорема повторения). Аналогичные теоремы могут быть получены и для *Тьюринга машин*. В теории *рекурсивных функций* наибольшее употребление нашли их сочетания, доставляемые оператором подстановки, оператором примитивной *рекурсии* и μ-оператором.

Теоремы об А. с. вскрывают весьма существенную особенность осуществленных стандартизаций общего понятия алгоритма их «устойчивость» по отношению к естественным способам А. с. Это обстоятельство является одним из наиболее веских доводов в пользу основной гипотезы теории алгоритмов (*Чёрча тезиса*). Теоремы об А. с. составляют важный раздел общей теории алгоритмов. Будучи доказаны однажды, они позволяют в дальнейшем убеждаться в осуществимости сложных и громоздких алгоритмов без фактического выписывания определяющих их схем.

Значительный интерес для общей теории алгоритмов представляет вопрос о разыскании базиса, позволяющего при фиксированном наборе способов А. с. порождать любой алгоритм к.-л. интересующего нас класса.

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 94—145; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.

Н. М. Нагорный.

АЛГОРИТМОВ ТЕОРИЯ — раздел математики, изучающий общие свойства *алгоритмов*. Содержательные явления, приведшие к образованию понятия «алгоритм», прослеживаются в математике в течение всего времени ее существования. Однако само это понятие сформировалось лишь в 20 в. и стало предметом самостоятельного изучения (по-видимому, впервые, хотя еще в расплывчатом виде) в 20-х гг. 20 в. в трудах представителей *интуиционизма* Л. Э. Я. Брауэра (L. E. J. Brouwer) и Г. Вейля (H. Weyl, см. [1]). Началом систематич. разработки А. т. можно считать 1936, когда А. Чёрч (A. Church, [2]) опубликовал первое уточнение понятия *вычислимой функции* (предложив отождествлять понятие всюду определенной вычислимой функции, имеющей натуральные аргументы и значения, с понятием общерекурсивной функции) и привел первый пример функции, не являющейся вычислимой, а А. М. Тьюринг (A. M. Turing, [3], [4]) и Э. Л. Пост (E. L. Post, [5]) дали первые уточнения понятия алгоритма (в терминах идеализированных вычислительных машин, см. *Тьюринга машина*). В дальнейшем А. т. получила развитие

в трудах С. К. Клини (S. C. Kleene), Э.Л. Поста (см. [6] — [8]), А. А. Маркова (см. [9] — [11]) и др. В частности, А. А. Марков предложил уточнять понятие алгоритма с помощью введенного им понятия *нормального алгорифма* (см. [10]). Наиболее общий подход к уточнению понятия алгоритма предложил А. Н. Колмогоров (см. [12], [13]).

Поскольку алгоритмы могут иметь дело лишь с так наз. *конструктивными объектами*, то, чтобы перенести понятия и методы А. т. на случай неконструктивных объектов, надо эти последние объекты обозначить, или поименовать, конструктивными объектами. Изучение общих свойств таких поименований (прежде всего, когда в качестве обозначений, или имен, выступают натуральные числа) составляет предмет теории *нумерации* (см. [14]), образующей важный раздел А. т.

Основные понятия теории алгоритмов. О б л а с т ь ю п р и м е н и м о с т и а л г о р и т м а наз. совокупность тех объектов, к к-рым он применим. Про алгоритм $\mathfrak{A}$ говорят, что он: 1) «вычисляет функцию f», коль скоро его область применимости совпадает с областью определения f, и $\mathfrak{A}$ перерабатывает всякий x из своей области применимости в $f(x)$; 2) «разрешает множество A относительно множества X», коль скоро он применим ко всякому x из X и перерабатывает всякий x из $X \cap A$ в слово «да», а всякий x из $X \setminus A$ в слово «нет»; 3) «перечисляет множество B», коль скоро его область применимости есть натуральный ряд, а совокупность результатов есть B. Функция наз. в ы ч и с л и м о й, если существует вычисляющий ее алгоритм. Множество наз. р а з р е ш и м ы м относительно X, если существует разрешающий его относительно X алгоритм. Множество наз. п е р е ч и с л и м ы м, если либо оно пусто, либо существует перечисляющий его алгоритм.

Детальный анализ понятия «алгоритм» обнаруживает, что: (I) область возможных исходных данных и область применимости любого алгоритма суть перечислимые множества. В свою очередь, (II) для любой пары вложенных одно в другое перечислимых множеств можно подобрать алгоритм, у к-рого большее множество служит областью возможных исходных данных, а меньшее — областью применимости. Имеют место следующие основные теоремы: (III) функция f вычислима тогда и только тогда, когда перечислим ее график, т. е. множество всех пар вида $\langle x, f(x)\rangle$. (IV) Подмножество A перечислимого множества X тогда и только тогда разрешимо относительно X, когда A и $X \setminus A$ перечислимы. (V) Если A и B перечислимы, то $A \cup B$ и $A \cap B$ также перечислимы. (VI) В каждом бесконечном перечислимом множестве X существует перечислимое подмножество с неперечислимым дополнением [в силу (IV) это перечислимое подмножество будет неразрешимым относительно X]. (VII) Для каждого бесконечного перечислимого множества X существует вычислимая функция, определенная на подмножестве этого множества и не продолжаемая до вычислимой функции, определенной на всем X. Утверждения (VI) и (II) в совокупности дают упоминаемый в статье *Алгоритм* пример алгоритма с неразрешимой областью применимости. Разрешимые и перечислимые множества составляют простейшие (и наиболее важные) примеры множеств, строение к-рых задается с помощью тех или иных алгоритмич. процедур. Систематич. изучение множеств конструктивных объектов с точки зрения таких свойств этих множеств, к-рые связаны с наличием тех или иных алгоритмов, образует так наз. алгоритмическую теорию множеств; нек-рые понятия, методы и результаты этой теории находят глубокие аналогии в *дескриптивной теории множеств*.

Алгоритмические проблемы. Проблема построения алгоритма, обладающего теми или иными свойствами, наз. *алгоритмической проблемой* (а. п.). Как правило,

свойство искомого алгоритма формулируется в терминах свойств того соответствия, к-рое должно иметь место между исходными данными и результатами алгоритма. Важные примеры а. п.: проблема вычисления данной функции (требуется построить алгоритм, вычисляющий эту функцию); проблема разрешения данного множества (требуется построить алгоритм, разрешающий это множество относительно нек-рого другого множества); проблема перечисления данного множества (требуется построить алгоритм, перечисляющий данное множество). Все примеры а. п. из различных областей математики, названные ниже в разделе «Приложения», являются проблемами разрешения. Неразрешимость а. п. означает отсутствие соответствующего алгоритма; теоремы, устанавливающие неразрешимость таких проблем, относятся к числу наиболее важных теорем А. т. Так, для алгоритма с неразрешимой областью применимости неразрешима а. п. разрешения этой области относительно области возможных исходных данных. Посредством сведения к неразрешимости этой проблемы была установлена неразрешимость большинства других проблем разрешения (в частности, всех проблем, указанных ниже в разделе «Приложения»). Вопрос о том, для любой ли неразрешимой проблемы разрешения ее неразрешимость может быть установлена таким способом, составляет так наз. проблему *алгоритмической сводимости*.

Метрическая теория алгоритмов. А. т. можно разделить на дескриптивную (качественную) и метрическую (количественную). Первая — исследует алгоритмы с точки зрения устанавливаемого ими соответствия между исходными данными и результатами; к ней относятся, в частности, те алгоритмич. проблемы, о к-рых говорилось в предыдущем разделе. Вторая — исследует алгоритмы с точки зрения сложности как самих алгоритмов (см. *Алгоритма сложность*), так и задаваемых ими «вычислений», то есть процессов последовательного преобразования конструктивных объектов. Важно подчеркнуть, что как сложность алгоритмов, так и сложность вычислений могут определяться различными способами, причем может оказаться, что при одном способе A будет сложнее B, а при другом способе — наоборот. Чтобы говорить о сложности алгоритмов, надо сначала описать к.-л. точный язык для записи алгоритмов и затем под сложностью алгоритма понимать сложность его записи; сложность же записи можно определять различными способами (напр., как число символов данного типа, участвующих в записи, или как набор таких чисел, вычисленных для разных типов символов). Чтобы говорить о сложности вычисления, надо уточнить, как именно вычисление представляется в виде цепочки сменяющих друг друга конструктивных объектов и что считается сложностью такой цепочки (только ли число членов в ней — «число шагов» вычисления, или еще учитывается «размер» этих членов и т. п.); в любом случае сложность вычисления зависит от исходного данного, с к-рого начинается вычисление, поэтому сложность вычисления есть функция, сопоставляющая с каждым объектом из области применимости алгоритма сложность соответствующей цепочки. Разработка методов оценки сложности алгоритмов и вычислений имеет важное теоретич. и практич. значение, однако в отличие от дескриптивной А. т., оформившейся в целостную математич. дисциплину (см. [11], [15], [16]), метрич. А. т. находится в процессе становления (см. [17] — [20]).

Приложения теории алгоритмов имеются во всех областях математики, в к-рых встречаются алгоритмич. проблемы. Такие проблемы возникают в *математической логике* и *моделей теории*; для каждой теории формулируется проблема разрешения множества всех истинных или доказуемых предложений этой теории относительно множества всех ее предложений (теории подраз-

деляются на разрешимые и неразрешимые — в зависимости от разрешимости или неразрешимости указанной проблемы); в 1936 А. Чёрч (см. [21], [22]) установил неразрешимость проблемы разрешения для множества всех истинных предложений логики предикатов, дальнейшие важные результаты в этом направлении принадлежат А. Тарскому (A. Tarski), А. И. Мальцеву и др. (см. [23]). Неразрешимые алгоритмич. проблемы встречаются в алгебре (проблема тождества для полугрупп и, в частности, для групп); первые примеры полугрупп с неразрешимой проблемой тождества были найдены в 1947 независимо А. А. Марковым (см. [9]) и Э. Л. Постом (см. [8]), а пример группы с неразрешимой проблемой тождества — в 1952 П. С. Новиковым (см. [24], [25]); в топологии (проблема гомеоморфии, неразрешимость к-рой для важного класса случаев была доказана в 1958 А. А. Марковым, (см. [26]); в теории чисел (проблема разрешимости диофантовых уравнений, неразрешимость к-рой была установлена в 1970 Ю. В. Матиясевичем, (см. [27], [28]) и др. разделах математики.

А. т. тесно связана с математич. логикой, поскольку на понятие алгоритма опирается одно из центральных понятий математич. логики — понятие *исчисления*, и потому, напр., *Гёделя теорема о неполноте* формальных систем может быть получена как следствие теорем А. т. (см. [29]). Наконец, А. т. тесно связана с основаниями математики, в к-рых одно из центральных мест занимает проблема соотношения конструктивного и неконструктивного; в частности, А. т. дает аппарат, необходимый для разработки конструктивного направления в математике; в 1965 А. Н. Колмогоров предложил использовать А. т. для обоснования теории информации (см. [30], *Алгоритмическая теория информации*). А. т. образует теоретич. фундамент для ряда вопросов вычислительной математики и тесно связана с кибернетикой, в которой важное место занимает изучение алгоритмов управления.

Лит.: [1] Вейль Г., О философии математики, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Church A., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 2, p. 345—63; [3] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1936, v. 42, №№ 3—4, p. 230—65; [4] его же, там же, 1937, v. 43, № 7, p. 544—46; [5] Post E. L., «J. Symbol. Log.», 1936, v. 1, № 3, p. 103—05; [6] его же, «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [7] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 5, p. 284—316; [8] его же, «J. Symbol. Log.», 1947, v. 12, № 1, p. 1—11; [9] Маркова А. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 55, № 7, с. 587—90; [10] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 176—89; [11] его же, Теория алгорифмов, М.— Л., 1954; [12] Колмогорова А. Н., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, № 4, с. 175—76; [13] Колмогоров А. Н., Успенский В. А., там же, 1958, т. 13, № 4, с. 3—28; [14] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, ч. 1—2, Новосибирск, 1969—73; [15] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [16] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [17] Марков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 161—208; [18] Трахтенброт Б. А., Сложность алгоритмов и вычислений, Новосибирск, 1967; [19] Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций, сб. переводов, М., 1970; [20] Сложность вычислений и алгоритмов, сб. переводов, М., 1974; [21] Church A., «J. Symbol. Log.», 1936, v. 1, № 1, p. 40—41; [22] его же, там же, № 3, p. 101—02; [23] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [24] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, с. 709—12; [25] его же, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955; [26] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20; [27] Матиясевич Ю. В., там же, 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [28] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 5, с. 185—222; [29] Успенский В. А., там же, 1974, т. 29, № 1, с. 3—47; [30] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11.

В. А. Успенский.

АЛГОРИТМОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — *бинарное отношение*, связывающее алгоритмы фиксированного типа и выражающее тот факт, что у всяких двух связанных этим отношением алгоритмов при совпадении определенного вида исходных данных совпадают и результаты работы (а также, быть может, и нек-рые до-

полнительные сведения относительно выполненных при этом вычислений — так наз. истории вычислений). Ниже приведено несколько типичных примеров таких отношений.

а) Рассматриваются всевозможные рекурсивные схемы — системы равенств, определяющие n-местные частично рекурсивные функции. Две схемы, определяющие функции φ и ψ, наз. функционально эквивалентными, если для любых натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеет место условное равенство

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

(оно считается верным, если обе его части осмысленны одновременно и в случае осмысленности принимают одинаковые значения). С. К. Клини (S. C. Kleene; см., напр., [1], с. 314) показал, что для любого всюду определенного вычислимого оператора $\mathfrak{R}$ над рекурсивными схемами можно указать схему S такую, что S и $\mathfrak{R}(S)$ функционально эквивалентны (так наз. теорема о неподвижной точке). Отсюда, в частности, вытекает теорема Успенского — Райса о неразрешимости произвольного инвариантного относительно функциональной эквивалентности свойства рекурсивных схем при условии, что имеются схемы S_1 и S_2 такие, что S_1 обладает этим свойством, а S_2 им не обладает. Из этой теоремы следует неразрешимость и самого отношения функциональной эквивалентности.

б) Рассматриваются *нормальные алгорифмы* над фиксированным алфавитом A. Два таких алгорифма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. эквивалентными относительно A (см. [2], с. 51), если для любого слова P в A выполняется следующее условие: если один из этих алгорифмов перерабатывает P в нек-рое слово Q, снова оказывающееся в алфавите A, то и второй из них также перерабатывает P в Q. Те же алгорифмы наз. вполне эквивалентными относительно A, если для любого P в A выполняется условное равенство

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(P).$$

Оба эти отношения неразрешимы.

в) Рассматриваются логич. схемы алгоритмов (схемы Янова, см. [3]). Реализацией такой схемы наз. последовательность операторов, выполняемых при прохождении по этой схеме от начала до конца. Две схемы наз. эквивалентными, если множества их реализаций совпадают. Отношение эквивалентности схем Янова оказалось разрешимым, и для него была построена полная система эквивалентных преобразований (см. [3], [4]).

Детальное изучение отношений А. э. представляет большой интерес в связи с рядом актуальных задач (особенно в области теории схем программ), требующих для своего решения развитой техники эквивалентных преобразований алгоритмов. Таковы, напр., задача трансляции алгоритмов (перевод с одного алгоритмич. языка на другой) и их оптимизации (преобразование с целью улучшения «рабочих характеристик»). В этом круге вопросов особое внимание уделяют (см., напр., [5]) возможности отыскания таких разрешимых отношений А. э., к-рые допускали бы удобные в приложениях полные системы эквивалентных преобразований. Концепция, намеченная в [3], во многом предопределила общий подход к исследованию отношений А. э.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954; [3] Янов Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 75—127; [4] Ершов А. П., «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20; [5] его же, там же, 1973, в. 27.

Н. М. Нагорный.

АЛЕКСАНДЕРА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — связь между гомологич. свойствами взаимно дополнительных подмножеств топологич. пространства, к-рая позволяет гомологич. свойства множества определять нек-рыми свойствами его дополнения. Первые теоремы такого рода

были сформулированы в терминах не алгебраической, а теоретико-множественной топологии. В 1892 К. Жорданом (C. Jordan) было доказано, что простая замкнутая непрерывная кривая разбивает плоскость на две области и является их общей границей (теорема Жордана). Эта теорема была (1911) независимо обобщена А. Лебегом (H. Lebesgue) и Л. Э. Я. Брауэром (L. E. J. Brouwer) на случай n-мерного многообразия, лежащего в $n+1$-мерном сферическом (или евклидовом) пространстве; при этом была установлена связь между указанным фактом и свойством r-мерного многообразия (в n-мерном пространстве) быть зацепленным с $(n-r-1)$-мерным многообразием (А. Лебег). В 1913 Л. Э. Я. Брауэр показал, что число областей, на к-рые плоское замкнутое множество разбивает плоскость, зависит лишь от топологич. свойств этого множества. В 1922 Дж. Александер [1] впервые выразил двойственность этого рода в чисто гомологич. понятиях. Теорема Александера (см. [2], [3], [4]) утверждает, что r-мерное число Бетти mod 2 (конечного) полиэдра Φ, лежащего в n-мерном сферич. пространстве, равно $(n-r-1)$-мерному числу Бетти mod 2 его дополнения. П. С. Александровым (1927) эта теорема была обобщена на случай любого замкнутого множества Φ. Двойственность, сформулированная в этой теореме, наз. двойственностью Александера.

Следующим важным этапом в развитии этого рода двойственности была теорема Понтрягина (1934) (см. [2], [3], [4]), утверждающая, что r-мерная *гомологии группа* $H_r(A, X)$ замкнутого множества A, расположенного в n-мерном сферич. многообразии M^n над компактной группой X коэффициентов, и $(n-r-1)$-мерная группа гомологии $H_{n-r-1}(B, Y)$ дополнения $B = M^n \setminus A$ над (дискретной) группой Y коэффициентов, двойственной с X в смысле теории характеров, двойственны в том же смысле, причем скалярное произведение определяется как коэффициент зацепления циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов гомологии. Эта теорема обычно наз. теоремой Александера — Понтрягина; двойственность, формулируемая в ней, наз. двойственностью Понтрягина, или двойственностью Александера — Понтрягина (см. *Понтрягина двойственность*). Ряд последующих обобщений завершился теоремой П. С. Александрова (см. [5], [7]), формулировка к-рой отличается от теоремы Понтрягина тем, что A может быть произвольным подмножеством из M^n, группа X может быть как компактной, так и дискретной, а под $H_r(A, X)$ и $H_{n-r-1}(B, Y)$ понимаются группы гомологии Александрова — Чеха (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*), причем одна — с компактными носителями, а другая — спектрового типа. Формы А. д. для любых множеств получаются заменой последних групп двойственными им группами когомологии той же размерности над двойственной группой коэффициентов.

В дальнейших обобщениях сферич. многообразия заменяются более общими многообразиями (*гомологическими многообразиями*, к-рые ацикличны в определенных размерностях), группы Александрова — Чеха - группами Ситникова — Стинрода и др., группы коэффициентов — модулями, пучками и т. п.

Лит.: [1] Alexander J. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1915, v. 16, p. 148—54; [2] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [3] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 2, с. 45—55; [4] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [5] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, в. 3, с. 161—232; [6] его же, Топологические теоремы двойственности, ч. 1—2, «Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова», М., 1955, т. 48; 1959, т. 54; [7] Чогошвили Г. С., в кн.: Тр. 4 Всес. матем. съезда, т. 2, М., 1964, с. 57—62.

Г. С. Чогошвили.

АЛЕКСАНДЕРА ИНВАРИАНТЫ — инварианты, связанные с модульной структурой одномерных гомо-

логий многообразия $\tilde{M}$, на к-ром свободно действует свободная абелева группа J^a ранга a с фиксированной системой образующих $t_1, t_2, \ldots, t_a$.

Проекция многообразия $\tilde{M}$ на пространство *орбит* M является *накрытием*, отвечающим ядру K_a гомоморфизма $\gamma\colon G \to J_a$ *фундаментальной группы* $\pi_1(M) = G$ многообразия M. Так как $K_a = \pi_1(\tilde{M})$, то группа $B_a = K_a/K_a'$, где K_a' — *коммутант* ядра K_a, изоморфна одномерной группе гомологий $H_1(\tilde{M}, Z)$. При этом расширение $1 \to K_a \to G \to J^a \to 1$ порождает расширение (*): $1 \to B_a \to G/K_a' \to J^a \to 1$, к-рое определяет на B_a модульную структуру над целочисленным групповым кольцом $Z(J^a)$ группы J^a (см. *Групповая алгебра*). Та же самая структура индуцируется в B_a данным действием J^a на $\tilde{M}$. Фиксация образующих t_i в J^a отождествляет $Z(J^a)$ с кольцом $L_a = L_a(t_1, \ldots, t_a) = Z[t_1, t_1^{-1}, \ldots t_a, t_a^{-1}]$ лорановых многочленов от переменных t_i. Расширение (*) чисто алгебраически определяет и определено модульным расширением (**): $0 \to B_a \to A_a \to I_a \to 0$ (см. [5]). Здесь I_a — ядро гомоморфизма $\varepsilon\colon L_a \to Z$, $(\varepsilon t_i = 1)$. Модуль A_a наз. модулем Александера накрытия $\tilde{M} \to M$. В случае (рассмотренном впервые Дж. Александером [1]), в к-ром $M = M(k)$ — дополнительное пространство нек-рого зацепления k кратности μ в трехмерной сфере S^3, а накрытие отвечает гомоморфизму коммутирования $\gamma_\mu\colon G(k) \to J^\mu$ группы зацепления, $-A_\mu$ наз. модулем Александера зацепления k. Основные свойства G, существенные для дальнейшего: $G\,G'$ — свободная абелева группа, дефект группы G равен 1, G имеет копредставление $\{x_1, \ldots, x_{m+1}; r_1, \ldots, r_m\}$, для к-рого $\gamma_\mu(x_i) = t_i$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, $\gamma_\mu(x_i) = 1$, $i > \mu$ (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). В случае зацеплений образующие $t_i \in J^\mu$ отвечают меридианам компонент $k_i \subset k$ и фиксируются ориентацией этих компонент и сферы.

Обычно M есть дополнительное пространство $M(k)$ зацепления k, состоящего из μ $(n-2)$-мерных сфер k_i в S^n. Кроме гомоморфизма γ_m рассматривается гомоморфизм $\gamma_\sigma\colon G(k) \to J$, где $\gamma(x)$ равно сумме коэффициентов зацепления *петли*, представляющей x, со всеми k_i.

Матрица $\mathfrak{M}_a$ модульных соотношений модуля A_a наз. матрицей Александера накрытия, а в случае зацеплений — матрицей Александера зацепления. Она может быть получена как матрица

$$(\partial r_i/\partial x_j)^{\gamma_a \Phi},$$

где $\{x_i; r_i\}$ — копредставление группы G. При $\mu = 1$ матрица $\mathfrak{N}_a$ модульных соотношений для B_a получается из $\mathfrak{M}_a$ отбрасыванием столбца из нулей. Матрицы $\mathfrak{M}_a$ и $\mathfrak{N}_a$ определены модулями A_a и B_a лишь с точностью до преобразований, отвечающих переходам к другим копредставлениям модуля. Однако с их помощью вычисляется ряд инвариантов модуля. Идеалами Александера наз. идеалы модуля A_a, т. е. ряд идеалов $E_i(A_a)$ кольца L_a: $(0) \subseteq E_0 \subseteq \ldots \subseteq E_{i-1} \subseteq E_i \subseteq \ldots \subseteq (1)$, где E_i порождается минорами матрицы $\mathfrak{M}_a$ порядка $(m-k) \times (m-k)$ и $E_a^i = L_a$ для $r - i < 1$. Употребляется и противоположный порядок нумерации. Так как L_a — гауссово кольцо и нётерово кольцо, то каждый идеал E_i лежит в минимальном главном идеале (Δ_i); его образующая Δ_i определена с точностью до делителей единицы t_i^k. Лоранов многочлен $\Delta_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ наз. i-м многочленом Александера, а $\Delta_1(t_1, \ldots, t_\mu)$ — просто многочленом Александера зацепления k (или накрытия $\tilde{M} \to M$). Если $\Delta_i \neq 0$, то он домножается на $t_1^{k_1}, \ldots, t_\mu^{k_\mu}$ так, чтобы $\Delta_i(0, \ldots, 0) \neq 0$ и $\neq \infty$. Гомоморфизму γ_σ отвечает модуль A, идеа

лы $\bar{E}_i$ и полиномы Δ_i, к-рые наз., соответственно, приведенным модулем Александера, приведенными идеалами Александера и приведенными многочленами Александера зацепления k (или накрытия $\tilde{M}_\sigma \to M$). Если $\mu=1$, то $A=\bar{A}$. $\mathfrak{M}(\bar{A})$ получается из $\mathfrak{M}$ заменой всех t_i на t. При $\mu\geqslant 2$ $\bar{\Delta}_1$ делится на $(t-1)^{\mu-2}$. Полином $\nabla(t)=\Delta_1(t)/(t-1)^{\mu-2}$ наз. полиномом Хосокавы [4]. Модульные свойства $A(k)$ изучены в [4], [8], [10]. Случай зацеплений исследован мало. Для $\mu=1$ группа $H_1(\tilde{M};\ R)$ конечно порождена над любым кольцом R, содержащим Z, в к-ром $\Delta(0)$ обратим [7], в частности, над полем рациональных чисел, а если $\Delta(0)=\pm 1$, то над Z. В этом случае $\Delta(t)$ — характеристич. многочлен преобразования t: $H_1(\tilde{M};\ R)\to H_1(\tilde{M};\ R)$. Степень $\Delta_1(t)$ равна рангу $H_1(\tilde{M};\ R)$; в частности, $\Delta_1(t)=1$ в том и только том случае, когда $H_1(\tilde{M};\ Z)=0$. При $n=3$ идеалы зацепления обладают следующим свойством симметрии: $E_i=\bar{E}_i$, где черта означает взятие образа при автоморфизме, порожденном заменой всех t_i на t_i^{-1}. Отсюда вытекает, что $\Delta_i(t_1^{-1},\ \ldots,\ t_\mu^{-1})=\pm t_1^{N_1},\ \ldots,\ t_\mu^{N_\mu}\Delta_i(t_1,\ \ldots,\ t_\mu)$ для нек-рых целых N_i. Эта симметрия является следствием двойственности Фокса - Троттера для групп узлов и зацеплений. Она может быть выведена также из *Пуанкаре двойственности* для многообразия $\tilde{M}$ с учетом свободного действия J^a (см. [3]). Если $\Delta_1(t_1,\ \ldots,\ t_\mu)\neq 0$, то над полем дробей P_μ кольца L_μ цепной комплекс $C_*(\tilde{M})$ ацикличен ($n=3$). Следовательно, определено *Рейдемейстера кручение* $\tau\in P_\mu/\Pi$, отвечающее вложению $L_\mu\subset P_\mu$, где Π — группа единиц L_μ. Для $\mu=2$ $\tau=\Delta_1$, для $\mu=1$ $\tau=\Delta_1/t-1$ (с точностью до единиц L_μ). Симметрия Δ_1 для $n=3$ является следствием симметрии τ. В случае $\mu=1$ из симметрии $\Delta_i(t)$ и свойства $\Delta_i(1)=\pm 1$ вытекает четность степени $\Delta_i(t)$. Степень $\nabla(t)$ также четна [4]. Свойства многочленов узлов $\Delta_i(t)$: $\Delta_i(1)=\pm 1$, $\Delta_i(t)=t^{2k}\Delta_i(t^{-1})$, Δ_{i+1} делит Δ_i и $\Delta_i=1$ для i, превосходящих нек-рое N, являются характеристическими, т. е. для каждого набора $\Delta_i(t)$ с этими свойствами существует узел k, для к-рого они служат многочленами Александера. Полиномы Хосокавы [4] характеризуются свойством $\nabla(t)=t^{2k}\nabla(t^{-1})$ при любом $\mu\geqslant 2$; полиномы Δ_1 двумерных узлов — свойством $\Delta_1(1)=1$.

А. и., в первую очередь многочлены, являются мощным средством различения узлов и зацеплений. Напр., среди узлов из таблицы с менее чем девятью двойными точками Δ_1 не различает только три пары (см. *Узлов таблица*). См. также *Узлов теория*, *Альтернирующие узлы и зацепления*.

Лит.: [1] Alexander J. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1928, v. 30, № 2, p. 275—306; [2] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [3] Blanchfield R. C., «Ann. Math.», 1957, v. 65, p. 340—56; [4] Hosokawa F., «Osaka J. Math.», 1958, v. 10, p. 273—82; [5] Crowell R. H., «Nagoya Math. J.», 1961, v. 19, p. 27—40; [6] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [7] Neuwirth L., Knot group, Princeton (N.Y.), 1965; [8] Crowell R. H., «J. Math. and Mech.», 1965, v. 14, № 2, p. 289—98; [9] Levine J., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, p. 69—84; [10] Milnor J. W., в кн.: Conference on the topology of manifolds, v. 13, Boston (a.o.), 1968, p. 115—33.

А. В. Чернавский.

АЛЕКСАНДРОВА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ, Александрова компактификация,— единственное хаусдорфово *бикомпактное расширение* αX локально бикомпактного не бикомпактного хаусдорфова пространства X, получаемое присоединением к пространству X одной точки ∞. Произвольная окрестность точки ∞ при этом обязана иметь вид $\{\infty\}\cup(X\setminus F)$, где F — нек-рый бикомпакт в X. А. б. р. αX является наименьшим элементом во множестве $B(X)$

всех бикомпактных расширений пространства X. При этом наименьший элемент во множестве $B(X)$ существует лишь для локально бикомпактного X и непременно совпадает с αX.

А. б. р. было определено П. С. Александровым [1] и играет важную роль в топологии. Так, А. б. р. $\alpha\mathbb{R}^n$ n-мерного евклидова пространства совпадает с n-мерной сферой, А. б. р. αN множества натуральных чисел гомеоморфно пространству сходящейся последовательности вместе с предельной точкой, А. б. р. «открытого» листа Мёбиуса совпадает с действительной проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$. Имеются патологич. ситуации, связанные с А. б. р., напр. существует совершенно нормальное, локально бикомпактное и счетно компактное пространство X, А. б. р. αX к-рого имеет размерности $\dim \alpha X < \dim X$ и $\operatorname{Ind} \alpha X < \operatorname{Ind} X$.

Лит.: [1] Александров П. С., «Math. Ann.», 1924, Bd. 92, S. 294—301.

В. В. Федорчук.

АЛЕКСАНДРОВА — ЧЕХА ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ, спектральные гомологии и когомологии, — гомологии и когомологии, удовлетворяющие всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* (кроме, быть может, аксиомы точности) и нек-рому условию непрерывности. Группы (или модули) гомологий $H_n(X, A; G)$ Александрова — Чеха [1], [2] определяются как обратный предел $\varprojlim H_n(\alpha, \alpha'; G)$ по всем открытым покрытиям α пространства X; при этом α означает не только покрытие, но и его *нерв*, а α' есть подкомплекс в α, являющийся нервом ограничения покрытия α на замкнутое множество A. Возможность перехода к пределу обеспечивается существованием симплициальных проекций $(\beta, \beta') \to (\alpha, \alpha')$, определяемых, с точностью до гомотопных, вписанностью β в α. Когомологии $H^n(X, A; G)$ Александрова — Чеха определяются как прямой предел $\varinjlim H^n(\alpha, \alpha'; G)$. Гомологии удовлетворяют всем аксиомам Стинрода — Эйленберга, кроме аксиомы точности. Для когомологий справедливы все аксиомы; частично поэтому когомологии значительно более употребительны. На категории бикомпактов аксиома точности имеет место и для гомологий, если G — компактная группа или поле. Кроме того, А.— Ч. г. и к. обладают свойством непрерывности: для $X = \varprojlim X_\lambda$ гомологии (когомологии) равны соответствующему пределу гомологий (когомологий) бикомпактов X_λ. При этом теория Александрова — Чеха является единственной теорией, удовлетворяющей аксиомам Стинрода — Эйленберга (с указанным исключением) и этому условию непрерывности. На категории паракомпактных пространств для когомологий справедлива обычная характеристика через отображения в полиэдры Эйленберга — Маклейна, а сами когомологии эквивалентны когомологиям, определяемым в *пучков теории*. Когомологии могут быть определены также как когомологии нек-рого предельного коцепного комплекса, что дает возможность оперировать пучками коцепей. Аналогичные идеи в применении к гомологиям приводят к теории гомологий, идущей от Н. Стинрода (N. Steenrod), А. Бореля (A. Borel) и др. и удовлетворяющей всем аксиомам, включая точность (но свойство непрерывности теряется). А.— Ч. г. и к., вместе с указанной модификацией, применяются в гомологич. вопросах теории непрерывных отображений, в теории групп преобразований (связь с факторпространством), в теории обобщенных многообразий (в частности, в различных соотношениях двойственности), в теории аналитич. пространств (напр., для определения фундаментальных классов гомологий), в гомологич. теории размерности и т. п.

Лит.: [1] Александров П. С., «Ann. of Math.», 1928, v. 30, p. 101—87; [2] Čech E., «Fundam. math.», 1932,

t. 19, p. 149—83; [3] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [4] Скляренко Е. Г., Теория гомологий и аксиома точности, «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, вып. 5 (149), с. 87 -140. *Е. Г. Скляренко.*

АЛЕФ-НУЛЬ — *кардинальное число*, являющееся мощностью счетного множества, обозначается $\aleph_0$. *П. С. Александров.*

АЛЕФЫ, $\aleph$,— первая буква древнееврейского алфавита,— символы, введенные Г. Кантором (G. Cantor) для обозначения *кардинальных чисел* (мощностей) бесконечных вполне упорядоченных множеств. Каждое кардинальное число есть нек-рый А. (следствие *выбора аксиомы*). Но многие теоремы об А. доказываются без аксиомы выбора. Для каждого порядкового числа α через $\aleph_\alpha = w(\omega_\alpha)$ обозначается мощность множества всех порядковых чисел, меньших ω_α. В частности, $\aleph_0$ есть мощность множества всех натуральных чисел, $\aleph_1$ — мощность множества всех счетных порядковых чисел и т. д. Если $\alpha < \beta$, то $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ является наименьшим кардинальным числом, следующим за $\aleph_\alpha$. Обобщенная континуум-гипотеза заключается в том, что $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ для любого порядкового числа α. При $\alpha = 0$ равенство приобретает вид $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и составляет содержание *континуум-гипотезы*. Множество всех А., меньших $\aleph_\alpha$, вполне упорядочено по величине и *порядковый тип* его равен α. Естественным образом определяются сумма, произведение и степень A. При этом

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha, \beta)}.$$

Наиболее часто встречаются следующие формулы. Рекурсивная формула Хаусдорфа:

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n},$$

ее частным случаем при $\alpha = 0$ является формула Бернштейна:

$$\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n.$$

Рекурсивная формула Тарского: если порядковое число α предельно и $\beta < cf(\alpha)$, то

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

При этом $cf(\alpha)$ обозначает конфинальный характер порядкового числа α. Как и в случае кардинальных чисел, различают сингулярные А., регулярные А., предельные А., слабо недостижимые А., сильно недостижимые А. и др. Напр., $\aleph_\alpha$ сингулярно, если α предельно и $cf(\alpha) < \alpha$. Среди А. нет наибольшего. Множество всех А., как показал Г. Кантор, не мыслимо, т. е. такого множества не существует. См. также *Вполне упорядоченное множество*, *Кардинальное число*, *Континуум-гипотеза*, *Множеств теория*, *Порядковое число*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов.*

АЛИКВОТНАЯ ДРОБЬ — дробь вида $1/n$, где n — натуральное число. Для решения ряда математич. и физич. задач существенно, что каждое положительное рациональное число представимо в виде суммы конечного числа А. д. с различными знаменателями. Так, $\frac{3}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$. А. д. широко использовались в Древнем Египте и получили впоследствии назв. египетских дробей. *Б. М. Бредихин.*

АЛФАВИТ — список (конечное множество) *букв*. Обычно в А. объединяются буквы, необходимые для развития той или иной символики (или, как иногда говорят, языка). Для двух А. A и B естественным образом

определяются их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$, а также отношение включения $A \subset B$. В целях удобства обычно допускают к рассмотрению и пустой А., то есть А., не содержащий ни одной буквы. *Н. М. Нагорный.*

АЛЬБАНЕЗЕ МНОГООБРАЗИЕ — *абелево многообразие* $\mathrm{Alb}(X)$, канонически сопоставляемое каждому алгебраич. многообразию X и являющееся решением следующей универсальной задачи: существует морфизм $\varphi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ такой, что любой морфизм $f\colon X \to A$ в абелево многообразие A разлагается в произведение $f = f' \cdot \varphi$, где $f'\colon A \to \mathrm{Alb}(X)$ (название в честь Альбанезе; Albanese). Если X полное неособое многообразие над полем комплексных чисел, то А. м. можно описать следующим образом. Пусть Ω^1 — пространство всюду регулярных дифференциальных форм степени 1 на X. Каждый одномерный цикл γ топологич. пространства X определяет линейную функцию $\omega \to \int_\gamma \omega$ на Ω^1. Образ получающегося отображения $H_1(X, \mathbb{Z}) \to (\Omega^1)^*$ является решеткой Γ в $(\Omega^1)^*$, а фактор — пространство $(\Omega^1)^*/\Gamma$ совпадает с А. м. многообразия X. С алгебраич. точки зрения А. м. можно рассматривать как способ задания алгебраич. структуры на нек-рой факторгруппе группы Z нульмерных циклов степени 0 на многообразии X. В случае, когда X — неособая полная кривая, $\mathrm{Alb}(X)$ совпадает с *Якоби многообразием* кривой X. Если основное поле k имеет нулевую характеристику, то имеют место равенства $\dim \mathrm{Alb}(X) = \dim_k H^0(X, \Omega^1_X) = \dim_k H^1(X, O_X)$. Число $\dim \mathrm{Alb}(X)$ наз. иррегулярностью многообразия X. В случае, когда поле имеет конечную характеристику, имеет место неравенство

$$\mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^0(X, \Omega^1_X) \text{ и } \mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^1(X, O_X)$$

и

$$\dim H^1(X, O_X) \neq \dim H^0(X, \Omega^1_X) \text{ в общем случае.}$$

А. м. двойственно *Пикара многообразию*.

Лит.: [1] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Lang S., Abelian varieties, N.Y.—L., 1959. *А. Н. Паршин.*

АЛЬБЕДНЫЙ МЕТОД (в теории переноса) — метод решения краевых задач для уравнения переноса. А. м. представляет собой вариант *матричной факторизации метода*, когда роль коэффициентов факторизации играют матрицы отражения и пропускания последовательности слоев возрастающей толщины. А. м. используется практически лишь в пространственно одномерных задачах, как при отыскании коэффициентов отражения и пропускания, так и для нахождения решения уравнения переноса в среде.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Гермогенова Т. А. и др., Альбедо нейтронов, М., 1973, гл. 2. *Т. А. Гермогенова.*

АЛЬТЕРНАНСА ТОЧКИ — последовательность точек

$$\{x_i\}_0^{n+1} \subset Q, \quad a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b,$$

в к-рых разность $\alpha_i = f(x_i) - P_n(x_i)$, где $f(x)$ — непрерывная на замкнутом множестве $Q \subset [a, b]$ функция и $P_n(x)$ — алгебраич. многочлен степени не выше n, принимает неравные нулю значения чередующихся знаков. Аналогично вводится понятие А. т. для многочленов по чебышевской системе функций $\{s_k(x)\}_0^n$ (удовлетворяющих *Хаара условию*). Если при этом все α_i по абсолютной величине равны

$$\max_{x \in Q} |f(x) - P_n(x)|,$$

то точки $\{x_i\}_0^{n+1}$ наз. точками чебышевского альтернанса. А. т. играют важную роль в теории приближения функций. Так, в терминах А. т. формулируется *Валле Пуссена теорема* (об аль-

тернансе) и критерий Чебышева (см. *Чебышевский альтернанс*). А. т. используются при построении многочленов наилучшего приближения. *Ю. Н. Субботин.*

АЛЬТЕРНАТИВА (в теории игр) — одна из позиций, в к-рую, согласно правилам игры, можно перейти из данной позиции за один ход. А. называют также соответствующий ход или приписанный ему индекс. *И. Н. Врублевская.*

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ. Альтернативным кольцом (А. к.) наз. кольцо, в к-ром каждые два элемента порождают ассоциативное подкольцо; альтернативной алгеброй (А. а.) наз. линейная алгебра, являющаяся А. к. Согласно теореме Артина класс всех А. к. задается системой тождеств:

$$(xy)y=x(yy) \text{ — правая альтернативность,}$$
$$(xx)y=x(xy) \text{ — левая альтернативность.}$$

Таким образом, все А. к. составляют многообразие. Термин «А. к.» оправдан тем, что в любом таком кольце *ассоциатор* (дефект ассоциативности)

$$(x, y, z)=(xy)z-x(yz)$$

является кососимметрической (альтернативной) функцией своих аргументов.

Первым примером А. к. явились *Кэли числа*, дающие пример альтернативного тела, т. е. А. к. с единицей, в к-ром однозначно разрешимы уравнения $ax=b$ и $ya=b$ для всех b и всех $a\neq 0$. Альтернативные тела играют существенную роль в теории проективных плоскостей, поскольку проективная плоскость Муфангова (т. е. плоскость трансляций относительно любой прямой) тогда и только тогда, когда любое координатизирующее ее тернарное кольцо является альтернативным телом. Если в кольце R с единицей каждый элемент обратим, и для любых a, $b\in R$ выполняется тождество

$$a^{-1}(ab)=b$$

(или тождество $(ba)a^{-1}=b$), то R является альтернативным телом. Всякое альтернативное тело либо ассоциативно, либо имеет строение *Кэли — Диксона алгебры* над своим центром.

Всякое простое А. к. также либо ассоциативно, либо является алгеброй Кэли — Диксона над своим центром (последняя в этом случае не обязана уже быть телом). Алгебрами Кэли — Диксона исчерпываются за пределами ассоциативных и все примитивные А. к. Всякое первичное А. к. R, если $3R\neq 0$, либо ассоциативно, либо является кольцом Кэли — Диксона.

Многие свойства А. к. весьма сильно отличаются от свойств ассоциативного кольца в аналогичных ситуациях. Так, если R есть А. к., а A и B — его правые идеалы, то их произведение AB уже не обязано быть правым идеалом, даже если A — двусторонний идеал в R; но произведение двусторонних идеалов А. к. является его двусторонним идеалом. Различие в случае ассоциативных колец и А. к. сильно проявляется и в том, что в А. к. существуют различные нильпотентности, поскольку произведение элементов, при одной расстановке скобок равное 0, при другой может быть отлично от 0. Обычно в А. к. используются следующие нильпотентности: разрешимость (кольцо R наз. разрешимым индекса m, если существует такое число m, что $R_m=0$, где $R_{i+1}=R_iR_i$, $R_1=R$), правая нильпотентность (существует такое число n, что $R^{(n)}=0$, где $R^{(i+1)}=R^{(i)}R^{(1)}$, $R^{(1)}=R$) и нильпотентность (существует такое число k, что $R^k=0$, т. е. произведение любых k элементов R равно 0 при любой расстановке скобок). Имеется А. к. разрешимое индекса 3, но не нильпотентное. Правая нильпотентность в А. к. эквивалентна нильпотентности (А. к.,

правонильпотентное индекса n, нильпотентно индекса $\leqslant(n+1)^2$). Локально, т. е. на конечно порожденных кольцах, все нильпотентности эквивалентны. Теория, устанавливающая достаточные признаки локальной нильпотентности А. к., вполне параллельна соответствующей теории для ассоциативных колец. Это вытекает из следующего факта: пусть R есть А. к., в к-ром можно выбрать такую систему S порождающих, что любые два элемента из S порождают нилькольцо; пусть, далее, все ассоциативные гомоморфные образы R локально нильпотентны, тогда R локально нильпотентно. Поэтому если R есть А. к. с тождеством $x^n=0$, то R локально нильпотентно; если R есть А. а. с тождеством, к-рое не является следствием ассоциативности, и каждый элемент R есть сумма конечного числа нильэлементов, то алгебра R локально нильпотентна. Если речь идет не о локальной, а о глобальной нильпотентности, то ситуация в А. к. отличается от ассоциативной. Так, уже А. к. R с тождеством $x^3=0$ не обязано быть нильпотентным (даже если его аддитивная группа без кручения). Однако А. к. с тождеством $x^n=0$ и без элементов порядка k, $0<k\leqslant n$, в аддитивной группе разрешимо индекса $n(n+1)$ 2.

Если R — алгебраич. А. а. с тождественным соотношением, не являющимся следствием ассоциативности (или степени алгебраичности элементов R ограничены в совокупности), то R локально конечномерна.

В А. к. имеется аналог *Джекобсона радикала*: во всяком А. к. R существует максимальный квазирегулярный идеал $J(R)$, равный пересечению всех модулярных максимальных правых идеалов. Факторкольцо $R/J(R)$ является J-полупростым, т. е. $J(R/J(R))=0$; если I есть идеал R, то $J(I)=J(R)\cap I$, всякое J-полупростое кольцо аппроксимируется примитивными А. к. (т. е. примитивными ассоциативными кольцами и алгебрами Кэли — Диксона). Имеются аналоги и всех других ассоциативных радикалов (нижнего нильрадикала, локально нильпотентного радикала и т. д.), к-рые обладают теми же основными свойствами, что и в ассоциативных кольцах.

В артиновом А. к. (то есть в А. к., удовлетворяющем условию минимальности для правых идеалов) R радикал $J(R)$ нильпотентен, нильпотентен и всякий нильподгруппоид мультипликативного группоида R. Кольцо R является артиновым А. к. без нильпотентных идеалов тогда и только тогда, когда R раскладывается в прямую сумму конечного числа полных матричных алгебр (над нек-рыми ассоциативными телами) и алгебр Кэли — Диксона; такое разложение для каждого R единственно с точностью до перенумерации слагаемых. Если R есть А. к., I — его идеал и R удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов, содержащихся в I, то I нильпотентен тогда и только тогда, когда для любого гомоморфизма φ кольца R в $I\varphi$ нет идеалов кольца $R\varphi$, которые являются простыми кольцами.

В А. к. R различаются ассоциативный центр

$$N(R)=\{n\in R\mid (n,a,b)=0 \text{ для всех } a,b\in R\},$$

коммутативный центр

$$C(R)=\{c\in R\mid [c,a]=ca-ac=0 \text{ для всех } a\in R\}$$

и центр

$$Z(R)=N(R)\cap C(R).$$

Если в аддитивной группе R нет элементов порядка 3, то $C(R)\subseteq N(R)$. Однако над полем характеристики 3 существуют коммутативные неассоциативные А. а. В первичном А. к. R всегда $C(R)\supseteq N(R)$. В любом А. к. R всегда $[N(R),R]\subseteq N(R)$. Пусть в А. к. R нетривиальных идеалов, тогда: 1) либо $3R=0$, либо $N(R)\neq 0$. 2) либо $3R\subseteq N(R)$, либо $Z(R)\neq 0$, 3) если A — правый

идеал R, то $N(A)=A\cap N(R)$ и $Z(A)=A\cap Z(R)$. В то же время над любым полем F можно построить такое А. к. K с тривиальными идеалами, что $N(K)=C(K)=0$, но K^2, являясь идеалом K, будет ассоциативно коммутативным кольцом, т. е.

$$N(K^2)=C(K^2)=K^2\neq 0.$$

Из тождеств, выполняющихся в А. к., наиболее известны следующие:

$$[(xy)\,z]\,y=x\,[(yz)\,y],\quad [(xy)\,x]\,z=x\,[y\,(xz)],$$
$$(xy)\,(zx)=[x\,(yz)]\,x$$

(тождества Муфанг);

$$(xy,\ z,\ t)-y\,(x,\ z,\ t)-(y,\ z,\ t)\,x=$$
$$=([x,\ y],\ z,\ t)+(x,\ y,\ [z,\ t]),$$
$$([x,\ y]^4,\ z,\ t)-[x,\ y]\,([x,\ y]^2,\ z,\ t)=$$
$$=([x,\ y]^2,\ z,\ t)\,[x,\ y]=0.$$

В А. к. с 3 образующими выполняется, кроме того, тождество:

$$([x,\ y]\,[z,\ t]+[z,\ t]\,[x,\ y],\ u,\ v)=0. \qquad (*)$$

В А. к. с более чем 3 образующими тождество (*), вообще говоря, не выполняется, более того, в этих А. к., вообще говоря, $([x,\ y]^2,\ z,\ t)\neq 0$. Во всяком А. к. без локально нильпотентных идеалов тождество (*) выполнено, т. к. такое А. к. аппроксимируется первичными ассоциативными кольцами и кольцами Кэли — Диксона.

Во всяком свободном А. к. R имеется ненулевой идеал $U(R)$, содержащийся в ассоциативном центре $N(R)$. Свободное А. к. с 3 или более образующими не только содержит делители нуля, но и не является первичным. Свободное А. к. с 4 или более образующими содержит даже тривиальные идеалы и поэтому не аппроксимируется первичными кольцами.

Лит.: [1] Дорофеев Г. В., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, № 3, с. 147–50; [2] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, № 3, с. 11—36; [3] его же, там же, 1969, т. 8, № 4, с. 425—39; [4] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, с. 381—94; [5] Kleinfeld E., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 3, p. 544—547; [6] его же, там же, 1957, v. 66, № 3, p. 395—99; [7] Скорняков Л. А., «Rend. mat. e applic.», 1965, v. 24, № 3—4, p. 360—72; [8] Slater M., «J. Algebra», 1968, v. 8, № 1, p. 60—76; [9] Дорофеев Г. В., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 1029–48.

К. А. Жевлаков.

АЛЬТЕРНИОН — *гиперкомплексное число*, А. могут рассматриваться как обобщение комплексных чисел, двойных чисел (см. *Двойные и дуальные числа*) и кватернионов. Алгеброй ${}^lA_n$ альтернионов n-го порядка индекса l наз. алгебра ранга 2^{n-1} над полем действительных чисел с единицей 1 и системой образующих $l_1,\ldots,l_{n-1}$, умножение к-рых производится по формулам

$$l_il_j=-l_jl_i,\quad l_i^2=-\varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i=\pm 1$, причем -1 встречается l раз, а $+1$, соответственно, $n-l-1$ раз. Базис алгебры можно составить из элементов вида

$$l_{j_1}l_{j_2}\ldots l_{j_k}=l_{j_1j_2\ldots j_k},\ \text{где}\ j_1<\ldots<j_k$$

и единицы. Произвольный А. α будет иметь в этой базе запись

$$\alpha=a+\sum_i a^il_i+\sum_i\sum_j a^{ij}l_{ij}+\ldots$$
$$\ldots+a^{12\ldots n-1}\,l_{1,\,2,\,\ldots,\,n-1},$$

где a, a^l, a^{lj}, …, $a^{12\ldots(n-1)}$ — действительные числа. Сопряженный к А. α А. $\bar{\alpha}$ определяется формулой

$$\bar{\alpha}=\sum_k(-1)^{k(k+1)/2}\,a^{i_1\ldots l_k}l_{i_1}\ldots l_{i_k}.$$

Справедливы равенства

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \bar{\bar{\alpha}}=\alpha,\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

Произведение $\bar{\alpha}\alpha$ всегда является положительным действительным числом, величина $|\alpha|=\sqrt{\bar{\alpha}\alpha}$ наз. м о д у л е м А. α. Если принять за расстояние между А. α и β число $|\beta-\alpha|$, то алгебры ${}^0A_n$ и ${}^lA_n$ ($l>0$) оказываются изометричными евклидовым пространствам $\mathbb{R}_{2^n-1}$ и псевдоевклидовым пространствам ${}^l\mathbb{R}_{2^n-1}$ соответственно. Алгебра ${}^0A_1$ изоморфна полю действительных чисел, алгебра ${}^0A_2$ изоморфна полю комплексных чисел, алгебра ${}^1A_2$ изоморфна алгебре двойных чисел, алгебра ${}^0A_3$ изоморфна телу кватернионов, алгебры ${}^1A_3$ и ${}^2A_3$ изоморфны так наз. алгебрам а н т и к в а т е р н и о н о в. Элементы алгебр ${}^0A_n$ наз. ч и с л а м и К л и ф ф о р д а. Алгебра ${}^4A_5$ рассматривалась П. Дираком (P. Dirac) при изучении спина электрона.

Алгебра А. является частным случаем *Клиффорда алгебр*.

Лит.: [1] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы геометрии, М., 1955.

Н. Н. Вильямс.

АЛЬТЕРНИРОВАНИЕ, к о с о с и м м е т р и р о в а н и е, а н т и с и м м е т р и р о в а н и е, а л ь т е р н а ц и я, — одна из операций тензорной алгебры, при помощи к-рой по данному тензору строится кососимметрический (по группе индексов) тензор. А. всегда производится по нескольким верхним или нижним индексам. Тензор A с координатами $\{a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, i_\nu\leqslant n, j_\mu\leqslant n\}$ является результатом А. тензора T с координатами $\{t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, 1\leqslant i_\nu, j_\mu\leqslant n\}$ по верхним индексам, напр., по группе индексов $I=(i_1, i_2, \dots, i_m)$, если

$$a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\frac{1}{m!}\sum\nolimits_{I\to\alpha}\sigma(I,\alpha)\,t^{\alpha_1\dots\alpha_m i_{m+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}. \qquad (*)$$

Здесь суммирование производится по всем $m!$ перестановкам α $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ группы индексов I, а число $\sigma(I, \alpha)$ равно $+1$ или -1, если соответствующая перестановка четна или нечетна. Аналогично определяется А. по группе нижних индексов.

А. по группе индексов обозначается взятием этих индексов в квадратные скобки. Посторонние индексы, попавшие внутрь квадратных скобок, отделяются вертикальными черточками.

Напр.,

$$t_{[4|23|1]}=\tfrac{1}{2!}[t_{4231}-t_{1234}].$$

Последовательное А. по группам индексов I_1 и I_2, $I_1\subset I_2$, совпадает с А. по группе индексов I_2:

$$t_{[i_1\dots[i_k\dots i_l]\dots i_q]}=t_{[i_1\dots i_q]}.$$

Если n — размерность векторного пространства, в к-ром определен тензор, то А. по группе индексов, количество к-рых больше n, всегда дает нулевой тензор. А. по нек-рой группе индексов тензора, симметричного (см. *Симметрирование*) по этой группе, также дает нулевой тензор. Тензор, не изменяющийся при А. по нек-рой группе индексов I, наз. к о с о с и м м е т р и ч е с к и м, или а л ь т е р н и р о в а н н ы м, по г р у п п е и н д е к с о в I. Перестановка любой пары таких индексов ведет к изменению знака у координаты тензора.

Операция А. тензора, наряду с операцией симметрирования, применяется для разложения тензора на более простые тензоры.

Произведение двух тензоров с последующей А. по всем индексам наз. а л ь т е р н и р о в а н н ы м п р о и з в е д е н и е м (в н е ш н и м п р о и з в е д е н и е м).

А. применяется также для образования знакопеременных (альтернированных) сумм вида (*) с многоиндексными слагаемыми. Напр., вычисление определите-

ля (с коммутирующими при умножении элементами) производится по следующим формулам:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = n!\, a_{[1}^1 a_2^2 \dots a_{n]}^n = n!\, a_{[1}^{[1} a_2^2 \dots a_{n]}^{n]}.$$

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [4] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970. *Л. П. Купцов.*

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ УЗЛЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ — узлы и зацепления, имеющие альтернирующую диаграмму (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*), т. е. такую проекцию в общее положение на плоскость, при к-рой при обходе каждой компоненты проходы сверху и снизу двойных точек чередуются. Каждую диаграмму можно превратить в альтернирующую, изменив в нек-рых двойных точках проходы сверху и снизу.

Пусть F — поверхность Зейферта. В отличие от общего случая, неравенство $d \leqslant 2h+\mu-1$, где d — степень многочлена Александера (см. *Александера инварианты*), h — род поверхности Зейферта и μ — число компонент зацепления k, становится для А. у. и з. равенством. Поэтому род А. з. может быть вычислен по любой его альтернирующей диаграмме, и поверхность Зейферта оказывается поверхностью минимального рода. Это показывает также, что если диаграмма нормирована, т. е. на плоскости проекции нет простого замкнутого контура, который пересекает диаграмму в одной двойной точке, то зацепление тривиально (см. *Узлов теория*) в том и только том случае, когда диаграмма не имеет двойных точек. Если такой контур есть, то вращением на 180^0 части диаграммы, лежащей внутри него, можно уменьшить число двойных точек, сохраняя диаграмму альтернированной. Это дает алгоритм для решения вопроса о тривиальности А. у. и з. Кроме того, если диаграмма связана, то зацепление не распадается, так как $d \geqslant 1$, а приведенный полином Александера распадающегося зацепления равен нулю. Матрица Александера вычисляется как матрица инциденций нек-рого графа, откуда выводится (см. [1], [2]), что $\Delta(t)$ — альтернирующий полином, т. е. его коэффициенты не нули и их знаки чередуются. Если $\Delta(0)=1$, то А. у. и з. являются *Нейвирта узлами* и зацеплениями. Для А. у. и з. число двойных точек нормированной диаграммы не больше, чем его детерминант. Группы А. у. и з. (см. *Узлов и зацеплений группы*) представляются в виде свободного произведения с отождествлением двух свободных групп нек-рого ранга q по подгруппе ранга $2q-1$. Это представление получается с помощью теоремы Ван Кампена, если пространство зацепления k разбить границей регулярной окрестности относительно k поверхности Зейферта, построенной по альтернирующей диаграмме. Все узлы стандартной таблицы (см. *Узлов таблица*) с неальтернирующими диаграммами являются неальтернирующими узлами. Не альтернирует большинство параллельных узлов, обмоток и т. п.

Лит.: [1] Murasugi K., «Osaka J. Math.», 1958, v. 10, p. 181—89; [2] Crowell R. H., «Ann. Math.», 1959, v. 69, p. 258—75; [3] Murasugi K., «Osaka J. Math.», 1960, v. 12, p. 277—303. *А. В. Чернавский.*

АЛЬФА — *алгоритмический язык*, разработанный в СССР для решения научно-технич. задач на вычислительных машинах. Представляет собой нек-рое расширение изобразительных средств языка *алгол*. К величинам алгола добавлены комплексные числа и составные ве-

личины, имеющие внутреннюю размерность (вектор, матрицы и т. п.). Добавлены описания, позволяющие вводить обозначения для компонент комплексных и многомерных величин. Введен особый класс процедур-функций, тело к-рых задается выражением. Разрешается указывать перечисление натуральных чисел через многоточие, употреблять знаки суммирования и произведения, а также цепочки неравенств. Имеется дополнительный вид циклов, в к-рых организация нужного числа повторений не требует введения перечисляющего параметра. Основные системы программирования: альфа (для машин типа М-20), алгибр (для комплекса М-220/БЭСМ-6), альфа-6 (для машин БЭСМ-6).

Лит.: [1] Ершов А. П., Кожухин Г. И., Волошин Ю. М., Входной язык для систем автоматического программирования, Новосиб., 1964; [2] АЛЬФА — система автоматизации программирования, Новосиб., 1967; [3] Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В., Руководство к пользованию системой АЛЬФА, Новосиб., 1968; [4] Руководство к пользованию системой автоматизации программирования АЛЬФА-6, Новосиб., 1975.

А. П. Ершов.

АЛЬФАНА ПУЧОК — пучок плоских алгебраич. кривых степени $3n$ с девятью n-кратными базисными точками. Для $n \geq 2$ такие пучки впервые были рассмотрены Ж. Альфаном в [1]. Базисные точки А. п. $P_1, \ldots, P_9$, среди к-рых могут быть и бесконечно близкие точки, всегда лежат на кубич. кривой $F=F(x_0, x_1, x_2)=0$. Произвольная кривая из А. п. имеет уравнение $\lambda G+\mu F^n=0$, где $G=G(x_0, x_1, x_2)=0$ — эллиптич. кривая степени $3n$ с особыми точками $P_1, \ldots, P_9$ кратности n. Если $F=0$ — неособая кривая, то относительно группового закона на этой кривой $n(P_1 \oplus \ldots \oplus P_9)=0$. Имеется обобщение этого факта на случай, когда $F=0$ кривая с особыми точками [3]. Каждый пучок эллиптических кривых на плоскости бирациональным преобразованием плоскости может быть преобразован в А. п. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Halphen G. H., «Bull. Soc. math. France», 1882, v. 10, p. 162—72; [2] Bertini E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1877, v. 8, p. 224—86; [3] Долгачев И. В., «Изв. АН СССР», сер. матем., 1966, т. 30, в. 5, 1073—100.

И. В. Долгачев.

АМАЛЬГАМА — множество M, представимое в виде теоретико-множественного объединения семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ *алгебраических систем* A_i из заданного класса $\mathfrak{K}$ с пересечениями U_{ij}, причем для всех i, j пересечение

$$A_i \cap A_j = U_{ij} = U_{ji}$$

непусто и является подсистемой в каждой из систем A_i, A_j. Если существует система B в классе $\mathfrak{K}$, содержащая все $A_i (i \in I)$ в качестве подсистем, то говорят, что А. M вложима в $\mathfrak{K}$-систему.

А. двух групп и вообще любая А. групп $\{A_i \mid i \in I\}$, у к-рой все пересечения $U_{ij} (i \neq j)$ совпадают между собой и равны U, всегда вкладывается в группу, напр. в свободное произведение групп $A_i (i \in I)$ с объединенной подгруппой U. Существуют, однако, А. групп, не вложимые в группу. (Условия вложимости А. групп в группу см. в [1], А. полугрупп в полугруппу см. в [2].) См. также *Амальгама групп*.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех алгебр над данным полем F или класс коммутативных, антикоммутативных или лиевых алгебр над полем F. А. $\{A_i \mid i \in I\}$ $\mathfrak{K}$-алгебр A_i с совпадающими пересечениями $U_{ij}=U$ (для всех $i \neq j$) вложима в $\mathfrak{K}$-свободное произведение этих алгебр с объединенной подалгеброй U (см. [3]). Доказано (см. [4]), что A. $\{T_i \mid i \in I\}$ ассоциативных тел T_i с совпадающими пересечениями $T_{ij}=T (i \neq j)$ вложима в ассоциативное тело.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967, с. 462; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 2, пер. с англ., М., 1972; [3] Ширшов А. И., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 2, с. 297—301; [4] Cohn P. M., «Proc. London Math. Soc.», 1971, v. 23, № 2, p. 193—213.

Л. А. Бокутъ, Д. М. Смирнов.

АМАЛЬГАМА ГРУПП — совокупность групп G_α, $\alpha \in I$, с условием, что пересечение $G_\alpha \cap G_\beta$ есть подгруппа в G_α и G_β при любых α, β из I. Примером А. г. служит произвольное семейство подгрупп нек-рой группы. Вложением А. г. $A=\{G_\alpha | \alpha \in I\}$ в группу G наз. взаимно однозначное отображение объединения $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ в G, сужение к-рого на каждое G_α есть изоморфизм. А. г., у к-рой все пересечения $G_\alpha \cap G_\beta$ совпадают (и равны, напр., подгруппе H), вкладывается в группу, являющуюся свободным произведением групп G_α с объединенной подгруппой H. С другой стороны, существует амальгама четырех абелевых групп, не вложимая в группу. Основная задача для А. г. в общей постановке состоит в следующем. Пусть σ, τ — свойства, к-рыми могут обладать группы. Спрашивается, при каких условиях А. г., обладающих свойством σ, вкладывается в группу, обладающую свойством τ? Установлено, что всякая амальгама двух конечных групп вложима в конечную группу. Амальгама трех абелевых групп вкладывается в абелеву группу. Амальгама четырех абелевых групп, вложимая в группу, вкладывается в абелеву группу. Существует амальгама пяти абелевых групп, вложимая в группу и не вложимая в абелеву группу. Исследовался также вопрос о вложимости А. г. в случаях, когда σ, τ обозначают (в различных комбинациях) разрешимость, нильпотентность, периодичность, локальную конечность и т. п.

Ю. И. Мерзляков, Н. С. Романовский.

АМПЛИТУДА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — переменная φ, рассматриваемая как функция от z в *эллиптическом интеграле* I рода

$$z = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

в нормальной форме Лежандра. Понятие А. э. и. и обозначение $\varphi = \operatorname{am} z$ ввел К. Якоби (C. Jacobi) в 1829. А. э. и. является бесконечнозначной периодич. функцией от z. Однозначными являются основные эллиптич. функции Якоби $\sin \operatorname{am} z = \operatorname{sn} z$, $\cos \operatorname{am} z = \operatorname{cn} z$, $\Delta \operatorname{am} z = \operatorname{dn} z$. С другой стороны, практически удобно, напр. при табулировании, рассматривать эллиптич. интеграл как функцию $F(\varphi, k)$ от амплитуды φ и модуля k. См. также *Якоби эллиптические функции*.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии. Основными понятиями А. г. являются простейшие геометрич. образы (точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности 2-го порядка). Основными средствами исследования в А. г. служат метод координат и методы элементарной алгебры. Возникновение метода координат тесно связано с бурным развитием астрономии, механики и техники в 17 в. Отчетливое и исчерпывающее изложение этого метода и основ А. г. было сделано Р. Декартом (R. Dercartes) в его «Геометрии» (1637). Основные идеи метода были известны также его современнику П. Ферма (P. Fermat). Дальнейшая разработка А. г. связана с трудами Г. Лейбница (G. Leibniz), И. Ньютона (I. Newton) и особенно Л. Эйлера (L. Euler). Средствами А. г. пользовался Ж. Лагранж (J. Lagrange) при построении аналитич. механики, Г. Монж (G. Monge) в дифференциальной геометрии. Ныне А. г. не имеет самостоятельного значения как наука, однако ее методы широко применяются в различных разделах математики, механики, физики и др. наук.

Сущность метода координат заключается в следующем. Рассмотрим, напр., на плоскости π две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Эти прямые с указанным на них направлением, началом координат O и выбранной масштабной единицей e образуют так наз. декартову прямоугольную систему координат Oxy на плоскости. Прямые Ox и Oy наз. соответственно осью абсцисс и осью ординат. Положение любой точки M на плоскости по отношению

к этой системе Oxy можно определить следующим образом. Пусть M_x и M_y — проекции M на Ox и Oy, а числа x и y — величины отрезков OM_x и OM_y (величина x отрезка OM_x, напр., равна длине этого отрезка, взятой со знаком плюс, если направление от O к M_x совпадает с направлением на прямой Ox, и со знаком минус — в противоположном случае). Числа x (абсцисса) и y (ордината) наз. декартовыми прямоугольными координатами точки M в системе Oxy. Для обозначения точки M с абсциссой x и ординатой y пользуются символом $M(x, y)$. Ясно, что координаты точки M определяют ее положение относительно системы Oxy.

Пусть на плоскости π с данной декартовой прямоугольной системой координат Oxy задана нек-рая линия L. Используя понятие координат точек, можно ввести понятие уравнения данной линии L относительно системы Oxy как соотношения вида $F(x, y)=0$, к-рому удовлетворяют координаты x и y любой точки M, расположенной на L, и не удовлетворяют координаты каждой точки, не лежащей на L.

Основная идея метода координат на плоскости состоит в том, что геометрич. свойства линии L выясняются путем изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств уравнения $F(x, y)=0$ этой линии. Напр., геометрич. вопрос о числе точек пересечения прямой и окружности сводится к аналитич. вопросу о числе решений алгебраич. системы уравнений прямой и окружности.

В А. г. на плоскости подробно изучаются геометрич. свойства *эллипса*, *гиперболы* и *параболы*, представляющих собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (см. *Конические сечения*).

В А. г. на плоскости систематически исследуются так наз. алгебраические линии 1-го и 2-го порядков; эти линии в декартовых прямоугольных координатах определяются соответственно алгебраич. уравнениями 1-й и 2-й степеней. Линии 1-го порядка суть прямые и обратно, каждая прямая определяется алгебраич. уравнением 1-й степени $Ax+By+C=0$. Линии 2-го порядка определяются уравнениями вида $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Основной метод исследования и классификации этих линий заключается в подборе такой декартовой прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение линии имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого простого уравнения. См. *Линии второго порядка*.

В А. г. в пространстве декартовы прямоугольные координаты x, y и z (абсцисса, ордината и аппликата) точки M вводятся в полной аналогии с плоским случаем. Каждой поверхности S в пространстве можно сопоставить ее уравнение $F(x, y, z)=0$ относительно системы координат $Oxyz$. При этом геометрич. свойства поверхности S выясняются путем изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств уравнения этой поверхности. Линию L в пространстве задают как линию пересечения двух поверхностей S_1 и S_2. Если $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ — уравнения S_1 и S_2, то пара этих уравнений, рассматриваемая совместно, представляет собой уравнение линии L. Напр., прямую L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. В А. г. в пространстве систематически исследуются так наз. алгебраические поверхности 1-го и 2-го порядков. Выясняется, что алгебраич. поверхностями 1-го порядка являются лишь плоскости. Поверхности 2-го порядка определяются уравнениями вида:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Mz+N=0.$$

Основной метод исследования и классификации этих поверхностей заключается в подборе такой декартовой

прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение поверхности имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого простого уравнения. См. *Поверхности второго порядка.*

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. с франц. и латин., М.— Л., 1938; [2] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [3] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968; [5] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [6] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973; [7] Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, 3 изд., М., 1964.

Э. Г. Позняк.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — теория *аналитических пространств.* Этот термин был введен Ж. П. Серром [1] по аналогии с алгебраич. геометрией.

Лит.: [1] Serre J. P., «Ann. Inst. Fourier», 1955–56, t. 6, p. 1—42.

А. Л. Онищик.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГРУППА — множество G, наделенное одновременно структурой *топологической группы* и структурой конечномерного *аналитического многообразия* (над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального *абсолютного значения*) так, что отображение $G\times G\to G$, заданное правилом $(x, y)\to xy$, является аналитическим. А. г. G всегда хаусдорфова; если k локально компактно, то G локально компактна. В случае, когда k является соответственно полем действительных, комплексных или p-адических чисел, G наз. соответственно вещественной (действительной), комплексной или p-адической А. г. Примером А. г. может служить полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, k)$ векторного пространства k^n над k (см. *Линейная классическая группа*) или, более общо, группа обратимых элементов произвольной конечномерной ассоциативной алгебры с единицей над k. Вообще, группа k-рациональных точек *алгебраической группы*, определенной над k, является А. г. Подгруппа в А. г. G, являющаяся подмногообразием в G, наз. аналитической подгруппой; такая подгруппа обязательно замкнута в G. Напр., ортогональная группа $O(n, k)=\{g\in\mathrm{GL}(n, k)|\ {}^tgg=1\}$ является аналитич. подгруппой в $\mathrm{GL}(n, k)$. Всякая замкнутая подгруппа вещественной или p-адической А. г. аналитична и всякий непрерывный гомоморфизм таких групп аналитичен (теоремы Картана, см. [1]).

А. г. иногда наз. группой Ли (см. [1]), однако обычно группа Ли понимается более узко как вещественная А. г. (см. [2], [3] и *Ли группа*). Комплексная же и p-адическая А. г. наз. соответственно комплексной и p-адической группами Ли.

Сформулированные выше теоремы Картана означают, что *категория* вещественных или p-адических А. г. будет полной подкатегорией в категории локально компактных топологич. групп. Вопрос о том, насколько эти категории отличаются, т. е. когда локально компактная группа G является вещественной или p-адической А. г., допускает исчерпывающий ответ: в действительном случае в G должна существовать окрестность единицы, не содержащая нетривиальных подгрупп (см. [5] – [9]); в p-адическом случае в G должна содержаться конечно порожденная открытая подгруппа U, являющаяся *про-p-группой*, коммутант к-рой лежит в множестве U^{p^2} p^2-х степеней элементов из U (см. [10]). В частности, любая топологич. группа, имеющая окрестность единицы, гомеоморфную евклидову пространству (так наз. локально евклидова топологическая группа, см. [4]), есть вещественная А. г. Иначе говоря, из существования в топологич. группе непрерывных локальных координат вытекает существование аналитических локальных координат; этот результат составляет положительное решение пятой проблемы Гильберта (см. [5], [11]).

В случае нулевой характеристики поля k важнейшим методом исследования А. г. является изучение их алгебр Ли (см. *Ли алгебра аналитической группы*).

О бесконечномерных А. г. см. *Ли банахова группа*.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, пер. с англ., М., 1948; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 101—15; [6] Gleason A., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 193—212; [7] Montgomery D., Zippin L., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 213—41; [8] Yamabe H., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 1, p. 48—54; [9] его же, там же, 1953, v. 58, № 2, p. 351—65; [10] Lazard M., «Publ. Math. IHES», 1965, t. 26, p. 389—594; [11] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974.

В. Л. Попов.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ, аналитическая мера, аналитическая мера Альфорса,— функция плоского множества, введенная Л. Альфорсом [1] и являющаяся аналогом логарифмич. *емкости*, приспособленным для характеризации множеств устранимых особенностей ограниченных аналитических функций. Пусть E — замкнутое ограниченное множество на плоскости, $A(E)$ — множество функций, аналитических вне E, равных нулю в бесконечно удаленной точке и ограниченных всюду вне E константой 1, и пусть $\gamma(E; f)=\lim z\cdot f(z)$ при $z\to\infty$. Число $\gamma(E)=\sup|\gamma(E; f)|$, $f\in A(E)$, наз. аналитической емкостью множества E. А. е. произвольного множества обычно наз. верхняя грань А. е. его замкнутых ограниченных подмножеств.

Если E — замкнутое ограниченное множество, то для того чтобы всякая аналитическая и ограниченная вне E функция аналитически продолжалась на множестве E, необходимо и достаточно равенство нулю А. е. множества E (теорема Альфорса).

Существует также ряд родственных А. е. понятий, приспособленных к метрикам различных других пространств аналитич. функций (см., напр., [2] и [3]).

Понятие А. е. оказалось удачно приспособленным в нек-рых задачах теории приближения, где решение ряда основных вопросов формулируется в терминах А. е. Так [4], для того чтобы на замкнутом ограниченном плоском множестве E всякая непрерывная функция равномерно приближалась с любой точностью рациональными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого круга σ_δ радиуса δ выполнялось равенство

$$\gamma(\sigma_\delta\setminus E)-\gamma(\sigma_\delta)=\delta.$$

Лит.: [1] Ahlfors L., «Duke. Math. J.», 1947, v. 14, p. 1—11; [2] Garabedian P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 69, № 3, p. 392—415; [3] Синанян С. О., «Докл. АН Арм. ССР», 1962, т. 35, № 3, с. 107—12; [4] Витушкин А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99.

А. Г. Витушкин.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ, аналитическая дуга,— кривая K n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, допускающая аналитич. параметризацию. Это означает, что координаты ее точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ могут быть выражены в виде аналитич. функций действительного параметра $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, т. е. в нек-рой окрестности каждой точки t_0, $\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$, функции $x_i(t)$ представимы в виде сумм сходящихся степенных рядов по степеням $t-t_0$, причем производные $x_i'(t_0)$, $i=1, 2, \ldots, n$, не равны нулю одновременно ни в одной точке отрезка $[\alpha, \beta]$. Последнее условие иногда оговаривают дополнительно, называя удовлетворяющую ему А. к. правильной. А. к. наз. замкнутой, если $x_i(\alpha)=x_i(\beta)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

На плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$ А. к. допускает представление в виде комплексной аналитич. функции действительного параметра $z=f(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $f'(t)\neq 0$ на $[\alpha, \beta]$. Если А. к. расположена в области $D\subset\mathbb{C}$, то при конформном отображении D на к.-л. область она отображается также в А. к.

Если множество точек пересечения двух А. к. бесконечно, то эти А. к. совпадают.

Вообще, в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, комплексные координаты z_i точек А. к. допускают представление в виде аналитич. функций действительного параметра $z_i = z_i(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следует, однако, иметь в виду, что при $n > 1$ термин «А. к.» иногда обозначает *аналитическую поверхность* комплексной размерности единица.

На римановой поверхности S А. к. K допускает представление вида $f(t) = \psi(\varphi(t))$, где $z = \psi(P)$ — локальный униформизирующий параметр точек P поверхности S, $f(t)$ — аналитич. функция действительного параметра в окрестности любой точки $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯЗЫКА, анализирующая модель языка,— один из типов математич. конструкций, используемых в математической лингвистике для описания строения естественных языков. Эти конструкции служат для формального моделирования основных категорий лингвистики, а также самого процесса лингвистич. исследования, иначе говоря — для получения по нек-рым совокупностям «неупорядоченных» данных о языке (точнее, о речи) тех или иных сведений о строении механизма языка, т. е. о его грамматике в широком смысле слова. «Работа» такой модели не всегда носит характер эффективного построения, поскольку совокупность исходных данных может не быть конструктивным объектом; в принципе это не уменьшает значения таких моделей.

В наиболее полно разработанных А. м. я. в качестве совокупности исходных данных выступает объект, моделирующий множество грамматически правильных предложений естественного языка, а именно нек-рый *формальный язык* в заданном алфавите (словаре) V. Если L — язык в словаре V и $\forall u, v \in V^*$ $[uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L]$, то говорят, что цепочка x замещаема на цепочку y относительно V и L; если каждая из двух цепочек x и y замещаема на другую относительно V и L, то говорят, что x и y взаимозамещаемы относительно V и L. Понятие взаимозамещаемости имеет простой лингвистич. смысл: если L понимается как множество грамматически правильных предложений нек-рого естественного языка, то взаимозамещаемые цепочки представляют собой «синтаксически эквивалентные», т. е. выполняющие одни и те же синтаксич. функции, словосочетания. В частности, если односимвольная цепочка a (в лингвистич. интерпретации — слово) взаимозамещаема с цепочкой x длины >1, то x является «потенциальной составляющей», т. е. может входить в лингвистически естественные системы составляющих грамматически правильных предложений данного языка (см. *Синтаксическая структура*); в этом случае цепочку x наз. конфигурацией 1-го ранга языка L с результирующим a. Так, для русского языка цепочку «равномерно непрерывная» можно считать конфигурацией 1-го ранга с результирующим «непрерывная». Однако конфигурациями 1-го ранга не исчерпываются все «потенциальные составляющие»: напр., словосочетание «непрерывная функция» не является конфигурацией 1-го ранга, т. к. на него замещаемы только такие слова, как «функция», «производная», ..., но само оно ни на одно из этих слов не замещаемо («$f(x)$ есть равномерно непрерывная функция» — правильное предложение, а «$f(x)$ есть равномерно функция» — нет). Поэтому вводится следующее определение: если $r > 1$ есть натуральное число и для каждого $i = 1, \ldots, r-1$ определено понятие конфигурации языка L ранга i, то цепочка x длины >1 наз. конфи-

гурацией ранга r языка L с результирующим a, где $a \in V$, если: a замещаема на x относительно V и L; если $z_1xz_2 \in L$ и z_1xz_2 не содержит вхождений конфигураций рангов, меньших r, перекрывающихся с выделенным вхождением x, но не содержащихся в нем целиком, то $z_1az_2 \in L$. В русском языке словосочетание «непрерывная функция» можно считать конфигурацией 2-го ранга с результирующим «функция» (а также, напр., «производная»). Можно показать, что в нек-ром смысле язык вполне определяется совокупностью своих конфигураций.

Конфигурационная модель принадлежит к так наз. синтагматическим А. м. я., предназначенным для описания отношений между элементами отрезков речи (в лингвистике такие отношения наз. синтагматическими). Другой класс А. м. я. составляют парадигматические модели, предназначенные для описания парадигматич. отношений, т. е. отношений между элементами языка в его системе. В таких моделях обычно строятся те или иные отношения на словаре, часто (но не всегда) являющиеся отношениями эквивалентности. В частности, с помощью парадигматич. А. м. я. строятся формальные аналоги традиционных лингвистич. категорий таких, как часть речи, падеж, род, фонема и т. п. «Исходным материалом» во многих парадигматич. А. м. я. также служит множество грамматически правильных предложений; в ряде моделей этого типа используется понятие замещаемости. Простейшее из получаемых таким образом отношений эквивалентности — ограниченное словарем отношение взаимозамещаемости; классы эквивалентности по этому отношению наз. семействами. Если ввести еще одно отношение на словаре, интерпретируемое как «быть формами одного слова» (точнее, одной лексемы; в таком отношении находятся, напр., слова «предел» и «пределом», «число» и «числу»; при этом производится идеализация — считается, что слово может быть формой только одной лексемы; соответствующие классы эквивалентности наз. окрестностями), то с помощью указанных двух отношений удается ввести нек-рые другие классификации, к-рые можно рассматривать как приближения к формальным аналогам понятия части речи и других традиционных грамматических понятий, в частности понятий падежа и рода существительного. Последние два понятия являются объектом особенно интенсивных исследований; для их формализации предложен ряд моделей, основывающихся на понятии грамматич. правильности, а также моделей иного характера. Имеется, в частности, модель, в к-рой каждый падеж трактуется как множество «одинаково управляемых» форм существительных, а каждый род — как множество «одинаково управляющих» существительных. Исходными данными для определения падежа служат в этой модели словарь, множество окрестностей, множество существительных и бинарное отношение «потенциального подчинения» на словаре: a потенциально подчиняет b, если в нек-ром «лингвистически естественном» дереве подчинения (см. *Синтаксическая структура*) грамматически правильного предложения данного языка из к.-л. вхождения a идет дуга в нек-рое вхождение b; для определения рода добавляются еще нек-рые исходные данные аналогичного характера. Модели, основанные на «потенциальном подчинении» или иных понятиях, относящихся к деревьям, позволяют, видимо, дать более адекватную формализацию традиционных грамматич. категорий, чем модели, имеющие дело только с цепочками, поскольку в «древесных» моделях синтаксич. отношения отделены от линейных (ср. *Грамматика трансформационная*).

Математич. аппарат, используемый при построении А. м. я., обычно сравнительно несложен. Для нек-рых моделей он сводится к простейшим понятиям теории

множеств (такие модели часто наз. теоретико-множественными; иногда это назв. распространяют на все А. м. я.), в других случаях используются алгебраич. понятия, в особенности понятия теории полугрупп и алгебры бинарных отношений (в связи с чем теорию А. м. я. иногда наз. алгебраической лингвистикой).

Лит.: [1] Кулагина О. С., «Проблемы кибернетики», 1958, вып. 1, с. 203—14; [2] Успенский В. А., «Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода», 1957, № 5, с. 11—18; [3] его же, «Вопросы языкознания», 1964, № 6, с. 39—53; [4] Маркус С., Теоретико-множественные модели языков, пер. с англ., М., 1970; [5] Ревзин И. И., Метод моделирования и типология славянских языков, М., 1967; [6] Гладкий А. В., «Вопросы языкознания», 1969, № 2, с. 110—23; [7] его же, Формальные грамматики и языки, М., 1973.

А. В. Гладкий.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ, комплексно-аналитическая плоскость,— множество точек $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = b_j, \quad j=1, \ldots, k; \; a_{ij}, \; b_j \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{rank} \| a_{ij} \| = k < n.$$

Число k наз. комплексной коразмерностью, а $n-k$ наз. комплексной размерностью А. п. Действительная размерность А. п., равная $2(n-k)$, четная, однако не всякая четномерная действительная плоскость в $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ является А. п. Комплексно-одномерные А. п. наз. иногда комплексными, или аналитическими, прямыми. См. также *Аналитическая поверхность.*

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (в евклидовом пространстве) — произвольное двумерное аналитическое подмногообразие X в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n>2$. Часто, однако, термин «А. п.» в $\mathbb{R}^n$ употребляется в более широком смысле как многообразие, допускающее аналитич. параметризацию. Это означает, что координаты точек $x=(x_1, \ldots, x_n) \in X$ можно представить в виде аналитич. функций $x_i=x_i(t)$ действительного параметра $t=(t_1, \ldots, t_k)$, изменяющегося в нек-рой области $\Delta \subset \mathbb{R}^k$, $1 \leqslant k < n$. Если при этом ранг матрицы Якоби $\operatorname{rang} \| \partial x / \partial t \|$, к-рый для аналитич. многообразия всюду в Δ максимален и равен k, то размерность А. п. X равна k.

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ термин «А. п.» используется также для обозначения комплексно-аналитической поверхности X в $\mathbb{C}^n$, т. е. многообразия, допускающего голоморфную (комплексно-аналитическую) параметризацию. Это означает, что комплексные координаты точек $z=(z_1, \ldots, z_n) \in X$ можно выразить в виде голоморфных функций $z_i=z_i(\tau)$ параметра $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, изменяющегося в нек-рой области $\Delta \subset \mathbb{C}^k$, $1 \leqslant k < n$ (как правило, предполагается еще, что $\operatorname{rang} \| \partial z / \partial \tau \| \equiv k$). Если $\Delta = \mathbb{C}^k$ и все функции $z_i(\tau)$ линейные, то получается комплексно-аналитич. плоскость (см. *Аналитическая плоскость*). При $k=1$ иногда употребляется термин голоморфная кривая (комплексно-аналитическая кривая); если при этом все функции $z_i(\tau)$ линейные, то говорят о комплексной прямой (в параметрич. представлении):

$$z_i = a_i \tau + b_i; \; a_i, \; b_i \in \mathbb{C}, \; i=1, \ldots, n, \; (a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ абстрактная — двумерное комплексное *аналитическое многообразие*, т. е. четырехмерное гладкое многообразие, снабженное комплексной структурой. Хотя теория А. п. и является частью общей теории комплексных многообразий, двумерный случай выделяется особо, т. к. об А. п. известно гораздо больше, чем о n-мерных многообразиях при $n \geqslant 3$. Кроме того, нек-рые факты специфичны только для размерности 2. Эти специфич. резуль-

таты об А. п. касаются классификации А. п., аналогичной классификации *алгебраических поверхностей*, что в значительной степени сводит теорию А. п. к теории алгебраич. поверхностей. Основные результаты по классификации А. п. получены К. Кодаирой [1], [2], [3], к-рый, однако, опирался на работы классиков итальянской школы алгебраич. геометрии по классификации алгебраич. поверхностей.

Все рассматриваемые в дальнейшем А. п. предполагаются компактными и связными.

Примеры. 1) Алгебраические поверхности. Пусть

$$f_i(x_0, \ldots, x_N), \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

набор однородных многочленов с комплексными коэффициентами. Замкнутое подмножество комплексного проективного пространства $P^N(\mathbb{C})$, выделяемое уравнениями $f_i(x)=0$, будет А. п., если оно неособо, связно и имеет комплексную размерность 2. Это — основной пример А. п.

2) Комплексные торы. Пусть $\mathbb{C}^2$ — двумерное векторное пространство над полем комплексных чисел (как векторное пространство над полем действительных чисел оно изоморфно $\mathbb{R}^4$) и пусть $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^4$ — решетка в $\mathbb{C}^2$. Факторпространство $X=\mathbb{C}^2/\Gamma$ будет А. п. Как гладкое многообразие X диффеоморфно 4-мерному тору, однако комплексная структура на X зависит от решетки Γ. Комплексные торы $X=\mathbb{C}^2/\Gamma$ играют важную роль в анализе, так как мероморфные функции на них это мероморфные функции на $\mathbb{C}^2$, к-рые периодичны с решеткой периодов Γ. А. п. вида $\mathbb{C}^2/\Gamma$ не всегда алгебраичны. Существуют даже такие решетки Γ, что на соответствующем торе $\mathbb{C}^2/\Gamma$ вообще нет мероморфных функций (кроме констант). Конкретные примеры таких торов можно найти в [5].

3) Поверхности Хопфа. Пусть $Y=\mathbb{C}^2-\{0\}$, c — положительное число, и рассматривается действие группы Z на Y

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (c^k z_1, c^k z_2), \quad k \in Z.$$

Группа Z действует дискретно и без неподвижных точек на Y, а факторпространство $X=Y/Z$ диффеоморфно $S^1 \times S^3$. Факторпространство X естественным образом является А. п., наз. поверхностью Хопфа.

Классификация аналитических поверхностей. Основным инвариантом при классификации А. п. является степень трансцендентности поля мероморфных функций $\mathbb{C}(X)$ на А. п. X. Согласно теореме Зигеля, для любого компактного связного комплексного многообразия X поле $\mathbb{C}(X)$ конечно порождено и его степень трансцендентности не превышает комплексной размерности для X. Таким образом, для А. п. X поле $\mathbb{C}(X)$ может содержать две алгебраические независимые мероморфные функции, одну такую функцию или, вообще, состоять только из констант. В соответствии с этими возможностями имеют место следующие теоремы.

Для того чтобы А. п. X была алгебраич. поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы на X существовали две алгебраически независимые мероморфные функции.

Если А. п. X обладает полем мероморфных функций степени трансцендентности 1, то X является эллиптич. поверхностью, т. е. обладает голоморфным отображением на алгебраич. кривую Y, $P\colon X \to Y$ таким, что

$$P^*\mathbb{C}(Y)=\mathbb{C}(X)$$

и все слои отображения P, кроме конечного числа, являются эллиптич. кривыми (особые слои могут иметь только очень специальный вид, к-рый хорошо изучен).

Если на А. п. X не существует мероморфных функций, кроме констант, и на X нет исключительных кривых (см. *Исключительное подмногообразие*), то первое число Бетти b_1 для X может принимать только три значения:

4, 1 и 0. При этом, если $b_1=4$, то X является комплексным тором, а если $b_1=0$, то X обладает тривиальным канонич. расслоением. Последние А. п. наз. КЗ-поверхностями. Все они гомеоморфны между собой. Случай $b_1=1$ подробно не изучен, но известные примеры А. п. с $b_1=1$ получаются обобщением конструкции поверхностей Хопфа.

Кэлерова А. п. не всегда будет алгебраич. поверхностью. Однако это так, если квадрат ее первого *Чжэня класса* положителен. Каждая кэлерова А. п. с $b_1>0$ является деформацией алгебраич. поверхности.

Лит.: [1] Кодаира К., «Математика», сб. переводов, 1962, т. 6, № 6, с. 3—17; [2] Kodaira K., «Ann. Math.», 1960, v. 71, p. 111—52; 1963, v. 77, p. 563—626; 1963, v. 78, p. 1—40; [3] его же, «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, p. 751—98; 1966, v. 88, p. 682 -721; 1968, v. 90, p. 55—83; 1048—66; [4] Алгебраические поверхности, М., 1965 («Труды Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 75); [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Б. Б. Венков.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-ром решения исследуются с точки зрения теории аналитич. функций. Типичная постановка задачи в А. т. д. у. такова: дан нек-рый класс дифференциальных уравнений, все решения к-рых суть аналитич. функции одной переменной; требуется выяснить, какими специфич. свойствами обладают аналитич. функции, являющиеся решениями данного класса уравнений. В таком широком понимании А. т. д. у. включает теорию алгебраич. функций, теорию абелевых интегралов, теорию специальных функций и т. д. Специальные функции — *Бесселя функции*, *Эйри функции*, *Лежандра функции*, *Лагерра функции*, *Эрмита функции*, *Чебышева многочлены*, Сонина функции, *Уиттекера функции*, *Вебера функции*, *Матье функции*, *гипергеометрическая функция* и многие другие — являются решениями линейных дифференциальных уравнений с аналитич. коэффициентами.

Линейная теория. Рассмотрим систему из n уравнений в матричной записи

$$\dot{x}=A(t)x+f(t). \tag{1}$$

1) Пусть матрицы $A(t)$, $f(t)$ голоморфны в области $G\subset C(t)$ ($C(t)$ - комплексная плоскость t). Тогда всякое решение системы (1) аналитично в G (но, вообще говоря, неоднозначно, если область G неодносвязна). Предположим, что $A(t)$ мероморфна в области G, и рассмотрим однородную систему

$$\dot{x}=A(t)x. \tag{2}$$

[Матрица $A(t)$ наз. голоморфной (мероморфной) в области G, если все ее элементы голоморфны (мероморфны) в этой области.] Точка $t_0\in G$ наз. полюсом матрицы $A(t)$ порядка $\nu\geqslant 1$, если в нек-рой окрестности этой точки

$$A(t)=A_{-\nu}(t-t_0)^{-\nu}+A_{-\nu+1}(t-t_0)^{-\nu+1}+\dots$$
$$\dots+A_{-1}(t-t_0)^{-1}+B(t),$$

где A_{-j} — постоянные матрицы, $A_{-\nu}\neq 0$, а матрица $B(t)$ голоморфна в точке t_0. Полюс $t_0\neq\infty$ порядка ν наз. регулярной особой точкой при $\nu=1$ и иррегулярной особой точкой при $\nu\geqslant 2$. Случай $t_0=\infty$ сводится к случаю $t_0=0$ заменой $t\to t^{-1}$. Ниже $t_0\neq\infty$.

2) Пусть t_0 — полюс $A(t)$. Тогда существует фундаментальная матрица $X(t)$ системы (2) вида

$$X(t)=\Phi(t)(t-t_0)^D, \tag{3}$$

где D — постоянная матрица, $\Phi(t)$ — голоморфна при $|t-t_0|<\rho$, если t_0 — регулярная особая точка, и $\Phi(t)$ голоморфна при $0<|t-t_0|<\rho$, если t_0 — иррегулярная особая точка, для нек-рого $\rho>0$. (Здесь $(t-t_0)^D=\exp(\ln(t-t_0)D)$, по определению.) Для регулярной особой точки матрица D выражается через $A(t)$ в явном

виде (см. [1], [2]); для иррегулярных особых точек это не так.

Аналогичная классификация особых точек вводится для дифференциальных уравнений порядка n с мероморфными коэффициентами. Дифференциальные уравнения и системы, все особые точки к-рых регулярны, наз. дифференциальными уравнениями (системами) класса Фукса. Общий вид матрицы $A(t)$ для такой системы:

$$A(t) = \sum_{j=1}^{k} (t - t_j)^{-1} A_j, \quad A_j = \text{const}, \ k < \infty.$$

Примером дифференциального уравнения класса Фукса является *гипергеометрическое уравнение*.

3) Пусть $A(t) = t^q B(t)$, $q \geqslant 0$ — целое, $B(t)$ голоморфна при $t = \infty$ (это иррегулярная особая точка, если $B(\infty) \neq 0$). Если S — достаточно узкий сектор вида $|t| > R$, $\alpha < \arg t < \beta$, то существует фундаментальная матрица вида

$$X(t) = P(t)\, t^Q \exp(R(t)), \tag{4}$$

где Q — постоянная матрица, $R(t)$ — диагональная матрица, элементы к-рой суть полиномы от $t^{1/p}$, $p \geqslant 1$ — целое и

$$P(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j t^{-j/p}$$

при $|t| \to \infty$, $t \in S$. Вся плоскость $C(t)$ разбивается на конечное число секторов, в каждом из к-рых есть фундаментальная матрица вида (4) (см. [3], [4], а также [1], [2]).

4) При аналитич. продолжении вдоль замкнутого пути γ фундаментальная матрица $X(t)$ умножается на B_γ: $X(t) \to X(t) B_\gamma$, где B_γ — постоянная матрица; возникает *монодромии группа* дифференциального уравнения. И. А. Лаппо-Данилевским [5] была исследована проблема Римана: пусть $A(t)$ — рациональная функция от t, и пусть известны особенности фундаментальной матрицы $X(t)$; требуется найти $A(t)$.

5) Пусть функция $z = \varphi(t)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ на внутренность многоугольника, граница к-рого состоит из конечного числа отрезков прямых и дуг окружностей. Тогда функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению Шварца

$$\{z, t\} \equiv \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = R(t), \tag{5}$$

где $R(t)$ — рациональная функция, причем уравнение

$$w'' + \frac{1}{2} R(t)\, w = 0 \tag{6}$$

принадлежит классу Фукса. Любое решение уравнения (5) может быть представлено в виде $z = w_1/w_2$, где w_1, w_2 — линейно независимые решения уравнения (6). Пусть G - бесконечная дискретная группа, $\varphi(t)$ — *автоморфная функция* группы G; тогда $\varphi(t)$ может быть представлена в виде $\varphi = w_1/w_2$, где w_1, w_2 — линейно независимые решения уравнения (6) и $R(t)$ — нек-рая *алгебраическая функция*.

Нелинейная теория. 1) Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \tag{7}$$

здесь $t \in C(t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n(x)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Теорема Коши: пусть функция $f(t, x)$ голоморфна по (t, x) в области $G \subset C(t) \times C^n(x)$ и точка $(t_0, x^0) \in G$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что в области $|t - t_0| < \delta$ существует решение $x(t; t_0, x^0)$ задачи Коши (7), единственное и голоморфное.

Аналитич. продолжение решения $x(t; t_0, x^0)$ также будет решением системы (7), однако полученная в результате продолжения функция может иметь особенности и, вообще говоря, будет неоднозначной функцией от t. Возникают вопросы: какие особенности может иметь эта функция, как устроено решение в целом? В линей-

ном случае получены окончательные ответы на эти вопросы. В нелинейном случае ситуация значительно сложнее и не выяснена достаточно полно даже в том случае, когда $f_j(t, x)$ — рациональные функции от t, x.

2) Рассмотрим одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \tag{8}$$

где $t \in C$, $x \in C$, а P и Q — голоморфные по (t, x) функции в нек-рой области G. Точка $(t_0, x_0) \in G$ наз. (с у щ е с т в е н н о) о с о б о й т о ч к о й уравнения (8), если $P(t_0, x_0) = 0$, $Q(t_0, x_0) = 0$. Выясним структуру решений в окрестности особой точки уравнения. Разложим P и Q в ряды Тейлора:

$$P(t, x) = a_{11}(x - x_0) + a_{12}(t - t_0) + \dots,$$
$$Q(t, x) = a_{21}(x - x_0) + a_{22}(t - t_0) + \dots,$$

и пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\|a_{ij}\|$. Имеет место теорема: пусть $\lambda_j \neq 0$ и ни одно из чисел λ_1/λ_2, λ_2/λ_1 не является: а) целым неотрицательным числом, б) действительным отрицательным числом. Тогда существуют окрестность U точки (t_0, x_0), окрестность V точки $\tilde{t} = 0$, $\tilde{x} = 0$ и функции $\tilde{t} = \tilde{t}(t, x)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x)$ такие, что: отображение $U \to V$, задаваемое этими функциями, является биголоморфным; дифференциальное уравнение (8) в новых переменных принимает вид (см. [6]):

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\lambda_1 \tilde{x}}{\lambda_2 \tilde{t}}.$$

Все решения уравнения (8) в новых переменных записываются в виде $\tilde{x} = C\tilde{t}^{\lambda_1/\lambda_2}$ и $\tilde{x} \equiv 0$. Таким образом, особая точка уравнения является точкой ветвления бесконечного порядка для всех решений уравнения (8) (кроме тривиальных). Особые точки решения, совпадающие с особыми точками уравнения, наз. н е п о д в и ж н ы м и. В отличие от линейного случая, решение нелинейного уравнения может иметь особые точки не только в особых точках уравнения; такие особые точки решения наз. п о д в и ж н ы м и. Справедлива т е о р е м а П е н л е в е: решения уравнения

$$P(t, x, \dot{x}) = 0,$$

где P — многочлен от x и $\dot{x}$ с голоморфными по t коэффициентами, не имеют подвижных трансцендентных особых точек (см. [7]).

Если в уравнении (8) P и Q суть многочлены от t, x, то в силу теоремы Пенлеве все подвижные особые точки являются алгебраическими. При замене $t = 1/t'$, $x = x'/t'$, уравнение (8) примет вид

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{P_1(t', x')}{Q_1(t', x')},$$

где P_1, Q_1 — многочлены. Пусть x_j' — корни уравнения $P_1(0, x') = 0$. Точки $(0, x_j')$ наз. б е с к о н е ч н о у д а л е н н ы м и о с о б ы м и т о ч к а м и у р а в н е н и я (8); структуру решений в окрестности этих точек описывает приведенная выше теорема [6].

Пусть P, Q — многочлены степени n. Поскольку P, Q определяются своими коэффициентами и пара $(\lambda P, \lambda Q)$ задает то же уравнение, получают взаимно однозначное соответствие между уравнениями (8) и точками комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^N (N = (n+1) \times (n+2) - 1)$. Имеет место теорема: если удалить из $\mathbb{C}P^N$ ек-рое множество меры нуль, то оставшиеся уравнения (8) обладают следующим свойством: все решения $x = x(t)$ всюду плотны в $C^2 = C(t) \times C(x)$ (см. [8]).

3) Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

$t \in C(t)$, $x \in C^n(x)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Точка x^0 наз. о с о б о й т о ч к о й с и с т е м ы (9), если $f(x^0) = 0$. Справедлива т е о р е м а П у а н к а р е. Пусть x^0 —

особая точка автономной системы (9). Пусть, кроме того: а) элементарные делители матрицы Якоби $f'(x^0)$ простые и б) собственные значения λ_j этой матрицы лежат по одну сторону от нек-рой прямой в $C(\lambda)$, проходящей через начало координат. Тогда существуют окрестности U, V точек $x=x^0$, $\tilde{x}=0$ и биголоморфное отображение $x=x(\tilde{x})$: $V\to U$ такое, что в переменных $\tilde{x}$ автономная система (9) имеет вид (см. [9]):

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt}=\lambda_j\tilde{x}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

В том случае, когда выполнено только условие а), можно с помощью преобразования $x=\varphi(\tilde{x})$, где $\varphi(\tilde{x})$ — формальный степенной ряд, привести систему (9) в окрестности особой точки к системе, к-рая интегрируется в квадратурах (см. [9], [10]). Однако сходимость этих рядов доказана при предположениях, близких к а), б). В случае, когда функция $f(x)$ и преобразование $x=\varphi(\tilde{x})$ вещественны при вещественных x, $\tilde{x}$, доказана теорема (см. [11]), аналогичная теореме Пуанкаре. Структура решений автономной системы (9) в целом, где $f_j(x)$ — полиномы и $n\geqslant 3$, к 70-м гг. 20 в. не исследована.

Лит.: [1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958, [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1909, v. 10, p. 436—70; [4] Trjitzinsky W. J., «Acta math.», 1933, Bd 62, S. 167—226; [5] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, [пер. с франц.], М., 1957; [6] Bieberbach L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, B., 1953; [7] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [8] Худай-Веренов М. Г., «Матем. сб.», 1962, т. 56, № 3, с. 301—8; [9] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [10] Брюно А. Д., «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 6, с. 1276—79; [11] Зигель К. Л., «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 119—28; [12] Пуанкаре А., Избранные труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [13] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М., 1936.

М. В. Федорюк.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел. В А. т. ч. включают вопросы распределения простых чисел, аддитивные проблемы, исследование поведения теоретико-числовых функций, теорию алгебраических и трансцендентных чисел.

Распределение простых чисел. а) Одной из интереснейших и труднейших задач А. т. ч. является проблема распределения простых чисел (п. ч.). Первый результат в проблеме распределения п. ч. - теорема Евклида: п. ч. бесконечно много. Пусть $\pi(x)$ — число п. ч., не превосходящих x; тогда теорема Евклида может быть сформулирована так: $\pi(x)\to+\infty$ при $x\to\infty$. Следующий шаг в этом вопросе был сделан П. Л. Чебышевым (1850). Он доказал, что:

1) Для величины $\pi(x)$ выполняются неравенства

$$\frac{ax}{\ln x}<\pi(x)<\frac{bx}{\ln x},$$

причем $a\geqslant{}^1/_2\ln 2$, $b\leqslant 2\ln 2$.

2) Если существует предел $\pi(x)\ln x/x$ при $x\to+\infty$, то этот предел равен 1.

Проблему существования последнего предела решили в 1896 Ж. Адамар (J. Hadamard) и Ш. Ж. Ла Валле Пуссен (Ch. J. La Vallée Poussin), установив тем самым, что

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}(1+o(1)).$$

Ш. Ж. Ла Валле Пуссен доказал значительно больше, а именно: пусть

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+R(x),$$

тогда

$$R(x)=O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\ln x}}\right),$$

где $\alpha>0$ — абсолютная постоянная (см. *Валле Пуссена теорема*). При решении этой проблемы были использованы методы теории функций комплексного переменного. С проблемой оценки $R(x)$ тесно связана проблема поведения нек-рой функции комплексного переменного, к-рую впервые (1859) изучал Б. Риман (B. Riemann), и к-рая теперь наз. Римана *дзета-функцией*. Эта функция задается равенством

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+\ldots+n^{-s}+\ldots,\quad s=\sigma+it,\ \sigma>1.$$

При действительном s дзета-функцию рассматривал еще Л. Эйлер (L. Euler; 1737, 1749) и им было доказано тождество, к-рое указывает на связь $\zeta(s)$ с п. ч.:

$$\zeta(s)=(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}\ldots(1-p^{-s})^{-1}\ldots,\quad \sigma>1,$$

где произведение берется по всем п. ч. Функцию $\zeta(s)$, заданную рядом при $\sigma>1$, можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексного переменного; тогда получится функция, к-рая будет аналитической на всей плоскости комплексного переменного за исключением точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Проблема оценки остатка $R(x)$ в асимптотич. формуле распределения п. ч. тесно связана с проблемой распределения нулей $\zeta(s)$ в «критической» полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$. Б. Риманом была высказана гипотеза, что все нули $\zeta(s)$ в критич. полосе лежат на прямой $\sigma=1/2$. Из этой гипотезы следует, что $R(x)=O(\sqrt{x}\ln x)$. Наоборот, из соотношения $R(x)=O(x^{1/2+\varepsilon})$, где $\varepsilon>0$ — произвольно мало, следует справедливость *Римана гипотезы* о нулях $\zeta(s)$. Ж. Адамар и Ш. Ж. Ла Валле Пуссен получили асимптотич. закон распределения п. ч., доказав, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma\geqslant1$. Для величины $R(x)$ доказаны так наз. Ω-теоремы: существуют такие две последовательности $X\to+\infty$, $Y\to+\infty$, что

$$R(X)<-X^{1/2}\frac{\ln\ln\ln X}{\ln\ln X},$$

$$R(Y)>Y^{1/2}\frac{\ln\ln\ln Y}{\ln\ln Y}.$$

б) Другой проблемой теории распределения п. ч. является проблема оценки разности соседних п. ч., то есть числа $\Delta_n=p_{n+1}-p_n$, где p_n есть n-е простое число. Здесь также первый общий результат принадлежит П. Л. Чебышеву, доказавшему, что между N и $2N$, $N\geqslant1$, лежит п. ч. (*Бертрана постулат*). Оценка Δ_n тесно связана с функцией $N(\alpha,T)$ — числом нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $1/2\leqslant\alpha\leqslant\sigma\leqslant1$, $|t|\leqslant T$. Функция $N(\alpha,T)$, в свою очередь, тесно связана с функцией $\zeta(1/2+it)$. Существуют гипотезы: $N(\alpha,T)=O(T^{2(1-\alpha)+\varepsilon})$ (*плотностная гипотеза*) и $\zeta(1/2+it)=O(t^{\varepsilon})$ (*Линделёфа гипотеза*), $\varepsilon>0$ — произвольно мало. Из гипотезы Римана о нулях $\zeta(s)$ следует гипотеза Линделёфа, из гипотезы Линделёфа — плотностная гипотеза, из к-рой следует, что $\Delta_n=O(n^{1/2+\varepsilon})$. Доказано, что $\Delta_n=O(n^{\gamma})$, где $\gamma<1$.

в) Вопрос о распределении п. ч. в арифметич. прогрессиях $nk+l$, $(k,l)=1$, $n=0,1,2,\ldots$, приводит к вопросу о нулях специальных дзета-функций, так наз. L-рядов Дирихле, к-рые имеют вид:

$$a_1\cdot1^{-s}+a_2\cdot2^{-s}+\ldots+a_n\cdot n^{-s}+\ldots,$$

$\sigma>1$, a_n — коэффициенты, зависящие от n и от разности прогрессий k (характеры Дирихле по mod k).

Проблемы распределения нулей L-рядов Дирихле и распределения п. ч. в арифметич. прогрессиях имеют свои специфич. особенности. Одно из самых крупных достижений в этом вопросе — следующее (К. Зигель; K. Siegel, 1935): пусть $\pi(x,k,l)$ — число п. ч., не пре-

восходящих x в прогрессии $nk+l$, $n=0, 1, \ldots$. Тогда

$$\pi(x, k, l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}+O(x\ln^{-A}x),$$

где $\varphi(k)$ — *Эйлера функция* и $1\leqslant k\leqslant \ln^B x$, A и B — произвольные фиксированные числа. Сведения о распределении п. ч. в арифметич. прогрессиях существенно используются при решении аддитивных задач с п. ч. См. также *Распределение простых чисел*.

Аддитивные проблемы. К аддитивным задачам А. т. ч. относятся проблемы, связанные с уравнениями в целых числах специального вида. Основными вопросами в этой проблематике являются следующие: доказать разрешимость заданного уравнения, найти асимптотич. формулу для числа решений заданного уравнения. Второй вопрос значительно труднее, и положительный ответ на него в нек-ром смысле дает ответ на первый вопрос. Классич. примерами аддитивных задач являются *Варинга проблемы*, *Гольдбаха проблема*, *Харди — Литлвуда проблема*.

Проблема Варинга (1770) формулируется так: пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений в целых положительных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения

$$x_1^n+\ldots+x_k^n=N, \qquad (1)$$

где $N\geqslant 1$ — целое число. Доказать, что существует такое число $k_0=k_0(n)$ (k_0 зависит только от n), что $J_{k,n}(N)\geqslant 1$ при $k\geqslant k_0$. Другими словами, доказать, что любое число $N\geqslant 1$ может быть представлено суммой n-х степеней целых положительных чисел, причем число слагаемых в этом представлении зависит только от n. При $n=2$ задача была решена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1770), к-рый доказал, что каждое целое положительное число есть сумма четырех квадратов целых чисел. Первое общее решение проблемы Варинга дано Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1909. Позднее, в 1924 Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. Литлвуд (J. Littlewood), применив свой круговой метод, доказали, что для $J_{k,n}(N)$ при $k\geqslant n2^n+1$ имеет место асимптотич. формула вида:

$$J_{k,n}(N)=AN^{k/n-1}+O\left(N^{k/n-1-\gamma}\right), \qquad (2)$$

где $\gamma>0$ и $A=A(N)\geqslant c>0$, c — абсолютная константа. А поскольку существует бесконечно много таких чисел N, к-рые для $k=n$ не являются суммой n-х степеней, т. е. $J_{k,n}(N)=0$, то возникла проблема установления истинного порядка величины k в зависимости от n, при к-ром разрешимо уравнение (1) и справедлива формула (2). Самые сильные результаты в этой проблеме принадлежат И. М. Виноградову, к-рый в 1934 доказал, что

а) $J_{k,n}(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0(n)$, если $k\geqslant 3n\ln n+11n$;

б) формула (2) имеет место при $k\geqslant 4n^2\ln n$.

Другая классич. аддитивная проблема — проблема Гольдбаха — Эйлера (1742), состоит в следующем: пусть $J(N)$ — число решений в простых числах p_1, p_2, p_3, уравнения $p_1+p_2+p_3=N$; доказать, что при нечетном $N\geqslant 7$ будет $J(N)\geqslant 1$. В 1937 И. М. Виноградов доказал, что (асимптотич. формула для $J(N)$):

$$J(N)=BN^2\ln^{-3}N+O\left(N^2\ln^{-3,5+\varepsilon}N\right),$$

где $B=B(N)\geqslant 0{,}6$. Отсюда, в частности, следует, что $J(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0$, т. е. решение проблемы Гольдбаха — Эйлера для достаточно больших N.

К аддитивным задачам относится проблема Харди — Литлвуда (1923); каждое $N\geqslant 2$ может быть представлено в виде $N=p+x^2+y^2$, где p — простое число, x, y — целые положительные числа. В 1958 Ю. В. Линник доказал, что если $W(N)$ — число решений этого уравнения, то имеет место асимптотич. формула

$$W(N)=\frac{\sigma N}{\ln N}+O\left(N\ln^{-1,028}N\right),$$

где $\sigma=\sigma(N)\geqslant c_1>0$, c_1 — абсолютная константа. Отсюда следует, что $W(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0$, т. е. решение проблемы Харди — Литлвуда для достаточно больших N. Имеется много аддитивных проблем, к-рые еще не решены и имеют возраст сотен и даже тысяч лет. К ним, напр., относятся вопросы о бесконечности числа п. ч. близнецов, т. е. пар п. ч. p и q таких, что $|p-q|=2$, бинарная проблема Гольбаха — Эйлера, т. е., что каждое четное число $\geqslant 4$ есть сумма двух п. ч., проблема существования бесконечного числа п. ч. в последовательности вида n^2+1. См. также *Аддитивные проблемы*.

Поведение теоретико-числовых функций. В теории чисел имеется ряд классич. функций: $\varphi(n)$ — число чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n (функция Эйлера), $\tau(n)$ — число делителей числа n, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция* и др. Несмотря на то, что каждая из указанных функций ведет себя довольно «неправильно», средние значения этих функций уже поддаются изучению. Под средним значением функции $f(n)$ понимают величину $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)$. Вопрос об оценке среднего значения функции $\mu(n)$ эквивалентен вопросу о границе нулей дзета-функции Римана. Вопрос об асимптотике среднего значения функции $\Lambda(n)$ эквивалентен вопросу об асимптотич. формуле для $\pi(x)$, т. е. также вопросу о границе нулей дзета-функции Римана. Во всех этих задачах достигнуты те же результаты, что и в проблеме распределения п. ч. Особо стоит вопрос об асимптотике среднего значения $\tau(n)$ или, несколько иначе, вопрос об асимптотич. формуле для суммы значений $\tau(n)$. Пусть

$$\Phi(N)=\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N).$$

Тогда $\Phi(N)$ — число целых точек под гиперболой $y=N/x$. Таким образом, нахождение асимптотики $\Phi(N)$ — это проблема нахождения асимптотики числа целых точек в расширяющихся областях. К этой проблематике относится задача о числе целых точек в круге, т. е. задача о числе

$$G(N)=\sum_{x^2+y^2\leqslant N} 1,$$

x, y — целые числа, и обобщения этих задач на произвольные области как на плоскости, так и в пространстве. П. Дирихле (1849) доказал, что

$$\Phi(N)=N\ln N+(2\gamma+1)N+R_1(N),$$

где $R_1(N)=O(\sqrt{N})$, а К. Гаусс (1863), что

$$G(N)=\pi N+R_2(N),$$

где $R_2(N)=O(\sqrt{N})$. Задачи нахождения наилучших возможных оценок величин $R_1(N)$ и $R_2(N)$ стали наз. соответственно *делителей проблемой* и *круга проблемой*. Г. Ф. Вороной (1903) получил

$$R_1(N)=O\left(\sqrt[3]{N}\ln N\right),$$

а В. Серпиньский (W. Sierpiński, 1906) —

$$R_2(N)=O\left(\sqrt[3]{N}\right).$$

Кроме того, доказаны Ω-теоремы, а именно, что

$$R_1(N)=\Omega\left(N^{1/4}\right) \quad \text{и} \quad R_2(N)=\Omega\left(N^{1/4}\right).$$

В настоящее время (1976) получены оценки $R_1(N)$ и $R_2(N)$ несколько лучше, чем у Г. Ф. Вороного и В. Серпиньского.

Родственной рассмотренным задачам является задача об асимптотике суммы дробных долей различного вида функций или эквивалентная ей задача — вопрос о распределении дробных долей различного вида функций. Обозначим через $\{\alpha\}$ дробную часть числа α. Тогда если $F(x)$ — вещественная функция, то возни-

кает вопрос об асимптотике следующих двух функций:

$$T_1(N)=\sum_{n\leqslant N}\{F(n)\},$$

$$T_2(\gamma;\ N)=\sum_{0\leqslant\{F(n)\}\leqslant\gamma,\ n\leqslant N}1.$$

Если для любого $0<\gamma\leqslant 1$

$$T_2(\gamma;\ N)=\gamma N+o(N),$$

то говорят, что дробные доли функции $F(n)$ распределены равномерно. Равномерность распределения дробных долей функции $F(n)$ может быть выражена и в терминах асимптотики для $T_1(N)$. Первые результаты о равномерном распределении дробных долей многочленов, критерии равномерного распределения были найдены Г. Вейлем (H. Weyl, 1916). Наиболее точные результаты в этих вопросах получены И. М. Виноградовым. Им же найдены асимптотич. формулы для $T_1(N)$ и $T_2(N)$ и для тех случаев, когда n пробегает часть множества целых чисел, не превосходящих N, в частности множество п. ч. Относительно мало известно о распределении дробных долей функций, растущих быстрее многочленов. Напр., ничего не известно о распределении дробных долей функции $(^3/_2)^x$.

Алгебраические и трансцендентные числа. К теории алгебраических и трансцендентных чисел относятся вопросы, связанные с арифметич. природой тех или иных чисел или классов чисел. Рассмотрим многочлены с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1; если α является корнем такого многочлена степени n и не является корнем многочлена меньшей степени, то оно наз. алгебраическим числом степени n; при $n=1$ число α наз. рациональным. Если же α не является алгебраическим, то оно наз. трансцендентным числом. Алгебраич. чисел «много меньше», чем трансцендентных, «почти любое» число — трансцендентное, однако вопросы об алгебраичности или трансцендентности конкретных чисел очень трудны. Основной «характеристикой» алгебраич. числа является тот факт, что они «плохо» приближаются рациональными числами. Это утверждение (*Лиувилля теорема*, 1844) формулируется так: если α — алгебраич. число степени n, то

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>cq^{-\varkappa},$$

где $\varkappa=n$, $c=c(\alpha)>0$ — константа, зависящая только от α, а p и q — произвольные целые числа. Следующий принципиальный шаг в этом вопросе сделал А. Туэ (A. Thue, 1909), идеи к-рого оказали большое влияние на всю теорию трансцендентных чисел. Он доказал, что $\varkappa<\frac{n}{2}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Далее величина $\varkappa$ уменьшалась многими учеными, и в 1955 К. Ф. Рот (K. F. Roth) доказал, что $\varkappa=2+\varepsilon$ (известно, что $\varkappa\geqslant 2$). Недостатком этих теорем (исключая теорему Лиувилля) является то, что все они не эффективны, т. е. по α и ε нельзя вычислять c.

Задачи о приближениях связаны с определенным классом задач из теории неопределенных уравнений. Так, А. Туэ из своей теоремы о приближении получил конечность числа целочисленных решений уравнения $F_n(x,\ y)=a$, где $F_n(x,\ y)$ — форма с целыми коэффициентами степени $n\geqslant 3$, a — целое число, отличное от нуля (эта теорема также не эффективна, т. е. нельзя указать границы для решений уравнения).

Другое направление этой теории — доказательство трансцендентности чисел. Первые результаты здесь были получены в конце 19 в. Ш. Эрмит (Ch. Hermite, 1873) доказал трансцендентность числа e; Ф. Линдеман (F. Lindemann, 1882) — трансцендентность числа π, и тем самым была отрицательно решена проблема о квадратуре круга. А. О. Гельфонд и Т. Шнейдер (T. Schneider) в 1934 доказали теорему о том, что α^β является трансцендентным числом, если α — алгебраич. чис-

ло $\alpha \neq 0,1$ и β — алгебраич. число степени $\geqslant 2$ (седьмая проблема Гильберта). А. Бейкером (A. Baker) начиная с 1967 был получен ряд эффективных теорем об оценке линейных форм от логарифмов алгебраич. чисел. Следствием этих теорем явилось эффективное доказательство теоремы Туэ о числе представлений целого числа формой. Существует много вопросов в теории трансцендентных чисел, к-рые еще ждут своего решения. К ним относятся вопрос о трансцендентности константы Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} \right),$$

вопрос об алгебраич. зависимости чисел e и π и др.

О некоторых методах в аналитической теории чисел. а) Метод комплексного интегрирования. Он порожден методом производящих функций Эйлера, к-рым часто решаются задачи элементарной математики. Основой служит следующая формула (разрывный множитель):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} \frac{x^s}{s}\, ds = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1, \end{cases}$$

где интеграл берется по прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, $s = \sigma + it$. Так, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$f(s) = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s},$$

и при $x = N + {}^1/_2$ получаем

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = 2} \frac{x^s f(s)}{s}\, ds.$$

Слева стоит *Чебышева функция*, асимптотика для к-рой эквивалентна проблеме о п. ч. Правая же часть, после выделения главного члена, будет тем меньше, чем левее удастся перенести контур интегрирования. См. также *Комплексного интегрирования метод*.

б) Круговой метод (Харди — Литлвуда — Рамануджана). Он применяется в основном в аддитивных задачах. Рассмотрим схему применения и существо кругового метода в форме тригонометрич. сумм Виноградова на тернарной проблеме Гольдбаха — Эйлера. Пусть m — целое число. Тогда имеем (разрывный множитель):

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m}\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$I(N) = \int_0^1 S^3(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha, \quad S(\alpha) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i x p},$$

$I(N)$ — число решений в п. ч. уравнения $p_1 + p_2 + p_3 = N$. Далее, интервал интегрирования (0, 1) разбивается на две части — основной интервал и дополнительный: к основному интервалу относят все интервалы вида

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau},$$

где $(a, q) = 1$, $0 \leqslant a \leqslant q$, $q \leqslant \ln^{10} N$, $\tau = N \ln^{-20} N$; к дополнительному интервалу отнесем все остальные. Основные интервалы не пересекаются. Кроме того, для α из основного интервала, сумма $S(\alpha)$ «близка» к рациональной сумме $S(a/q)$. Но при «малых» q, $q \leqslant \ln N$, известен закон распределения п. ч. в прогрессиях с разностью q (напр., теорема Зигеля), т. е. известна асимптотика сумм $S(a, q)$. Так выделяется главный член проблемы, и в этом состоит идея кругового метода. Если теперь нетривиально оценить $|S(\alpha)|$ на дополнительных интервалах (см. *Виноградова метод*), то получится асимптотич. формула в проблеме Гольдбаха — Эйлера. См. также *Круговой метод*.

в) Метод тригонометрических сумм. Большинство задач А. т. ч. может быть сформулировано

в терминах тригонометрич. сумм — конечных сумм вида

$$S=\sum_{x_1,\ \ldots,\ x_n} e^{2\pi i F(x_1,\ \ldots,\ x_n)}, \qquad (3)$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ — действительная функция, а $x_1, \ldots, x_n$ пробегают множество целых чисел в количестве P. Таким образом, центр тяжести многих проблем переносится на задачу изучения таких сумм, в частности на задачу получения возможно более точной оценки модуля таких сумм. Тривиальной оценкой суммы (3) будет P. Ставится задача получить оценку типа

$$|S|\leqslant \Delta P,$$

где $0\leqslant\Delta\leqslant 1$ наз. понижающим множителем. Первые нетривиальные оценки тригонометрич. сумм, когда $F=F(x)$ — многочлен, а $x=1, 2, \ldots, P$, получил Г. Вейль (1919), к-рый одновременно доказал критерий равнораспределенности дробных долей функции в терминах тригонометрич. сумм. Создателем метода тригонометрич. сумм является И. М. Виноградов, к-рый используя глубокие арифметич. свойства рассматриваемых сумм, получил исключительно сильные оценки модуля широкого класса таких сумм. Это позволило ему получить фундаментальные близкие к предельно возможным результаты в целом ряде вопросов теории чисел (проблема Варинга, *Гильберта — Камке проблема*, *Вейля суммы*). Другим следствием метода Виноградова (1937) было решение ряда аддитивных проблем с п. ч. и, в частности, решение проблемы Гольдбаха — Эйлера. Основной идеей метода Виноградова является идея «сглаживания» (возведение в степень тригонометрич. суммы и сведение оценки к теореме о среднем при оценках сумм Вейля; введение двойных тригонометрич. сумм при оценках сумм с п. ч.). См. также *Тригонометрических сумм метод*.

г) Дисперсионный метод и метод большого решета. В 1958 60 Ю. В. Линником был создан дисперсионный метод для решения целого ряда аддитивных задач теории чисел. Им были решены проблема Харди — Литлвуда, *Титчмарша проблема* делителей, *аддитивная проблема делителей*. Основным понятием метода является дисперсия для числа решений уравнения при предполагаемой асимптотике для числа решений нек-рого вспомогательного уравнения, связанного с основным (см. также *Дисперсионный метод*). В последнее время получены глубокие результаты при помощи метода *большого решета* Ю. В. Линника, к-рый был создан им в 1940 при решении проблемы о наименьшем квадратичном невычете.

д) Методы в теории алгебраических и трансцендентных чисел. При доказательстве теоремы о приближении алгебраич. числа рациональной дробью, А. Туэ (см. *Туэ метод*) строит многочлен

$$f(x,\ y)=(y-\alpha)\,f_1(x,\ y)+(x-\alpha)^m f_2(x,\ \alpha)$$

с целыми коэффициентами, где f_1 и f_2 — тоже многочлены. Допуская, что α «хорошо» приближаются дробями p_1/q_1 и p_2/q_2 с достаточно большим q_1 и q_2, полагая $m\approx\approx\ln q_1/\ln q_2$ и доказывая, что $f(x, y)$ при $x=p_1 q_1$, $y=p_2/q_2$ не обращается в нуль, получают противоречие.

При доказательстве трансцендентности чисел А. О. Гельфонд строит функцию

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0}\sum_{l=0}^{q} c_{k,l}\,e^{(\lambda k+l)z}, \quad \lambda=\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}.$$

В предположении, что α — алгебраич. число, при помощи принципа ящиков Дирихле целые не равные нулю числа $c_{k,l}$ выбираются так, что $f(z)$ и «много» ее производных имеют «много» нулей. «Большое» количество нулей позволяет получить «хорошие» оценки сверху для «большого» числа производных и точек, а отсюда, при помощи оценок снизу, получаемых из теоремы Лиувилля, следует, что $f(z)$ и «много» ее производных имеют

больше нулей, чем вначале. Повторение этого процесса приводит к тому, что либо λ — рациональное число, либо $c_{k,l}$ равны нулю, что противоречит их выбору. См. также *Алгебраическое число*, *Трансцендентное число*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [2] его же, Основы теории чисел, 7 изд., М., 1965; [3] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [4] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [5] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; [6] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [7] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [8] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [11] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [12] Хуа Л о-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [13] Baker A., «Mathematika», 1967, v. 14, №1(27), p. 102—07; [14] Виноградов А. И., «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1965, т. 29, в. 4, с. 903—34; [15] Bombieri E., «Mathematika», 1965, v. 12, № 24, p. 201—25.

А. А. Карацуба.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, к-рая может быть представлена степенным рядом. Исключит. важность класса А. ф. определяется следующим. Во-первых, этот класс достаточно ш и р о к: он охватывает большинство функций, встречающихся в основных вопросах математики и ее приложений к естествознанию и технике. Во-вторых, класс А. ф. з а м к н у т относительно основных операций арифметики, алгебры и анализа. Наконец, А. ф. обладают важным свойством е д и н с т в е н н о с т и: каждая А. ф. образует одно «органически связанное целое», представляет собой «единую» функцию во всей своей естественной области существования. Это свойство, к-рое в 18 в. считалось неотделимым от самого понятия функции, приобрело принципиальное значение после установления — в 1-й пол. 19 в.— общей точки зрения на функцию как на произвольное соответствие. Теория А. ф. была создана в 19 в. в первую очередь благодаря работам О. Коши (A. Cauchy), Б. Римана (B. Riemann) и К. Вейерштрасса (K. Weierstrass). Решающее значение в построении этой теории сыграл «выход в комплексную область». Теория А. ф. возникла как теория функций комплексного переменного; и в настоящее время (70-е гг. 20 в.) теория А. ф. составляет основное содержание общей теории функций комплексного переменного.

Существуют различные подходы к понятию аналитичности. В основе одного из них, впервые развитого О. Коши и далеко продвинутого Б. Риманом, лежит с т р у к т у р н о е с в о й с т в о функции — существование производной по комплексному переменному, или комплексная дифференцируемость. Этот подход тесно связан с г е о м е т р и ч е с к и м и п р е д с т а в л е н и я м и. Другой подход, систематич. развивавшийся К. Вейерштрассом, основывается на возможности представления функций степенными рядами; он связан, тем самым, с а н а л и т и ч е с к и м а п п а р а т о м, к-рым может быть изображена функция. Основной факт теории А. ф. заключается в тождественности соответствующих классов функций, рассматриваемых в произвольной области комплексной плоскости.

Перейдем к точным определениям. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие нек-рое комплексное число w, то говорят, что в области D определена (однозначная) функция f комплексного переменного z, и пишут: $w=f(z)$, $z \in D$ (или $f: D \to \mathbb{C}$). Функция $w=f(z)=f(x+iy)$ может рассматриваться как комплексная функция двух действительных переменных x и y, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость). Задание такой функции равносильно заданию двух действительных функций

$$u=\varphi(x, y),\ v=\psi(x, y),\ (x, y) \in D\ (w=u+iv).$$

Зафиксировав точку $z \in D$, придадим z приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ (так, что $z + \Delta z \in D$) и рассмотрим соответствующее приращение функции f:

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если

$$\Delta f(z) = A\,\Delta z + o(\Delta z)$$

при $\Delta z \to 0$, или, что то же, если существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A,$$

то функция f наз. дифференцируемой (в смысле комплексного анализа, или в смысле $\mathbb{C}$) в точке z; $A = f'(z)$ — производная функция f в точке z, а

$$A\,\Delta z = f'(z)dz = df(z)$$

— ее дифференциал в этой точке. Функция f, дифференцируемая в каждой точке области D, наз. дифференцируемой в области D.

Сравним понятия дифференцируемости функции f как функции двух действительных переменных (в смысле $\mathbb{R}^2$) и в смысле $\mathbb{C}$. В первом случае дифференциал df имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

— частные производные функции f. Переходя от независимых переменных x, y к переменным z, $\bar{z}$, к-рые формально можно считать новыми независимыми переменными, связанными со старыми соотношениями $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (становясь на эту точку зрения, функцию f иногда записывают в виде $f(z, \bar{z})$), и, выражая dx и dy через dz и $d\bar{z}$ по обычным правилам вычисления дифференциалов, получают запись df в комплексной форме:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z},$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

— (формальные) производные функции f по z и $\bar{z}$, соответственно. Отсюда видно, что дифференцируемость функции f в смысле $\mathbb{C}$ имеет место в том и только том случае, когда она дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ и справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, к-рое в развернутой форме можно переписать так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в области D, то последние соотношения справедливы в каждой точке этой области; они наз. уравнениями Коши — Римана. Эти уравнения встречались уже в 18 в. в связи с изучением функций комплексного переменного в трудах Ж. Л. Д'Аламбера и Л. Эйлера (J. L. D'Alembert, L. Euler). Определение, данное в начале, уточняется так. Функция f, определенная в области D, наз. голоморфной (аналитической) в точке $z_0 \in D$, если существует окрестность этой точки, в к-рой функция f представляется степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Если это свойство имеет место в каждой точке z_0 области D, то функция f наз. голоморфной (аналитической) в области D.

Функция f, голоморфная в точке $z_0 \in D$, дифференцируема в этой точке. Более того, сумма сходящегося

степенного ряда имеет производные всех порядков (бесконечно дифференцируема) по комплексному переменному z; коэффициенты ряда могут быть выражены через производные функции f в точке z_0 по формулам $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Степенной ряд, записанный в форме

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots,$$

наз. р я д о м Т е й л о р а функции f в точке z_0. Тем самым, голоморфность функции f в области D означает, что в каждой точке области D функция f бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора сходится к ней в нек-рой окрестности этой точки.

С другой стороны, в теории А. ф. устанавливается следующий замечательный факт: функция f, дифференцируемая в области D, голоморфна в этой области (в отдельной точке это утверждение неверно: $f(z)=|z|^2=z\bar{z}$ дифференцируема в точке $z_0=0$, но нигде не голоморфна). Следовательно, понятия комплексной дифференцируемости и голоморфности функции в о б л а с т и тождественны; каждое из следующих свойств функции f в области D — дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$, дифференцируемость в смысле $\mathbb{R}^2$ вместе с выполнением уравнений Коши — Римана, голоморфность — может служить определением а н а л и т и ч н о с т и f в этой области.

Еще одна характеристика А. ф. связана с понятием интеграла. Интеграл от функции $f=\varphi+i\psi$ вдоль (ориентированной спрямляемой) кривой Γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, может быть определен формулой:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

или при помощи криволинейного интеграла:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \varphi\,dx - \psi\,dy + i\int_\Gamma \psi\,dx + \varphi\,dy.$$

Центральное место в теории А. ф. занимает следующая и н т е г р а л ь н а я т е о р е м а К о ш и: если f — А. ф. в области D, то $\int_\Gamma f(z)dz=0$ для любой замкнутой кривой $\Gamma\subset D$, ограничивающей область, принадлежащую D. Верно и обратное заключение (т е о р е м а М о р е р ы): если f непрерывна в области D и $\int_\Gamma f(z)dz=0$ для любой такой кривой Γ, то f — А. ф. в области D. В частности, в односвязной области аналитическими являются те и только те непрерывные функции f, для к-рых интеграл по любой замкнутой кривой $\Gamma\subset D$ равен нулю (или, что то же самое, интеграл по любой кривой Γ, соединяющей произвольные точки z_1, $z_2\in D$, зависит только от точек z_1 и z_2 и не зависит от формы этой кривой). Эта характеристика А. ф. лежит в основе многих их приложений.

Интегральная теорема Коши позволяет получить и н т е г р а л ь н у ю ф о р м у л у К о ш и, выражающую значения А. ф. внутри области через ее значения на границе этой области:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D;$$

здесь D — область, граница к-рой ∂D состоит из конечного числа непересекающихся спрямляемых кривых (ориентация ∂D предполагается положительной относительно области D), f — функция, аналитическая в нек-рой области $G\supset\bar{D}=D\cup\partial D$. Эта формула позволяет, в частности, свести изучение многих вопросов, связанных с А. ф., к соответствующим вопросам для простейшей функции — я д р а К о ш и $\frac{1}{\zeta-z}$, $\zeta\in\partial D$, $z\in D$. (Подробнее см. статью *Интегральные представления аналитических функций*.)

Важнейшее свойство А. ф. выражается следующей теоремой единственности: две функции, аналитические в области D и совпадающие на к.-л. множестве, имеющем предельную точку в D, совпадают и во всей области D (тождественны). В частности, А. ф. $f(z)$, $z\in D$, отличная от тождественного нуля, может иметь в области D лишь изолированные нули. Если при этом z_0 — нуль функции f, то в некоторой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 имеем $f(z)=(z-z_0)^\nu g(z)$, где $\nu\geqslant 1$ — натуральное число (называемое кратностью нуля функции f в z_0), а $g(z)$ — А. ф. в $U(z_0)$, отличная от нуля.

Важную роль в изучении А. ф. играют точки, в к-рых нарушается свойство аналитичности — так наз. особые точки А. ф. Рассмотрим здесь изолированные особые точки (однозначных) А. ф. (подробнее см. *Особая точка аналитической функции*). Если f — А. ф. в кольце вида $0<|z-z_0|<\rho$, то она разлагается в этой области в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

содержащий, вообще говоря, не только положительные, но и отрицательные степени $z-z_0$. Если в этом разложении члены с отрицательными степенями отсутствуют ($a_n=0$ для $n=-1, -2, \ldots$), то z_0 наз. правильной точкой f (устранимой особой точкой). В правильной точке существует и конечен

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a_0;$$

полагая $f(z_0)=a_0$, получаем А. ф. во всем круге $|z-z_0|<\rho$. Если ряд Лорана функции содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями $z-z_0$:

$$f(z)=\sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ \mu<0,\ a_\mu\neq 0,$$

то точка z_0 наз. полюсом функции f (кратности μ); полюс z_0 характеризуется тем, что

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Функция f имеет в точке z_0 полюс кратности μ тогда и только тогда, когда функция $1/f$ имеет в этой точке нуль кратности μ. В случае, когда ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$ ($a_n\neq 0$ для бесконечного множества отрицательных индексов n), точка z_0 наз. существенно особой точкой; в таких точках не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f. Коэффициент a_{-1} разложения функции f в ряд Лорана с центром в изолированной особой точке z_0 наз. вычетом функции f в точке z_0:

$$a_{-1}=\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Вычет функции f в точке z_0 может быть определен формулой

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

где $\gamma=\{z:|z-z_0|=\rho\}$, $\rho>0$ — достаточно мало (так что круг $|z-z_0|\leqslant\rho$ не содержит особых точек функции f, отличных от z_0). Важная роль вычетов определяется следующей теоремой: если f — А. ф. в области G, за исключением нек-рого множества изолированных особых точек, $\Gamma\subset G$ — контур, ограничивающий область $D\subset G$ и не проходящий через особые точки функции f, $z_1, \ldots, z_n$ — все особые точки f, лежащие в D, то

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Эта теорема дает эффективное средство для нахождения интегралов (см. также *Вычет*).

Сумма членов ряда Лорана функции f в точке z_0, соответствующая отрицательным индексам n,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

наз. главной частью ряда Лорана (или функции f) в точке z_0. Именно главная часть определяет характер особенности функции f в точке z_0.

Функции, представимые в виде отношения двух функций, голоморфных в области D, наз. мероморфными в области D. Мероморфная в области функция голоморфна в этой области за исключением, быть может, конечного или счетного множества полюсов; в полюсах значения мероморфной функции считаются равными бесконечности. Если допустить такие значения, то мероморфные в области D функции могут быть определены как функции, к-рые в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представимы рядом по степеням $z - z_0$, содержащим конечное (зависящее от z_0) число членов с отрицательными степенями $z - z_0$.

Часто аналитическими в области D наз. как голоморфные, так и мероморфные в этой области функции. В этом случае голоморфные функции наз. также регулярными аналитическими, или просто регулярными.

Простейший класс А. ф. составляют функции, голоморфные во всей плоскости; такие функции наз. целыми. Целые функции представимы рядами $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$, сходящимися во всей плоскости. К ним относятся многочлены от z, функции

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Теорема Вейерштрасса утверждает, что какова бы ни была последовательность комплексных чисел α_n, $n = 1, 2, \ldots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$, существует целая функция F, обращающаяся в нуль в точках α_n, и только в этих точках (среди точек α_n могут быть совпадающие; им отвечает нуль функции F соответствующей кратности). При этом функция F может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечного) произведения целых функций, каждая из к-рых имеет только по одному нулю. Напр.,

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\ldots.$$

Функции, мероморфные во всей плоскости (т. е. представимые в виде отношения целых функций), наз. мероморфными функциями. Таковыми являются рациональные функции, $\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z$, $\operatorname{ctg} z = \cos z / \sin z$, эллиптич. функции и др.

Согласно теореме Миттаг-Леффлера, для любой последовательности $\beta_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеющей предельных точек в $\mathbb{C}$, существует мероморфная функция G с полюсами в точках β_n (и только в этих точках), главные части к-рой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $\frac{1}{z - \beta_n}$. При этом функция G может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечной) суммы мероморфных функций, каждая из к-рых имеет полюс только в одной точке. Напр.,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi} + \ldots$$

Теоремы о существовании голоморфной функции с заданными нулями и мероморфных функций с заданными полюсами и главными частями справедливы и для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$.

Важное значение для изучения А. ф. имеют связанные с ними геометрич. представления. Если $f: D \to C$ — А. ф., то образ $f(D)$ области D также является областью (принцип сохранения области). При $f'(z_0) \neq 0$ отображение f сохраняет углы в z_0 как по величине, так и по знаку, т. е. является конформным. Таким образом, существует тесная связь между аналитичностью и важным геометрич. понятием конформного отображения. Если f — А. ф. в D и $f(z') \neq f(z'')$ при $z' \neq z''$ (такие функции наз. однолистными), то $f'(z) \neq 0$ в D и f определяет взаимно однозначное и конформное отображение области D на область $f(D)$. Теорема Римана, основная теорема теории конформных отображений, утверждает, что в любой односвязной области, граница к-рой содержит более одной точки, существуют однолистные А. ф., конформно отображающие эту область на круг или полуплоскость (см. *Конформное отображение*, *Однолистная функция*).

Действительная и мнимая части функции $f = \varphi + i\psi$, голоморфной в области D, удовлетворяют в этой области уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. являются *гармоническими функциями*. Две гармонич. функции, связанные между собой уравнениями Коши — Римана, наз. сопряженными. В односвязной области любая гармонич. функция φ имеет сопряженную функцию ψ и является, тем самым, действительной частью нек-рой голоморфной в D функции f.

Связи с конформными отображениями и гармонич. функциями лежат в основе многих приложений теории А. ф.

Функция $f(z)$, $z \in E$ ($E \subset \mathbb{C}$ — произвольное множество) наз. аналитической в точке $z_0 \in E$, если существует окрестность этой точки, на пересечении к-рой с множеством E функция f представляется сходящимся степенным рядом. Функция f наз. аналитической на множестве E, если она аналитична на нек-ром открытом множестве, содержащем E (точнее, если существуют открытое множество, содержащее E, и аналитическая на нем функция F, совпадающая с f на множестве E). Для открытых множеств понятие аналитичности совпадает с понятием дифференцируемости по множеству. Однако в общем случае это не так; в частности, на действительной прямой существуют функции, не только имеющие производную, но и бесконечно дифференцируемые в каждой точке, к-рые не являются аналитическими ни в одной точке этой прямой. Для справедливости теоремы единственности А. ф. существенно свойство связности множества E. Именно поэтому А. ф. рассматриваются обычно в областях, т. е. на открытых и связных множествах.

Все сказанное выше относилось к однозначным А. ф. f, рассматриваемым в данной области D (или на данном множестве E) комплексной плоскости. Задаваясь вопросом о возможности продолжения функции f — как А. ф. — в бо́льшую область, приходят к понятию А. ф., рассматриваемой в целом — во всей своей естественной области существования. При таком продолжении данной функции область ее аналитичности, расширяясь, может налегать сама на себя, доставляя новые значения функции в точках плоскости, где она уже была определена. Поэтому А. ф., рассматриваемая в целом, вообще говоря, оказывается многозначной. К необходимости изучения многозначных А. ф. приводят многие вопросы анализа (обращение функций, нахождение первообразных и построение А. ф. с заданной действительной

частью в *многосвязных областях*, решение алгебраич. уравнений с аналитич. коэффициентами и др.); такими функциями являются $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arctg} z$, *алгебраические функции* и т. д.

Регулярный процесс, приводящий к полной А. ф., рассматриваемой в своей естественной области существования, был указан К. Вейерштрассом; он носит назв. аналитического продолжения по Вейерштрассу.

Исходным является понятие элемента А. ф.— степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости. Такой элемент W_0:

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

определяет нек-рую А. ф. f в своем круге сходимости K_0. Пусть z_1 — точка круга K_0, отличная от z_0. Разлагая функцию f в ряд с центром в точке z_1, получаем новый элемент W_1:

$$b_0 + b_1 (z - z_1) + \ldots + b_n (z - z_1)^n + \ldots,$$

круг сходимости к-рого обозначим через K_1. В общей части кругов K_0 и K_1 ряд W_1 сходится к той же функции, что и ряд W_0. Если круг K_1 выходит за пределы круга K_0, то ряд W_1 определяет функцию, заданную посредством W_0, на нек-ром множестве вне K_0 (где ряд W_0 расходится). В этом случае элемент W_1 наз. непосредственным аналитич. продолжением элемента W_0. Пусть W_0, W_1, ..., W_N — цепочка элементов, в к-рой W_{n+1} является непосредственным аналитич. продолжением W_n ($n = 0, 1, \ldots, N-1$); тогда элемент W_N наз. аналитич. продолжением элемента W_0 (посредством данной цепочки элементов). Может оказаться так, что центр круга K_N принадлежит кругу K_0, но элемент W_N не является непосредственным аналитич. продолжением элемента W_0. В этом случае суммы рядов W_0 и W_N в общей части кругов K_0 и K_N имеют различные значения; тем самым аналитич. продолжение может привести к новым значениям функции в круге K_0.

Совокупность всех элементов, к-рые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W_0, образуют полную А. ф. (в смысле Вейерштрасса), порожденную элементом W_0; объединение их кругов сходимости представляет собой (вейерштрассову) область существования этой функции. Из теоремы единственности А. ф. следует, что А. ф. в смысле Вейерштрасса полностью определяется заданием элемента W_0. При этом в качестве исходного может быть взят любой другой элемент, принадлежащий этой функции; полная А. ф. от этого не изменится.

Полная А. ф. f, рассматриваемая как функция точек плоскости, принадлежащих ее области существования D, вообще говоря, является многозначной. Чтобы избавиться от многозначности, функцию f рассматривают не как функцию точек плоской области D, а как функцию точек нек-рой (лежащей над областью D) многолистной поверхности R такой, что каждой точке области D соответствует столько (проектирующихся в нее) точек поверхности R, сколько различных элементов с центром в этой точке имеет полная А. ф. f; на поверхности R функция f становится однозначной функцией. Идея перехода к таким поверхностям принадлежит Б. Риману, а сами они носят назв. римановых поверхностей. Абстрактное определение понятия римановой поверхности позволило заменить теорию многозначных А. ф. теорией однозначных А. ф. на *римановых поверхностях*.

Фиксируем область Δ, принадлежащую области существования D полной А. ф. f, и к.-л. элемент W функции f с центром в точке области Δ. Совокупность всех элементов, к-рые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W посредством цепочек с

центрами, принадлежащими Δ, наз. в е т в ь ю А. ф. f. Ветвь многозначной А. ф. может оказаться однозначной А. ф. в области Δ. Так, напр., произвольные ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln}z$, соответствующие любой односвязной области, не содержащей точку 0, являются однозначными функциями; при этом $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n, а $\mathrm{Ln}z$ — бесконечное множество различных ветвей в каждой такой области. Выделение однозначных ветвей (при помощи тех или иных разрезов области существования) и их изучение средствами теории однозначных А. ф. является одним из осн. приемов исследования конкретных многозначных А. ф. *А. А. Гончар.*

Аналитические функции нескольких комплексных переменных. Комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ (состоящее из точек $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $z_k=x_k+iy_k$) — это векторное пространство над полем комплексных чисел с евклидовой метрикой

$$|z| = \left\{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right\}^{1/2}, \quad \mathbb{C}^1=\mathbb{C}.$$

От $2n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$ оно отличается нек-рой асимметрией: при переходе от $\mathbb{R}^{2n}$ к $\mathbb{C}^n$ (т. е. при введении в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной структуры) координаты разбиваются на пары, к-рые выступают в комплексе $(z_k=x_k+iy_k)$.

Если комплексная функция $f=\varphi+i\psi$ задана в области $D\subset\mathbb{C}^n$ и дифференцируема в каждой точке $z\in D$ в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ (т. е. как функция $2n$ действительных переменных x_k и y_k), то ее дифференциал может быть представлен в виде

$$df=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}\,dz_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\,d\bar{z}_k,$$

где $dz_k=dx_k+idy_k$, $d\bar{z}_k=dx_k-idy_k$, а символы $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$ определяются так же, как и в плоском случае. Если при этом df имеет вид

$$df=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}\,dz_k,$$

т. е. является комплексно линейной функцией от $dz_1, \ldots, dz_n$, то функция f наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м о й в смысле $\mathbb{C}^n$, или г о л о м о р ф н о й, или а н а л и т и ч е с к о й в о б л а с т и D.

Таким образом, условие голоморфности f в области $D\subset\mathbb{C}^n$ состоит из условия ее дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ и системы n комплексных равенств $\partial f/\partial\bar{z}_k=0$ $(k=1, \ldots, n)$, к-рая равносильна системе $2n$ уравнений с частными производными 1-го порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\frac{\partial\psi}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_k}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_k} \quad (k=1, \ldots, n)$$

(с и с т е м а К о ш и — Р и м а н а).

В пространственном случае $(n>1)$, в отличие от плоского $(n=1)$, эта система переопределена — число уравнений превышает число неизвестных функций. Переопределенность остается и при переходе к геометрически более естественному пространственному аналогу голоморфной функции одного комплексного переменного — г о л о м о р ф н о м у о т о б р а ж е н и ю f, осуществляемому системой $f=(f_1, \ldots, f_n)$ из n голоморфных в области $D\subset\mathbb{C}$ функций f_k. Отображение $f: D\to G=f(D)$ наз. б и г о л о м о р ф н ы м, если оно взаимно однозначно и голоморфно вместе с обратным $f^{-1}: G\to D$. Условия голоморфности отображения $f: D\to\mathbb{C}^n$ выражаются системой $2n^2$ действительных уравнений относительно $2n$ действительных функций. Переопределенность условий голоморфности при $n>1$ является причиной ряда эффектов, специфичных для пространственного случая, таких, как отсутствие пространственного аналога *Римана теоремы* о существовании конформных отображений. По теореме Римана,

при $n=1$ всякие две односвязные области, границы которых не сводятся к точке, изоморфны. Однако при $n>1$ неизоморфными оказываются даже такие простые односвязные области, как шар $\{|z|<1\}$ и произведение кругов (п о л и к р у г) $\{|z_\nu|<1, \nu=1, \ldots, n\}$. Неизоморфность обнаруживается при сравнении групп а в т о м о р ф и з м о в этих областей (т. е. их *биголоморфных отображений* на себя) — группы оказываются алгебраически неизоморфными, а биголоморфное отображение одной области на другую, если бы оно существовало, устанавливало бы изоморфизм этих групп. Отмеченное обстоятельство существенно отличает теорию биголоморфных отображений областей комплексного пространства от теории конформных отображений плоских областей.

Функция f наз. г о л о м о р ф н о й в т о ч к е $a\in\mathbb{C}^n$, если она голоморфна в нек-рой окрестности этой точки. По условиям Коши - Римана, голоморфная в точке a функция нескольких переменных голоморфна по каждому переменному (при фиксированных значениях остальных переменных). Справедливо и обратное: если функция f в окрестности нек-рой точки голоморфна по каждому переменному в отдельности, то она голоморфна в этой точке (о с н о в н а я т е о р е м а Г а р т о г с а).

Голоморфность функции f в точке $a=(a_1, \ldots, a_n)$, по аналогии с плоским случаем, эквивалентна ее разложимости в окрестности этой точки в к р а т н ы й с т е п е н н о й р я д

$$f(z)=\sum\nolimits_{k_\nu\geqslant 0} c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n},$$

или, в сокращенной записи,

$$f(z)=\sum\nolimits_{|k|\geqslant 0} c_k (z-a)^k,$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный векторный индекс $k_\nu\geqslant 0$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$ и

$$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

Голоморфная функция бесконечно дифференцируема, и этот ряд — ее ряд Тейлора, т. е.

$$c_k=\frac{1}{k_1!\ldots k_n!}\,\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}\ldots\partial z_n^{k_n}}.$$

(производные берутся в точке a).

На голоморфные функции нескольких переменных распространяются основные факты теории голоморфных функций одного переменного, иногда в измененной формулировке, напр., *Вейерштрасса теорема* подготовительная, к-рая распространяет на пространственный случай свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль как целая степень $z-a$. Теорема формулируется так: если голоморфная в точке $a\in\mathbb{C}^n$ функция $f\not\equiv 0$ равна нулю в этой точке, то в нек-рой окрестности $U(a)$ ее можно представить (возможно, после невырожденного линейного преобразования независимых переменных) в виде

$$f(z)=\{(z_n-a_n)^k+c_1(z')(z_n-a_n)^{k-1}+\ldots+c_k(z')\}\varphi(z),$$

где $k\geqslant 1$ — целое число, c_ν ($\nu=1, \ldots, k$) — функции от $z'=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, голоморфные в окрестности точки $a'=(a_1, \ldots, a_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$ (штрих перед буквой обозначает проекцию в пространство первых $(n-1)$ координат) и равные нулю в a, а φ голоморфна и отлична от нуля в $U(a)$.

Эта теорема имеет принципиальное значение для изучения *аналитических множеств*, к-рые локально, в окрестности каждой своей точки, описываются как множества общих нулей нек-рого числа голоморфных в этой точке функций. Согласно теореме Вейерштрасса, такие множества локально описываются как множества

общих нулей полиномов по одному переменному z_n с коэффициентами из кольца голоморфных функций от остальных переменных z. Это обстоятельство позволяет при локальном изучении аналитич. множеств широко пользоваться алгебраич. методами.

Интегральная теорема Коши также несколько видоизменяется в пространственном случае и наз. т е о р е м о й К о ш и - П у а н к а р е: пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$, тогда для любой $(n+1)$-мерной поверхности G, компактно принадлежащей D, с кусочно гладкой границей ∂G

$$\int_{\partial G} f\, dz = 0.$$

При этом интеграл, как и в плоском случае, определяется параметрич. заданием множества: если ∂G имеет уравнение $z = z(t)$, где параметр $t = (t_1, \ldots, t_n)$ меняется в n-мерной клетке $I^n = \{\alpha_k \leqslant t \leqslant \beta_k,\ k = 1, \ldots, n\}$, то, по определению

$$\int_{\partial G} f\, dz = \int_{I^n} f[z(t)] \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (t_1, \ldots, t_n)}\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Отличие пространственного случая от плоского состоит в том, что здесь размерность поверхности G меньше размерности области D, а в плоском случае эти размерности совпадают $(n+1 = 2n)$.

Пространственный аналог интегральной формулы Коши особенно просто выписывается для поликруговых областей, т. е. произведений плоских областей. Пусть $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ — такая область, где D_k — область плоскости комплексного переменного с кусочно гладкой границей $\partial D_k (k = 1, \ldots, n)$, а функция f голоморфна в области, компактно содержащей D. Тогда последовательное применение интегральной формулы Коши для одного переменного дает для любой точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

где $\Gamma = \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$ есть n-мерная поверхность на границе ∂D, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{(\zeta - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Однако поликруговые области составляют лишь весьма специальный класс, а в областях общего вида подобное разделение переменных невозможно. Роль интеграла Коши для произвольных областей $D \subset \mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей играет и н т е г р а л ь н а я ф о р м у л а М а р т и н е л л и — Б о х н е р а: для любой функции f, голоморфной в области, к-рая содержит $\bar{D}$, и для любой точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(\zeta)\, \frac{\delta(\bar{\zeta} - \bar{z})\, d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}},$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$, а

$$\delta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \omega_k d\omega_1 \ldots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \ldots d\omega_n.$$

Это — ф о р м у л а Г р и н а д л я п а р ы ф у н к ц и й, одна из к-рых голоморфна в D, а другая является фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с особенностью в точке $\zeta = z$. При $n = 1$ это обычный интеграл Коши. При $n > 1$ формула отличается от кратного интеграла Коши для произведения плоских областей тем, что: во-первых, интегрирование в ней ведется по $(2n-1)$-мерной границе области, а не по ее n-мерной части; во-вторых, ее ядро (множитель при f под знаком интеграла) зависит от параметра z не аналитически. В ряде задач, однако, аналитичность ядра существенна, и поэтому желательно построить интегральную формулу с таким ядром для возможно более широкого класса областей. Обширный

запас интегральных формул, в том числе для многих областей с аналитич. ядром, содержится в общей *Лере формуле*. Эта формула имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\,\frac{\delta\,[\omega(\zeta)]\,d\zeta}{\langle\zeta-z,\,\omega(\zeta)\rangle^n},$$

где $\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ — гладкая вектор-функция, $d\zeta$ и δ определены выше и $\langle\zeta-z,\ \omega\rangle=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)\omega_k$; предполагается, что $\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle\neq 0$ при любом фиксированном $z\in D$ и ζ, пробегающем ∂D. Величина интеграла в этой формуле не зависит от выбора вектор-функции $\omega(\zeta)$ (если только $\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle\neq 0$ при всех $z\in D$, $\zeta\in\partial D$), а при $\omega(\zeta)=\overline{\zeta}-\overline{z}$ этот интеграл совпадает с интегралом Мартинелли — Бохнера. Варьирование выбора ω для разных классов областей позволяет получить из формулы Лере различные интегральные формулы. В теории А. ф. нескольких переменных рассматриваются и другие интегральные представления, справедливые для тех или иных классов областей. Важный класс составляют так наз. о б л а с т и В е й л я, являющиеся обобщением произведения плоских областей. Для них справедливо *Бергмана — Вейля представление* с ядром, также аналитически зависящим от параметра.

Как и в плоском случае, основной интерес представляет изучение особенностей А. ф.; при этом принципиальное отличие пространственного случая от плоского выражается теоремой Осгуда — Брауна о стирании компактных особенностей, согласно к-рой любая функция f, голоморфная в $D\setminus K$, где D - область из $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$, а K — компактно принадлежащее D множество, не разбивающее D, голоморфно продолжается во всю область D. По этой теореме голоморфные функции нескольких переменных не могут иметь изолированных особых точек. Место последних в $\mathbb{C}^n(n>1)$ занимают особые множества, к-рые являются аналитическими, если их размерность ниже $2n-1$.

Отмеченное обстоятельство является определяющим для многомерной теории вычетов. В этой теории изучается задача о вычислении интеграла от функции f, голоморфной всюду в области $D\subset\mathbb{C}^n$, за исключением аналитич. множества M, по замкнутой n-мерной поверхности σ, не пересекающейся с M. Так как размерность особого множества M ниже размерности D по крайней мере на 2, то M не разбивает D. Если поверхность σ не зацеплена с M, т. е. ограничивает $(n+1)$-мерную поверхность G, компактно принадлежащую $D\setminus M$, то (по теореме Коши — Пуанкаре) $\int_\sigma f dz=0$. В общем случае для вычисления этого интеграла нужно выяснить, как σ зацеплена с особым множеством M, и вычислить интегралы по специальным n-мерным поверхностям, ассоциированным с отдельными порциями множества M (вычеты).

Решение этой задачи связано со значительными топологич. и аналитич. трудностями. В ряде случаев их помогают преодолеть методы, предложенные Мартинелли и Лере. Метод Мартинелли основан на применении топологич. принципа двойственности Александера - Понтрягина и сводит изучение n-мерных гомологий множества $D\setminus M$ к изучению $(n-1)$-мерных гомологий особого множества M. Метод Лере имеет более общий характер; он основан на рассмотрении специальных гомологич. классов и вычислении нек-рых дифференциальных форм (форм-вычетов). Многомерная теория вычетов нашла приложения в теоретич. физике (см. *Фейнмана интеграл*).

Теорема Осгуда — Брауна выявляет важное принципиальное отличие пространственной теории от плоской. На плоскости для любой области D можно построить функцию f, к-рая голоморфна в D и не продол-

жается аналитически за ее пределы, т. е. является естественной областью существования. В пространстве это не так: напр., шаровой слой $\{1/2<|z|<1\}$ не может быть областью существования никакой голоморфной функции, ибо по теореме Осгуда — Брауна любая голоморфная в нем функция непременно аналитически продолжается на весь шар $\{|z|<1\}$.

Возникает задача характеризации естественных областей существования голоморфных функций — так наз. о б л а с т е й г о л о м о р ф н о с т и. Простой достаточный признак можно сформулировать при помощи понятия барьера в граничной точке области, т. е. функции $f_\zeta(z)$, голоморфной в этой области и неограниченно возрастающей при приближении к ζ. Именно $D\subset\mathbb{C}^n$ является областью голоморфности, если для всюду плотного множества точек ее границы можно построить барьер. Этому условию удовлетворяет, в частности, любая выпуклая область; для любой точки $\zeta\in\partial D$ достаточно в $(2n-1)$-мерной опорной плоскости к D в точке ζ выбрать $(2n-2)$-мерную плоскость вида

$$L_\zeta(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k(z_k-\zeta_k)=0,$$

и тогда барьером будет функция $f_\zeta=1/L_\zeta$. Следовательно, каждая выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ есть область голоморфности. Однако выпуклость не является необходимым признаком голоморфности: произведение плоских областей всегда есть область голоморфности, а такое произведение может и не быть выпуклым. Тем не менее если надлежащим образом обобщить понятие выпуклости, то можно прийти к необходимому и достаточному признаку. Одно из таких обобщений основано на том, что выпуклую оболочку множества $K\subset\mathbb{R}^n$ можно описать как совокупность точек, в к-рых значение любой линейной функции не превосходит верхней грани значений этой функции на K. По аналогии, голоморфно выпуклой оболочкой множества $K\subset D\subset\mathbb{C}^n$ наз. совокупность

$$\hat{K}_O=\left\{z\in D:\ |f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)| \quad \text{для всех } f\in O(D)\right\},$$

где $O(D)$ означает множество всех голоморфных в области D функций. Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. г о л о м о р ф н о в ы п у к л о й, если из того, что множество компактно принадлежит D, вытекает, что и $\hat{K}_H$ компактно принадлежит D. Голоморфная выпуклость является необходимым и достаточным условием области голоморфности. Этот критерий, однако, не очень эффективен, ибо голоморфная выпуклость трудно проверяется.

Другое обобщение связано с понятием *плюрисубгармонической функции*, к-рая является комплексным аналогом выпуклой функции. Выпуклую функцию в нек-рой области из $\mathbb{R}^n$ можно определить как функцию, сужения к-рой на принадлежащие области отрезки прямых $x=x^0+\omega t$ (здесь x^0, $\omega\in\mathbb{R}$, а t — действительный параметр) являются выпуклыми функциями от t. Плюрисубгармонической в области $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. такую полунепрерывную сверху в этой области действительную функцию φ, сужение к-рой на принадлежащие D части комплексной прямой $z=z^0+\omega\zeta$ (z^0, $\omega\in\mathbb{C}^n$, ζ - комплексный параметр) является субгармонич. функцией от ζ. Если φ дважды непрерывно дифференцируема, то условие ее плюрисубгармоничности по правилу дифференцирования сложных функций выражается условием неотрицательности эрмитовой формы

$$H(\omega,\ \bar{\omega})=\sum_{j,\ k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\omega_j\bar{\omega}_k,$$

к-рая наз. ф о р м о й Л е в и.

Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. п с е в д о в ы п у к л о й, если для нее функция $-\ln d(z,\ \partial D)$, где $d(z,\ \partial D)$ означает

евклидово расстояние точки $z \in D$ до границы ∂D, является плюрисубгармонич. в этой области. Псевдовыпуклость также является необходимым и достаточным условием области голоморфности.

В ряде случаев псевдовыпуклость области удается проверить эффективно.

Для областей, не являющихся областью голоморфности, возникает задача описания ее о б о л о ч к и г о л о м о р ф н о с т и, т. е. наименьшей области голоморфности, в к-рую аналитически продолжается любая функция, голоморфная в D. Для областей простейших типов оболочку голоморфности удается построить эффективно. Однако в общем случае задача неразрешима в классе однолистных областей. В процессе аналитич. продолжения функций за пределы заданной области D в нек-рых случаях возникает многозначность, для избежания к-рой приходится вводить многолистные о б л а с т и н а л о ж е н и я над D, аналогичные *римановым поверхностям*. В классе областей наложения задача построения оболочек голоморфности всегда разрешима. Эта задача также имеет приложения в теоретич. физике, именно — в квантовой теории поля.

Переход от плоскости к комплексному пространству существенно расширяет круг геометрич. вопросов, связанных с голоморфными функциями. В частности, такие функции естественно рассматривать не только в областях, но и на к о м п л е к с н ы х м н о г о о б р а з и я х — гладких многообразиях четной действительной размерности, соотношения соседства к-рых биголоморфны. Среди них особую роль играют *Штейна многообразия* — естественные обобщения областей голоморфности.

Ряд вопросов анализа сводится к задаче построения в данной области голоморфной функции с заданными нулями или мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями лорановских разложений. В плоском случае, согласно теоремам Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера и их обобщениям, эти задачи решены для произвольной области. В пространственном случае это не так — разрешимость аналогичных задач, к-рые наз. п р о б л е м а м и К у з е н а, обусловлена нек-рыми топологич. и аналитич. свойствами рассматриваемых комплексных многообразий.

Центральным пунктом решения проблем Кузена является построение из локально заданных функций с теми или иными свойствами глобальной функции, определенной на всем рассматриваемом многообразии и обладающей теми же локальными свойствами. Для такого рода построений оказались очень хорошо приспособленными методы т е о р и и п у ч к о в, к-рая возникла в процессе алгебраико-топологич. обработки понятия аналитич. функции и нашла важные применения в самых разных отраслях математики. Решение проблемы Кузена методами теории пучков получено в работах А. Картана (H. Cartan) и Ж. Серра (J. Serre).

Б. В. Шабат.

Современная теория аналитических функций и их обобщений представляет собой одну из важнейших ветвей анализа, тесно связанную с самыми разнообразными разделами математики и имеющую многочисленные приложения к теоретич. физике, механике и технике.

Фундаментальные исследования по теории А. ф. и их приложениям принадлежат советским математикам. Широкий интерес к теории функций комплексного переменного в России возник в нач. 20 в. в связи с замечательными исследованиями рус. ученых по приложениям теории А. ф. к различным вопросам механики сплошных сред. Важнейшие задачи гидро- и аэродинамики были решены на базе методов теории А. ф. в трудах Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина. В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили эти методы нашли глубокие приложения к теории упру-

гости. В последующие годы теория функций комплексного переменного получила в нашей стране всестороннее развитие. Фундаментальные исследования В. В. Голубева, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова и В. И. Смирнова — по граничным свойствам А. ф., М. А. Лаврентьева — по геометрич. теории функций комплексного переменного (квазиконформные отображения и их приложения к газовой динамике), М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и Л. И. Седова — по приложениям методов теории А. ф. к задачам механики сплошных сред, Д. Е. Меньшова — по теории моногенности, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и С. Н. Мергеляна — по теории приближений функций комплексного переменного, И. Н. Векуа — по теории обобщенных А. ф. и их приложениям, А. О. Гельфонда — по теории интерполяции, Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова — по теории А. ф. нескольких переменных и ее применениям в квантовой теории поля и многие др. сыграли определяющую роль в развитии соответствующих разделов теории А. ф. Теория А. ф. одного и нескольких комплексных переменных и их обобщений продолжает активно развиваться. См. *Граничные свойства аналитических функций*, *Квазиконформное отображение*, *Граничные задачи теории аналитических функций*, *Приближение функций* комплексного переменного.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 8 изд., т. 3, ч. 2, М., 1969; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [6] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [7] Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Теория функций комплексной переменной, М., 1967; [8] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., ч. 1—2, М., 1962—63; [9] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [10] Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951; [11] Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947, М.—Л., 1948, с. 319—414; [12] Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 381—510; [13] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976; [14] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., 1969. *А. А. Гончар, Б. В. Шабат.*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ АБСТРАКТНАЯ, аналитическое отображение банаховых пространств,— функция $f(x)$, действующая из нек-рой области D банахова пространства X в банахово пространство Y и дифференцируемая по Фреше всюду в D, т. е. такая, что для каждой точки $a \in D$ существует ограниченный линейный оператор $\delta f(a, \cdot)$ из X в Y, для к-рого выполняется соотношение:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|h\|^{-1} \cdot \|f(a+h) - f(a) - \delta f(a, h)\| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму в X или Y; $\delta f(a, h)$ наз. дифференциалом Фреше функции f в точке a.

Другой подход к понятию А. ф. а. возникает из дифференцируемости по Гато. Функция $f(x)$ из D в Y наз. слабо аналитической в D, или дифференцируемой по Гато в D, если для каждого линейного непрерывного функционала y' над пространством Y и каждого элемента $h \in X$ комплексная функция $y'(f(x+\xi h))$ является голоморфной функцией комплексного переменного ξ в круге $|\xi| < \rho(x, h)$, где $\rho(x, h) = \sup|\xi|$, $x + \xi h \in D$. Всякая А. ф. а. в области D непрерывна и слабо аналитична в D. Обратное также верно, причем условие непрерывности можно заменить локальной ограниченностью или непрерывностью по Бэру.

Термин «А. ф. а.» иногда используется в более узком смысле, когда под ним понимается функция $f(z)$ комплексного переменного z со значениями в банаховом или даже линейном локально выпуклом топологич.

пространстве Y. В этом случае всякая слабо аналитич. функция $f(z)$ в области D плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ является А. ф. а. Можно также сказать, что функция $f(z)$ будет А. ф. а. в области $D\subset\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ непрерывна в D и для любого простого замкнутого спрямляемого контура $L\subset D$ интеграл $\int_L f(z)dz$ обращается в нуль. Для А. ф. а. $f(z)$ комплексного переменного z справедлива интегральная формула Коши (см. *Коши интеграл*).

Пусть $f(x)$ — слабо аналитич. функция в области D банахова пространства X. Тогда $f(x+\xi h)$, как функция комплексного переменного ξ, имеет производные всех порядков в области $\tilde{D}=\{\xi;\ x+\xi h\in D\}$, $h\in X$, причем эти производные суть А. ф. а. из $\tilde{D}$ в Y. Если множество $\{x+\xi h;\ |\xi|\leqslant 1\}$ принадлежит D, то

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\delta^n f(x,\ h),$$

где ряд сходится по норме и

$$\delta^n f(x,\ h)=\frac{d}{d\xi^n}f(x+\xi h)\,|_{\xi=0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(x+\xi h)\,\xi^{-n-1}\,d\xi.$$

Функция $y=P(x)$ из X в Y наз. полиномом относительно переменного x степени не выше m, если для всех x, $h\in X$ и для всех комплексных ξ

$$P(x+\xi h)=\sum_{\nu=0}^{m}P_\nu(x,\ h)\,\xi^\nu,$$

где функции $P_\nu(x,\ h)$ не зависят от ξ. Степень $P(x)$ точно равна m, если $P_m(x,\ h)\neq 0$. Степенным рядом наз. ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — однородные полиномы степени n такие, что $P_n(\alpha x)=\alpha^n P_n(x)$, $x\in X$, для всех комплексных α. Всякий слабо сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ в области D сходится и по норме к нек-рой слабо аналитической функции $f(x)$ в D, причем $P_n(x)=\delta^n f(0,\ x)/n!$, $0\in D$. Функция $f(x)$ является А. ф. а. в D тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки $a\in D$ она разлагается в степенной ряд

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(h),$$

где все $P_n(h)$ непрерывны в X.

На А. ф. а. переносятся с соответственными изменениями многие основные результаты классич. теории аналитич. функций такие, как *максимума модуля принцип*, теоремы единственности, *Витали теорема*, *Лиувилля теорема* и др. Множество всех А. ф. а. в области D образует линейное пространство.

Понятие А. ф. а. обобщается и на более широкие классы пространств X и Y, напр. на локально выпуклые топологич. пространства, банаховы пространства над произвольным полным нормированным полем и т.д.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Шварц Л., Анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1972.

А. А. Данилевич, Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВЕКТОР в пространстве V представления T группы Ли G — вектор $\xi\in V$, для к-рого отображение $g\to T(g)\xi$ является вещественно аналитич. вектор-функцией на G со значениями в V (см. *Представлений теория*). Если T — слабо непрерывное представление группы Ли G в банаховом пространстве V, то множество V^ω аналитич. векторов плотно в V (см. [1], [2], [3]). Существует обобщение этой теоремы на широкий класс представлений в локально выпуклых пространствах [5]. Было доказано [6], что представление связной группы Ли G в банаховом пространстве V однозначно восстанавли-

вается по соответствующему представлению алгебры Ли группы G в пространстве V^ω.

Аналитический вектор для неограниченного оператора A в банаховом пространстве V с областью определения $D(A)$ определяется как вектор

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n),$$

для к-рого ряд

$$\sum \frac{x^n}{n!} \| A^n \xi \|$$

имеет положительный радиус сходимости. Это понятие, введенное в [2], является частным случаем общего понятия А. в.— здесь в качестве группы Ли G выступает множество точек действительной прямой с операцией сложения. Оно оказалось полезным в теории операторов в банаховых пространствах и в теории эллиптич. дифференциальных операторов.

Лит.: [1] Cartier P., Dixmier J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 131—45; [2] Нелсон Э., «Математика», 1962, 6 : 3, с. 89—131; [3] Гординг Л., «Математика», 1965, 9 : 5, с. 78—94; [4] Cartier P., Vecteurs analytiques. Séminaire Bourbaki, Mai 1959; [5] Moore R. T., «Memoirs Amer. Math. Soc.», 1968, v. 78; [6] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 185—243. *А. А. Кириллов.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — см. *Дифференциал на римановой поверхности.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ЛАНДШАФТ, аналитический рельеф, поверхность модуля,— геометрич. изображение модуля $|f(z)|$ аналитич. функции $f(z)$, $z=x+iy$. Аналитическим ландшафтом функции $f(z)$ наз. поверхность над плоскостью (x, y), имеющая аппликатой значение $|f(z)|$. А. л. позволяет иногда составить наглядное представление о поведении нек-рых конкретных функций. А. л. основных функций см. в [2].

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976; [2] Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, пер. с нем., 3 изд., М., 1959. *Е. Д. Соломенцев.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБРАЗ — расширение понятия *полной аналитической функции*, получающееся при рассмотрении всех возможных элементов аналитич. функции в виде обобщенных степенных рядов (рядов Пюизё)

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^{\nu/n}, \quad \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu z^{-\nu/n}, \qquad (*)$$

где z — комплексное переменное, m — целое, а n — натуральное числа, сходящихся соответственно в областях $|z-z_0|<r$, $|z|>r>0$. А. о. можно отождествить с классом всех элементов вида (*), получающихся друг из друга посредством *аналитического продолжения*. А. о. отличается от полной аналитич. функции присоединением всех разветвленных элементов вида (*) с $n>1$, получающихся при аналитич. продолжении ее регулярных элементов с $n=1$. После введения соответствующей топологии А. о. превращается в *риманову поверхность* данной функции.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968, гл. 8. *Е. Д. Соломенцев.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР в точке x_0— оператор A, действующий из одного банахова пространства в другое и допускающий представление вида

$$A(x_0+h)-Ax_0=\sum_{k=1}^{\infty} C_k h,$$

где C_k — форма порядка k, а ряд сходится равномерно в нек-ром шаре $\|h\|<r$. Оператор наз. аналитическим в области G, если он является А. о. в каждой точке этой области. А. о. бесконечно дифференцируемы; в случае комплексных пространств аналитичность в области есть следствие дифференцируемости (по Гато) в каждой точке этой области. Примерами А. о. могут служить интегро-степенные ряды Ляпунова, операторы Гаммерштейна и Урысона с глад-

кими ядрами в пространстве C непрерывных функций.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

П. П. Забрейко.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОЛИЭДР — область Π комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ $n \geqslant 1$, представимая посредством неравенств $|f_i(z)| < 1$, где функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, голоморфны в нек-рой области $D \subset \mathbb{C}^n$, содержащей Π, то есть $\Pi = \{z \in D;\ |f_i(z)| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$. Предполагается также, что Π компактна в D. В случае, если $f_i(z)$ полиномы, А. п. наз. полиномиальным полиэдром. Если $m = n$ и $f_i(z) = a_i z_i$, А. п. является *поликругом*. Гранями А. п. наз. множества $\sigma_i = \{z \in D;\ |f_i(z)| = 1;\ |f_j(z)| < 1,\ j \neq i\}$. Пересечение любых k различных граней $(2 \leqslant k \leqslant n)$ наз. ребром А. п. Если $m \geqslant n$ и все грани имеют размерность $2n - 1$, а каждое ребро — размерность не выше $2n - k$, то А. п. есть *Вейля область*. Совокупность n-мерных ребер $\sigma_{i_1 \ldots i_n} = \sigma_{i_1} \cap \ldots \cap \sigma_{i_n}$ образует остов А. п. Понятие А. п. играет существенную роль в вопросах интегральных представлений аналитич. функций многих переменных.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПУЧОК — пучок F на аналитич. пространстве X такой, что для любой точки $x \in X$ множество F_x является *модулем* над кольцом O_x ростков голоморфных функций в точке x, причем отображение $(f, \alpha) \to f\alpha$, определенное на множестве пар (f, α), где $f \in O_x$, $\alpha \in F_x$, для $x \in X$ является непрерывным отображением $O \times F$ в F.

М. И. Войцеховский.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ — элемент f пространства $H'(\Omega)$, сопряженного к пространству $H(\Omega)$ аналитич. функций, определенный на открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{C}^n$, т. е. функционал на $H(\Omega)$. Напр., распределение с компактным носителем является А. ф. Существует компакт $K \subset \Omega$, наз. носителем А. ф. f, на к-ром сосредоточен f: для любого открытого множества $\omega \supset K$ функционал f продолжается на $H(\omega)$ так, что для всех $u \in H(\Omega)$ имеет место

$$|f(u)| \leqslant C_\omega \sup |u|,$$

где C_ω — константа, зависящая от ω. При этом существует мера μ с носителем в K такая, что

$$f(u) = \int_\Omega u \, d\mu.$$

Аналогично определяется А. ф. на пространстве действительнозначных функций.

М. И. Войцеховский.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ (формула) — совокупность действий, к-рые нужно проделать в определенном порядке над значением аргумента и константами, чтобы получить значение функции. Каждая функция одного переменного x с не более чем счетным числом точек разрыва допускает А. в. $A(x)$, построенное лишь из трех действий (сложение, умножение, переход к пределу по натуральным числам), употребленных не более чем в счетном числе, отправляясь от аргумента x и констант, напр.,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

А. в., изображающих данную функцию, имеется бесконечно много, если существует хотя бы одно. Так, функция, тождественно равная нулю, изобразима рядом:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-n)}{n!}$$

и из любого А. в. $A(x)$ всегда можно получить другое, тождественно ему равное:

$$A(x) + B(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-n)}{n!},$$

где $B(x)$ — произвольное А. в.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного. Общая часть, 2 изд., М., 1948.

Б. В. Кутузов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ — устаревший термин; обозначает множество, дополнительное к *A-множеству* (на числовой прямой). *П. С. Александров.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо ростков аналитич. функций в точке *аналитического пространства*. Более точно: пусть k есть поле с нетривиальным *абсолютным значением* (обычно предполагаемое полным) и $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ есть k-алгебра степенных рядов от $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в k, сходящихся в нек-ром полицилиндре с центром $(0, 0, \ldots, 0)$ (при этом каждый ряд сходится в своем полицилиндре). Аналитическим кольцом над k, или аналитической k-алгеброй, наз. факторкольцо кольца $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$; обычно k — поле $\mathbb{R}$ действительных или поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Каждое А. к. является локальным, нётеровым и гензелевым кольцом; его поле вычетов изоморфно k. А. к. $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ будет регулярным (и факториальным) кольцом, а его пополнение в топологии, определяемой максимальным идеалом $(X_1, \ldots, X_n)$, совпадает с кольцом формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Для А. к. верна нормализационная лемма: целостное А. к. является конечным расширением А. к. $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$. Вообще, алгебры, конечные над $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$, наз. квазианалитическими k-алгебрами. Если k — совершенное поле, то А. к. является *превосходным кольцом*.

Лит.: [1] Dieudonné J., Grothendieck A., «J. Algebra», 1967, v. 5, № 3, p. 305–24; [2] Мальгранж Б., Идеалы дифференцируемых функций, пер. с англ., М., 1968; [3] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y., 1964.

В. И. Данилов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие с аналитич. атласом. Структура n-мерного аналитич. многообразия над полным недискретно нормированным полем k на топологич. пространстве M определяется заданием на M аналитич. атласа над k, т. е. набора *карт* со значениями в k^n, покрывающего M, любые две карты из к-рого связаны между собой аналитически. При этом считается, что два атласа определяют одну и ту же структуру, если их объединение является аналитич. атласом. На А. м. M определен пучок $\mathcal{O}$ ростков k-значных аналитич. функций. Возникающий таким образом класс окольцованных пространств $(M, \mathcal{O})$ совпадает с классом гладких аналитич. пространств над k.

В случае, если k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, говорят о вещественных аналитических многообразиях; если k — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, — о комплексных аналитических (или просто комплексных) многообразиях; если k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, — о p-адических аналитических многообразиях. Примерами А. м. являются: n-мерное евклидово пространство k^n, n-мерное проективное пространство над k, аффинные и проективные алгебраич. многообразия над k без особых точек, группы Ли и их однородные пространства.

Понятие А. м. восходит к Б. Риману и Ф. Клейну (B. Riemann, F. Klein), но впервые было точно сформулировано Г. Вейлем в книге [4] для случая римановых поверхностей, т. е. одномерных комплексных многообразий. В настоящее время (70-е гг.) А. м. естественно рассматривать как частный случай *аналитических пространств*, к-рые можно грубо описать как «многообразия с особыми точками». Понятие аналитич. пространства возникло в 50-х гг. 20 в. и стало основным объектом теории аналитич. функций; многие фундаментальные результаты, полученные для А. м., удалось перенести на негладкий случай. Изложение

общих свойств А. м. над произвольным полем можно найти в [3].

Существует тесная связь между теориями вещественных аналитических и *дифференцируемых многообразий*, а также между теориями вещественных и комплексных аналитич. многообразий. Очевидно, на всяком вещественном А. м. определена естественная структура многообразия класса C^∞. В 1936 Х. Уитни (H. Whitney) доказал, что и обратно, на всяком паракомпактном многообразии класса C^∞ можно определить аналитич. структуру над $\mathbb{R}$, индуцирующую исходную гладкую структуру. Из теоремы Г. Грауэрта (H. Grayert) о вложимости паракомпактного аналитич. многообразия над $\mathbb{R}$ в евклидово пространство следует, что эта аналитич. структура определена однозначно с точностью до изоморфизма (не обязательно тождественного) (см. [2]).

На каждом комплексном многообразии M определена естественная структура вещественного А. м. (удвоенной размерности). Ответ на обратный вопрос, т. е. на вопрос о существовании и единственности комплексной структуры на заданном вещественном А. м., получен только в простейших случаях. Так, если M — связное двумерное вещественное А. м., то необходимыми и достаточными условиями существования комплексной структуры на M являются паракомпактность и ориентируемость, а задача классификации этих структур есть классич. задача о *модулях римановых поверхностей*. Имеется классификация компактных *аналитических поверхностей* (т. е. двумерных компактных комплексных многообразий), дающая частичный ответ на поставленный выше вопрос для 4-мерных вещественных многообразий. С другой стороны, при помощи топологич. методов можно указать классы вещественных многообразий, не допускающих почти комплексных и тем более комплексных структур. К таким многообразиям относятся сферы S^{2k} при $k \neq 1, 3$. Описание комплексных структур, достаточно близких к заданной, дает теория *деформаций* аналитических структур, важную роль в к-рой играют банаховы А. м.— бесконечномерные аналоги А. м.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [2] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955.

А. Л. Онищик.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество полного сепарабельного метрич. пространства, являющееся непрерывным образом пространства иррациональных чисел. Понятие А. м. введено Н. Н. Лузиным [1]. Это классич. определение А. м. обобщается на случай общих метрич. и топологич. пространств.

1) А. м. в произвольном топологич. пространстве X — подмножество этого пространства, являющееся образом замкнутого подмножества пространства иррациональных чисел при полунепрерывном сверху многозначном отображении с бикомпактными образами точек и замкнутым графиком [2]. Если X — хаусдорфово, то последнее условие выполняется автоматически. Если X метризуемо, то это определение эквивалентно классическому.

2) В полном сепарабельном метрич. пространстве классич. А. м. тождественны с *A-множествами*. Этот факт кладется в основу второго определения А. м. (как A-множеств) в общих метрич. и топологич. пространствах (см. [3], [4], [5]). В классе вполне регулярных пространств А. м. в смысле 1) суть абсолютные А. м. в смысле 2). В классе несепарабельных метризуемых пространств используется определение 2), так как 1) дает сепарабельные А. м.

3) А. м. в хаусдорфовом пространстве (см. [6], [7]) — непрерывный образ подмножества бикомпакта типа $F_{\sigma\delta}$.

4) А. м.— непрерывный образ множества, принадлежащего семейству $K_{\sigma\delta}$, где K — семейство всех замкнутых бикомпактных подмножеств нек-рого топологич. пространства (см. [8]). Множество, аналитическое в смысле 3), является аналитическим в смысле 4), а это последнее является аналитическим в смысле 1).

5) В другом направлении дано обобщение в [4]: k-аналитич. множества получаются из замкнутых множеств топологич. пространства с помощью обобщенной *A-операции* (*Бэра пространство* счетного веса заменяется на пространство Бэра веса k) и являются обобщением А. м. в смысле определения 2).

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1917, v. 164, p. 91—94; [2] Frolik Z., «Mathematika», 1969, v. 16, № 2, S. 153—57; [3] Sierpinski W., General topology, Toronto, 1952; [4] Stone A., «Gen. Topol. and Appl.», 1972, v. 2, № 3, p. 249—70; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [6] Шнейдер В. Е., «Уч. зап. МГУ», 1948, в. 135, Математика, т. 2, с. 37—85; [7] Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1953, t. 5, p. 131—295; [8] Sion M., «Trans. Amer. Math. Sok.», 1960, v. 96, p. 341—54.

А. Г. Елькин.

6) А. м. в теории аналитических функций множество, определяемое локально как множество общих нулей конечного числа голоморфных функций. Если S — А. м. в открытом подмножестве U пространства n комплексных переменных $\mathbb{C}^n$, то это означает, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность $V \subset U$ и конечный набор голоморфных в V функций $f_1, \ldots, f_r$ таких, что $S \cap V = \{z \in V : f_1(z) = \ldots = f_r(z) = 0\}$. Если функции f_i можно выбрать (в к.-л. окрестности V) так, что ранг якобиевой матрицы $(\partial f_i/\partial z_j)$ в точке a равен r, то a наз. регулярной точкой А. м. S; число $n-r$ наз. (комплексной) размерностью S в точке a и обозначается $\dim_a S$. Множество S^* всех регулярных точек А. м. S является открытым всюду плотным подмножеством S (в индуцированной топологии S как подмножества U). Его дополнение $S \setminus S^*$ — множество особых точек S — есть А. м. в U, нигде не плотное на S.

По определению,

$$\dim_a S = \overline{\lim_{z \in S^*,\ z \to a}} \dim_z S, \quad a \in S;$$

размерностью А. м. S наз. число

$$\dim S = \sup_{a \in S} \dim_a S.$$

А. м. S наз. однородным k-мерным, если $\dim_a S = k$ для всех $a \in S$. Для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant \dim S$, множество $S_k = \{a \in S : \dim_a S = k\}$ является однородным k-мерным А. м. в $U \setminus \bigcup_{j>k} S_j$. Таким образом, всякое А. м. в U представляется в виде конечного объединения однородных А. м. $S = \bigcup S_k$. В особых точках $\dim_a (S \setminus S^*) < \dim_a S$, и поэтому размерность А. м. особых точек однородного k-мерного А. м. в U строго меньше k. Связные компоненты S^* являются комплексными многообразиями. Так как это справедливо и для А. м. $S \setminus S^*$, то получается разложение

$$S = S^* \cup (S \setminus S^*)^* \cup \ldots$$

А. м. на комплексные многообразия. Более удобно разложение

$$S = S_d^* \cup (S \setminus S_d^*)_{d-1}^* \cup \ldots$$

(размерности слагаемых строго убывают, $d = \dim S$), к-рое наз. стратификацией А. м. S; связные компоненты k-го слагаемого этой суммы наз. k-мерными стратами А. м. S.

А. м. S наз. приводимым (в U), если оно является объединением к.-л. двух отличных от него А. м. в U; в противном случае S неприводимо (в U). Всякое неприводимое А. м. в U связно и однородно. А. м. S в U неприводимо тогда и только тогда, когда множество S^* его регулярных точек связно. Замыкание каждой связной компоненты множества S^* — неприводимое А. м. в U; такие А. м. наз. неприводимыми компонентами А. м. S. Всякое

А. м. в U является локально конечным объединением своих неприводимых компонент. Если А. м. не имеют общих неприводимых компонент, то размерность их пересечения строго меньше размерности каждого из них. Если пересечение двух неприводимых А. м. в U содержит множество, открытое на каждом из них, то эти А. м. совпадают (теорема единственности).

А. м. S в U наз. неприводимым в точке $a \in S$, если существует фундаментальная система окрестностей V_i точки a в U такая, что все А. м. $S \cap V_i$ в V_i неприводимы; при этом a наз. точкой неприводимости А. м. S. В окрестности каждой точки неприводимости А. м. устроено как аналитическое накрытие, т. е. для каждой такой точки $a \in S$, $\dim_a S = k$, найдутся связная окрестность $V \subset U$, линейное отображение $\lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ и А. м. $\sigma \in \lambda(V)$ такие, что сужение λ на $S \cap V$ есть собственное отображение на $\lambda(V)$, а сужение λ на $(S \cap V) \setminus \lambda^{-1}(\sigma)$ есть конечнократное локально биголоморфное накрытие над $\lambda(V) \setminus \sigma$. Для неприводимых одномерных А. м. отсюда вытекает (после подходящей линейной замены координат) локальное параметрич. представление вида

$$z_1 = \zeta^m, \quad z_2 = f_2(\zeta), \quad \ldots, \quad z_n = f_n(\zeta),$$

где $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < r$, m — целое положительное число и функции f_i голоморфны в круге $|\zeta| < r$. Таким образом, в окрестности каждой точки неприводимости одномерное А. м. является топологич. многообразием. Для А. м. большей размерности это в общем неверно.

Объединение конечного числа и пересечение любого семейства А. м. в U суть снова А. м. в U. Всякое аналитическое в U множество замкнуто в U. Всякое компактное А. м. в $U \subset \mathbb{C}^n$ состоит из конечного числа точек. Если U связно и А. м. $S \neq U$, то $U \setminus S$ открыто, всюду плотно в U и тоже связно. Множество всех изолированных точек А. м. S в U не имеет в U предельных точек. Более того, всякое А. м. локально связно. Связное А. м. линейно связно.

Всякое А. м. в U размерности d локально в U имеет конечную $2d$-мерную меру Хаусдорфа mes_{2d}. Если $\dim_a S = k$, то существуют положительные константы c и C (зависящие от a и S) такие, что

$$cr^{2k} \leqslant \mathrm{mes}_{2k}\,(S \cap \{\,|z-a| < r\}) \leqslant Cr^{2k}$$

для всех достаточно малых $r > 0$.

Семейство А. м. инвариантно относительно *биголоморфных отображений*. Более того, если S — А. м. в U и $f\colon U \to U'$ — собственное голоморфное отображение, то $f(S)$ — А. м. в U'.

Определение А. м. на комплексных многообразиях аналогично определению для $\mathbb{C}^n$; при этом сохраняются все перечисленные свойства, за исключением одного: в общем случае существуют компактные, но не дискретные А. м. В конкретном многообразии А. м. могут обладать нек-рыми дополнительными свойствами. Напр., в комплексном n-мерном проективном пространстве всякое А. м. является алгебраическим, т. е. совпадает с множеством общих нулей нек-рого конечного набора однородных многочленов.

Действительные А. м. в открытых подмножествах $\mathbb{R}^n$ определяются так же, только вместо голоморфных надо брать действительные аналитич. функции. Каждое действительное А. м. является пересечением нек-рого А. м. (в нек-ром открытом подмножестве $\mathbb{C}^n$) с действительным подпространством $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Эрве М., Функции многих комплексных переменных. Локальная теория, пер. с англ., М., 1965.

Е. М. Чирка.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, аналитический морфизм,— морфизм *аналитических пространств*, рассматриваемых как *окольцованные про-*

странства. А. о. пространства $(X, \mathcal{O}_X)$ в пространство $(Y, \mathcal{O}_Y)$ есть пара (f_0, f_1), где

$$f_0 : X \to Y$$

— непрерывное отображение, а

$$f_1 : f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

— гомоморфизм пучков колец на X. В случае комплексных пространств А. о. наз. также голоморфным отображением.

В случае, когда $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — приведенные аналитич. пространства, гомоморфизм f_1 полностью определяется отображением f_0 и является обратным отображением ростков функций, отвечающим f_0. Таким образом, в этом случае А. о.— это такое отображение $f : X \to Y$, что для любого $x \in X$ и любого $\varphi \in \mathcal{O}_{f(x)}$ имеет место $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_x$.

Слоем А. о.

$$f = (f_0, f_1) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

в точке $y \in Y$ наз. аналитич. подпространство

$$f^{-1}(y) = \left(f_0^{-1}(y), \quad \mathcal{O}_X / f_1(m_y)\,\mathcal{O}_X \mid f_0^{-1}(y)\right)$$

пространства $(X, \mathcal{O}_X)$, где $m_y \in \mathcal{O}_y$ — пучок ростков функций, обращающихся в 0 в точке y. Если положить

$$d(x) = \dim_x f^{-1}(f_0(x)), \quad x \in X,$$

то имеет место неравенство

$$\dim_x X \leqslant \dim_{f_0(x)} Y + d(x). \qquad (*)$$

Если X и Y — приведенные комплексные пространства, то для всякого $l \geqslant 0$ множество

$$X_l = \{x \in X \mid d(x) \geqslant l\}$$

является аналитическим в X.

А. о. $f = (f_0, f_1)$ наз. плоским в точке $x \in X$, если $\mathcal{O}_{X,x}$ является *плоским модулем* над кольцом $\mathcal{O}_{Y, f_0(x)}$. В этом случае неравенство $(*)$ превращается в равенство. А. о. наз. плоским, если оно — плоское в каждой точке $x \in X$. Плоское А. о. комплексных пространств является открытым. Обратно, если f_0 открыто, Y гладко, а X и все слои приведены, то f — плоское А. о. Множество точек комплексного или жесткого аналитич. пространства X, у к-рых А. о. f не является плоским, будет аналитическим в X. Если X и Y — приведенные комплексные пространства, причем X имеет счетную базу, то в Y существует открытое всюду плотное множество, над к-рым f — плоское А. о. Если А. о.

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

комплексных пространств плоско, то множества тех $x \in X$, в к-рых слой $f^{-1}(x)$ не приведен или ненормален, являются аналитическими в $(X, \mathcal{O}_X)$.

Пусть $f : X \to Y$ — А. о. приведенных комплексных пространств. Если $\dim X < \infty$, то существует стратификация

$$\varnothing = X(-1) \subseteq X(0) \subseteq \ldots \subseteq X(r) \subseteq \ldots,$$

где $X(r)$ — аналитич. множества и $X(r) = X$ для больших r, со следующим свойством: всякая точка $x \in X(r) \setminus X(r-1)$ обладает такой окрестностью U в X, что $f(U \cap X(r))$ — локальное аналитич. множество в Y, все неприводимые компоненты ростка к-рого в точке $f(x)$ имеют размерность r. В частности, если f собственное, то $f(X)$ — аналитич. множество в Y. Этот факт является частным случаем теорем конечности для А. о.

Пусть X, Y — комплексные пространства, причем X компактно. Тогда множество $\mathrm{Mor}(X, Y)$ всех А. о. $f : X \to Y$ можно снабдить такой структурой комплексного пространства, что отображение

$$\mathrm{Mor}(X, Y) \times X \to Y,$$

переводящее пару (f, x) в $f_0(x)$, аналитично. В частности, группа автоморфизмов компактного комплекс-

ного пространства X является комплексной группой Ли, аналитически действующей на X.

Лит.: [1] Remmert R., «Math. Ann.», 1956, Bd 130, S. 410—41; [2] его же, там же, 1957, Bd 133, S. 328—70; [3] Stein K., Analytischer Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Colloque de topologie, Strasbourg, Avril, 1954; [4] Frisch J., «Inventiones math.», 1967, Bd 4, S. 118—38.

Д. А. Пономарев.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, голоморфное представление,— представление комплексной группы Ли G в топологич. векторном пространстве E, обладающее тем свойством, что все матричные элементы $(\varphi(g)\xi, \eta)$, $\xi \in E$, $\eta \in E'$ (E' — сопряженное топологическое векторное пространство) голоморфны на G. Представление φ наз. антианалитическим представлением, если его матричные элементы становятся голоморфными после комплексного сопряжения. Аналитическое (антианалитическое) представление связной группы Ли G однозначно определяется соответствующим представлением алгебры Ли этой группы (см. *Представление алгебры Ли*). Если G — полупростая комплексная группа Ли, то все ее топологически неприводимые аналитические (антианалитические) представления конечномерны.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представления групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

Д. П. Желобенко.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ функции — доопределение функции f_0, определенной на нек-ром подмножестве E комплексного многообразия M, до функции f, голоморфной в нек-рой области $D \subset M$, содержащей E, такое, что сужение $f|E = f_0$ функции f на E совпадает с f_0. Отправным в теории А. п. является понятие (аналитического) элемента, т. е. пары (D, f), где D — область на M и f — голоморфная в D функция. Говорят, что элементы (D_0, f_0) и (D_1, f_1) составляют непосредственное А. п. друг друга через связную компоненту Δ множества $D_0 \cap D_1$, если $f_0|\Delta = f_1|\Delta$. Элемент (D_0, f_0), по определению, аналитически продолжается в граничную точку $\zeta \in \partial D \subset M$, если существует непосредственное А. п. (D_1, f_1) элемента (D_0, f_0) через Δ такое, что $\zeta \in \bar{\Delta} \cap D_1$. Максимальным (в M) А. п. (D_0, f_0) наз. элемент (D, f), аналитически продолжающий f_0 в область $D \supset D_0$, но не продолжаемый аналитически ни в одну граничную точку D. Максимальное А. п. (D_0, f_0) в M единственно, но не всегда существует. Для устранения этого недостатка вводятся области наложения над M (римановы поверхности в случае $M = \mathbb{C}$), к-рые строятся из элементов, аналитически продолжающих (D_0, f_0). Элемент (D, f) наз. А. п. элемента (D_0, f_0), если существует конечный набор элементов (D_i, f_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, и связных компонент Δ_i соответственно в $D_i \cap D_{i+1}$ таких, что $(D_n, f_n) = (D, f)$ и (D_i, f_i), (D_{i+1}, f_{i+1}) являются непосредственными А. п. друг друга через Δ_i. Говорят, что голоморфная функция f_0, определенная первоначально в области D_0, аналитически продолжается в точку $z \in M$, если существует А. п. (D, f) элемента (D_0, f_0) такое, что $z \in D$. Среди элементов, продолжающих f_0 в точку z, вводится отношение эквивалентности: $(D', f') \sim (D'', f'')$, если $z \in D' \cap D''$ и $f' = f''$ в окрестности z. На множестве классов эквивалентности D_f (для всех возможных z) естественно вводится топология и комплексная структура области наложения над M. Функция f_0 естественно поднимается в D_f (значение на классе эквивалентности в z, содержащем (D_0, f_0), полагаем равным $f_0(z)$), аналитически продолжается на всю D_f и в определенном смысле не продолжается ни в одну граничную точку D_f над M.

В случае, когда M есть комплексная плоскость $\mathbb{C}$ или, более общо́, комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, этот процесс А. п. описывается проще. Канони-

ческим элементом наз. пара (D_a, f_a), где $a \in \mathbb{C}^n$, f_a — степенной ряд с центром в точке a с непустой областью сходимости D_a. Канонич. элемент (D_b, f_b) наз. А. п. (D_a, f_a) вдоль пути γ: $[0, 1] \to \mathbb{C}^n$, если существует семейство канонич. элементов (D_t, f_t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, с центрами $a_t = z(t)$ таких, что $(D_0, f_0) = (D_a, f_a)$, $(D_1, f_1) = (D_b, f_b)$ и для каждого $t_0 \in \gamma$ элементы (D_t, f_t) являются непосредственными А. п. (D_{t_0}, f_{t_0}) для всех t, достаточно близких к t_0. Семейство (D_t, f_t) на самом деле определяется однозначно. Если γ_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, есть непрерывное семейство путей в $\mathbb{C}^n$ с общими концами a и b и если (D_a, f_a) аналитически продолжается вдоль каждого γ_τ, то результат (D_b, f_b) не зависит от τ (*монодромии теорема*). Точками D_f в случае $\mathbb{C}^n$ являются канонич. элементы (D_a, f_a), получаемые посредством А. п. вдоль всевозможных путей в $\mathbb{C}^n$; f_a поднимается в D_f аналитически на всю D_f до голоморфной функции f, причем D_f есть область голоморфности f.

Описанный общий процесс А. п. практически малоэффективен, поэтому в анализе используется много специальных методов А. п. Сюда относятся различные аналитич. представления: интегралы, зависящие от параметра [интеграл типа Коши (см. *Коши интеграл*), *Лапласа интеграл*, интеграл Бореля (см. *Бореля преобразование*) и др.], замена переменного в степенном ряде, специальные способы суммирования степенных рядов [разложение Бореля в ряд многочленов, сходящийся в максимальном полигоне (см. *Бореля метод суммирования*), ряд Миттаг-Леффлера, сходящийся в максимальной звезде (см. *Звезда элемента функции*, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*) и др.], принцип симметрии Римана — Шварца (см. *Римана — Шварца принцип*), функциональные и дифференциальные уравнения, определяющие функцию (напр., уравнение $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ для гамма-функции, условия периодичности, четности, симметрии и т. п.), аналитич. выражения через известные функции.

К теме А. п. относятся также исследования о связи между исходным элементом аналитич. функции (рядом Тейлора) и свойствами *полной аналитической функции*, порождаемой этим элементом (см. [1]); результаты об особых точках (критерии особых точек, *Адамара теорема* мультипликационная, *Фабри теорема* об отношении) и особых линиях (теоремы о лакунах и непродолжаемости за границу круга сходимости, напр. *Адамара теорема* о лакунах, *Фабри теорема* о лакунах и др.), теоремы о *сверхсходимости* и о связях А. п. степенного ряда со свойствами целой функции, определяющей его коэффициенты, вопросы мероморфного продолжения, мероморфное продолжение при помощи *Паде аппроксимаций* и др. К А. п. следует отнести и теоремы об устранении особенностей (устранение изолированной особенности ограниченной голоморфной функции, устранение спрямляемых разрезов при условии непрерывности и т. п.), а также большой класс теорем об одновременном продолжении голоморфных функций многих комплексных переменных. В $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ имеются области, из к-рых любая голоморфная функция продолжается в более широкую область (в одномерном случае такого явления нет). Поэтому важной задачей А. п. функций многих комплексных переменных является описание этих более широких областей — так наз. голоморфных расширений, напр. известны описания *голоморфности оболочек* для *Гартогса областей*, n-кругловых и *трубчатых областей*, теоремы об устранении компактных особенностей и особенностей коразмерности $\geqslant 2$, *Боголюбова теорема* «острие клина» и теорема В. С. Владимирова о C-выпуклой оболочке (см. [3]). Известно несколько эффективных методов построения голоморфного расширения областей (см. [3]).

А. п. функций действительного переменного сводится к А. п. голоморфных функций, т. к. для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и любой функции f, аналитической в G, найдутся область $D \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфная в D функция $\tilde{f}$ такие, что $D \cap \mathbb{R}^n = G$ и $\tilde{f}|G = f$.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — обобщение понятия *аналитического многообразия*. Локальной моделью (и одновременно важнейшим примером) аналитич. пространства над полным недискретно нормированным полем k является *аналитическое множество* X в области U n-мерного пространства k^n над полем k, заданное уравнениями $f_1 = \ldots = f_p = 0$ (где f_i — аналитич. функции в U), к-рое снабжено пучком $\mathcal{O}$, получающимся при ограничении на X пучка $\mathcal{O}_U/I$, где $\mathcal{O}_U$ — пучок ростков аналитич. функций в U, а I — подпучок идеалов, порожденный $f_1, \ldots, f_p$. Аналитическим пространством над k наз. *окольцованное пространство*, локально изоморфное окольцованному пространству $(X, \mathcal{O})$ указанного выше вида. Если k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, говорят о вещественных аналитических пространствах; если k — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, — о комплексных аналитических (просто комплексных) пространствах; если k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, — о p-адических аналитических пространствах.

Аналитическим (голоморфным) отображением одного аналитич. пространства $(X, \mathcal{O}_X)$ в другое $(Y, \mathcal{O}_Y)$ наз. морфизм $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ в смысле теории окольцованных пространств, т. е. пара (φ_0, φ_1), где $\varphi_0 : X \to Y$ — непрерывное отображение, а $\varphi_1 : \varphi_0^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ — гомоморфизм пучков. Точка x А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. простой (или неособой), если x обладает окрестностью, над к-рой $(X, \mathcal{O})$ изоморфно пространству вида $(U, \mathcal{O}_U)$, где U — область в k^n. В противном случае x наз. особой точкой. Пространство наз. гладким, если все его точки просты. Гладкое аналитич. пространство — это не что иное, как аналитич. многообразие.

Размерность $\dim_x X$ А. п. X в точке $x \in X$ определяется как размерность соответствующего аналитич. множества в локальной модели. Глобальная размерность определяется формулой

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X.$$

Пусть m_x — максимальный идеал в локальном кольце $\mathcal{O}_x (x \in X)$. Векторное пространство $T_x(X) = (m_x/m_x^2)^*$ над k наз. касательным пространством к X в точке x, а $T_x^*(X) = m_x/m_x^2$ — кокасательным пространством. Число

$$\operatorname{em\,dim}_x X = \dim T_x(X)$$

наз. касательной размерностью, или размерностью вложения, в точке x (последнее наименование связано с тем, что $\operatorname{em\,dim} X$ является наименьшим из чисел n таких, что $(X, \mathcal{O})$ в окрестности точки x изоморфно локальной модели в пространстве k^n). Размерность $\dim_x X \leqslant \operatorname{em\,dim}_x X$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x — простая точка. Определяется также размерность

$$\operatorname{em\,dim} X = \sup_{x \in X} \operatorname{em\,dim}_x X.$$

Каждое аналитич. отображение А. п. $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ определяет линейное отображение $d\varphi_x : T_x(X) \to T_{\varphi_0(x)}(Y)$, к-рое наз. его дифференциалом в точке $x \in X$.

А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. приведенным, если его локальная модель в окрестности любой точки обладает тем свойством, что I состоит из всех ростков голоморфных функций, обращающихся в 0 на $X \subset U$. В случае алгебраически замкнутого поля k это равносильно тому, что слои $\mathcal{O}_x (x \in X)$ пучка $\mathcal{O}$ не содержат нильпотентных элементов. Всякое гладкое пространство является приведенным. Если $(X, \mathcal{O})$ приведено, то можно считать, что $\mathcal{O}$ состоит из ростков нек-рых непрерывных функций на X. Сечения пучка $\mathcal{O}$ на приведенном пространстве $(X, \mathcal{O})$ отождествляются с аналитич. функциями на X, т. е. с *аналитическими отображениями* $X \to k$. Для произвольного А. п. $(X, \mathcal{O})$ имеется естественный эпиморфизм пучков $\mathrm{red} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}}$ (где $(X, \tilde{\mathcal{O}}$ — приведенное А. п.), к-рый наз. приведением, или редукцией. Если $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ — сечение пучка $\mathcal{O}$, то можно говорить о значении сечения f в точке $x \in X$ (оно совпадает со значением аналитич. функции $\mathrm{red}\, f$ в точке x). Поэтому алгебру $\Gamma(X, \mathcal{O})$ и в неприведенном случае часто наз. алгеброй аналитических (голоморфных) функций на $(X, \mathcal{O})$. Пучки $\mathcal{O}$-модулей на А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. также аналитическими пучками.

Если $(X, \mathcal{O})$ — А. п., то каждое открытое $U \subset X$ определяет открытое подпространство $(U, \mathcal{O}|U)$. С другой стороны, можно ввести понятие аналитич. подпространства в $(X, \mathcal{O})$, к-рое обязательно замкнуто. Множество $Y \subset X$ наз. аналитическим, если в окрестности каждой точки $x \in X$ оно определяется конечным числом аналитич. уравнений. С таким множеством связан пучок идеалов $I_Y \subset \mathcal{O}$, состоящий из ростков всех аналитич. функций, равных 0 на Y. Обратно, каждый *аналитический пучок* идеалов конечного типа $I \subset \mathcal{O}$ определяет аналитич. множество $Y \subset X$. Если $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_I | Y$, получается А. п. $(Y, \mathcal{O}_Y)$, к-рое наз. аналитическим подпространством в $(X, \mathcal{O})$; имеется естественный морфизм $(1, \varphi_1) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O})$. Примером аналитич. подпространства в пространстве $(X, \mathcal{O})$ является его редукция.

Понятие А. п. возникло как обобщение понятия аналитич. многообразия. Такое обобщение подсказывала прежде всего алгебраич. геометрия, в к-рой уже давно систематически рассматривались пространства с особыми точками. Влияние идей алгебраич. геометрии непосредственно отразилось на окончательной формулировке понятия А. п. (для комплексных пространств в приведенном случае она была дана в [9], в общем случае — в [6]). В частности, каждая схема конечного типа над полным нормированным полем k естественным образом определяет А. п. над k. Это соответствие схем и А. п. над k для приведенных комплексных пространств изучалось в [9], где теория А. п. была названа «аналитической геометрией». В дальнейшем обе геометрии развивались параллельно, причем обмен идеями между ними существенно способствовал успехам, достигнутым в обеих этих областях.

В теории функций многих комплексных переменных пространства с особыми точками возникли первоначально как *римановы области*, являющиеся аналогом римановых поверхностей функций одного переменного. Используя их в качестве локальных моделей, Х. Бенке и К. Штейн (H. Behnke, K. Stein, 1951) определили нек-рый класс окольцованных пространств, к-рый, как показано в [5], совпадает с классом приведенных *нормальных аналитических пространств*. Локальная геометрия аналитич. множеств в $\mathbb{C}^n$ была изучена еще В. Рюккертом (W. Rückert) в 1932. Наконец, негладкие А. п. естественным образом возникают в теории автоморфных функций, как факторпространства аналитич. многообразий по собственным *дискретным группам* авто-

морфизмов. p-адические аналитич. множества появились впервые в работах Т. Сколема (T. Scolem, 1935) в связи с нек-рыми задачами теории чисел.

Теория А. п. имеет два аспекта — локальный и глобальный. Локальная аналитич. геометрия рассматривает ростки аналитич. множеств в пространстве k^n, снабженные пучками указанного выше вида. Основную роль здесь играет изучение свойств алгебры сходящихся степенных рядов от n переменных над k и ее факторов — так наз. аналитич. алгебр, начало к-рому положил еще К. Вейерштрасс (К. Weierstrass). К локальной теории относятся теория нормализации, изучение особых точек, локальных свойств аналитич. функций и отображений и др. Основные результаты в этой области получены в случае, когда поле k алгебраически замкнуто (см. [1], [4], [7]). Здесь появляется важное понятие *когерентного аналитического пучка*, играющее далее ведущую роль в глобальной теории. В частности, структурный пучок $\mathcal{O}$ А. п. $(X, \mathcal{O})$ и пучок идеалов I_Y любого аналитич. множества $Y \subset X$ оказываются (в случае алгебраически замкнутого k) когерентными. Хорошо изучен также случай $k=\mathbb{R}$.

Глобальная аналитич. геометрия изучает свойства аналитич. функций, отображений и других аналитич. объектов, заданных «в целом» на всем А. п., а также геометрич. свойства этих пространств. В процессе изучения комплексных А. п. были выделены их естественные классы. Это прежде всего класс *Штейна пространств*, к-рый можно грубо охарактеризовать как класс пространств, обладающих достаточно большим запасом глобальных голоморфных функций. Пространства Штейна являются наиболее естественным многомерным обобщением областей комплексной плоскости, рассматриваемых в классич. теории функций одного комплексного переменного. Этот класс пространств по существу совпадает с классом аналитич. подпространств в пространствах $\mathbb{C}^n$. Его алгебраич. аналогом является класс аффинных алгебраич. многообразий (см. *Аффинное многообразие*).

Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ голоморфная полнота равносильна тому, что D — *голоморфности область*, т. е. что в D существует голоморфная функция, не продолжающаяся в большую область. Граница области голоморфности обладает свойством псевдовыпуклости, т. е. ведет себя по отношению к локальным аналитич. подмногообразиям в $\mathbb{C}^n$ так же, как выпуклая поверхность по отношению к линейным вещественным подмногообразиям. Вопрос о справедливости обратного утверждения (см. *Леви проблема*) породил ряд исследований и привел к новой характеризации пространств Штейна.

В известном смысле противоположным является класс компактных комплексных пространств. Справедливо следующее обобщение классич. теоремы Лиувилля: функции, голоморфные на приведенном компактном пространстве, постоянны на каждой связной компоненте этого пространства и, следовательно, составляют конечномерное векторное пространство. Обобщением этой теоремы являются *конечности теоремы*, утверждающие конечномерность групп когомологий со значениями в когерентном аналитич. пучке. Рассматриваются также *голоморфно выпуклые комплексные пространства*, q-полные, q-псевдовыпуклые, q-псевдовогнутые пространства, являющиеся обобщением пространств Штейна и компактных пространств.

Перечисленные классы комплексных пространств имеют свои аналоги в теории голоморфных отображений. Напр., компактным пространствам соответствуют собственные голоморфные отображения, голоморфно полным — штейновы отображения и т. п. Для многих теорем найдены «относительные» аналоги, причем «абсолютный» вариант теоремы получается из «относительного» в случае, когда все пространство отображается

в точку. Соответствующим обобщением теорем конечности являются теоремы о когерентности прямых образов когерентных аналитич. пучков при голоморфных отображениях, первая и важнейшая из к-рых (для собственных отображений) была доказана Г. Грауэртом (см. [6]).

Большую роль в теории комплексных пространств играют голоморфные отображения специального вида — так наз. *модификации*, т. е. отображения $f: X \to Y$, индуцирующие изоморфизм открытых подпространств $X \setminus X_1 \to Y \setminus Y_1$, где $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ — нек-рые аналитические множества. При этом говорят, что Y получается из X путем «стягивания» подмножества X_1 на Y_1, а X из Y — путем «раздувания» подмножества Y_1 в X_1. Особый интерес представляют аналитич. подмножества, к-рые можно стянуть в точку (и с к л ю ч и т е л ь н ы е а н а л и т и ч е с к и е м н о ж е с т в а); их характеризация дана Г. Грауэртом (см. [6]). Естественной проблемой аналитич. геометрии является следующая проблема разрешения особенностей: можно ли «раздуть» подпространство А. п. так, чтобы все пространство стало гладким? Следует отметить, что модификации в алгебраич. геометрии изучались еще в 19 в., а в аналитич. геометрии были введены Х. Бенке (H. Behnke) и К. Штейном (K. Stein) в 1951 в связи с понятием римановой области.

Другим естественным объектом изучения, также тесно связанным с идеями алгебраич. геометрии, являются *мероморфные функции* на комплексных пространствах и их обобщения — *мероморфные отображения* (примером может служить «отображение», обратное к модификации). На приведенном компактном комплексном пространстве X мероморфные функции образуют поле степени трансцендентности $t(X) \leqslant \dim X$ [в гладком случае это впервые доказал К. Зигель (C. Siegel) в 1955]. Пространства X, для к-рых $t(X) = \dim X$, образуют класс, весьма близкий к классу проективных алгебраич. многообразий (см. *Алгебраическое пространство*); они могут быть охарактеризованы тем, что являются модификациями гладких проективных алгебраич. многообразий. Другим близким к алгебраич. многообразиям классом А. п. являются *кэлеровы многообразия*. Известен ряд критериев проективности компактного комплексного пространства (см. [3], [6], [13]). Большую роль в развитии этого раздела сыграли работы по автоморфным функциям многих комплексных переменных.

Теория *деформаций* аналитических структур изучает задачу классификации аналитич. объектов заданного типа (напр., всех комплексных структур на заданном вещественном аналитич. многообразии, всех аналитич. подпространств в заданном комплексном пространстве и т. п.), причем цель состоит в том, чтобы ввести на множестве этих объектов «естественную» структуру комплексного пространства, а также задачу описания всех аналитич. объектов, «достаточно близких» к заданному. В первом случае говорят о проблеме глобальных модулей, а во втором — о проблеме локальных модулей. Примером проблемы глобальных модулей является задача классификации всех комплексных структур на компактной римановой поверхности (см. *Модули* римановой поверхности).

Основным аппаратом глобальной аналитич. геометрии являются когерентные аналитические пучки и их когомологии. Первым успехом когомологического метода явилось решение А. Картаном (H. Cartan) аддитивной *Кузена проблемы* и проблемы продолжения голоморфной функции с замкнутого подмногообразия $Y \subset X$ для многообразия Штейна (X, O) [8]; как выяснилось, препятствия к решению этих задач лежат в группах когомологий $H^1(X, O)$ и $H^1(X, I_Y)$ соответственно.

Результаты глобальной теории, как правило, вначале доказывались для комплексных многообразий, а затем уже обобщались на случай комплексных пространств. Возникающие при этом обобщении трудности часто требовали разработки совершенно новых методов. На комплексном многообразии когомологии локально свободного аналитич. пучка можно выразить в терминах *дифференциальных форм* (теорема Дольбо — Серра), что дает возможность применять для их изучения методы теории эллиптич. дифференциальных уравнений и другие аналитич. методы. В негладком случае этот путь связан с большими трудностями, и часто приходится задавать классы когомологий другими способами, напр., с помощью коцепей Чеха в подходящем покрытии. Здесь оказалась полезной техника *банаховых аналитических пространств*, развитая в связи с проблемами модулей.

См. также *Вещественное аналитическое пространство*, *Жесткое аналитическое пространство*.

Лит.: [1] Abhyankar S., Local analytic geometry, N. Y.–L., 1964; [2] Bănică C., Stănăsilă O., Metode algebrice în theoria globală a spaţiilor complexe, Bucureşti, 1974; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Grauert H., Remmert R., Analytische Stellenalgebren, B., 1971; [5] их же, «Math. Ann.», 1958, Bd 136, S. 245—318; [6] Комплексные пространства, сб. переводов, М., 1965; [7] Narasimhan R., Introduction to the theory of analytic spaces, B., 1966; [8] Расслоенные пространства и их приложения, сб. переводов, М., 1958, с. 352—62; [9] Serre J.-P., «Ann. Inst. Fourier», 1956, t. 6, p. 1—42; [10] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1963; [11] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [12] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [13] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

АНАЛЛАГМАТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно *круговых преобразований* расширенной плоскости, т. е. евклидовой плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой.

А. Б. Иванов.

АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ — то же, что *двойное отношение*, или сложное отношение.

АНГЕРА ФУНКЦИЯ — функция

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi, \qquad (*)$$

удовлетворяющая неоднородному уравнению Бесселя:

$$z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)\,y = \frac{1}{\pi}(z-\nu)\sin\nu\pi.$$

Для целых $\nu = n$ $\mathbf{J}_\nu(z) = J_n(z)$ — *Бесселя функции* порядка n. Для нецелых ν справедливо разложение

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\left[1 - \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{z^6}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)(6^2-\nu^2)} + \cdots\right] +$$
$$+ \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2} - \frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{z^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)} - \cdots\right].$$

При $|z|\to\infty$ и $|\arg z| < \pi$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{J}_\nu(z) \approx J_\nu(z) + \frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[1 - \frac{1^2-\nu^2}{z^2} + \frac{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}{z^4} - \cdots\right] -$$
$$- \frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5} - \cdots\right].$$

А. ф. наз. по имени К. Т. Ангера [1], к-рый изучал функцию типа (*), но с верхним пределом интеграла 2π.

Лит.: [1] Anger C. T., Neueste Schriften der Naturf. Ges. in Danzig, 1855, Bd 5, S. 1—29; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949, гл. 10.

А. П. Прудников.

АНДРОНОВА — ВИТТА ТЕОРЕМА — модификация теоремы Ляпунова (об устойчивости периодич. решения

неавтономной системы дифференциальных уравнений) для автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{2}$$

— периодич. решение системы (1) и

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial x_j} \xi_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

— соответствующая система уравнений в вариациях, имеющая в рассматриваемом случае всегда один нулевой характеристич. показатель. Тогда справедлива А. · В. т.: если $n-1$ характеристич. показателей системы (3) имеют отрицательные действительные части, то периодич. решение (2) системы (1) устойчиво по Ляпунову (см. *Ляпунова характеристический показатель*, *Устойчивость по Ляпунову*).

А.— В. т. впервые была сформулирована А. А. Андроновым и А. А. Виттом в 1930 (см. [1], с. 45) и доказана ими же в 1933 ([1], с. 140).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, М., 1956; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965. *Е. А. Леонтович-Андронова.*

АНИЗОТРОПНАЯ ГРУППА над полем k — *линейная алгебраическая группа* G, определенная над полем k и имеющая нулевой k-ранг, т. е. не содержащая нетривиальных k-разложимых торов (см. *Разложимая группа*). Классич. примеры А. г.— ортогональные группы квадратичных форм, не представляющих нуля над k; алгебраич. группы, определяемые подгруппами элементов единичной нормы в алгебрах с делением над полем k. Если группа G полупроста, а характеристика k равна нулю, то группа G анизотропна над k тогда и только тогда, когда в G_k нет неединичных унипотентных элементов (для поля действительных чисел или поля p-адических чисел это эквивалентно компактности G_k). Классификация произвольных полупростых групп над полем k в существенной мере сведена к классификации А. г.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110 -43. *В. П. Платонов.*

АНИЗОТРОПНОЕ ЯДРО — подгруппа D полупростой *алгебраической группы* G, определенной над полем k, являющаяся коммутантом централизатора максимального k-разложимого тора $S \subset G$; $D = [Z_G(S), Z_G(S)]$. А. я. D — это определенная над k полупростая *анизотропная группа*; $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} G - \operatorname{rang}_k G$. Понятие А. я. играет важную роль в исследовании k-структуры группы G (см. [1]). Если $D = G$, т. е. $\operatorname{rang}_k G = 0$, то группа G является анизотропной над k; в случае $D = (e)$ группа G наз. квазиразложимой над k.

Лит.: [1] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—43; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43 -111; № 2, с. 3—31. *В. П. Платонов.*

АННУЛЯТОР левый множества X в R — множество $\mathfrak{Z}_l(X)$ всех таких элементов y из R, что $yX = 0$. Здесь R — кольцо, или полугруппа (или, вообще, группоид) с нулем. Аналогично определяется правый А. множества X в R: это есть множество

$$\mathfrak{Z}_r(X) = \{z \in R \mid Xz = 0\}.$$

Двусторонний А. множества X есть множество

$$\mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}_l(X) \cap \mathfrak{Z}_r(X).$$

В ассоциативном кольце (или полугруппе) R левый А. любого множества X будет левым идеалом, а если X является левым идеалом R, то $\mathfrak{Z}_l(X)$ — двусторонний идеал R; в неассоциативном случае эти утверждения, вообще говоря, не имеют места. *К. А. Жевлаков.*

АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА — игра двух участников с прямо противоположными интересами. Формально эта противоположность означает, что при переходе от одной *игровой ситуации* к другой увеличение

выигрыша одного из игроков влечет численно равное уменьшение выигрыша другого, так что во всех ситуациях сумма выигрышей игроков постоянна (можно считать, что эта сумма равна нулю, т. е. что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Поэтому А. и. наз. также **играми двух лиц с нулевой суммой**. Математич. понятие антагонистичности (равенство по величине и противоположность по знаку функции выигрыша) является формальным понятием, отличающимся от содержательного философского понятия. Если в А. и. в результате к.-л. переговоров и соглашений один из игроков смог бы увеличить свой выигрыш на нек-рую сумму, то его противник потерял бы такую же сумму. Следовательно, любые соглашения оказываются невыгодными для одного из игроков и потому невозможными. Реальными конфликтными ситуациями, для к-рых А. и. служат достаточно адекватными моделями, являются нек-рые (но не все) военные операции, спортивные и салонные игры, а также ситуации, связанные с принятием деловых решений в условиях конкуренции. Игры против природы и вообще принятие решений в условиях неопределенности (см. *Статистическая игра*) можно рассматривать как А. и. в предположении, что истинная закономерность природы, неизвестная игроку, приведет к действиям, наименее благоприятным для него.

Задание А. и. в нормальной форме (см. *Игр теория*) сводится к заданию множеств стратегий A и B соответственно игроков I и II и функции выигрыша H игрока I, определенной на множестве всех ситуаций $A \times B$ (функция выигрыша игрока II равна, по определению А. и., $-H$). Формально А. и. Γ записывается как тройка $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$. Процесс разыгрывания игры Γ состоит в выборе игроками нек-рых своих стратегий $a \in A$, $b \in B$, после чего игрок I получает от игрока II сумму $H(a, b)$. Это определение А. и. является достаточно общим, чтобы при должном описании множеств стратегий и функции выигрыша охватить все варианты А. и., включая *динамические игры*, *дифференциальные игры* и *позиционные игры*. Разумные действия игроков в А. и. осуществляются на основании принципа минимакса: если

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \qquad (1)$$

или

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \qquad (1')$$

то в игре Γ существуют оптимальные *стратегии* (ε-оптимальные стратегии) у обоих игроков. Общее значение обеих частей равенства (1′) наз. **значением игры** Γ. Однако равенство (1) или (1′) уже в самых простых случаях может не иметь места. Напр., в *матричной игре* с матрицей выигрышей

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

имеют место равенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i = 1.$$

Поэтому множества стратегий игроков расширяются до множества смешанных стратегий, состоящих в случайном выборе игроками своих первоначальных стратегий, наз. чистыми, а функция выигрыша определяется как математич. ожидание выигрыша в условиях применения смешанных стратегий. В приведенном примере оптимальными смешанными стратегиями игроков являются выборы игроками обеих своих стратегий с вероятностями $^1/_2$, а значение игры в смешанных стратегиях равно нулю. Если множества A и B конечны, то А. и. наз. матричной игрой; для нее всегда существуют значение игры и оптимальные смешанные стратегии у каждого из игроков. Если оба множества A и B бесконеч-

ны, то оптимальные (и даже ε-оптимальные) смешанные стратегии существуют не всегда (см. *Бесконечная игра*).

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [2] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т., Некоторые вопросы теории игр двух лиц, пер. с англ., М., 1974.

Е. Б. Яновская.

АНТИГОЛОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ, антианалитическая функция,— функция $f(z)=u+iv$ одного или нескольких комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, комплексно сопряженная к голоморфной функции $\overline{f(z)}=u-iv$ (см. *Аналитическая функция*).

Е. Д. Соломенцев.

АНТИДВИЖЕНИЕ — преобразование псевдоевклидова пространства, переводящее точки, отстоящие друг от друга на действительном расстоянии a, в точки, находящиеся на чисто мнимом расстоянии a. Движения и антидвижения псевдоевклидова пространства образуют группу.

А. Б. Иванов.

АНТИДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЯ на множестве — топология, задаваемая открытой *базой*, состоящей из пустого множества и всего пространства.

А. А. Мальцев.

АНТИДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром открыты лишь пустое множество и все пространство.

А. А. Мальцев.

АНТИИЗОМОРФИЗМ колец — отображение φ кольца A в кольцо B, являющееся *изоморфизмом* аддитивной группы кольца A на аддитивную группу кольца B, для к-рого $(ab)\varphi=b\varphi\cdot a\varphi\,(a,\ b\in A)$.

О. А. Иванова.

АНТИИЗОМОРФИЗМ частично упорядоченных множеств — биективное антитонное отображение частично упорядоченного множества A на частично упорядоченное множество B, т. е. такое взаимно однозначное отображение $\varphi: A\to B$, что из $a<b$ $(a,\ b\in A)$ следует $a\varphi>b\varphi$ в B.

О. А. Иванова.

АНТИКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА — линейная алгебра над полем, в к-рой выполняется тождество

$$x^2=0. \qquad (*)$$

Если характеристика поля отлична от 2, то тождество (*) равносильно тождеству $xy=-yx$. Всякая подалгебра свободной А. а. свободна. Важнейшими многообразиями А. а. являются *Ли алгебры*, *Мальцева алгебры* и *бинарно лиевы алгебры*.

Лит.: [1] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1954, т. 34 (76), с. 81—88.

А. Т. Гайнов.

АНТИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, конформное отображение второго рода,— непрерывное отображение $w=f(z)$ окрестности точки z_0 плоскости комплексного переменного z на окрестность точки w_0 плоскости комплексного переменного w, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через z_0, но меняющее ориентацию. Функция $f(z)$, осуществляющая А. о., является *антиголоморфной функцией*. См. также *Конформное отображение*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 2.

Е. Д. Соломенцев.

АНТИЛОГАРИФМ числа n — число N (обозначается $\operatorname{ant}\log_a n$), логарифм к-рого при данном основании a равен числу n. Таким образом,

$$\operatorname{ant}\log_a n=N \quad .a^n$$

или

$$\log_a N=n.$$

А. наз. также обращенными логарифмами.

АНТИНОМИЯ, парадокс,— ситуация, когда в теории доказываются два взаимно исключающие друг друга суждения, причем каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами.

В отличие от софизма, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, А., как правило, свидетельствует о более глубоких недостатках

рассматриваемой теории. Часто обнаружение А. приводит к существенной перестройке всей теории в целом, привлекает внимание к новым явлениям и, в конечном счете, служит стимулом дальнейших исследований. Эта особенность А. со времен античности привлекла к ним внимание философов. Можно отметить, напр., существенную роль, к-рую играет исследование А. в философии Канта. Уже в античной философии обсуждалось несколько А., известных под назв. а п о р и й. Приведем две знаменитые а п о р и и З е н о н а из Элеи (5 в. до н. э.).

«А х и л л е с и ч е р е п а х а». Апория описывает противоречивость нек-рых свойств движения и может быть формулирована следующим образом: пусть в пункте A находится бегун («Ахиллес»), а в пункте B на расстоянии 100 $м$ от A - черепаха. В один и тот же момент Ахиллес отправляется бегом из A в направлении к B, стремясь догнать черепаху, а черепаха устремляется из B прочь от A со скоростью, скажем, в сто раз меньшей скорости бегуна. Опыт свидетельствует, что в подобной ситуации Ахиллес довольно быстро догонит черепаху. С другой стороны, можно, как будто, установить, что Ахиллес никогда не догонит черепаху (и даже не достигнет пункта B). В самом деле, к моменту, когда Ахиллес достигнет середины C_1 маршрута AB, черепаха, пусть на небольшое расстояние, но все же удалится от B. Далее, Ахиллес добежит до середины C_2 отрезка C_1B, затем до середины C_3 отрезка C_2B и т. д. Все это время черепаха будет удаляться от B. Чтобы достигнуть B, Ахиллесу, таким образом, необходимо побывать в каждом из бесконечной последовательности пунктов C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ... Однако представляется верным, что невозможно за конечное время побывать в бесконечном количестве различных пунктов. Следовательно, Ахиллес никогда не достигнет пункта B и не догонит черепаху.

Парадоксы приведенного типа легко преодолеваются в современной математич. модели непрерывного движения. Как показывает подробный анализ, существенную роль в их преодолении играет выполнение в поле действительных чисел так наз. а к с и о м ы А р х и м е д а: для всяких действительных чисел a, $b>0$ найдется натуральное n такое, что $an>b$. И все же ситуация, отраженная в парадоксе, достаточно глубока. Можно оспаривать удобство или адекватность реальному движению общеупотребительной математич. модели. Для исследования концепции физических бесконечно малых и бесконечно больших величин неоднократно предпринимались попытки построения теории действительных чисел, в к-рой аксиома Архимеда не имеет места. Во всяком случае, теория неархимедовых упорядоченных полей является весьма содержательной частью современной алгебры. В *нестандартном анализе* решающую роль играет именно неархимедовское упорядоченное поле — нестандартная действительная прямая.

«П а р а д о к с к у ч и» состоит в следующем. Одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не могут образовать кучи песка, то и после прибавления еще одной песчинки они по-прежнему не могут образовать кучи. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи.

В современной терминологии к этому парадоксу можно сделать следующий комментарий: метод полной математич. индукции нельзя применять, как показывает парадокс, к объемно неопределенным понятиям, каковым является понятие «куча песчинок». В последнее время (2-я пол. 20 в.) объемно неопределенные понятия используются в основаниях математики для установления непротиворечивости классич. теорий, и свойства таких понятий исследуются точными методами. Методами математич. логики можно реализовать

ситуацию, когда математич. индукция неприменима в общей форме ко всему натуральному ряду, хотя весьма многие обычные свойства натуральных чисел при этом выполняются (так наз. нестандартная модель арифметики).

Но наибольший интерес для математики представляют, несомненно, А., связанные с необычными способами образования понятий. Это так наз. логические и семантические антиномии (см. также *Сколема парадокс*).

Приведем три примера логических А.

Антиномия Рассела (B. Russell, 1902) открыта независимо также Э. Цермело (E. Zermelo). Рассмотрим следующее свойство D множеств. Именно, будем считать, что для множества X выполняется свойство D тогда и только тогда, когда X не является элементом самого себя. Для подавляющего большинства конкретных множеств, употребляемых в математич. рассуждениях, свойство D выполняется. Так, ни множество всех натуральных чисел, ни множество всех действительных чисел не являются элементами самих себя. Рассмотрим теперь множество T такое, что его элементы суть в точности те множества X, для к-рых выполняется D. Попробуем теперь выяснить, что верно: $T \in T$ или $T \notin T$. Пусть $T \in T$, тогда, по определению, для T выполняется свойство D, то есть $T \notin T$. Таким образом, необходимо $T \notin T$. Но это вновь приводит к противоречию, т. к. ввиду $T \notin T$ для T выполняется D и, следовательно, $T \in T$.

Можно попытаться избежать парадокса, утверждая, что вышеприведенное рассуждение свидетельствует лишь о том, что указанного множества T не существует, т. е. что свойство D не определяет никакого множества. Но такой выход отнюдь не упрощает ситуацию. Действительно, с позиций «наивной» теории множеств естественно считать, что всякое точно описанное свойство B объектов определяет множество C тех объектов, к-рые удовлетворяют свойству B. Парадокс Рассела наносит сильный удар по этой естественной концепции. Приходится согласиться, что нек-рые на первый взгляд весьма простые свойства, вроде описанного выше свойства D, следует считать не точно описанными или же считать, что имеются точно описанные свойства, к-рые не определяют множеств. Такая точка зрения, в свою очередь, выдвигает ряд трудных проблем. Какие свойства считать точно описанными, а какие нет? Какие свойства определяют множества, а какие нет? Может быть, и те свойства, к-рые широко употребляются в практике теоретико-множественной математики, также ведут к парадоксам и должны быть забракованы? Можно ли описать по крайней мере нек-рую надежную область, в к-рой можно считать себя достаточно застрахованным от парадоксов и к-рая все же достаточно обширна, чтобы включать в себя привычную практику математики?

Проблему точного описания свойств можно считать удовлетворительно решенной с созданием точных логико-математич. языков. Что же касается описания критериев для выделения класса свойств, определяющих множества, то эта проблема весьма далека от своего разрешения. Более того, современные результаты аксиоматич. теории множеств свидетельствуют, по-видимому, в пользу того, что окончательного решения этой проблемы не существует. Антиномия Рассела произвела очень большое впечатление на современников именно потому, что эта А. возникает на самой начальной стадии изучения теории множеств. Тем не менее имеются различные пути избежания парадоксов, к-рые, хотя их и нельзя признать окончательными или наиболее естественными, обеспечивают большие практич. удобства и проливают свет как на природу парадоксов, так и на логич. связи других теоретико-множест-

венных принципов. Особенно успешным оказался аксиоматич. подход к основаниям теории множеств (см. *Аксиоматическая теория множеств*). Так, формальная аксиоматич. система Цермело — Френкеля является в настоящее время (70-е гг. 20 в.) самой употребительной аксиоматич. теорией, наиболее адекватно отражающей «непарадоксальную» часть классич. теоретико-множественной практики.

Антиномия «деревенский парикмахер». Это — вариант парадокса Рассела, сформулированный применительно к житейской ситуации. (Несколько иная форма этой А. известна под назв. парадокса Гонсета.) Рассмотрим деревенского парикмахера, к-рый бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, к-рые не бреются сами. Бреет ли он сам себя? Рассуждая, как в антиномии Рассела, мы установим, что он бреет себя и не бреет себя. Можно легко выйти из затруднения, заметив, что парадокс свидетельствует только о том, что такого парикмахера не может существовать. Рассматриваемая А. показывает, что условие, к-рому должен удовлетворять деревенский парикмахер, является внутренне противоречивым и, следовательно, невыполнимым. Правда, такая точка зрения естественно вызывает к жизни проблему описания критериев для внутренне непротиворечивых свойств, однако, в отличие от ситуации в антиномии Рассела, здесь эта проблема отнюдь не является столь актуальной. Она относится к житейской ситуации, а такого рода ситуации и вообще далеко не всегда бывают точно сформулированными или надежно установленными. Кроме того, внутренняя непротиворечивость — вовсе не единственный и, по-видимому, не главный критерий приемлемости житейского суждения. Иное дело математич. рассуждение, от к-рого мы вправе ожидать значительно большей окончательности и убедительности. Внутренняя непротиворечивость — важнейшая сторона такого рассуждения.

Антиномия Кантора (G. Cantor, 1899). Пусть M — множество всех множеств и $P(M)$ — множество всех его подмножеств. Из определения M очевидно, что $P(M)$ включено в M. С другой стороны, по известной теореме Кантора, $P(M)$ имеет мощность, большую, чем M, и поэтому $P(M)$ не может быть подмножеством M. Из антиномии Кантора можно сделать примерно те же выводы, что и из антиномии Рассела. В частности, можно считать, что антиномия Кантора представляет собой доказательство несуществования множества M всех множеств. Интересно в связи с этим отметить, что существуют аксиоматич. системы теории множеств, напр. известная система New Foundations У. Куайна (W. v. Quine), в к-рых существование множества M можно установить. Парадокс Кантора в New Foundations избегается благодаря тому, что в этой системе теорему Кантора о мощности удается доказать лишь в нек-рой специальной форме, недостаточной для проведения парадокса. Вообще, для проведения антиномии Кантора нужны существенно более сложные понятия теории множеств, чем для проведения антиномии Рассела (такие, как понятие подмножества, идеи взаимно однозначного соответствия и т. п.).

Сходен с антиномией Кантора так наз. парадокс Бурали — Форти, в котором рассматривается класс всех ординальных чисел. Порядковый тип этого класса должен быть больше всех ординалов, содержащихся в нем.

Значительный интерес представляют также А. несколько иного вида, наз. семантическими. В отличие от логических, в состав семантич. А. входят такие семантич. термины, как «истина», «ложь», «обозначает», «определяет» и другие. Впрочем, это различие, предложенное Ф. Рамсеем (F. Ramsey, 1926), является в значительной степени условным. Многие семантич. А.

могут быть сформулированы в логич. форме, и наоборот. По наблюдению Ф. Рамсея, семантич. А. не могут быть проведены в обычных логико-математич. теориях уже потому, что эти теории не содержат семантич. понятий, нужных для формулировки семантич. А. В этом смысле семантич. А. «безопаснее» логических. Но здесь следует иметь в виду также, что в настоящее время исследуются и теории, содержащие понятия, нужные для формулировки нек-рых семантич. парадоксов, в особенности парадоксов Ришара (но в к-рых парадоксы все же избегаются специальными средствами). Приведем два известных семантич. парадокса.

Антиномия Ришара (J. Richard) в форме Берри (G. D. W. Berry, 1906). Рассмотрим множество натуральных чисел, каждое из к-рых может быть однозначно определено с помощью осмысленного текста, содержащего не более тысячи слогов. Очевидно, таких чисел конечное количество, т. к. совокупность всех текстов с не более чем тысячью слогами конечна. Рассмотрим наименьшее натуральное число, не входящее в упомянутое выше множество.

Приведенный выше абзац представляет собой осмысленный текст, объемом не более чем в тысячу слогов, однозначно определяющий нек-рое натуральное число, к-рое по самому своему определению не может быть охарактеризовано такого рода текстом. Конечно, парадокса можно избежать, если объявить указанный текст неосмысленным (или не определяющим натурального числа), но тогда, как и в ранее рассмотренных случаях, естественно поставить трудные проблемы, касающиеся описания критериев осмысленности текстов, и т. п.

Антиномия Эвбулида (4 в. до н. э.). Допустим, что нек-рый субъект произносит следующую фразу: «Высказывание, к-рое я сейчас произношу, ложно». Ложно само это высказывание или нет? Из допущения, что оно истинно, и его смысла следует, что оно должно быть ложно. С другой стороны, из его ложности немедленно следует, что оно не может быть ложно. Известно много вариантов этого парадокса — парадокс лжеца, парадокс Эпименида и др. Идея этого парадокса лежит в основе доказательства знаменитой *Гёделя теоремы о неполноте* формальных аксиоматич. теорий.

В целом анализ парадоксов способствовал радикальному пересмотру взглядов на проблему обоснования математики и развитию многих современных идей и методов математич. логики.

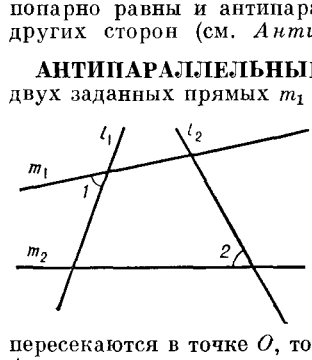
Лит.: [1] Френкель А., Бар-Хиллел И., Оснований теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

АНТИПАРАЛЛЕЛОГРАММ — плоский четырехугольник, у к-рого все противоположные стороны попарно равны и антипараллельны относительно двух других сторон (см. *Антипараллельные прямые*).

А. Б. Иванов.

АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ относительно двух заданных прямых m_1 и m_2 — прямые l_1 и l_2, пересекающие m_1 и m_2 так, что $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис.). Если l_1 и l_2 — А. п. относительно m_1 и m_2, то m_1 и m_2 — А. п. относительно l_1 и l_2. Во всяком вписанном в окружность четырехугольнике противоположные стороны — А. п. относительно двух других сторон. Если прямые m_1 и m_2 пересекаются в точке O, то говорят также, что l_1 и l_2 — А. п. относительно угла m_1Om_2. Если же прямые m_1 и m_2 совпадают, то l_1 и l_2 наз. А. п. относительно одной прямой.



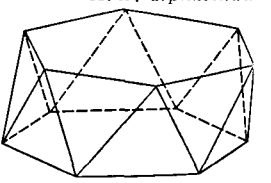
А. Б. Иванов.

АНТИПОДЫ — диаметрально противоположные точки сферы. Имеются следующие теоремы Борсука [1] об А. 1) При любом отображении сферы S^n в евклидово пространство E^n найдутся А. с общим образом. 2) Каждое отображение сферы S^n в себя, при к-ром образы А. являются А., есть существенное отображение.

Лит.: [1] Borsuk K., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 177–90.

А. В. Чернавский.

АНТИПРИЗМА — *полуправильный многогранник*, у которого две параллельные грани равные между собой правильные n-угольники, а остальные $2n$ граней — правильные треугольники (см. рис.).



А. Б. Иванов.

АНТИСИММЕТРИЧНЫЙ ТЕНЗОР — см. *Тензорное исчисление.*

АНТИТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ частично упорядоченных множеств — отображение φ частично упорядоченного множества A в частично упорядоченное множество B такое, что из $a \leqslant b$ ($a, b \in A$) следует, $a\varphi \geqslant b\varphi$. Дуальное понятие к А. о.— *изотонное отображение.*

О. А. Иванова.

АНТЬЕ, целая часть (действительного) числа x, - наибольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение $[x]$ или $E(x)$. Из определения А. следует, что $[x] \leqslant x < [x]+1$. Если x — целое, то $[x]=x$. Примеры: $[3, 6]$ -3, $\left[\frac{1}{3}\right]-0$, $\left[-4\frac{1}{3}\right]=-5$. При помощи А. получают, напр., разложение на простые множители числа $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$, а именно,

$$n! = \prod_{p \leqslant n} p^{\alpha(p)},$$

где произведение составлено из всех простых чисел p, не превосходящих n, а

$$\alpha(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots .$$

Функция $y=[x]$ переменного x есть кусочно непрерывная (ступенчатая) функция со скачками в целых точках. Посредством А. определяется дробная часть числа x, обозначаемая символом $\{x\}$ и равная разности

$$x-[x]; \quad 0 \leqslant \{x\} < 1.$$

Функция $y=\{x\}$ — периодическая кусочно непрерывная функция.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, М., 8 изд., 1972.

Б. М. Бредихин.

АНЬЕЗИ ЛОКОН, версиера,— плоская кривая, уравнение к-рой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$y(a^2+x^2)=a^3, \; a>0.$$

Если a есть диаметр окружности с центром в точке $(0, a/2)$, OA — секущая, CB и AM параллельны оси Ox, а BM параллельна оси Oy (см. рис.), то А. л. есть геометрич. место точек M. Если центр образующей окружности и касательная CB смещены по оси Oy, то кривая, получаемая аналогичным построением, наз. агвинеей Ньютона и является обобщением А. л. Названа по имени М. Аньези (M. Agnesi), изучавшей эту кривую (1748).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов.

АПЕРИОДИЧЕСКИЙ АВТОМОРФИЗМ пространства с мерой — такой автоморфизм T пространства с мерой, периодич. точки к-рого (т. е. точки

x, для к-рых $T^k x = x$ при нек-ром $k > 0$) образуют множество меры нуль. Введение специального названия для таких преобразований вызвано тем, что в нек-рых теоремах *эргодической теории* автоморфизмы, имеющие «слишком много» периодич. точек, играют роль тривиальных исключений (см. [1]).

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, № 2 (30), с. 57—128. *Д. В. Аносов.*

АПОЛЛОНИЯ ЗАДАЧА — задача о построении на плоскости окружности, касающейся трех заданных окружностей. Решается методом *инверсий*. Окружность, являющаяся решением А. з., наз. окружностью Аполлония. А. з. названа по имени Аполлония Пергского (3 в. до *н. э.*).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

АПОЛЛОНИЯ ТЕОРЕМА — 1) Сумма квадратов длин сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная сумме квадратов длин его полуосей. 2) Площадь описанного вокруг эллипса параллелограмма, стороны к-рого имеют сопряженные направления, постоянна и равна произведению длин его диаметров. *А. Б. Иванов.*

АПОЛЯРНЫЕ СЕТИ — две сети, заданные в одной и той же области G двумерного многообразия и обладающие тем свойством, что в каждой точке $x \in G$ касательные направления одной из этих сетей гармонически разделяют касательные направления другой. Например, на поверхности в евклидовом пространстве *асимптотическая сеть* аполярна *кривизны линий сети*. *В. Т. Базылев.*

АПОСТЕРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (вероятность a posteriori) какого-либо события — условная вероятность события при нек-ром условии, рассматриваемая в противоположность его безусловной или *априорной вероятности*. Никакого принципиального различия между терминами «условная» и «апостериорная» нет. В применениях первый термин используют, когда самое условие носит предположительный характер и в ходе опытов непосредственно не наблюдается. Второй термин используют, когда желают подчеркнуть, что условие, о к-ром идет речь, фактически наблюдено. А. в. связана с априорной вероятностью *Бейеса формулой*. *Ю. В. Прохоров.*

АПОСТЕРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — условное распределение вероятностей какой-либо случайной величины при нек-ром условии, рассматриваемое в противоположность ее безусловному или *априорному распределению*.

Если Θ — случайный параметр с априорной плотностью $p(\theta)$, X — случайный результат наблюдений и $p(x|\theta)$ — условная плотность X при условии $\Theta = \theta$, то А. р. Θ при данном X согласно *Бейеса формуле* имеет плотность

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)\,p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta)\,p(x|\theta)\,d\theta}.$$

Если $T(x)$ — *достаточная статистика* для семейства распределений с плотностями $p(x|\theta)$, то А. р. зависит не от самого x, а от $T(x)$. Асимптотич. поведение при $n \to \infty$ А. р. $p(\theta|x_1, \ldots, x_n)$, где x_j суть результаты независимых наблюдений с плотностью $p(x, \theta_0)$, оказывается «почти независящим» от априорного распределения θ.

О роли А. р. в теории статистич. решений см. *Бейесовский подход*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946. *Ю. В. Прохоров.*

АПОФЕМА правильного многоугольника — отрезок (а также его длина) перпендикуляра, опущенного из центра правильного многоугольника

на любую из его сторон. А. правильного n-угольника равна радиусу r_n вписанной в него окружности и связана с его стороной a_n и площадью S_n соотношениями

$$a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad S_n = nr_n^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

А. правильной пирамиды — высота ее боковой грани.

АППЕЛЯ МНОГОЧЛЕНЫ, Аппеля полиномы,— класс многочленов над полем комплексных чисел, содержащий многие классич. системы многочленов. А. м. введены П. Аппелем [1]. Последовательность А. м. $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется формальным равенством

$$A(t)\, e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\, t^n, \qquad (1)$$

в к-ром $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ — формальный степенной ряд с комплексными коэффициентами a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем $a_0 \neq 0$. В явном виде А. м. $A_n(z)$ выражаются через числа a_k следующим образом:

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} z^{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Условие $a_0 \neq 0$ равносильно тому, что степень многочлена $A_n(z)$ равна n.

Имеется другое, эквивалентное определение А. м. Пусть

$$A(D) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k, \quad D = \frac{d}{dz}, \ a_0 \neq 0,$$

— дифференциальный оператор, вообще говоря, бесконечного порядка, определенный над алгеброй P комплексных многочленов переменного $z = x + iy$. Тогда

$$A_n(z) = \frac{A(D)\, z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то есть $A_n(z)$ представляет собой образ функции $z^n/n!$ при отображении $p = A(D)q$, $p, q \in P$.

Класс $A^{(1)}$ А. м. определяется как совокупность всевозможных систем многочленов $\{A_n(z)\}$ с производящими функциями вида (1). Принадлежность системы $\{P_n(z)\}$ многочленов (степени n) классу $A^{(1)}$ равносильна выполнению соотношений

$$P_n'(z) = P_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Иногда при определении А. м. класса $A^{(1)}$ пользуются соотношениями

$$A(t)\, e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}_n(z)}{n!} t^n,$$

$$\hat{A}_n'(z) = n\hat{A}_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

к-рые, с точностью до нормировки, эквивалентны приведенным выше.

А. м. класса $A^{(1)}$ используются при решении уравнений вида

$$A(D)y(z) = f(z); \qquad (2)$$

формальное равенство $y(z) = f(z)/A(D)$ при

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{k!}$$

позволяет записать решение (2) в виде

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A_k^*(z),$$

где $\{A_k^*(z)\}$ — А. м. с производящей функцией $e^{zt}/A(t)$. В связи с этим особый интерес представляют разложения аналитич. функций в ряды по А. м. Кроме того, А. м. находят применение в различных задачах, относящихся к функциональным уравнениям, в том числе к дифференциальным уравнениям, отличным от (2), в вопросах интерполирования, теории приближения, в методах суммирования и др. (см., напр., [1] [6]). С более общей позиции теория А. м. класса $A^{(1)}$ (и нек-рые приложения) изложена в [6].

А. м. класса $A^{(1)}$ содержат в качестве частных случаев целый ряд классических последовательностей многочленов. Примерами, с точностью до нормировки, могут служить *Бернулли многочлены*

$$\frac{te^{zt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(z)}{n!}t^n,$$

Эрмита многочлены

$$e^{zt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}t^n,$$

Лагерра многочлены

$$(1-t)^{\alpha}e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}L^{(\alpha-n)}(z)\,t^n$$

и т. д. Многочисленные примеры А. м. имеются в [2] и [3].

Существуют различные о б о б щ е н и я А. м., к-рые также носят назв. с и с т е м А. м. Сюда относятся А. м. с производящими функциями вида

$$\left.\begin{aligned}A(w)\,e^{zU(w)}&=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)\,w^n,\\ U(w)&=\sum_{k=1}^{\infty}c_kw^k,\qquad c_1\neq 0,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

а также А. м. с производящими функциями более общего характера:

$$A(w)\,\psi(zU(w))=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z)\,w^n\tag{4}$$

(см., напр., [2] и [3]). Если $w(u)$ — функция, обратная функции $u(w)$, то принадлежность системы многочленов $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ к классу последовательностей А. м. с производящей функцией вида (3) равносильна выполнению соотношений

$$w(D)\,p_n(z)=p_{n-1}(z),\quad n=1,2,\ldots\left(D=\frac{d}{dz}\right).$$

Имеется всего пять ортогональных с весом систем последовательностей А. м. на действительной оси, с производящими функциями вида (3); в том числе среди А. м. с производящими функциями вида (1) лишь одна система многочленов Эрмита является ортогональной с весом e^{-x^2} на действительной оси (см. [7]).

О разложениях в ряды по А. м. с производящими функциями вида (3) и (4), а также о связи этих А. м. с различными функциональными уравнениями см. [2], [7], [8].

К л а с с $A^{(p)}$, $p\geqslant 1$ — целое, А. м. определяется следующим образом: это есть множество всех систем многочленов $\{A_n(z)\}$, для каждой из к-рых имеет место (формальное) представление

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(t)\,e^{z\omega_p^kt}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z)\,t^n,$$

где $\omega_p=e^{2\pi i/p}$, а $A_k(t)$, $k=0,1,2,\ldots,p-1$ — формальные степенные ряды, свободные члены к-рых таковы, что степень многочлена $A_n(z)$ равна n. Принадлежность последовательности $\{Q_n(z)\}$ многочленов степени n классу $A^{(p)}$ равносильна выполнению соотношений

$$D^pQ_n(z)=Q_n^{(p)}(z)=Q_{n-p}(z),\quad n=p,\ p+1,\ \ldots.$$

Вопросы разложения аналитич. функций в ряды по А. м. класса $A^{(p)}$ исследованы в [9]. Они тесно примыкают к задаче о нахождении аналитич. решений функциональных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(D)\,y(z\omega_p^k)=f(z).$$

А. м. о т д в у х п е р е м е н н ы х введены П. Аппелем [10]. Они определяются равенствами

$$J_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)=\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\times$$

$$\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}],$$

$$m,n=0,1,2,\ldots,$$

в к-рых полагают $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ для $n\geqslant 1$; эти А. м. представляют собой аналог *Якоби многочленов*. А. м. $J_{m,n}$ ортогональны с весом

$$t(x,y)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$$

любому многочлену от двух переменных, степени, меньшей $m+n$, по области T, где T — треугольник: $x>0$, $y>0$, $x+y<1$; однако они не образуют системы функций, ортогональных с весом $t(x,y)$ в области T (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Appell P., «Ann. sci. Ecole norm. supér.», 1880, v. 9, p. 119—44; [2] Boas R. P., Buck R. C., Polynomial expansions of analytic functions, B., 1958; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., т. 1—3, М., 1965—67; [4] Wood B., «SIAM J. Appl. Math.», 1969, v. 17, № 4, p. 790—801; [5] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [6] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965; [7] Meixner J., «J. London Math. Soc.», 1934, v. 9, pt 1, p. 6—13; [8] Anderson Ch. A., «J. Math. Analysis and Appl.», 1967, v. 19, № 3, p. 475—91; [9] Казьмин Ю. А., «Матем. заметки», 1969, т. 5, в. 5, с. 509—520; 1969, т. 6, в. 2, с. 161—72; [10] Appell P., «Arch. Math. Phys.», 1881, Bd 66, S. 238—45.

Ю. А. Казьмин.

АППЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование уравнений плоского движения материальной точки, находящейся под действием силы, зависящей лишь от координат x, y точки. А. п. состоит из гомографического преобразования координат x, y в координаты x_1, y_1:

$$x_1=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\quad y_1=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$$

и введения вместо времени t времени t_1 по формуле

$$kdt_1=\frac{dt}{(a''x+b''y+c'')^2}.$$

Благодаря А. п. движению точки (x, y) под влиянием силы $F(x, y)$ будет отвечать движение точки (x_1, y_1), находящейся под действием нек-рой силы $F_1(x_1, y_1)$, зависящей лишь от координат x_1, y_1. Преобразование уравнений движения точки x, y с помощью формул общего вида:

$$x_1=\varphi(x,y),\quad y_1=\psi(x,y),\quad dt_1=\lambda(x,y)dt, \qquad (*)$$

приводит к уравнениям движения точки (x_1, y_1) под действием силы, зависящей лишь от координат (x_1, y_1), только в том случае, если преобразование (*) — гомографическое. А. п. используется при решении Бертрана задачи об определении тех сил, при к-рых траектории движения материальной точки являются коническими сечениями. А. п. названо по имени П. Аппеля.

Лит.: [1] Appell P., «Amer. J. Math.», 1890, v. 12, p. 103—114; [2] его же, там же, 1891, v. 13, p. 153—58.

Л. Н. Сретенский.

АППЕЛЯ УРАВНЕНИЯ — обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движения как голономных, так и не голономных систем, установленные П. Аппелем [1]. Иногда А. у. наз. уравнениями Гиббса — Аппеля, т. к. для голономных систем ранее их установил Дж. У. Гиббс [3]. А. у. в независимых лагранжевых координатах q_s $(s=1, \ldots, n)$ имеют вид уравнений 2-го порядка

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i}=Q_i^*,\quad i=1,\ \ldots,\ k\leqslant n. \qquad (1)$$

Здесь

$$S=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu w_\nu^2$$

(m_ν и w_ν — массы и ускорения N точек системы) — энергия ускорений системы, выраженная таким образом, чтобы она содержала вторые производные только от координат q_i, $i=1, \ldots, k$, вариации к-рых рассматриваются как независимые, Q_i^* — обобщенные силы, соответствующие координатам q_i, получаемые как коэффициенты при независимых вариациях δq_i в выражении

суммы элементарных работ заданных активных сил F_ν на возможных перемещениях δr_ν:

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \cdot \delta r_\nu = \sum_{i=1}^{k} Q_i^* \delta q_i.$$

При вычислении S и Q_i^* зависимые $\dot{q}_j(\delta q_j)$ $(j=k+1, \ldots, n)$ выражаются через независимые скорости (вариации) разрешением n k уравнений неголономных связей (см. *Неголономные системы*), выраженных в обобщенных координатах q_s (и уравнений для δq_s, получаемых из последних). Дифференцированием по времени t найденных выражений для $\dot{q}_j$ получаются выражения $\ddot{q}_j$ через $\ddot{q}_i$.

Уравнения (1) совместно с n k уравнениями неинтегрируемых связей образуют систему (порядка $n+k$) n дифференциальных уравнений для n неизвестных q_s.

В случае голономной системы $k=n$, все скорости $\dot{q}_s$ и вариации δq_s независимы, $Q_i^*=Q_i$ и уравнения (1) представляют собой иную запись *Лагранжа уравнений* 2-го рода.

А. у. в квазикоординатах π_r, где

$$\dot{\pi}_r = \sum_{i=1}^{n} a_{r_i} \dot{q}_i, \quad r=1, \ldots, k, \tag{2}$$

имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_r} = \Pi_r, \quad r=1, \ldots, k \leqslant n. \tag{3}$$

Здесь S — энергия ускорений, выраженная через вторые производные $\ddot{\pi}_r$ по времени от квазикоординат, Π_r — обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам. Уравнения (3) совместно с $n-k$ уравнениями неинтегрируемых связей и k уравнениями (2) образуют систему $n+k$ дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно такого же числа неизвестных q_s, $s=1, \ldots, n$, и $\dot{\pi}_r$, $r=1, \ldots, k$.

А. у. являются наиболее общими уравнениями движения механич. систем.

Лит.: [1] Appell P. E., «Comp. Rend.», 1899, t. 129; [2] его же, «J. reine und angew. Math.», 1900, Bd 122, S. 205—08; [3] Gibbs J. W., «Amer. J. Math.», 1879, v. 2, p. 49—64.

В. В. Румянцев.

АППЛИКАТА — одна из декартовых *координат* точки в трехмерном пространстве.

АППРОКСИМАТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ — обобщение понятия дифференцируемости с заменой обычного предела *аппроксимативным пределом*. Действительная функция $f(x)$ действительного переменного наз. аппроксимативно дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} \frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

При этом величина $A(x-x_0)$ наз. аппроксимативным дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Функция $f(x)$ аппроксимативно дифференцируема в точке x_0 в том и только том случае, если она имеет в этой точке *аппроксимативную производную* $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)=A$. Аналогично определяется А. д. для действительных функций n действительных переменных. Напр., в случае $n=2$, $f(x, y)$ наз. аппроксимативно дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \operatorname{ap} \frac{f(x, y)-f(x_0, y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\rho} = 0,$$

где A и B — нек-рые числа, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Выражение $A(x-x_0)+B(y-y_0)$ наз. аппроксимативным дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Теорема Степанова: действительная функция $f(x, y)$, измеримая на множестве E, аппроксиматив-

но дифференцируема почти всюду на E в том и только том случае, если почти всюду на E она имеет конечные аппроксимативные частные производные по x и по y; эти частные производные почти всюду на E совпадают соответственно с коэффициентами A и B аппроксимативного дифференциала.

Понятие А. д. распространяется также на вектор-функции одного или нескольких действительных переменных.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНАЯ КОМПАКТНОСТЬ — свойство множества M в метрич. пространстве X, состоящее в том, что для любого $x \in X$ любая минимизирующая последовательность $y_n \in M$ (т. е. последовательность, обладающая свойством $\rho(x, y_n) \to \rho(x, M)$) имеет предельную точку $y \in M$. А. к. данного множества обеспечивает существование элемента наилучшего приближения для любого $x \in X$. Понятие А. к. введено (см. [1]) в связи с изучением *чебышевских множеств* в банаховом пространстве, и это позволило описать выпуклые чебышевские множества в некоторых пространствах. Именно, пусть X — равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство. Для того чтобы чебышевское множество $M \subset X$ было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было аппроксимативно компактным. Отсюда следует, в частности, что множество рациональных дробей с фиксированной степенью числителя и знаменателя не является в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ чебышевским множеством, если степень знаменателя не меньше единицы [1].

О последующих исследованиях в этом направлении см. [2].

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 3, с. 522—4; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132.

Ю. Н. Субботин.

АППРОКСИМАТИВНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — обобщение понятия непрерывности с заменой обычного предела на *аппроксимативный предел*. Функция $f(x)$ наз. аппроксимативно непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} f(x) = f(x_0).$$

В простейшем случае $f(x)$ — действительная функция точки n-мерного евклидова пространства (в более общем случае — вектор-функция). Справедливы следующие теоремы. 1) Действительная функция $f(x)$ измерима по Лебегу на множестве E в том и только том случае, если она аппроксимативно непрерывна почти всюду на E (теорема Данжуа Степанова). 2) Для любой ограниченной измеримой по Лебегу функции $f(x)$ в каждой точке x_0 ее А. н.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\mu(R)} \int_R f(x)\, d\mu = f(x_0),$$

где μ есть n-мерная мера Лебега, R — содержащий точку x_0 n-мерный невырожденный сегмент, ρ — его диаметр.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной, в к-ром обычный предел заменяется *аппроксимативным пределом*. Если для функции $f(x)$ действительного переменного x существует

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он наз. аппроксимативной производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$. В простейшем случае $f(x)$ есть действительная функция (в более общем случае — вектор-функция). А. п. может быть как конечной, так и бесконечной. Для

конечной А. п. справедливы классич. правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций; теорема о дифференцировании сложной функции, вообще говоря, не имеет места. Понятие А. п. введено А. Я. Хинчиным в 1916.

По аналогии с обычными *производными числами* определяются **аппроксимативные производные числа**: $\Lambda_d(x_0)$ — верхнее правое, $\lambda_d(x_0)$ — нижнее правое, $\Lambda_g(x_0)$ — верхнее левое, $\lambda_g(x_0)$ — нижнее левое; напр.,

$$\Lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}} \operatorname{ap} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Справедливы следующие **теоремы Данжуа — Хинчина**. Если действительная функция $f(x)$ конечна и измерима по Лебегу на множестве E, то почти в каждой точке этого множества либо $f(x)$ имеет конечную А. п., либо

$$\Lambda_d(x) = \Lambda_g(x) = +\infty, \quad \lambda_d(x) - \lambda_g(x) = -\infty.$$

Если

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

— интеграл в смысле Данжуа — Хинчина, то $F'_{\mathrm{ap}}(x) = f(x)$ почти всюду в рассматриваемом промежутке (при этом обычная производная может не существовать на множестве положительной меры). Эта теорема объясняет роль А. п. в теории интеграла.

Существуют непрерывные функции, не имеющие ни обычной, ни А. п. во всех точках произвольно заданного промежутка.

Для функций нескольких действительных переменных рассматриваются аппроксимативные частные производные.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, обладающее свойством *аппроксимативной компактности*. Метрич. проекция на любое чебышевское А. к. м. непрерывна. Примерами А. к. м. могут служить ограниченно компактные множества, в пространствах $L^p(0<p<\infty)$ — выпуклые замкнутые множества, а также множество рациональных дробей с фиксированными степенями числителя и знаменателя. В теории приближений и теории некорректных задач часто используются пространства, в к-рых каждое замкнутое множество аппроксимативно компактно.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 3, с. 522—24; [2] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, № 6, с. 3—66.

Ю. Н. Субботин.

АППРОКСИМАТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ по множеству E, для к-рого x_0 является *плотности точкой*. В простейшем случае $f(x)$ есть действительная функция точки n-мерного евклидова пространства (в более общем случае — вектор-функция). А. п. обозначается

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} f(x).$$

Из существования А. п., вообще говоря, не следует существование обычного предела. Для А. п. имеют место элементарные свойства пределов — единственность, теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Пусть x_0 — точка плотности области определения действительной функции $f(x)$. Если при этом существует обычный предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$, то существует и равный ему А. п. **Верхним** А. п. функции $f(x)$ в точке x_0 наз. нижняя грань множества чисел y (причем $y = +\infty$ не исключается), для к-рых множество $\{x: f(x) > y\}$ имеет x_0 своей точкой разряжения. Аналогично, **нижним**

А. п. функции $f(x)$ в точке x_0 наз. верхняя грань множества тех y ($y=-\infty$ не исключается), для к-рых x_0 служит точкой разряжения множества $\{x: f(x)<y\}$. Эти А. п. обозначаются соответственно

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\ \mathrm{ap}\, f(x) \text{ и } \underline{\lim_{x\to x_0}}\ \mathrm{ap}\, f(x).$$

А. п. существует в том и только том случае, если верхний и нижний А. п. равны; их общее значение совпадает с А. п.

В случае действительного x употребляются также односторонние (правый и левый) верхние и нижние А. п. (при этом требуется, чтобы x_0 была соответственно правосторонней или левосторонней точкой плотности области определения функции). Для правого верхнего А. п. употребляют запись

$$\overline{\lim_{x\to x_0,\, x>x_0}}\ \mathrm{ap}\quad f(x),$$

аналогично записываются и другие случаи. При совпадении правых верхнего и нижнего А. п. получается п р а в ы й А. п., при совпадении левых — л е в ы й А. п.

А. п. был использован впервые А. Данжуа (A. Denjoy, 1915) и А. Я. Хинчиным (1916—18) при исследовании дифференциальных связей неопределенного интеграла (в смысле Лебега и в смысле Данжуа — Хинчина) и подынтегральной функции (см. *Аппроксимативная непрерывность*, *Аппроксимативная производная*).

Лит.: [1] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАЦИЯ — замена одних математич. объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. А. позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (напр., таких, характеристики к-рых легко вычисляются или свойства к-рых уже известны). В теории чисел изучаются диофантовы приближения, в частности приближения иррациональных чисел рациональными. В геометрии и топологии рассматриваются А. кривых, поверхностей, пространств и отображений. Нек-рые разделы математики в сущности целиком посвящены А., напр. теория приближения функций, численные методы анализа. *БСЭ-3.*

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА РАЗНОСТНЫМ — приближение дифференциального оператора таким зависящим от параметра оператором, результат применения к-рого к функции определяется ее значениями на нек-ром дискретном множестве точек — сетке, уточняющееся при стремлении параметра (шага сетки) к нулю.

Пусть L, $Lu=f$ — дифференциальный оператор, переводящий каждую функцию u из класса функций U в функцию f из линейного нормированного пространства F. Пусть D_U — область определения функций из U и в D_U выделено нек-рое дискретное подмножество — сетка D_{hU} («сгущающаяся» при $h\to 0$). Рассматривается множество U_h всех функций $[u]_h$, определенных только на сетке и совпадающих в точках сетки с u. Разностным оператором наз. всякий оператор L_h, переводящий сеточные функции из U_h в функции f_h из F. Говорят, что оператор L_h, $L_h[u]_h=f_h$, аппроксимирует (аппроксимирует с порядком h^p) дифференциальный оператор L на классе U, если для любой функции $u\in U$ при $h\to 0$

$$\| Lu - L_h [u]_h \|_F \longrightarrow 0,$$

$$\| Lu - L_h [u]_h \|_{F_h} \leqslant ch^p,\ c = c(u) = \mathrm{const}.$$

Иногда аппроксимацию понимают как равенство

$$\lim_{h\to 0} L_h [u]_h = Lu$$

в смысле той или иной слабой сходимости. А. д. о. р. используется для приближенного вычисления функции

Lu по таблице $[u]_h$ значений функции u и для *аппроксимации дифференциального уравнения разностным.*

Существуют два основных приема построения оператора L_h, аппроксимирующего L.

Первый состоит в том, что определяют $L_h[u]_h$ как результат применения дифференциального оператора L к функции из U, полученной с помощью той или иной интерполяционной формулы из сеточной функции $[u]_h$.

Второй способ состоит в следующем. В области D_F определения функции f из F вводят сетку D_{hF} и рассматривают линейное пространство F_h сеточных функций, определенных на D_{hF}. Оператор $L_h[u]_h$ строят как произведение двух операторов: оператора, переводящего функцию $[u]_h$ в сеточную функцию f_h из F_h, то есть в приближенную таблицу значений функции $f(x)$, и оператора восполнения f_h с сетки D_{hF} на всю область D_F. Напр., для приближения оператора дифференцирования

$$L = \frac{d}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

строится сетка D_{hU}, состоящая из точек x_k, $k=0, 1, \ldots, N$,

$$0 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_N = 1,$$
$$\max_k (x_{k+1} - x_k) = h,$$

и сетка D_{hF}, состоящая из точек

$$x_k^* = x_k + \theta (x_{k+1} - x_k),$$
$$\theta \leqslant \theta \leqslant 1, \quad \theta = \text{const}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Значения оператора $L_h[u]_h$ в точках x_k^* определяются равенствами

$$L_h [u]_h \Big|_{x=x_k^*} = f_h (x_k^*) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{x_{k+1} - x_k},$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Затем $L_h[u]_h$ доопределяется вне D_{hF} кусочно линейно с изломами, быть может, только в точках x_k^*, $k=1, 2, \ldots, N-2$.

Пусть норма в F определяется формулой

$$\| \varphi \|_F = \sup_x | \varphi (x) |.$$

Тогда на классе функций U, имеющих ограниченную третью производную, при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{h}{2}$ оператор L_h аппроксимирует $L = \frac{d}{dx}$ с порядком h и h^2 соответственно. На классе U функций с ограниченными вторыми производными аппроксимация при любом $\theta \in [0, 1]$ имеет лишь первый порядок.

Иногда задачу А. д. о. р. условно считают решенной, если указан способ построения сеточной функции

$$L_h [u]_h |_{D_{hF}} = f_h \in F_h,$$

определенной только в точках сетки D_{hF}, оставляя задачу о восполнении функции f_h всюду на D_F вне рассмотрения. В таком случае для определения аппроксимации пространство F_h считают нормированным и притом относительно сетки и нормы предполагается, что для всякой функции $f \in F$ совпадающая с ней в точках D_{hF} функция $\{f\}_h \in F_h$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{h \to 0} \| \{f\}_h \|_{F_h} = \| f \|_F.$$

Оператор L_h понимают как оператор из U_h в F_h и говорят, что оператор L_h аппроксимирует (аппроксимирует с порядком h^p) дифференциальный оператор L на множестве U, если при $h \to 0$

$$\| \{Lu\}_h - L_h [u]_h \|_{F_h} \to 0,$$
$$\| \{Lu\}_h - L_h [u]_h \|_{F_h} \leqslant c h^p.$$

Для построения оператора L_h, аппроксимирующего L на достаточно гладких функциях с заданным порядком, часто прибегают к замене каждой производной, входящей в выражение L, ее разностной аппроксимацией, опираясь для этого на следующий факт. При любых натуральных i, j и при любом k_0, $2k_0+1 \geqslant i+j$ в равенстве

$$h^{-j} \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k u(x+kh) - u^{(j)}(x) + \varepsilon(x, h, c_{-k_0}, \ldots, c_{k_0}),$$

используя метод неопределенных коэффициентов и формулу Тейлора, можно так подобрать числа c_k, не зависящие от h, чтобы для любой функции $u(x)$, имеющей $j+r$ ($r \leqslant i$) ограниченных производных, выполнялось неравенство вида

$$|\varepsilon(x, h, c_{-k_0}, \ldots, c_{k_0})| \leqslant A_{ij} \sup_t |u^{(j+r)}(t)| h^r,$$

где A_{ij} зависит только от i и j. Напр., пусть требуется построить аппроксимирующий оператор для оператора Лапласа

$$\Delta,\ \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

если D_U — замкнутый квадрат $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, а D_p — его внутренность $|x| < 1$, $|y| < 1$. Задается $h = 1/N$, N — натуральное, и строится сетка, причем к D_{hU} относятся точки

$$(x, y) = (mh, nh),\ |mh| \leqslant 1,\ |nh| \leqslant 1,$$

а к D_{hF} — точки

$$(x, y) = (mh, nh),\ |mh| < 1,\ |nh| < 1,$$

где m и n — целые. Так как

$$\frac{1}{h^2}[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)] - y''(x) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi),$$

то Δ на достаточно гладких функциях аппроксимируется со вторым порядком разностным оператором L_h, если положить в точках D_{hF}:

$$L_h u_{m,n} = \frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2} + \frac{u_{m, m+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}}{h^2} = f_{mn},$$

где $u_{m, n}$ и $f_{m, n}$ — значения функций $[u]_h$ и f_h в точке (mh, nh).

Существуют отличные от указанного способы построения операторов L_h, аппроксимирующих оператор L на решениях u дифференциального уравнения $Lu = 0$ и удовлетворяющих дополнительным требованиям.

Лит.: [1] Филиппов А. Ф., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 6, с. 1045—48; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966. *В. С. Рябенький.*

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАЗНОСТНЫМ — приближение дифференциального уравнения системой алгебраич. уравнений относительно значений искомых функций на нек-рой сетке, к-рое уточняется при стремлении параметра (шага сетки) к нулю.

Пусть L, $Lu = f$ нек-рый дифференциальный оператор, а L_h, $L_h u_h = f_h$, $u_h \in U_h$, $f_h \in F_h$ — нек-рый разностный оператор (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*). Говорят, что разностное уравнение $L_h u_h = 0$, $0 \in F_h$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $Lu = 0$ на решении u с порядком h^p, если оператор L_h аппроксимирует оператор L на решении u с порядком p, т. е. если

$$\| L_h [u]_h \|_{F_h} = O(h^p).$$

Простейший пример построения разностного уравнения $L_h u_h = 0$, аппроксимирующего дифференциальное уравнение $Lu = 0$ на решениях u, состоит в замене каждой производной, входящей в выражение Lu, аппроксимирующим ее разностным аналогом.

Напр., уравнение

$$Lu \equiv \frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = 0$$

аппроксимируется со 2-м порядком разностным уравнением

$$L_h u_h = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} +$$

$$+ p(x_m)\frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + q(x_m)u_m = 0,$$

где сетки D_{hU} и D_{hF} состоят из точек $x_m = mh$, m — целое, u_m — значение функции u_h в точке x_m; для уравнения

$$L_u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

напр., двумя различными разностными аппроксимациями на гладких решениях являются:

$$L_h^{(1)} u_h = \frac{u_n^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

(явная схема), и

$$L_h^{(2)} u_h = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

(неявная схема), где сетки D_{hU} и D_{hF} состоят из точек $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$, $\tau = rh^2$, $r = \text{const}$, m и n — целые, а u_m^n — значение функции u_h в точке (x_m, t_n) сетки. Существуют разностные операторы L_h, аппроксимирующие дифференциальный оператор L особенно хорошо только на решениях u уравнения $Lu = 0$ и хуже на других функциях. Напр., оператор

$$L_h,\ L_h u_h = \frac{u_{m+1} - u_m}{h} - \varphi\left(x_m + \frac{h}{2},\ \frac{u_m + \tilde{u}}{2}\right) =$$

$$= f_h\left(x_m + \frac{h}{2}\right),$$

где $\tilde{u} = u_m + h\varphi(x_m)$ аппроксимирует оператор на

$$L,\ Lu = \frac{du}{dx} - \varphi(x, u) - f(x)$$

произвольных гладких функциях $u(x)$ с первым порядком относительно h, а на решениях уравнения $Lu = 0$ со вторым [функция $u(x)$ предполагается достаточно гладкой]. При численном решении краевых задач для дифференциального уравнения $Lu = 0$ с помощью разностного уравнения $L_h u_h = 0$ существенны свойства аппроксимации оператора L оператором L_h на решениях u уравнения $Lu = 0$, а не на произвольных гладких функциях. Для широкого класса дифференциальных уравнений и систем уравнений существуют способы построения аппроксимирующих их разностных уравнений, при к-рых выполняются различные дополнительные требования: устойчивость решения u_h относительно ошибок округления, допускаемых при вычислениях; выполнение для u_h тех или иных интегральных соотношений, имеющих место для решения u дифференциального уравнения; возможность использовать произвольные сетки D_{hu} и D_{hF} (важная при расчете движения сплошной среды); малое число арифметич. действий, необходимых для вычисления решения, и т. д.

А. д. у. р. является элементом *аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной* с целью приближенного вычисления решения первой.

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Введение в теорию разностных схем, М., 1962; [2] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [3] Годунов С. К. и др., Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976; [4] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., 1975.

В. С. Рябенький.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАЗНОСТНОЙ — приближение дифференциального уравнения и краевых условий системой

конечных (обычно алгебраических) уравнений относительно значений искомой функции на нек-рой сетке, к-рое уточняется при стремлении параметра разностной задачи (шага сетки) к нулю.

Пусть требуется вычислить функцию u, принадлежащую линейному нормированному пространству U функций, определенных в нек-рой области D_U с границей Γ, и являющуюся решением дифференциальной краевой задачи $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$, где $Lu=0$ — дифференциальное уравнение, а $lu|_\Gamma=0$ — совокупность граничных условий. Пусть D_{hU} — сетка (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*) и U_h — линейное нормированное пространство функций u_h, определенных на этой сетке. Норма в U_h вводится так, чтобы для любой функции $v\in U$ выполнялось равенство

$$\lim_{h\to 0}\|[v]_h\|_{U_h}=\|v\|_U,$$

где $[v]_h$ — таблица значений функции v в точках сетки D_{hU}. Задачу вычисления решения u заменяют нек-рой задачей $\mathscr{L}_h u_h=0$ приближенного вычисления таблицы $[u]_h$ значений решения u в точках сетки D_{hU}. Здесь $\mathscr{L}_h u_h$ — нек-рая совокупность конечных (недифференциальных) уравнений относительно значений сеточной функции $u_h\in U_h$.

Пусть v_h — произвольная функция из U_h и $\mathscr{L}_h v_h=\varphi_h$, Φ_h — линейное нормированное пространство, к-рому принадлежат φ_h при любом $v_h\in U_h$. Говорят, что задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ является разностной аппроксимацией порядка p дифференциальной краевой задачи $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$ на решении u последней, если

$$\|\mathscr{L}_h[u]_h\|_{\Phi_h}=O(h^p).$$

Фактическое построение системы $\mathscr{L}_h u_h=0$ разбивают на построение двух ее подсистем $L_h u_h=0$ и $l_h u_h|_{\Gamma_h}=0$. В качестве $L_h u_h=0$ используют к.-л. разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (см. *Аппроксимация дифференциального уравнения разностным*). Дополнительные уравнения $l_h u_h|_{\Gamma_h}=0$ строят с использованием граничных условий $lu|_\Gamma=0$.

А. д. к. з. р. в смысле приведенного определения ни при каком выборе норм в U_h и Φ_h еще не обеспечивают сходимости (см. [2]) решения u_h разностной задачи к точному решению u, т. е. равенства

$$\lim_{h\to 0}\|[u]_h-u_h\|_{U_h}=0.$$

Дополнительным условием, обеспечивающим сходимость, является свойство устойчивости (см. [3], [5] — [8]), к-рым должна обладать разностная задача $\mathscr{L}_h u_h=0$. Задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ наз. устойчивой, если существуют числа $\delta>0$ и $h<h_0$ такие, что уравнение $\mathscr{L}_h z_h=\varphi_h$ имеет единственное решение $z_h\in U_h$ при любом $\varphi_h\in\Phi_h$, $\|\varphi_h\|<\delta$, $h<h_0$, причем это решение удовлетворяет неравенству

$$\|z_h-u_h\|_{U_h}\leqslant C\|\varphi_h\|_{\Phi_h},$$

где C — нек-рая постоянная, не зависящая от h и возмущения правой части φ_h, а u_h — решение невозмущенной задачи $\mathscr{L}_h u_h=0$. Если решение u дифференциальной задачи существует, а разностная задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ аппроксимирует дифференциальную на решении u с порядком p и устойчива, то имеет место сходимость с тем же порядком, то есть

$$\|[u]_h-u_h\|_{U_h}=O(h^p).$$

Напр., задача

$$\left.\begin{aligned} L(u)&=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\\ lu|_\Gamma&=u(0,x)-\psi(x)=0,\ -\infty<x<\infty,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где $\psi(x)$ — заданная функция, имеющая ограниченную

производную 2-го порядка, при естественном определении норм аппроксимируется разностной задачей

$$\mathscr{L}_h u_h = \begin{cases} L_h u_h \equiv \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \\ l_h u_h \Big|_{\Gamma_h} = u_m^0 - \psi(mh) = 0 \end{cases} \quad \cdot 0 \in \Phi_h, \quad (2)$$

где u_m^n — значение функции u_h в точке $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$ сетки, $\tau = rh$, $r = \text{const}$. Если за норму φ_n принять верхнюю грань модулей правых частей уравнений, составляющих систему $\mathscr{L}_h v_h = \varphi_h$, $v_h \in U_h$, то аппроксимация задачи (1) задачей (2) на решении u имеет первый порядок. При $r > 1$ сходимости нет ни при какой норме. При $r \ll 1$ и норме

$$\| u_h \|_{U_h} = \sup_{m,\, n} | u_m^n |$$

имеет место устойчивость и, следовательно, сходимость:

$$\| [u]_h - u_h \|_{U_h} = O(h)$$

(см. [2], [3]).

Замена дифференциальных задач разностными является одним из наиболее универсальных средств приближенного вычисления решений дифференциальных краевых задач на ЭВМ (см. [7]).

Замену дифференциальных задач их разностными аналогами, начиная с работ [1], [2], [4], иногда удается использовать для самого доказательства существования решения дифференциальной задачи по следующей схеме. Устанавливается компактность зависящего от h семейства решений u_h разностного аналога дифференциальной краевой задачи и доказывается, что пределом сходящейся при $h_k \to 0$ подпоследовательности u_{h_k} является решение u дифференциальной краевой задачи. Если известно, что оно единственно, то не только подпоследовательность, но и все семейство u_h сходится к решению u при $h \to 0$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 115 -24; [2] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 125—60; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [4] Петровский И. Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 161—70; [5] Рябенький В. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 86, № 6, с. 1071 -3; [6] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956; [7] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [8] Филиппов А. Ф., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 6, с. 1045—8.

В. С. Рябенький.

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ — один из методов в *эргодической теории*. Любой автоморфизм T пространства Лебега X с мерой μ может быть получен как предел периодич. автоморфизмов T_n в естественной для пространства $\mathfrak{A}$ всех автоморфизмов топологии, слабой или равномерной (см. [1]). При количественной характеристике скорости аппроксимации наряду с автоморфизмами T_n рассматривают инвариантные относительно T_n конечные измеримые разбиения X, т. е. разбиения μ пространства X на конечное число непересекающихся измеримых множеств $C_{n,1}, \ldots, C_{n,q_n}$, которые автоморфизм T_n переводит друг в друга. Величина

$$d(T,\ T_n;\ \xi_n) = \sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_{n,i} \,\Delta\, T_n C_{n,i})$$

оценивает близость T_n к T относительно разбиения ξ_n; здесь Δ — симметрическая разность:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

При фиксированном q_n можно подобрать такие ξ_n и T_n (с указанными выше свойствами), что $d(T, T_n; \xi_n)$ будет сколь угодно мало (см. [1]). Содержательные ин-

варианты автоморфизма T возникают при рассмотрении такой бесконечной последовательности T_n и ξ_n, что для любого измеримого множества A имеется последовательность множеств A_n, целиком состоящая из нек-рых $C_{n,i}$ и аппроксимирующая A в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta A_n)=0$$

(«разбиения ξ_n сходятся к разбиению на точки»). Если при этом $d(T, T_n; \xi_n)<f(q_n)$, где $f(n)$ — заданная монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то говорят, что T допускает А. п. п. I рода со скоростью $f(n)$; если, сверх того, T_n циклически переставляет множества $C_{n,i}$, то говорят о циклической А. п. п. Другие варианты см. в [2], [6], [7].

При определенной скорости аппроксимации те или иные свойства периодич. автоморфизмов T_n влияют на свойства предельного автоморфизма T. Напр., если T допускает циклич. А. п. п. со скоростью c/n, то при $c<4$ это гарантирует эргодичность T, при $c<2$ — отсутствие у T перемешивания, а при $c<1$ — простоту спектра соответствующего унитарного оператора сдвига. Нек-рые свойства T могут быть охарактеризованы в терминах скорости аппроксимации. Напр., его *энтропия* равна нижней грани тех c, для к-рых T допускает А. п. п. I рода со скоростью $2c/\log_2 n$ (см. [2], [7]). А. п. п. применялась при исследовании ряда простых конкретных примеров (см. [2]), включая гладкие потоки на двумерных поверхностях (см., напр., [8]). При ее помощи был построен ряд динамич. систем с неожиданными метрич. свойствами (см. [2], [6], [7]) или с неожиданным сочетанием метрич. свойств с дифференциальными (см. [3], [4]).

Утверждение о плотности периодич. автоморфизмов в $\mathfrak{A}$, снабженном слабой топологией, может быть существенно усилено: для любой монотонной последовательности $f(n)>0$ автоморфизмы, допускающие циклич. А. п. п. со скоростью $f(n)$, образуют в $\mathfrak{A}$ множество II категории (см. [2]). Поэтому А. п. п. позволяет получать так наз. категорные теоремы, утверждающие, что в $\mathfrak{A}$ (со слабой топологией) автоморфизмы с тем или иным свойством образуют множество I или II категории (напр., эргодические множества — II категории, а перемешивающие — I категории, см. [1]).

Пусть X — топологическое или гладкое многообразие, а мера μ согласована с топологией или гладкостью. В классе гомеоморфизмов или диффеоморфизмов, сохраняющих μ, естественными являются не слабая, а другие топологии. Для гомеоморфизмов справедливы категорные теоремы, сходные с имеющимися для $\mathfrak{A}$ (историю и современное состояние проблемы см. в [5]).

Лит.: [1] Халмош П., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Катók А. Б., Стёпин А. М., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, № 5, с. 81—106; [3] Аносов Д. В., Катók А. Б., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1970, т. 23, с. 3—36; [4] Катók А. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 539—76; [5] Катók А. Б., Стёпин А. М., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2, с. 193—220; [6] Akcoglu M. A., Chacon R. V., Schwartzbauer T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 24, № 3, p. 637—642; [7] Schwartzbauer T., «Pacific J. Math.», 1972, v. 43, № 3, p. 753 -64; [8] Кочергин А. В., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 472—502.

Д. В. Аносов.

АПРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (вероятность a priori) какого-либо события — вероятность события, рассматриваемая в противоположность условной вероятности этого же события при нек-ром дополнительном условии. Последнюю называют в таком случае *апостериорной вероятностью*. Эту терминологию употребляют обычно в связи с *Бейеса формулой*.

Ю. В. Прохоров.

АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей какой-либо случайной величины, рассматриваемое в противоположность *условному распределению* этой случайной величины при нек-ром допол-

нительном условии. Обычно термин «А. р.» употребляют в следующей обстановке. Пусть (θ, X) — пара случайных величин (случайных векторов или более общих случайных элементов). Случайную величину θ рассматривают как неизвестный параметр, а X — как результат наблюдений, предназначенных для оценки θ. Совместное распределение θ и X задают распределением θ (которое и называют в этом случае А. р.) и совокупностью условных распределений P_θ случайной величины X по отношению к θ. По *Бейеса формуле* можно вычислить условное распределение θ относительно X (которое в этом случае называют *апостериорным распределением* θ). В статистич. задачах часто А. р. неизвестно (и даже само предположение о его существовании не представляется достаточно обоснованным). Об использовании А. р. см. *Бейесовский подход*.

Ю. В. Прохоров.

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ — традиционное название десяти математич. знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью к-рых по десятичной системе *счисления* записываются любые числа. Эти цифры возникли в Индии (не позднее 5 в.), в Европе стали известны в 10—13 вв. по араб. сочинениям (отсюда название). *БСЭ-3.*

АРБИТРАЖНАЯ СХЕМА — правило, по к-рому каждой игре с дележами (см. *Кооперативная игра*) ставится в соответствие единственный дележ этой игры, наз. а р б и т р а ж н ы м р е ш е н и е м. Первоначально А. с. были рассмотрены Дж. Нэшем [1] для случая игры двух лиц. Пусть $R=\{u(u_1, \ldots, u_n)\}$ — множество дележей, $d=(d_1, \ldots, d_n)$ — точка status quo, т. е. точка, соответствующая случаю, когда никакой дележ не осуществляется, $[R, d]$ — игра с дележами, u — ее арбитражное решение. Дележ u^* наз. р е ш е н и е м Н э ш а, если

$$\Pi_i (u_i^* - d_i) = \max_{u \in R} \Pi_i (u_i - d_i).$$

Решение Нэша и только оно удовлетворяет следующим аксиомам: 1) если f — линейное неубывающее преобразование, то $f\bar{u}$ есть арбитражное решение игры $[fR, fd]$ (инвариантность относительно преобразований полезности); 2) $\bar{u} \geqslant d$, $\bar{u} \in R$ и нет такого $u \in R$, чтобы $u \geqslant \bar{u}$ (оптимальность по Парето); 3) если $R' \subset R$, $d'=d$, $\bar{u} \in R'$, то $\bar{u}'=\bar{u}$ (независимость несвязанных альтернатив); 4) если $d_i=d_j$, $i, j=1, \ldots, n$ и R симметрична, то $\bar{u}_i=\bar{u}_j$, $i, j=1, \ldots, n$ (симметрия).

Другую А. с. с характеристич. функцией $v(S)$, $S \subset N=\{1, \ldots, n\}$ для игр n лиц дал Л. С. Шепли [2]. Р е ш е н и е Ш е п л и $\varphi(v)=(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, где

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N} \gamma_n(s) [v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

$\gamma_n(s)=(s-1)!(n-s)!/n!$, s — число элементов множества S, также удовлетворяет аксиоме симметрии, кроме того, $\Sigma_i \varphi_i(v)=v(N)$ и для любых двух игр u и v выполняется $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$. Были также рассмотрены А. с. для случая сравнимых индивидуальных выигрышей (см. [3]).

Арбитражные схемы Дж. Нэша и Л. С. Шепли обобщил Дж. Харшаньи [4]. Р е ш е н и е Х а р ш а н ь и, кроме соответствующих четырех аксиом Нэша, удовлетворяет еще двум аксиомам: 1) решение монотонно зависит от обоснованных требований игрока, 2) если u^* и u^{**} — решения, то решением будет и $\bar{u}$,

$$\bar{u}_i \geqslant \min_{i \in N} (u_i^*, u_i^{**}),$$

если только $\bar{u}$ принадлежит границе множества R.

А. с. непрерывно зависят от параметров игры, если в R имеются лучшие дележи, чем точка status quo.

Лит.: [1] N a s h J., «Econometrica», 1950, т. 18, № 2, p. 155—62; [2] S h a p l e y L. S., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton (N. J.), 1953, p. 307—17; [3] R a i f f a H., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2,

Princeton (N. J.), 1953, p. 361—87; [4] Harsanyi J. C., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 4, Princeton (N. J.), 1959, p. 325—55. *Э. И. Вилкас.*

АРГУМЕНТ — 1) А. функции — переменная (говорят также независимая переменная), от значений к-рой зависят значения функции. 2) А. комплексного числа $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, изображаемого на плоскости точкой с координатами x и y,— угол φ радиус-вектора r этой точки с осью абсцисс.

АРГУМЕНТА ПРИНЦИП — геометрический принцип теории функций комплексного переменного, формулируемый следующим образом: пусть D — ограниченная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем граница ∂D является непрерывной кривой, ориентация к-рой согласована с D; если функция $w=f(z)$ мероморфна в окрестности D и на ∂D не имеет нулей и полюсов, то разность между числом ее нулей N и числом полюсов P в D (с учетом кратностей) равна деленному на 2π приращению аргумента f при положительном обходе ∂D, т. е.

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f, \qquad (*)$$

где $\arg f$ обозначает какую-либо непрерывную ветвь $\operatorname{Arg} f$ на кривой ∂D. Выражение справа равно индексу $\operatorname{ind}_0 f(\partial D)$ кривой $f(\partial D)$ относительно точки $w=0$.

А. п. используется для доказательства различных утверждений о нулях голоморфных функций (основная теорема алгебры многочленов, теорема Гурвица о нулях и т. п.). Из А. п. следуют такие важные геометрич. принципы теории функций, как *сохранения области принцип*, *максимума модуля принцип*, теорема о локальном обращении голоморфной функции. Во многих вопросах А. п. используется неявно в виде его следствия — *Руше теоремы*.

Имеются обобщения А. п. Условие мероморфности f в окрестности $\bar{D}$ можно заменить следующим: f имеет в D конечное число нулей и полюсов и непрерывно продолжается на ∂D. Вместо комплексной плоскости можно рассматривать произвольную риманову поверхность, при этом ограниченность D заменяется условием, что $\bar{D}$ — компакт. Из А. п. для римановых поверхностей следует, что на компактной римановой поверхности число нулей любой мероморфной функции, не равной тождественно нулю, равно числу полюсов. А. п. в областях на C эквивалентен теореме о сумме *логарифмических вычетов*. Поэтому обобщенным А. п. иногда называют следующее утверждение. Если f мероморфна в окрестности области $\bar{D}$, ограниченной конечным числом непрерывных кривых, и f на ∂D не имеет нулей и полюсов, то для любой функции φ, голоморфной в окрестности $\bar{D}$, справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{N}\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{P}\varphi(b_k),$$

где первая сумма распространяется на все нули, а вторая — на все полюсы f в D. Имеется топологическое обобщение А. п. (*): А. п. справедлив для любых открытых локально конечнократных отображений $f: D\to\mathbb{C}$, непрерывно продолжающихся на ∂D и таких, что $0,\ \infty\notin f(\partial D)$.

Аналогом А. п. для многих комплексных переменных является, напр., следующая теорема: пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с жордановой границей ∂D и $f:\bar{D}\to\mathbb{C}^n$ есть отображение, голоморфное в окрестности $\bar{D}$ и такое, что $0\notin f(\partial D)$; тогда число прообразов 0 в D (с учетом кратностей) равно $\operatorname{ind}_0 f(\partial D)$.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976. *Е. М. Чирка.*

АРЕА-ФУНКЦИЯ — функция, обратная гиперболической функции, т. е. одна из функций: ареа-синус,

ареа-косинус, ареа-тангенс, ареа-котангенс. См. *Обратные гиперболические функции.*

АРИФМЕТИЗАЦИЯ — метод, применяемый в математич. логике для замены рассуждений о выражениях к.-л. логико-математич. языка рассуждениями о натуральных числах. С целью такой замены устанавливается к.-л. достаточно простое взаимно однозначное отображение множества всех слов (в алфавите рассматриваемого языка) в натуральный ряд; образ слова наз. его н о м е р о м. Отношения и операции, определенные на словах, переходят при этом отображении в отношения и операции, определенные на номерах. Требование «достаточной простоты» отображения сводится к тому, чтобы нек-рые основные отношения (такие, как отношение *вхождения* одного слова в другое и т. п.) и операции (такие, как операция соединения слов и т. п.) переходили в отношения и операции, имеющие простую алгоритмич. природу (напр., оказывающиеся примитивно рекурсивными). В частности, если среди выражений рассматриваемого языка содержатся программы для нек-рого семейства *вычислимых функций*, А. естественно приводит к нумерации этого семейства (при к-рой номером функции считается номер всякой ее программы).

Впервые А. была применена К. Гёделем [1] для доказательства неполноты формальной арифметики (см. *Гёделя теорема о неполноте*). Именно, Гёдель поставил в соответствие буквам алфавита некоторые попарно различные натуральные числа и затем занумеровал слово $\tau_1 \ldots \tau_n$ номером $2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$, где t_i — число, поставленное в соответствие букве τ_i, а p_i есть i-е по порядку простое число. Так описанная нумерация слов наз. гёделевой; в широком смысле слова гёделевой наз. всякая нумерация слов, возникающая при А., при этом номера слов наз. их г ё д е л е в ы м и н о м е р а м и.

В 1936 А. Чёрч [2] с помощью А. получил первый пример неразрешимой алгоритмич. проблемы арифметики.

Термин «А.» (в сочетании «А. анализа») употребляется также в литературе по основаниям математики для обозначения осуществленного в 19 в. построения теории действительных чисел с помощью теоретико-множественных конструкций, отправляющихся от натуральных чисел.

Лит.: [1] G ö d e l K., «Monatsh. Math. und Physik», 1931, Bd 38, № 1, S. 173—98; [2] C h u r c h A., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 2, p. 345—63; [3] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

В. А. Успенский.

АРИФМЕТИКА — область знаний о числах и операциях в числовых множествах. Говоря об А., имеют в виду рассмотрение вопросов о происхождении и развитии понятия *числа*, приемы и средства вычислений, исследование операций с числами различной природы, анализ аксиоматич. структуры числовых множеств, свойства чисел. Когда делается упор на логич. анализе понятия числа, то иногда употребляют термин т е о р е т и ч е с к а я а р и ф м е т и к а. А. тесно связана с *алгеброй*, в к-рой, в частности, изучаются свойства операций над числами. Свойства же самих целых чисел составляют предмет теории чисел (см. *Элементарная теория чисел*, *Чисел теория*).

Термин «А.» иногда употребляют и тогда, когда имеют дело с операциями над объектами самой различной природы: «А. матриц», «А. квадратичных форм» и т. д.

Культура счета возникла и развивалась задолго до создания дошедших до нас письменных памятников. Наиболее древними письменными математич. памятниками являются кахунские папирусы и знаменитый папирус Ринда, относящийся приблизительно к 2000 до н. э. Аддитивная иероглифич. система *счисления* позволяла египтянам сравнительно просто производить только операции сложения и вычитания натуральных чисел. Умножение выполнялось с помощью удвоения, т. е. множитель разбивался на сумму степеней двойки, производилось умножение на отдельные слагаемые, а затем

компоненты складывались. Действия с *дробями* египтяне сводили к операциям с а л и к в о т н ы м и д р о б я м и, т. е. с дробями вида $\frac{1}{n}$. Более сложные дроби разбивались с помощью таблиц на сумму аликвотных дробей. Деление осуществлялось вычитанием из делимого чисел, получаемых в процессе последовательного удвоения *делителя*. Громоздкая *шестидесятичная система* счисления вавилонян вызывала большие трудности при выполнении арифметич. операций. До нас дошли многочисленные таблицы, с помощью к-рых вавилоняне выполняли умножение и деление.

А. у греков — изучение свойств чисел; они не относили к ней практику вычислений. Вопросы, связанные с техникой операций над числами, т. е. способы вычислений.составляли особую науку, наз. л о г и с т и к о й. Такое разделение от греков перешло в средневековую Европу. Только в эпоху Возрождения общим назв. А. стали объединять как начатки теории чисел, так и практику вычислений. Греческая математика резко разграничивала понятия числа и величины. Греческие математики называли числами только те числа, к-рые теперь наз. *натуральными числами*, и различали такие разнородные, по их представлениям, понятия,как числа и геометрич. величины. Специальные греческие сочинения по логистике до нас не дошли: все же известно, что греки применяли способ умножения, близкий к современному. Алфавитная система нумерации сильно усложняла операции над числами. Греки практиковали вычисления с обыкновенными дробями, однако дроби не рассматривались как числа, а только как отношения натуральных чисел.

7—9-ю книги «Начал» Евклид (3 в. до н. э.) посвятил целиком А. в античном смысле этого слова. Это прежде всего элементы теории чисел: алгоритм отыскания *наибольшего общего делителя* (см. *Евклида алгоритм*), теоремы о *простых числах*. Евклид обосновывает коммутативность умножения, а также дистрибутивность этой операции относительно сложения. Рассматривается теория пропорций, т. е., по существу, теория дробей. В других книгах в геометрич. форме излагается общая теория отношений величин, к-рую можно рассматривать как зачатки теории *действительных чисел*.

В дошедших до нас рукописях Диофанта (вероятно, 3 в.) можно найти действия со степенями, показатели к-рых не превосходят шести, и нек-рые приемы операций с вычитаемыми. В неявной форме это операции с отрицательными числами. Сформулированные Диофантом правила применялись им только к *рациональным числам*.

Китайские математики во 2 в. оперировали с дробями и отрицательными числами. Несколько позже ими рассматривались методы извлечения квадратных и кубич. корней, приближенные значения к-рых выражались в виде *десятичных дробей*. Применявшиеся китайскими математиками для решения арифметич. задач правила, в частности правило двух *ложных положений*, вошли во многие руководства по А. сначала у арабов, а затем и в Европе. О начальном периоде арифметич. культуры в Индии не имеется достаточно данных. Простейшие дроби употреблялись в Индии задолго до нашей эры. Ныне общепринятая *десятичная система счисления* индийского происхождения. Начиная с 5 в. имеются датированные письменные источники и они показывают высокую арифметич. культуру Индии в ту эпоху. Индийские математики оперировали с целыми и дробными числами методами, близкими к современным. Решались многие задачи на пропорции, тройное правило и проводились процентные вычисления. С 7 в. начали рассматриваться отрицательные числа. В сочинениях Бхаскары II «Венец науки» (12 в.) приводятся правила умножения и деления отрицательных чисел.

Индийская математика оказала решающее влияние на развитие арифметич. знаний у арабов. Написанный в 9 в. Мухаммедом аль-Хорезми трактат по А. способствовал повсеместному распространению индийской десятичной системы записи чисел и способов сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

У многих древних народов первоначальные приемы счета на пальцах заменяются вычислениями на *абаке*. Абак менял свою форму, но принцип оставался один и тот же — разграфленные колонны или к.-л. другим образом отведенные места для поразрядной отметки чисел. У греков абак употреблялся задолго до нашей эры. Абак (суан-пан) у китайцев по форме близок к нашим русским счетам, представляющим собой также разновидность абака.

В то время как теоретико-числовые исследования в Европе возникли на базе греческой математики, в первую очередь трудов Евклида и Диофанта, совершенно иначе обстоит дело с техникой вычислений. Развитие А. в Европе связано с распространением индийской десятичной позиционной системы и *арабских цифр*. Техника арифметич. операций заимствована из Индии не непосредственно, а в результате ознакомления с трудами Мухаммеда аль-Хорезми и других арабских математиков.

В средние века широко применялся абак. Он стал даже синонимом слова А., так что Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano, 13 в.) назвал свой трактат по А. «Книга абака». В этой книге изложены заимствованные из арабских источников приемы вычисления, однако сделаны и существенные усовершенствования. Напр., при сложении дробей используется наименьшее общее кратное знаменателей, а проверка действий производится не только, как это делали индийцы с помощью девятки, но и с использованием нек-рых других модулей. Рассматриваются задачи на тройное правило, правило товарищества, на смешение величин, задачи, в к-рых фигурируют рекуррентные последовательности, *арифметические прогрессии* и *геометрические прогрессии*. В Европе первые шаги в направлении применения десятичных дробей были сделаны в 15 в., но широкое распространение они получили только в 16 в. после выхода сочинений С. Стевина (S. Stevin).

В 15—16 вв., да и позже, предлагались разные схемы для умножения и деления многозначных чисел. Эти схемы отличаются друг от друга, в сущности, только характером записи промежуточных вычислений. Общепринятый в настоящее время способ умножения ввел А. Ризе (A. Riese, 16 в.).

Отрицательные числа появляются в Европе впервые у Леонардо, к-рый трактовал их в форме долга. Операции с отрицательными числами систематизируются М. Штифелем (M. Stiefel, 16 в.). Такие числа он наз. «фиктивными». В 18 в. еще рассматривались доказательства правил операций с отрицательными числами и только критич. мышление 2-й пол. 19 в. положило конец серьезному восприятию таких работ.

Арифметич. действия над иррациональными числами до 15—16 вв. в Европе ограничивались квадратными корнями. Все же Леонардо рассматривал вопрос о приближенном вычислении не только квадратных, но и кубич. корней. С. Даль Ферро (S. Dal Ferro, конец 15 в.— начало 16 в.) и Н. Тарталья (N. Tartaglia, 16 в.) при решении уравнения 3-й степени стали употреблять кубич. корни. Общая трактовка операций с действительными числами отсутствовала. Понятие действительного числа входило в математич. обиход только постепенно в связи с развитием аналитич. геометрии и математич. анализа. Вплоть до 18 в. обоснование операций над иррациональными числами ограничивалось величинами, выражаемыми в радикалах.

При рассмотрении квадратных уравнений математики разных эпох, начиная с индийских математиков, встречались с комплексными величинами. Однако мнимые решения отбрасывались как несуществующие. А. *комплексных чисел* начинается с работ Р. Бомбелли (R. Bombelli, 16 в.), давшего формальные правила арифметич. действий над такими числами. Но и в 17 в. операции над комплексными числами производили по аналогии с операциями над действительными числами, что часто приводило к ошибкам. Только в 18 в. формулы Муавра и Эйлера обеспечили возможность четкого построения А. комплексных чисел.

Идея введения логарифмов восходит к Архимеду (3 в. до н. э.), к-рый сравнивал члены геометрич. и арифметич. прогрессий. М. Штифель (M. Stiefel, 16 в.) продолжил сравниваемые прогрессии влево, добавив отрицательные степени. Он показал связь между операциями над этими рядами, дав, таким образом, основную идею логарифмов. Логарифмирование и использование этой операции для вычислений начали применять в 1-й пол. 17 в. после работ Дж. Непера (J. Napier) и Й. Бюрги (J. Burgi).

В 17 в. В. Шиккард (W. Schickard) и Б. Паскаль (B. Pascal) создали независимо друг от друга вычислительные машины — прототипы современных арифмометров. Но широкое практич. применение счетные машины получили только в 19 в. В сер. 20 в. распространяются быстродействующие электронные вычислительные машины. В связи с этим актуальными становятся задачи отыскания алгоритмов, позволяющих выполнять арифметич. действия с наименьшим числом элементарных операций.

Чтобы обосновать какую-нибудь теорию, со времени Евклида считалось достаточным выделить в ней небольшое число ясных простейших первичных начал и убедиться, что все основные положения данной теории можно вывести из них чисто логически. Подразумевалось, что связь этих начал с действительным миром должна быть доступной непосредственному восприятию.

В 19 в. был открыт метод моделей для обоснования математич. теорий. Необходимость этого метода была обусловлена тем, что в математике стали рассматриваться объекты и теории, для к-рых не удавалось найти реального истолкования. Это, прежде всего, комплексные числа, идеалы, неевклидовы и n-мерные геометрии. Метод моделей позволял свести *непротиворечивость* одной математич. теории к непротиворечивости другой. Так, в предположении, что непротиворечива евклидова геометрия, была доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского, а непротиворечивость евклидовой геометрии была сведена к непротиворечивости А. действительных чисел.

К концу 19 в. обоснование А. казалось завершенным. Р. Дедекинд (R. Dedekind) и, независимо от него, Дж. Пеано (G. Peano) указали систему аксиом А. натуральных чисел, из к-рой можно вывести все известные положения этой науки. К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) предложил в качестве моделей для целых и положительных рациональных чисел классы пар натуральных чисел. Геометрич. истолкование комплексных чисел, открытое Ж. Арганом (J. Argand), К. Весселем (C. Wessel) и К. Ф. Гауссом (K. F. Gauss), по существу является моделью для теории комплексных чисел в рамках теории действительных чисел. И, наконец, теоретико-множественный подход позволил Р. Дедекинду, Г. Кантору (G. Cantor) и К. Вейерштрассу построить теории действительных чисел.

Но после того, как стали известны парадоксы в теории множеств, возник вопрос: как обосновать А. натуральных чисел и действительных чисел? Есть ли гарантия, что парадоксы не будут обнаружены и в этих разделах математики? Непосредственное восприятие не по-

зволяет сделать заключение ни о бесконечной протяженности Вселенной, ни о бесконечной делимости вещества. Поэтому представления о бесконечности множества натуральных чисел и о непрерывности числовой прямой нельзя рассматривать как непосредственно связанные с физическим миром. С другой стороны, для А. натуральных чисел нет более простой модели, чем сама эта теория, а при построении моделей для теории действительных чисел существенным образом используется аппарат теории множеств, в надежности к-рого появились основания усомниться.

Какими должны быть способы и средства рассуждений, на основании к-рых, не прибегая к построению модели, непосредственно можно убедиться, что в данной теории никогда не возникнет противоречий, что на основании аксиом данной теории нельзя с помощью цепочки логич. умозаключений получить результаты, противоречащие друг другу?

Д. Гильберт (D. Hilbert) считал, что парадоксы в теории множеств возникают вследствие того, что безотказно работающие в области конечных систем объектов способы рассуждений без должных оснований применяются к бесконечным совокупностям. Но этого можно избежать, если рассматривать употребляемые символы как объекты нек-рой новой теории, а логич. умозаключения выражать с помощью формального процесса. В таком случае любое высказывание теории представляется в виде *формулы*, составленной из конечного множества символов, а *доказательство* - в виде конечной цепочки формул, образованной по определенным правилам из формул, наз. *аксиомами*. Тогда, по мысли Д. Гильберта, появится возможность оперирования с бесконечным заменить оперированием с конечным и получить надежный способ установления непротиворечивости любой теории. Д. Гильберт надеялся, что на этом пути будет в первую очередь найдено положительное решение проблемы непротиворечивости А. натуральных чисел и, более того, будет показано, что присоединение к формулам А. любой недоказуемой формулы теории чисел превращает эту систему аксиом в противоречивую систему.

Но эти надежды не оправдались. В 1931 К. Гёдель (K. Gödel) доказал неполноту *арифметики формальной*. Более того, оказывается, что для всякой непротиворечивой *формальной системы*, содержащей аксиомы А., можно дать явное описание нек-рой замкнутой формулы *и* такой, что ни сама формула *и*, ни ее отрицание не выводимы в этой формальной системе.

Воспользовавшись этим результатом, можно доказать существование неизоморфных моделей формальной А. Вместе с тем система *Пеано аксиом* категорична. Как объяснить это? Система аксиом Пеано содержит аксиому индукции: каждое натуральное число обладает нек-рым свойством P, если 1 обладает этим свойством и вместе с каждым натуральным числом n, обладающим свойством P, натуральное число $n+1$ также обладает свойством P. В этой аксиоме за P может быть принято любое мыслимое свойство натуральных чисел. В соответствующей аксиоме формальной А. за P может быть принято лишь такое свойство натуральных чисел, к-рое выразимо средствами данного *формализма*. Различие между этими аксиомами незаметно, пока речь идет о теоремах элементарной теории чисел, и весьма существенно, когда выясняются свойства формальной теории.

К. Гёдель показал также, что в непротиворечивой формальной системе, включающей формальную А., содержится формула, выражающая ее непротиворечивость, и что эта формула недоказуема в этой системе. Следовательно, непротиворечивость такой формальной системы может быть обоснована только средствами более сильными, чем те, к-рые формализованы в данной системе. В 1936 Г. Генцен (G. Gentzen) получил доказательст-

во непротиворечивости формальной А., использующее трансфинитную индукцию до трансфинитного числа ε_0. Естественно возникает вопрос о непротиворечивости тех средств, к-рые при этом были использованы. В связи с характером используемых средств рассматривались и другие подходы к проблеме непротиворечивости А. натуральных чисел.

Попытки преодоления трудностей, связанных с обоснованием теории действительных чисел, послужили одним из источников развития конструктивного направления в математике.

Лит.: [1] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [3] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [4] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.—Л., 1948, с. 315—99; [5] Энциклопедия элементарной математики, кн. 1 — Арифметика, М.—Л., 1951; [6] Молодший В. Н., *Основы учения о числе в XVIII* и начале XIX века, М., 1963; [7] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975. *А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.*

АРИФМЕТИКА ФОРМАЛЬНАЯ, арифметическое исчисление,— логико-математич. исчисление, формализующее элементарную теорию чисел. Язык наиболее употребительного варианта А. ф. содержит константу 0, числовые переменные, символ равенства, функциональные символы $+$, $\cdot$, $'$ (прибавление 1) и логич. связки. Термы строятся из констант 0 и переменных с помощью функциональных символов; в частности, натуральные числа изображаются термами вида $0'\cdots'$. Атомарные формулы — это равенства термов; остальные формулы строятся из атомарных с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Формулы в языке А. ф. наз. арифметическими формулами. Постулатами А. ф. являются постулаты *предикатов исчисления* (классического или интуиционистского в зависимости от того, какая А. ф. рассматривается), аксиомы Пеано

$$a'=b'\rightarrow a=b,\ \neg(a'=0),\ (a=b\ \&\ a=c)\rightarrow b=c,$$
$$a=b\rightarrow a'=b',\ a+0=a,\ a+b'=(a+b)',$$
$$a\cdot 0=0,\ a\cdot b'=(a\cdot b)+a$$

и схема аксиом индукции

$$A(0)\ \&\ \forall x\,(A(x)\rightarrow A(x'))\rightarrow A(x),$$

где A — произвольная формула, наз. индукционной формулой.

Средства А. ф. оказываются достаточными для вывода теорем, устанавливаемых в стандартных курсах элементарной теории чисел. В настоящее время (1970-е гг.), по-видимому, неизвестно ни одной содержательной теоретико-числовой теоремы, доказанной без привлечения средств анализа, к-рая не была бы выводима в А. ф. Запись и доказательство таких теорем в А. ф. требует выявления ее выразительных возможностей. Особенно существенна выразимость в А. ф. многих теоретико-числовых функций. В частности, в А. ф. можно записывать суждения о примитивно (и даже частично) *рекурсивных функциях*. При этом оказываются выводимыми формулы, выражающие важные свойства частично рекурсивных функций, в частности их определяющие равенства. Так, равенство $f(x')=g(x, f(x))$ выражается формулой

$$\forall a\forall b\forall c\,(F(x',\ a)\ \&\ F(x,\ b)\ \&\ G(x,\ b,\ c)\rightarrow a=c),$$

где F и G — формулы, изображающие графики функций f и g, соответственно. В А. ф. можно формулировать суждения о конечных множествах. Более того, классич. А. ф. эквивалентна *аксиоматической теории множеств* Цермело — Френкеля без аксиомы бесконечности: в каждой из этих систем может быть построена модель другой.

Дедуктивная сила системы А. ф. характеризуется ординалом ε_0 (наименьшее решение уравнения $\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$): в А. ф. выводима схема *трансфинитной индук-*

φ_{III} до любого ординала $\alpha<\varepsilon_0$, но не выводима схема индукции до ε_0. Класс доказуемо рекурсивных функций системы А. ф. (т. е. частично рекурсивных функций, общерекурсивность к-рых может быть установлена средствами А. ф.) совпадает с классом ординально рекурсивных функций с ординалами $<\varepsilon_0$. Это позволяет погружать в А. ф. нек-рые ее расширения, напр. А. ф. с символами для всех примитивно рекурсивных функций и соответствующими дополнительными постулатами. А. ф. удовлетворяет условиям обеих *Гёделя теорем о неполноте*. В частности, имеются такие полиномы P, Q от нескольких переменных, что формула $\forall X(P(X)\neq Q(X))$ невыводима, хотя и выражает истинное утверждение, а именно непротиворечивость системы А. ф.

При исследовании структуры А. ф. (в частности, вопросов непротиворечивости) используется ее формулировка без кванторов, но с гильбертовским ε-символом. При построении формул этой системы не допускается употребление кванторов, но разрешается использование термов вида $\varepsilon_x A(x)$ (нек-рое x, удовлетворяющее условию A, если такие x существуют, и 0 в противном случае). Постулаты ε-системы — это постулаты исчисления высказываний, правила для равенства, правило подстановки вместо свободной числовой переменной, аксиомы для функций $\dot{-}$, $\cdot$, $'$, pd (вычитание 1 из положительных чисел) и следующие ε-аксиомы:

$$A(a)\longrightarrow A(\varepsilon_x A(x));\ A(a)\longrightarrow \varepsilon_x A(x)\neq a';$$
$$\neg A(\varepsilon_x A(x))\longrightarrow \varepsilon_x A(x)=0.$$

Кванторы вводятся как сокращения:

$$\exists x A(x)\rightleftarrows A(\varepsilon_x A(x));\ \forall x A\rightleftarrows \neg\exists x\neg A;$$

аксиома индукции оказывается выводимой.

Формулы А. ф., содержащие свободные переменные, задают теоретико-числовые предикаты. Формулы, не содержащие свободных переменных (замкнутые формулы), выражают суждения. k-местный предикат $\mathscr{P}$ от натуральных чисел наз. арифметическим, если найдется такая арифметич. формула $P(x_1, \ldots, x_k)$, что для любых натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$ имеет место

$$P(n_1, \ldots, n_k)\Leftrightarrow \langle n_1, \ldots, n_k\rangle\in\mathscr{P}.$$

Это определяет классификацию арифметич. предикатов по типу префикса в предваренной форме соответствующей формулы. Класс Σ_n (класс Π_n) состоит из предикатов $P(\alpha)$, изобразимых формулой вида

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)=0),$$

где f - примитивно рекурсивная функция, Q_1 есть $\exists$ (соответственно $\forall$) и Q_i — чередующиеся кванторы (т. е. Q_{i+1} есть $\overline{Q}_i$, где $\overline{\forall}$ есть $\exists$, а $\overline{\exists}$ есть $\forall$). Каждый из этих классов содержит универсальный предикат, т. е. такой предикат $T(e, a)$, что для всякого одноместного предиката P из того же класса имеется число e_P, для к-рого верно $\forall x(T(e_P, x)\equiv P(x))$. Многоместные предикаты сводятся к одноместным с помощью функций, нумерующих системы натуральных чисел. При каждом $n>0$ справедливо неравенство $\Sigma_n\neq\Pi_n$, и класс с меньшим индексом есть собственная часть любого класса с бо́льшим индексом. Классификация предикатов порождает классификацию арифметич. функций на основе классификации соответствующих графиков. Не все теоретико-числовые предикаты арифметические: примером неарифметич. предиката является такой предикат $T(x)$, что для любой замкнутой арифметич. формулы A имеет место $T(\ulcorner A\urcorner)\equiv A$, где $\ulcorner A\urcorner$ — номер формулы A в нек-рой фиксированной нумерации, удовлетворяющей естественным условиям. Предикат T играет существенную роль в исследованиях структуры

А. ф., в частности вопроса о независимости ее аксиом. Присоединение к А. ф. символа T с аксиомами типа $T(\overline{A\&B})\equiv T(\overline{A})\&T(\overline{B})$, выражающими его перестановочность с логич. связками, позволяет доказать непротиворечивость А. ф. Та же конструкция (но уже внутри А. ф.) проходит для подсистемы $A_{[n]}$ системы А. ф., в к-рой схема индукции ограничена условием: индукционная формула имеет сложность $\leqslant n$, т. е. принадлежит $\Pi_n \cup \Sigma_n$. Роль T здесь успешно исполняет, напр., универсальный предикат для Σ_{n+1}, и соответствующее доказательство проводится в системе $A_{[n+1]}$. В силу второй теоремы Гёделя о неполноте отсюда следует, что $A_{[n+1]}$ сильнее $A_{[n]}$, так что А. ф. не совпадает ни с одной из систем $A_{[n]}$ и схему индукции нельзя заменить никаким конечным множеством аксиом. А. ф. оказывается полной относительно формул из класса Σ_1: замкнутая формула из этого класса выводима в А. ф. тогда и только тогда, когда она истинна. Так как класс Σ_1 содержит алгорифмически неразрешимый предикат, отсюда следует, что проблема выводимости в А. ф. алгорифмически неразрешима.

При задании А. ф. в виде *Генцена формальной системы* обычного типа сечение оказывается неустранимым. Устранение сечения становится возможным, если заменить схему индукции правилом *бесконечной индукции* (ω - п р а в и л о):

$$\frac{A(0)\ A(1)\ldots A(N)\ldots}{\forall x\ A(x)}.$$

На этом пути было получено одно из первых доказательств непротиворечивости А. ф. При фактическом построении системы с ω-правилом основным оказывается предикат «число e есть номер общерекурсивной функции, описывающей вывод длины $< \varepsilon_0$ с ω-правилом (ω-в ы в о д)». Этот предикат принадлежит классу Π_2, и получающаяся система оказывается не формальной, а лишь полуформальной. Каждому выводу формулы A в А. ф. удается сопоставить такое число e, что суждение «e есть ω-вывод формулы A без сечения» истинно (и даже доказуемо в А. ф.). Так как ω-вывод без сечения замкнутой бескванторной формулы не содержит кванторов, отсюда следует непротиворечивость А. ф. Применение второй теоремы Гёделя о неполноте позволяет получить отсюда, что теорема об устранении сечения из любого вывода в А. ф. не может быть доказана средствами А. ф.; тем не менее это может быть доказано в А. ф. при любом фиксированном N для любого вывода с индукциями сложности $\leqslant N$. Переход к ω-выводам позволяет устанавливать многие метаматематич. теоремы о системе А. ф., в частности полноту относительно формул из Σ_1 и ординальную характеристику доказуемо рекурсивных функций.

Лит.: [1] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] H i l b e r t D., B e r n a y s P., Grundlagen der Mathematik, 2 Aufl., Bd 1—2, B., 1968—70; [3] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] K r e i s e l G., «J. Symbolic Logic», 1968, v. 33, № 3, p. 321—88; [5] Г ё д е л ь К., в сб.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 299—310.

Г. Е. Минц.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ГРУППА — подгруппа H *линейной алгебраической группы* G, определенной над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, удовлетворяющая следующему условию: существует точное рациональное представление $\rho: G \to \mathrm{GL}_n$, определенное над $\mathbb{Q}$ (см. *Представлений теория*), такое, что $\rho(H)$ соизмерима с $\rho(G) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел (подгруппы A и B группы C наз. соизмеримыми, если $A \cap B$ имеет конечный индекс в A и в B). Тогда для любого другого точного $\mathbb{Q}$-определенного представления это условие также будет выполнено. Более общо, А. г.— подгруппа алгебраич. группы G, определенной над *глобальным полем* k, соизмеримая с группой G_O O-точек группы G, где O — кольцо целых элементов поля k. А. г. $H \cap G_{\mathbb{R}}$ является *дискретной подгруппой* в $G_{\mathbb{R}}$.

Если $\varphi: G \to G'$ есть k-эпиморфизм алгебраич. групп, то для всякой А. г. $H \subset G$ образ $\varphi(H)$ — А. г. в G' (см. [1]). Иногда называют А. г. абстрактную группу, изоморфную арифметич. подгруппе нек-рой алгебраич. группы. Напр., если k — поле алгебраич. чисел, то группа $G_O \simeq G'_{\mathbb{Z}}$, где группа G' получается из G ограничением поля определения с k на $\mathbb{Q}$. В теории групп Ли арифметич. подгруппами наз. также образы арифметич. подгрупп группы вещественных точек $G_{\mathbb{R}}$ при факторизации $G_{\mathbb{R}}$ по компактным нормальным делителям.

Лит.: [1] Борель А., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 34—90; № 6, с. 3-30; [2] Борель А., Харишч Чандра, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [3] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

В. П. Платонов.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, арифметический ряд 1-го порядка,— последовательность чисел, в к-рой каждый член получается из предыдущего путем прибавления к нему одного и того же числа d, наз. разностью этой А. п. Таким образом, каждая А. п. имеет вид:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots;$$

общий член

$$a_n = a + (n-1)\,d.$$

Характеристич. свойство А. п.

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Если $d>0$, то А. п. наз. возрастающей, если $d<0$,— убывающей. Простейший пример А. п.— натуральный ряд чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Число членов А. п. может быть ограниченным или неограниченным. Если А. п. содержит n членов, то ее сумму можно вычислить по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦИЯ — равенство вида

$$a - b = c - d,$$

где a, b, c, d — числа. А. п. иначе наз. разностной пропорцией.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, теоретико-числовая функция,— комплекснозначная функция, областью определения к-рой может служить одно из множеств: множество натуральных чисел, множество целых рациональных чисел, множество целых идеалов фиксированного алгебраич. числового поля, решетка в многомерном координатном пространстве и т. п. Это — А. ф. в широком смысле. Однако часто под А. ф. понимается функция указанного типа, обладающая нек-рыми специальными арифметич. свойствами. Наиболее употребительные А. ф. имеют традиционные символич. обозначения: $\varphi(n)$ — *Эйлера функция*, $d(n)$ или $\tau(n)$ — *делителей число*, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция*, $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. К А. ф. относят также целую часть числа $[x]$ и дробную часть числа $\{x\}$. Изучаются А. ф., выражающие число решений уравнения; напр., $r(n)$ — число решений в целых числах x и y уравнения $x^2+y^2=n$ в *Гольдбаха проблеме:* $J(N)$ — число решений в простых числах уравнения $N=p_1+p_2+p_3$. Другие А. ф. выражают количество чисел с к.-л. условиями; напр., функция $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, характеризует распределение простых чисел; $\pi(x, q, l)$ — число не превосходящих x простых чисел в арифметич. прогрессии $p \equiv l \pmod q$. Со свойствами простых чисел связаны также *Чебышева функции*: $\theta(x)$ — сумма натуральных логарифмов простых чисел до x и $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$.

В алгебраич. теории чисел рассматриваются обобщения названных А. ф. натурального аргумента. Напр., в

алгебраич. поле K степени n для целого идеала $\mathfrak{l}$ вводится функция Эйлера $\varphi(\mathfrak{l})$ — число классов вычетов по идеалу $\mathfrak{l}$, взаимно простых с $\mathfrak{l}$.

А. ф. возникают и используются при изучении свойств чисел. Однако теория А. ф. представляет и самостоятельный интерес. Закономерность изменения А.ф. обычно не удается охарактеризовать простыми формулами — ищется асимптотика числовых функций. Так как многие А. ф. не монотонны, то большое значение имеет изучение средних значений функций. Важный класс А. ф. составляют *мультипликативные арифметические функции* и *аддитивные арифметические функции*. В вероятностной теории чисел изучается вопрос о распределении их значений [5].

Лит.: [1] Виноградов И. М.,Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Л о-г е н, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1975; [5] Кубилюс Й., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962.

Н. И. Климов.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОНТИНУУМ — числовая прямая.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ, арифметическое значение корня n-й степени из действительного числа $a \geqslant 0$,— неотрицательное число, n-я степень к-рого равна a. Если рассматриваются два действительных значения корня четной степени из неотрицательного числа, то говорят об алгебраическом значении корня в области действительных чисел; если же рассматриваются все n значений корня n-й степени, то говорят о значении корня в области комплексных чисел.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РОД — численный инвариант *алгебраических многообразий*. Для произвольного проективного алгебраич. многообразия X (над полем k), все неприводимые компоненты к-рого имеют размерность n и к-рое определяется однородным идеалом I в кольце $k[T_0, \ldots, T_N]$, арифметический род $p_a(X)$ выражается через свободный член $\varphi(I, 0)$ *Гильберта многочлена* $\varphi(I, m)$ идеала I по формуле

$$p_a(X) = (-1)^n(\varphi(I, 0) - 1).$$

Это классич. определение восходит к Ф. Севери (F. Severi, см. [1]). В общем случае оно эквивалентно следующему:

$$p_a(X) = (-1)^n(\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1),$$

где

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

— эйлерова характеристика многообразия X с коэффициентами в структурном пучке $\mathcal{O}_X$. В такой форме определение А. р. переносится на любые полные алгебраич. многообразия, а также показывает инвариантность $p_a(X)$ относительно бирегулярных отображений. В случае, когда X — неособое связное многообразие, а $k = \mathbb{C}$ есть поле комплексных чисел,

$$p_a(X) = \sum_{i=0}^{n-1} g_{n-1}(X),$$

где $g_k(X)$ размерность пространства регулярных дифференциальных k-форм на X. При $n=1, 2$ такое определение было принято в школе итальянских геометров. Напр., если $n = 1$, то $p_a(X)$ есть род кривой X; если $n = 2$, то

$$p_a(X) = q + p_g,$$

где q — иррегулярность поверхности X, а p_g — *геометрический род* поверхности X.

Для любого дивизора D на нормальном многообразии X О. Зариским (O. Zariski, см. [1]) дано определение виртуального арифметического ро-

да $p_a(D)$ как свободного члена многочлена Гильберта когерентного пучка $\mathcal{O}_X(D)$, соответствующего дивизору D. Если дивизоры D и D' алгебраически эквивалентны, то

$$p_a(D)=p_a(D').$$

А. р. есть бирациональный инвариант в случае поля k нулевой характеристики; в общем случае этот факт доказан (к 1977) лишь для размерности $n\leqslant 3$.

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.

И. В. Долгачев.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РЯД порядка m — последовательность значений многочлена степени m:

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

принимаемых им при последовательных целых, неотрицательных значениях переменной x ($x=0, 1, 2, \ldots$). Если $m=1$, т. е. $p(x)=a_0+a_1x$, получается арифметич.

Рис. 1.

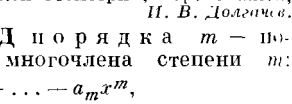


Рис. 2.

прогрессия с начальным членом a_0 и разностью a_1. При $p(x)=x^2$ или $p(x)=x^3$ получаются последовательности квадратов или кубов целых чисел — частные случаи А. р. 2-го и 3-го порядков. Если составить ряд из разностей соседних членов А. р., затем для полученной последовательности разностей также образовать их разности (вторые разности), для вторых разностей образовать разности (третьи разности) и т. д., то на m-м этапе окажется, что все (m-ые) разности равны между собой. Обратно, если для нек-рой последовательности чисел ее m-ые разности равны между собой, то эта последовательность есть А. р. порядка m. Пользуясь этим свойством, можно строить А. р. различных порядков, отправляясь от их разностей. Напр., последовательность единиц: 1, 1, 1, ..., можно рассматривать как первые разности последовательности натуральных чисел: 1, 2, 3, ...,— как вторые разности последовательности треугольных чисел: 1, 3, 6, 10, ...,— как третьи разности последовательности тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, ..., и т. д. Названия этих чисел объясняются тем, что треугольные числа выражают числа шаров, уложенных в виде треугольника (рис. 1), а тетраэдрические — в виде тетраэдра (пирамиды) (рис. 2). Треугольные числа выражаются формулой $\frac{n(n+1)}{2}$, а тетраэдрические — формулой

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Обобщением треугольных чисел являются k-угольные, или фигурные числа, игравшие важную роль на разных этапах развития арифметики. k-угольные числа имеют вид:

$$n+(k-2)\frac{n(n-1)}{2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Они образуют А. р. 2-го порядка, с первым членом 1, вторым членом k и вторыми разностями $k-2$. При $k=3$ получаются треугольные числа, при $k=4$ — квадратные (n^2), при $k=5$ — пентагональные (пятиугольные)

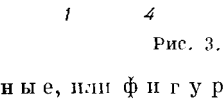


Рис. 3.

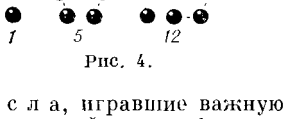


Рис. 4.

$\frac{3n^2-n}{2}$ и т. п. Названия эти поясняются на рис. 3 и 4, где числа шаров, расположенных в виде квадрата или пятиугольника, выражаются соответствующими квадратными или пентагональными числами. Относительно фигурных чисел справедлива следующая теорема, высказанная П. Ферма (P. Fermat) и доказанная впервые О. Коши (A. Cauchy): любое натуральное число можно представить в виде суммы не более, чем k k-угольных чисел.

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., 2 изд., ч. 1, М. –Л., 1947; [2] Арнольд И. В., Теоретическая арифметика, 2 изд., М., 1939. *БСЭ-2.*

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — то же, что *Паскаля треугольник*.

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, числовое пространство, координатное пространство, декартова степень $\mathbb{R}^n$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$, снабженная структурой линейного топологич. пространства. При этом операция сложения определяется формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) \quad (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n);$$

операция умножения на числа $\lambda \in \mathbb{R}$ формулой

$$\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Топология в $\mathbb{R}^n$ есть топология прямого произведения числовой прямой $\mathbb{R}$; ее базой служат открытые n-мерные параллелепипеды:

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — заданные числа.

А. п. $\mathbb{R}^n$ является также нормированным пространством относительно нормы

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, и евклидовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *И. В. Долгачев.*

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное распределение вероятностей, сосредоточенное на множестве точек вида $\pm nh$, где $h > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. А. р. представляет собой частный случай *решетчатых распределений*. *А. В. Прохоров.*

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ — число a, получаемое делением суммы нескольких чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на их число n:

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

АРКСИНУСА ЗАКОН — предельная теорема, описывающая флуктуации случайного блуждания на прямой, приводящая к *арксинуса распределению* или обобщенному распределению арксинуса. В 1939 П. Леви (P. Lévy) для процесса броуновского движения $\{\xi_t, t \geqslant 0, \xi_0 = 0\}$ отметил следующий факт. Пусть τ_t — мера Лебега множества $\{u : \xi_u > 0, 0 \leqslant u \leqslant t\}$, другими словами, время, проведенное броуновской частицей на положительной полуоси за промежуток времени $[0, t]$. Тогда отношение τ_t / t имеет распределение арксинуса:

$$\mathsf{P}\{\tau_t / t < x\} = F_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t > 0.$$

Позднее было обнаружено (см. [2]), что для случайного блуждания с дискретным временем имеет место следующий закон арксинуса: пусть $S_0 = 0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ — последовательные положения в случайном блуждании,

$$S_n = \sum_{u=1}^{n} \xi_u,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, T_n равно числу индексов k среди $0, 1, \ldots, n$, для к-рых $S_k > 0$,

$$K_n = \min\{k : S_k = \max_{0 \leqslant m \leqslant n} S_m\},$$

тогда соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{T_n/n < x\} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{K_n/n < x\} = F_\alpha(x),$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathsf{P}\{S_1 > 0\} + \ldots + \mathsf{P}\{S_n > 0\}}{n} = \alpha$$

выполняются или не выполняются одновременно, где $F_\alpha(x)$ при $0<\alpha<1$ — обобщенное распределение арксинуса,

$$F_1(x) = \mathsf{E}(x) \text{ и } F_0(x) = \mathsf{E}(x-1),$$

при этом $\mathsf{E}(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\mathsf{E}(x) = 1$ при $x > 0$.

А. з. в теории восстановления утверждает, что при $0<\alpha<1$ имеют место равенства:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant 0\} = 1$$

и

$$y_t = t - S_{\eta_t},$$

где η_t определяется соотношением $S_{\eta_t} < t \leqslant S_{\eta_t + 1}$,

$$\lim \mathsf{P}\{y_t < x\} = F_\alpha(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{P}\{\xi_1 > x\} = x^{-\alpha} L(x)$$

при $x>0$, где $L(x)$ — функция, определенная при $x>0$ и обладающая свойством

$$\lim_{x \to \infty} L(xy)/L(x) = 1 \text{ при } 0 < y < \infty.$$

Существует тесная связь между А. з. в теории восстановления и для случайных блужданий (см. [3]).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [3] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, № 4, с. 593—613.

Б. А. Рогозин.

АРКСИНУСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — *вероятностная мера* на прямой, плотность к-рой равна нулю вне интервала (0, 1) и равна $\frac{1}{\pi}(\sqrt{x(1-x)})^{-1}$ при $0<x<1$. Соответствующая функция распределения равна $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Наряду с А. р. используется обобщенное распределение арксинуса. Обобщенному А. р. соответствует функция распределения $F_\alpha(x)$, к-рая имеет плотность

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0,\ x \geqslant 1, \end{cases}$$

при $0<\alpha<1$, плотность $f_{1/2}(x)$ совпадает с плотностью А. р. Обобщенное А. р. есть специальный случай *бета-распределения*. Момент 1-го порядка обобщенного А. р. равен $1-\alpha$, дисперсия этого же распределения равна $\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha$. А. р. и обобщенное А. р. возникают при изучении флуктуаций случайных блужданий, в теории восстановления (см. *Арксинуса закон*), а также используются в математич. статистике как специальные случаи бета-распределения.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

Б. А. Рогозин.

АРКФУНКЦИЯ, аркус-функция,— функция, обратная тригонометрич. функции, т. е. одна из функций: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс. См. *Обратные тригонометрические функции.*

АРТИНОВ МОДУЛЬ — модуль, удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепей для подмодулей. Класс А. м. замкнут относительно перехода к подмодулям, фактормодулям, конечным прямым суммам и расширениям. Последнее означает, что артиновость модулей B и A/B влечет артиновость модуля A. Каждый А. м. разлагается в прямую сумму подмодулей, уже не разлагающихся в прямую сумму. Модуль имеет композиционный ряд тогда и только тогда, когда он артинов и нётеров одновременно. См. также *Артиново кольцо*.

Л. А. Скорняков.

АРТИНОВА ГРУППА, группа с условием минимальности для подгрупп,— группа, в к-рой любая убывающая цепочка различных подгрупп обрывается на конечном номере. А. г.— периодическая и вопрос о ее строении упирается в проблему Шмидта о бесконечной группе с конечными собственными подгруппами [3] и проблему минимальности: будет ли А. г. конечным расширением абелевой группы? Обе эти проблемы решены для локально разрешимых групп [1] и локально конечных групп [3], [4].

Лит.: [1] Черников С. Н., «Матем. сб.», 1940, т. 7, № 1, с. 35—64; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [3] Каргаполов М. И., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 1, с. 232—35; [4] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 2.

В. П. Шунков.

АРТИНОВО КОЛЬЦО, артиново справа кольцо, — кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для правых идеалов, т. е. кольцо, в к-ром любое непустое частично упорядоченное по включению множество M правых идеалов имеет минимальный элемент (см. [1]) — такой правый идеал из M, к-рый не содержит строго никакого правого идеала из M. Другими словами, А. к. — это кольцо, являющееся правым *артиновым модулем* над самим собой. Кольцо A есть А. к. тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов, т. е. для любой убывающей последовательности правых идеалов $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots$ кольца A существует такое натуральное число m, что $B_m = B_{m+1} = B_{m+2} = \ldots$. Аналогично определяется артиново слева кольцо.

Всякое ассоциативное А. к. с единицей нётерово справа (см. *Нётерово кольцо*). Всякая конечномерная алгебра над полем является А. к. Наиболее полно изучены свойства А. к. в классе альтернативных колец и особенно в классе ассоциативных колец (см. *Альтернативные кольца и алгебры*, *Ассоциативные кольца и алгебры*). *Джекобсона радикал* ассоциативного А. к. нильпотентен и содержит всякий односторонний нильидеал. Кольцо A тогда и только тогда является простым ассоциативным А. к., когда оно изоморфно кольцу всех матриц нек-рого конечного порядка над нек-рым ассоциативным телом. В классе альтернативных колец каждое простое А. к. либо ассоциативно, либо есть *Кэли — Диксона алгебра* над своим центром, являющимся в этом случае полем. Строение ассоциативных А. к. с нулевым радикалом Джекобсона описано (см. *Полупростое кольцо*). Имеется вариант этой теоремы в случае альтернативных колец. Для ассоциативных колец с ненулевым радикалом Джекобсона развита достаточно далеко идущая структурная теория (см. [1], [2]). Весьма интенсивно изучается ряд классов А. к.— *квазифробениусовы кольца*, *однородные кольца*, *сбалансированные кольца*.

Лит.: [1] Artin E., Nesbitt C., Thrall R., Rings with Minimum condition, Michigan, 1944; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—80; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 9—56.

К. А. Жевлаков.

АРХИМЕДА АКСИОМА — аксиома, первоначально сформулированная для отрезков, заключающаяся в том, что, отложив достаточное число раз меньший из

двух заданных отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них. Аналогично А. а. формулируется для площадей, объемов, положительных чисел и т. д. Вообще, для данной величины имеет место А. а., если для любых двух значений A и B этой величины таких, что $A<B$, всегда можно найти целое число m, что $Am>B$; на этом основан процесс последовательного деления в арифметике и геометрии (см. *Евклида алгоритм*). Значение А. а. выяснилось с полной отчетливостью после того, как в 19 в. было обнаружено существование величин, по отношению к к-рым эта аксиома несправедлива,— т. н. неархимедовых величин (см. *Величина*, а также *Архимедова группа*, *Архимедово кольцо*, *Архимедов класс*).

А. а. отчетливо сформулирована Архимедом (3 в. до н. э.) в соч. «Шар и цилиндр»; ранее ее применял Евдокс Книдский, поэтому иногда А. а. наз. аксиомой Евдокса. *БСЭ-3.*

АРХИМЕДА ТЕЛА - то же, что *полуправильные многогранники*.

АРХИМЕДОВ КЛАСС — класс разбиения, индуцируемого архимедовым отношением эквивалентности на линейно *упорядоченной полугруппе*. Эта эквивалентность определяется следующим образом: элементы a, b полугруппы S наз. архимедово эквивалентными, если имеет место одно из следующих четырех соотношений:

$$a\leqslant b\leqslant a^n,\qquad b\leqslant a\leqslant b^n,$$
$$a^n\leqslant b\leqslant a,\qquad b^n\leqslant a\leqslant b;$$

это равносильно тому, что a и b порождают одну и ту же выпуклую подполугруппу в S. Таким образом, разбиение на А. к. является разбиением на попарно непересекающиеся выпуклые подполугруппы, причем каждое разбиение S на попарно непересекающиеся выпуклые подполугруппы может быть продолжено до разбиения на А. к.

Архимедова эквивалентность на *линейно упорядоченной группе* индуцируется архимедовой эквивалентностью ее положительного конуса: считается, что $a\sim b$, если существуют такие положительные целые числа m и n, что

$$|a|<|b|^m \text{ и } |b|<|a|^m,$$

где

$$|x|=\max\{x, x^{-1}\}.$$

Положительный конус *архимедовой группы* состоит из одного А. к. *О. А. Иванова.*

АРХИМЕДОВА ГРУППА — частично *упорядоченная группа*, в к-рой выполняется аксиома Архимеда: из того, что $a^n<b$ для всех целых n (a, b — элементы А. г.), следует, что a — единица группы (в аддитивной записи: из $na<b$ для всех целых n следует, что $a=0$). Для линейно упорядоченных А. г. существует следующее описание (теорема Гёльдера): линейно упорядоченная группа тогда и только тогда архимедова, когда она изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Таким образом, аддитивная группа всех действительных чисел является, в нек-ром смысле, самой большой линейно упорядоченной А. г. Всякая линейно упорядоченная А. г. коммутативна. Линейно упорядоченная группа без нетривиальных *выпуклых подгрупп* - архимедова.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.
А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

АРХИМЕДОВА ПОЛУГРУППА — 1) Линейно *упорядоченная полугруппа*, все строго положительные (строго отрицательные) элементы к-рой принадлежат одному *архимедову классу*. Всякая естественно упорядоченная А. п. S (см. *Естественно упорядоченный группоид*) изо-

морфна нек-рой подполугруппе одной из следующих полугрупп: аддитивной полугруппе всех неотрицательных действительных чисел, полугруппе всех действительных чисел интервала (0,1) с обычной упорядоченностью и операцией $ab = \min(a+b, 1)$, полугруппе, состоящей из всех действительных чисел интервала (0, 1) и символа ∞ с обычной упорядоченностью и операцией

$$ab = \begin{cases} a+b, & \text{если } a+b \leqslant 1, \\ \infty, & \text{если } a+b > 1. \end{cases}$$

Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда S полугруппа с сокращением.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *О. А. Иванова.*

2) Полугруппа S, удовлетворяющая условию: для любых a, $b \in S$ существует такое натуральное число n, что $a^n \in SbS$. При условии $a^n \in Sb$ ($a^n \in bS$) полугруппа S наз. архимедовой слева (справа). Для коммутативных полугрупп все эти понятия эквивалентны. Любая коммутативная полугруппа S единственным образом разложима в связку А. п. (причем такое разложение совпадает с наиболее дробным разложением S в связку полугрупп). Этот результат по-разному обобщался на некоммутативные полугруппы (см. [1]). Полугруппа S с идемпотентом будет архимедовой (архимедовой справа) тогда и только тогда, когда она обладает *ядром* K, причем K содержит идемпотент (K есть *правая группа*), а факторполугруппа Риса (см. *Полугруппа*) S/K есть *нильполугруппа*. А. п. без идемпотентов труднее поддаются изучению. Лишь в коммутативном случае здесь дано полное описание в терминах нек-рых конструкций, особенно прозрачное для полугрупп с законом сокращения (см. [2], § 4.3; [3]).

Лит.: [1] Putcha M. S., «Semigroup Forum», 1973, v. 6, № 3, p. 232—39; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [3] Tamura T., «Math. Nachr.», 1968, Bd 36, № 5/6, S. 255—87. *Л. Н. Шеврин.*

АРХИМЕДОВА СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = a\varphi.$$

А.с. описывается точкой M, движущейся равномерно по прямой d, к-рая вращается вокруг точки O, принадлежащей этой прямой. В начальный момент движения M совпадает с центром вращения O прямой (см. рис.). Длина дуги между точками M_1 (ρ_1, φ_1) и M_2 (ρ_2, φ_2):

$$l = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограничиваемого дугой А. с. и двумя радиус-векторами ρ_1 и ρ_2, соответствующими углам φ_1 и φ_2:

$$S = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{a}.$$

А. с. относится к так наз. алгебраич. спиралям (см. *Спирали*). Обобщение А. с. - неоида, уравнение к-рой в полярных координатах

$$\rho = a\varphi + l.$$

А. с. названа по имени Архимеда (3 в. до н. э.), изучавшего ее свойства.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые. Систематика, свойства, применения, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

АРХИМЕДОВО КОЛЬЦО — частично *упорядоченное кольцо*, аддитивная группа к-рого относительно заданного порядка является *архимедовой группой*. Архимедово линейно упорядоченное кольцо R есть либо кольц-

цо с нулевым умножением (т. е. $xy=0$ для любых x и y из R) над аддитивной группой, изоморфной нек-рой подгруппе группы действительных чисел, либо оно изоморфно нек-рому однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел, взятому с обычной упорядоченностью. Архимедово линейно упорядоченное кольцо всегда ассоциативно и коммутативно.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *О. А. Иванова.*

АРЦЕЛА ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть действительнозначная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном параллелепипеде $D_n=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$, $n=2, 3, \ldots$, и G_n — класс всех таких непрерывных вектор-функций $\bar{x}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))(0\leqslant t\leqslant 1)$, что каждая функция $x_k(t)$ не убывает на $[0, 1]$, причем $x_k(0)=a_k$, $x_k(1)=b_k$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$A(f, D_n) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sup_{\bar{x}(t)\in G_n} \sup_{\Pi} \sum_{s=1}^{m} |f(\bar{x}(t_s)) - f(\bar{x}(t_{s-1}))|,$$

где $\Pi=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_m=1\}$ — произвольная система точек из $[0, 1]$. Это определение в случае $n=2$ предложено Ч. Арцела [1] (см. также [2], с. 543). Если $A(f, D_n)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) А. в. на D_n, а класс всех таких функций обозначается $A(D_n)$. Для того чтобы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежала классу $A(D_n)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение $f(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1, \ldots, x_n)-f_2(x_1, \ldots, x_n)$, где f_1 и f_2 — конечные неубывающие на D_n функции. При этом функция $f(x)$ наз. неубывающей на D_n,

если $f(x_1'', \ldots, x_n'')\geqslant f(x_1', \ldots, x_n')$

при $a_k\leqslant x_k'<x_k''\leqslant b_k$ $(k=1, \ldots, n)$. Класс $A(D_n)$ содержит в себе класс функций, имеющих ограниченную *Харди вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Arzelá C., «Rend. Accad. sci Bologna», 1904—1905, t. 9, pt 2, p. 100—07; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921. *Б. И. Голубов.*

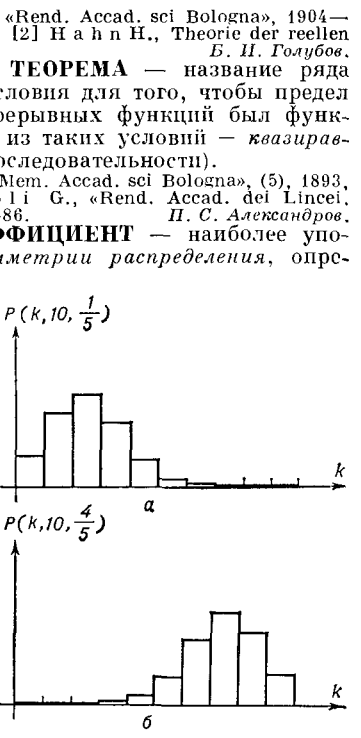
АРЦЕЛА — АСКОЛИ ТЕОРЕМА — название ряда теорем, указывающих условия для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был функцией непрерывной (одно из таких условий — *квазиравномерная сходимость* последовательности).

Лит.: [1] Arzelá C., «Mem. Accad. sci Bologna», (5), 1893, t. 5, p. 225—44; [2] Ascoli G., «Rend. Accad. dei Lincei. Mem.», 1883, t. 18, p. 521—86. *П. С. Александров.*

АСИММЕТРИИ КОЭФФИЦИЕНТ — наиболее употребительная мера *асимметрии распределения*, определяемая отношением

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

где μ_2 и μ_3 — второй и третий центральные моменты распределения, соответственно. Для распределений, симметричных относительно математич. ожи-



Графики биномиального распределения $P(k, n, p)$, соответствующего $n=10$ испытаниям Бернулли, с (*а*) положительной асимметрией $\left(p=\frac{1}{5}\right)$ и (*б*) отрицательной асимметрией $\left(p=\frac{4}{5}\right)$.

дания, $\gamma_1 = 0$; в зависимости от знака γ_1 говорят о распределениях с положительной асимметрией ($\gamma_1 > 0$) и с отрицательной асимметрией ($\gamma_1 < 0$). Для *биномиального распределения*, соответствующего *n Бернулли испытаниям* с вероятностью успеха p,

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}, \qquad (*)$$

при этом в случае $p = 1/2$ ($\gamma_1 = 0$) распределение симметрично, в случаях $p < 1/2$ и $p > 1/2$ получаются типичные графики распределения с положительной (рис. *а*) и отрицательной (рис. *б*) асимметрией. А. к. γ_1 стремится к нулю при $n \to \infty$ в соответствии с тем, что нормированное биномиальное распределение сходится к стандартному нормальному.

А. к. вместе с *эксцесса коэффициентом* — наиболее употребительные характеристики точности, с к-рой функция распределения $F_n(x)$ суммы

$$((x_1 + \ldots + x_n) - n\mu_1)/\sqrt{n\mu_2},$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ — выборка из распределения, имеющего конечные моменты $\mu_1, \ldots, \mu_r$, $r > 2$, может быть приближена функцией нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz,$$

а именно, при довольно общих условиях *Эджворта ряд* дает

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\gamma_1}{6} \Phi^{(3)}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948, с. 253–56; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, с. 273–77.

А. В. Прохоров.

АСИММЕТРИЧНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — ориентируемое многообразие M, для к-рого не существует гомеоморфизма, обращающего ориентацию. Напр., комплексная проективная плоскость есть А. м., так как самопересечение комплексной прямой равно $+1$ или -1 в зависимости от ориентации. Отличие нек-рых узлов от их зеркального образа возможно из-за того, что их разветвленные накрывающие являются А. м.

А. В. Чернавский.

АСИММЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ — качественное свойство кривой распределения, указывающее на отличие от симметричного распределения. А. р. положительна (отрицательна), если *асимметрии коэффициент* положителен (отрицателен). При положительной (отрицательной) А. р. более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит правее (левее) *моды*.

К. П. Латышев.

АСИМПТОТА кривой $y = f(x)$, имеющей бесконечную ветвь, — прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при движении ее вдоль ветви к бесконечности. А. может быть вертикальной или наклонной. Вертикальная А. имеет уравнение $x = a$, причем $f(x) \to +\infty$ ($-\infty$) при $x \to a$ (односторонне). Для существования наклонной А., имеющей уравнение $y = kx + l$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim [f(x) - kx]$$

при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$).

Аналогичные формулы получаются и при параметрич. задании кривой. В полярных координатах А. кривой $r = r(\varphi)$, где $r > 0$, с углом наклона α, определяется условием $r \to +\infty$ при $\varphi \to \alpha$. Расстояние p этой А. от начала координат вычисляется по формуле:

$$p = \lim |t| r(\alpha + t) \text{ при } t \to +0 \text{ (или при } t \to -0).$$

Если вдоль бесконечной ветви кривой существует предельное положение касательной, то оно есть А. Обратное

не всегда верно. Напр., кривая $y=\frac{1}{x}\sin x^2$ имеет при $x\to\pm\infty$ асимптоту $y=0$, хотя предельного положения касательной не существует. Среди кривых 2-го порядка А. имеют только гиперболы. А. гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ определяются уравнениями $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$. Наклонная А. дает простое — линейное по x — асимптотическое приближение функции

$$f(x)=kx+l+o(1)$$

при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

Л. П. Купцов.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ — линия Γ на регулярной поверхности F, нормальная кривизна к-рой вдоль Γ равна нулю; А. л. определяется дифференциальным уравнением:

$$\mathrm{II}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0,$$

где II — вторая квадратичная форма поверхности.

Соприкасающаяся плоскость А. л. Γ (там, где она существует) совпадает с касательной плоскостью к F (в точках Γ); при этом квадрат кручения А. л. равен модулю гауссовой кривизны K поверхности F (теорема Бельтрами — Эннепера). Прямолинейный отрезок $l\in F$ (напр., отрезок образующей линейчатой поверхности) всегда является А. л. Если Γ — параболич. кривая (напр., параллель тора, разделяющая области с гауссовой кривизной разных знаков), то она будет А. л. Другим примером является ребро возврата на псевдосфере. Непараболич. кривая, на к-рой $K=0$, представляет собой ребро возврата семейства А. л.

Через каждую точку параболич. области (где $K=0$, но $\mathrm{II}\neq0$) проходит единственная А. л., совпадающая с прямолинейной образующей. Через каждую точку гиперболич. области (где $K<0$) проходят две и только две А. л., составляющие так наз. *асимптотическую сеть*, играющую важную роль в исследовании пространственной формы *отрицательной кривизны поверхностей*. Так, напр., на полной поверхности эта сеть гомеоморфна декартовой сети на плоскости, если

$$\operatorname{grad}\left|\frac{1}{\sqrt{-K}}\right|\leqslant q,\quad q-\text{const}.$$

На поверхностях постоянной отрицательной кривизны асимптотич. сеть является *чебышевской сетью*, причем площадь S четырехугольника, образованного А. л., пропорциональна избытку суммы его внутренних углов α_i над 2π:

$$S=|K|(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-2\pi)$$

(формула Хаццидакиса).

При проективном преобразовании π пространства А. л. поверхности F переходят в А. л. преобразованной поверхности $\pi(F)$.

Аналогично определяются А. л. и на поверхностях трехмерного риманова пространства. Известны различные пути обобщений понятия А. л. на многообразиях, погруженных в многомерное пространство; наиболее употребительное из них использует понятие второй квадратичной формы, ассоциированной с определенным нормальным вектором.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

М. И. Войцеховский.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ — разновидность общего понятия *плотности последовательности* натуральных чисел, к-рое является мерой того, какая часть последовательности всех натуральных чисел принадлежит заданной последовательности A натуральных чисел со включением нуля. Асимптотическая

плотность последовательности A выражается действительным числом α, определяемым формулой

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} \inf \frac{A(x)}{x},$$

где

$$A(x) = \sum_{a \in A,\ 0 < a \leqslant x} 1,\ x \geqslant 1.$$

Число

$$\beta = \lim_{x \to \infty} \sup \frac{A(x)}{x}$$

наз. верхней А. п. Если числа α и β совпадают, то их общее значение наз. натуральной плотностью. Напр., последовательность чисел, свободных от квадратов, имеет натуральную плотность $\delta = 6/\pi^2$. Понятие А. п. используется при нахождении критериев того, чтобы нек-рая последовательность была *асимптотическим базисом*. *Б. М. Бредихин.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность таких функций $\{\varphi_n(x)\}$, что

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)),\quad x \to x_0,\quad x \in M.$$

Здесь x_0 — предельная точка множества M (конечная или бесконечная). Если ясно, о каком множестве M идет речь, то пишется просто $x \to x_0$. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — А. п., и функция $\psi(x)$ определена на M, то $\{\psi(x)\varphi_n(x)\}$ также есть А. п.

Примеры А. п.:

1) $\{(x-x_0)^n\}$, $x \to x_0$;
2) $\{x^{-n}\}$, $x \to \infty$;
3) $\{e^x x^{-n}\}$, $x \to \infty$;
4) $\{z^{-n}\}$, $z \to \infty$, $z \in D$,

D — неограниченная область комплексной плоскости. А. п. вида 1), 2) и 4) наз. степенными. *М. И. Шабунин.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРЕНЕБРЕГАЕМОСТЬ — свойство случайных величин, указывающее на их индивидуально малый вклад в качестве отдельных компонент в их сумму. Это понятие существенно, напр., в так наз. *схемах серий*. Именно, пусть случайные величины X_{nk} ($n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, k_n$) взаимно независимы при каждом n, и

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}.$$

Если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}| > \varepsilon) < \delta, \qquad (1)$$

то отдельные слагаемые S_n наз. А. п. (величины X_{nk} образуют при этом так наз. нулевую схему серий). При условии (1) справедлив следующий важный результат: класс предельных распределений для $S_n - A_n$ (A_n — нек-рые «центрирующие» константы) совпадает с классом *безгранично делимых распределений*. Если распределения S_n сходятся к предельному, $k_n \to \infty$ и слагаемые одинаково распределены, то условие (1) автоматически выполняется. Если усилить требование А. п., предполагая, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при всех достаточно больших n

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |X_{nk}| > \varepsilon\right) < \delta, \qquad (2)$$

то будет верно утверждение: при условии (2) предельным распределением для $S_n - A_n$ может быть только *нормальное распределение* (в частности, с дисперсией, равной нулю, т. е. вырожденное распределение). *А. В. Прохоров.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *аппроксимативная производная*.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сеть на поверхности, образованная двумя семействами *асимптотических*

линий. А. с. существует только на неразвертывающихся поверхностях неположительной кривизны. Ортогональность А. с. характеризует *минимальную поверхность*.

В. Т. Базылев.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — *особая точка* кривой, вокруг к-рой кривая закручивается бесконечное число раз, неограниченно к ней приближаясь. Напр., А. т. *логарифмической спирали*.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА — формула, содержащая символы o — малое, O — большое или знак эквивалентности $\sim$ (*асимптотическое равенство* функций).

Примеры А. ф.

$$\sin x = x + o(x^2),\ x \to 0;$$
$$\cos x = 1 + O(x^2),\ x \to 0;$$
$$x^3 + x + 1 \sim x^3,\ x \to \infty;$$

$\pi(x) \sim x/\ln x$, $x \to \infty$ ($\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x).

Б. М. Бредихин.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА — понятие, утверждающее несмещенность оценки в пределе (см. *Несмещенная оценка*). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, S, P), где P есть одна из мер семейства $\mathcal{P}$. На семействе $\mathcal{P}$ задан функционал $g(P)$ и имеется последовательность S-измеримых функций $T_n(X_1, \ldots, X_n)$, $n=1, 2, \ldots$, математич. ожидания к-рых $\mathsf{E}_P T_n(X_1, \ldots, X_n)$ существуют. Тогда, если при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}_P T_n(X_1, \ldots, X_n) \to g(P),\ P \in \mathcal{P},$$

говорят, что T_n есть функция, асимптотически несмещенная для функционала g. Называя $X_1, X_2, \ldots$ наблюдениями и T_n оценкой, получают определение А. н. о. В простейшем случае неограниченного повторного выбора из совокупности, распределение к-рой содержит одномерный параметр $\theta \in \Theta$, А. н. о. T_n для $g(\theta)$, построенная по выборке объема n, удовлетворяет условию

$$\mathsf{E}_\theta T_n(X_1, \ldots, X_n) \to g(\theta)$$

для каждого $\theta \in \Theta$, когда $n \to \infty$.

О. В. Шалаевский.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСМЕЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ — понятие, утверждающее несмещенность критерия в пределе. Напр., в случае повторного выбора из одномерного распределения, содержащего параметр $\theta \in \Omega$, пусть H — нулевая гипотеза: $\theta \in \Omega_H$ и K — альтернатива:

$$\theta \in \Omega_K,\ \Omega_H \cup \Omega_K = \Omega,\ \Omega_H \cap \Omega_K = \varnothing.$$

Критическое множество R_n в n-мерном евклидовом пространстве, $n=1, 2, \ldots$, является А. н. к. гипотезы H с уровнем α, если

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta) \leqslant \alpha,\ \theta \in \Omega_H,$$
$$\alpha \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta),\ \theta \in \Omega_K.$$

Функция

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta)$$

наз. предельной функцией мощности критерия R_n.

О. В. Шалаевский.

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ — решение дифференциальной системы, устойчивое по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*) и притягивающее все остальные решения с достаточно близкими начальными значениями. Таким образом, решение

$$x(\tau, \xi_0),\ x(\alpha, \xi_0) - \xi_0,$$

системы

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x) \qquad (*)$$

с правой частью $f(\tau, \xi)$, заданной для всех $\tau \geqslant \alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и обеспечивающей существование и единственность решений системы (*), будет А. у. р., если оно вместе со всеми достаточно близкими решениями

$$x(\tau, \xi), \quad |\xi - \xi_0| < h \quad h > 0,$$

определено для всех $\tau \geqslant \alpha$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ, $0 < \delta < h$ такое, что $|\xi - \xi_0| < \delta$ влечет

$$\|x(\tau, \xi) - x(\tau, \xi_0)\| < \varepsilon$$

для всех $\tau \geqslant \alpha$ и

$$x(\tau, \xi) - x(\tau, \xi_0) \| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \tau \longrightarrow +\infty.$$

Понятие А. у. р. введено А. М. Ляпуновым [1]; оно широко используется в теории устойчивости наряду с различными специальными типами равномерной асимптотич. устойчивости (см. [2]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956; [2] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.

Ю. С. Богданов.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА — понятие, расширяющее идею *эффективной оценки* на случай больших выборок. Однозначного определения А. э. о. не имеет. Напр., в классич. варианте речь идет об асимптотич. эффективности оценки в подходящим образом выделенном классе оценок $\mathfrak{K}$. Именно, пусть T_n - *состоятельная оценка* одномерного параметра совокупности θ, построенная по повторной выборке объема n. Тогда $T_n \in \mathfrak{K}$, если существует дисперсия $\sigma^2(\sqrt{n}T_n)$, и в пределе при $n \to \infty$ она ограничена снизу величиной, обратной *Фишера информационному количеству*, приходящемуся на одно наблюдение. Асимптотически эффективной будет оценка $T_n^* \in \mathfrak{K}$, на к-рой указанная нижняя грань достигается. При известных условиях этим свойством обладает оценка максимального правдоподобия для θ, что и придает значимость классическому определению. Если А. э. о. T_n^* существует, то величина

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2(\sqrt{n}T_n^*)}{\sigma^2(\sqrt{n}T_n)}$$

определяет асимптотич. эффективность оценки T_n. Нек-рые варианты понятия А. э. о. принадлежат Р. Фишеру (R. Fisher), С. Рао (C. Rao) и др.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, пер. с англ., М., 1968.

О. В. Шалаевский.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ БАЗИС, асимптотический базис порядка k,— последовательность натуральных чисел и нуля, к-рая в результате ее k-кратного суммирования дает все достаточно большие натуральные числа. Число k наз. порядком А. б. Так, последовательность простых чисел есть А. б. порядка 4 (И. М. Виноградов, 1937); последовательность кубов натуральных чисел есть А. б. порядка 7 (Ю. В. Линник, 1942).

Б. М. Бредихин.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ — то же, что *аппроксимативный предел*.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД — см. *Асимптотическое разложение* функции.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ СТЕПЕННОЙ РЯД — асимптотический ряд по последовательности

$$\{x^{-n}\} \quad (x \to \infty)$$

или по последовательности

$$\{(x - x_0)^n\} \quad (x \to x_0)$$

(см. *Асимптотическое разложение* функции). А. с. р. можно складывать, перемножать, делить и интегрировать точно так же, как и сходящиеся степенные ряды.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to \infty$ асимптотич. разложения:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}.$$

Тогда

1) $Af(x)+Bg(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Aa_n+Bb_n}{x^n}$ (A, B—постоянные);

2) $f(x)\,g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}$;

3) $\frac{1}{f(x)}\sim\frac{1}{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{x^n}$, $a_0\neq 0$

(c_n, d_n вычисляются по тем же правилам, что и для сходящихся степенных рядов);

4) если функция $f(x)$ непрерывна при $x>a>0$, то

$$\int_x^{\infty}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{nx^n};$$

5) А. с. р. не всегда можно дифференцировать, однако, если $f(x)$ имеет непрерывную производную, к-рая разлагается в А. с. р., то

$$f'(x)\sim-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\,a_{n-1}}{x^n}.$$

Примеры А. с. р.:

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t}\,dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$\sqrt{x}\,e^{-ix}H_0^{(1)}(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-i\pi/4}(-i)^n\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2^{n-1/2}\pi^{3/2}n!\,x^n},$$

где $H_0^{(1)}(x)$ — *Ганкеля функция* нулевого порядка (приведенные А. с. р. расходятся при всех x).

Аналогичные утверждения имеют место и для функций комплексного переменного z при $z\to\infty$ в окрестности бесконечно удаленной точки или внутри угла. В случае комплексного переменного утверждение 5) имеет следующий вид: если функция $f(z)$ регулярна в области D: $\{|z|>a,\ \alpha<|\arg z|<\beta\}$ и если

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$$

равномерно по $\arg z$ при $|z|\to\infty$ в любом замкнутом угле, содержащемся в D, то

$$f'(z)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{z^{n+1}}$$

равномерно по $\arg z$ при $|z|\to\infty$ в любом замкнутом угле, содержащемся в D.

Лит.: (1) Копсон Э. Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; (2) Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; (3) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. П., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1962.

М. И. Шабунин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ — то же, что *асимптотическая формула*.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ — предельное значение вдоль нек-рого пути. Точнее, комплексное число α или $\alpha=\infty$ наз. А. з. функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке a замыкания $\bar{D}$ области определения D, если существует путь $L: z=z(t)$, $0\leqslant t<1$, $L\subset D$, оканчивающийся в точке a,

$$\lim_{t\to 1-0}z(t)=a,$$

вдоль к-рого

$$\lim_{z\to a}f(z)=\alpha,\quad z\in L.$$

Напр., функция $f(z)=e^z$ в точке $a=\infty$ имеет А. з. $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\infty$ соответственно вдоль путей $L_1: z=-t$, $0\leqslant t<+\infty$, и $L_2: z=t$, $0\leqslant t<+\infty$. Множества А. з. играют важную роль в теории *предельных множеств*.

Если $f(z)$ имеет в a два различных А. з., то a наз. точкой неопределенности функции $f(z)$. Для произвольной функции $f(z)$, определенной в плоской односвязной области, множество ее точек неопределенности не более чем счетно.

Данное выше определение А. з. относится к точечным А. з. Если кривая L имеет в качестве предельного множества не одну точку $a \in \partial D$, а нек-рое множество $E \subset \partial D$, то говорят также об А. з. $A(f, E)$, связанном с E.

Лит.: [1] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [2] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966.

В. И. Гаврилов, Е. Д. Соломенцев.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ — направление на регулярной поверхности, в к-ром кривизна нормального сечения поверхности равна нулю. Для того чтобы направление $du : dv$ в точке P было А. н., необходимо и достаточно выполнение условия:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0,$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности, а L, M и N — коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности, вычисленные в точке P. В эллиптической точке поверхности А. н. — мнимые, в гиперболической точке существуют два действительных А. н., в параболической точке — одно действительное А. н., в точке уплощения любое направление является А. н. А. н. являются самосопряженными направлениями (см. *Сопряженные направления*).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Е. В. Шикин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *асимптотическая формула*.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ означает, что в нек-рой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки x_0)

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x), \quad \text{где} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 1,$$

т. е. что

$$f(x) = g(x)\,[1 + o(1)]$$

при $x \to x_0$ (x_0 — конечная или бесконечная предельная точка множества, на к-ром определены рассматриваемые функции). Если функция $g(x)$ не обращается в нуль в нек-рой окрестности точки x_0, то это условие равносильно требованию

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Иначе говоря, А. р. функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ означает в этом случае, что относительная погрешность приближенного равенства функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. величина $[f(x) - g(x)]\, g(x)$, $g(x) \neq 0$, является бесконечно малой при $x \to x_0$. А. р. функций содержательно для бесконечно малых и бесконечно больших функций. А. р. функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначается $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ и обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. В силу этого совокупность бесконечно малых (бесконечно больших) при $x \to x_0$ функций распадается на классы эквивалентности бесконечно малых (бесконечно больших). Примером асимптотически равных функций (они наз. также эквивалентными) при $x \to x_0$ являются функции $u(x)$, $\sin u(x)$, $\ln[1 + u(x)]$, $e^{u(x)} - 1$, где $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$.

Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

причем из существования каждого из написанных пределов следует существование другого. См. также *Асимптотическое разложение* функций, *Асимптотическая формула*.

М. И. Шабунин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ функции $f(x)$ — такой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x),$$

что при любом целом $N \geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \psi_n(x) + o(\varphi_N(x)), \qquad (1)$$

при $x \to x_0$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — нек-рая заданная *асимптотическая последовательность* при $x \to x_0$. В этом случае пишется также

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\}, \quad (x \to x_0). \qquad (2)$$

Если ясно, о какой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ идет речь, то в (2) она не указывается.

Разложение (2) наз. асимптотическим разложением в смысле Эрдейи [2]. Разложение вида

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \to x_0), \qquad (3)$$

где a_n — постоянные, наз. асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре. При данной асимптотич. последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$ А. р. (3), в отличие от ее разложения (2), однозначно определяется самой функцией $f(x)$. Если (1) имеет место для конечного числа значений $N = 0, 1, \ldots, N_0 < \infty$, то говорят об А. р. с точностью до $o(\varphi_{N_0}(x))$. Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

наз. асимптотическими рядами. Как правило, такие ряды расходятся. Наиболее употребительны *асимптотические степенные ряды*; соответствующие им А. р. являются А. р. в смысле Пуанкаре.

Пример А. р. в смысле Эрдейи:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} x^{-2n} - \right.$$
$$\left. - \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} x^{-2n-1} \right]$$
$$(x \to +\infty),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя,

$$a_n = \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{2^n n!\, \Gamma(\nu - n + 1/2)}.$$

Понятия А. р. функции и асимптотический ряд были введены А. Пуанкаре (см. [1]) в связи с задачами небесной механики. Частные случаи А. р. были открыты и применялись еще в 18 в. (см. [2]). Асимптотич. разложения и ряды играют большую роль в различных задачах математики, механики и физики. Это вызвано тем, что многие задачи нельзя решить точно, но удается получить асимптотич. разложения решений. Кроме того, численные методы часто отказывают именно в тех случаях, когда А. р. удается сравнительно просто найти.

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta Math.», 1886, v. 8, p. 295—344; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963; [3] Erdélyi A., Wyman M., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1963, v. 14, p. 217—60.

М. В. Федорюк.

АССОЦИАТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — название, установившееся за *исчислениями* нек-рого точно охарактеризованного типа, хорошо приспособленными для задания конечно определенных ассоциативных систем (*полугрупп*). Термин «А. и.» введен А. А. Марковым. Им же было осуществлено построение развернутой теории А. и. (см. [2], гл. VI).

Всякое А. и. $\mathfrak{A}$ определяется указанием нек-рого *алфавита* A и конечного списка σ соотношений в A — пар *слов* в этом алфавите. Слова, входящие в состав соотношений, обычно наз. их частями — левыми и правыми. Допустимым относительно σ действием над словами в A наз. любая подстановка одной из частей к.-л. соотношения, принадлежащего σ, вместо любого *вхождения* другой части того же соотношения. А. и. $\mathfrak{A}$ представляет собой разрешение производить, исходя из любого слова P в A, любые до-

пустимые относительно σ действия. Обо всех словах Q, к-рые при этом получаются (в том числе и о самом исходном слове P), говорят, что они эквивалентны P в А. и. $\mathfrak{A}$ (в символич. записи $\mathfrak{A} : P \amalg Q$). Отношение $\amalg$ для любого А. и. $\mathfrak{A}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Кроме того, из $\mathfrak{A} : P \amalg Q$ и $\mathfrak{A} : R \amalg S$ следует, что $\mathfrak{A} : PR \amalg QS$. Это позволяет естественным образом сопоставить всякому А. и. $\mathfrak{A}$ нек-рую конечно определенную ассоциативную систему $K_{\mathfrak{A}}$, взяв в качестве ее элементов классы слов, эквивалентных друг другу в $\mathfrak{A}$, а в качестве операции умножения в $K_{\mathfrak{A}}$ — операцию, естественно индуцируемую операцией соединения слов в A. Так построенная ассоциативная система $K_{\mathfrak{A}}$ будет иметь единицу (элемент, представленный пустым словом); элементы $K_{\mathfrak{A}}$, представленные буквами алфавита A, будут составлять для $K_{\mathfrak{A}}$ систему порождающих элементов, а список соотношений σ будет представлять собой полную систему соотношений между упомянутыми порождающими элементами $K_{\mathfrak{A}}$ в том смысле, что элементы $K_{\mathfrak{A}}$, представленные словами P и Q, тождественны в $K_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда P и Q эквивалентны в $\mathfrak{A}$. Таким образом, распознавание тождества элементов в $K_{\mathfrak{A}}$ сводится к распознаванию эквивалентности слов в $\mathfrak{A}$. Отсюда становится понятной важность исследования разрешимости *алгоритмической проблемы* распознавания эквивалентности слов в произвольном А. и. Эта проблема была впервые сформулирована А. Туэ [1]; она заключается в том, что для произвольного А. и. $\mathfrak{A}$ требуется построить алгоритм, к-рый для любой пары слов в алфавите А. и. $\mathfrak{A}$ позволял бы за конечное число шагов выяснить, эквивалентны ли в $\mathfrak{A}$ слова, составляющие эту пару. В алгебраич. интерпретации эта проблема есть проблема тождества для ассоциативной системы $K_{\mathfrak{A}}$. Самому А. Туэ удалось решить ее лишь в весьма частных случаях. В современной интерпретации (после 30-х гг. 20 в.) этой проблемы алгоритм ищется в к.-л. точном смысле слова, напр. *частично рекурсивная функция*, *Тьюринга машина* или *нормальный алгорифм*. При такой модернизации этой проблемы уже становится осмысленным вопрос о том, нельзя ли указать такое конкретное А. и., для к-рого искомый алгоритм оказался бы невозможным. А. А. Марковым [3] и Э. Постом [4] одновременно и независимо были построены **неразрешимые** А. и., то есть А. и. с неразрешимой алгоритмич. проблемой распознавания эквивалентности слов. Эти результаты дают отрицательное решение модернизированной проблемы А. Туэ. Однако, принимая *Чёрча тезис* или к.-л. другое, эквивалентное ему предложение считать произведенное в теории алгоритмов уточнение понятия алгоритма адекватным, мы с необходимостью приходим к заключению, что и в начальной постановке проблема Туэ для нек-рого конкретного А. и. решается отрицательно.

Первоначальные примеры А. А. Маркова и Э. Поста были чрезвычайно сложными. В дальнейшем предложены более простые неразрешимые А. и.; напр., А. и. с семью весьма простыми соотношениями (см. [5]), с всего лишь тремя соотношениями (см. [6]); почти полностью решена проблема Туэ в случае А. и. с одним соотношением (см. [7]).

Естественным образом определяется **изоморфизм** одного А. и. в другое А. и., а также на другое А. и. (см., напр., [2], с. 331—34). С алгебраич. точки зрения особый интерес представляет рассмотрение таких свойств А. и., к-рые являются инвариантными относительно изоморфизмов: эти свойства суть свойства абстрактных ассоциативных систем. А. А. Марков (см. [2], с. 331—70), основываясь на своих исследованиях по проблеме распознавания эквивалентности слов в А. и.,

получил весьма общий результат, дающий отрицательное решение практически всех обсуждавшихся в то время алгоритмич. проблем, связанных с основными классификациями А. и. В частности, он показал, что если $И$ — инвариантное свойство А. и. и имеется единичное А. и. со свойством $И$, а также $\cdot$ А. и., не включаемое ни в какое А. и. со свойством $И$, то для всякого алфавита с числом букв более трех алгоритмич. проблема распознавания А. и. со свойством $И$ среди прочих А. и. неразрешима. Из этого результата непосредственно вытекает неразрешимость (для всякого алфавита, содержащего более трех букв) алгоритмич. проблем распознавания единичности А. и., конечности А. и., полугрупповости А. и., включаемости в групповое А. и., изоморфии для пар А. и. Впоследствии было показано (см. [8]), что множество пар изоморфных А. и. является рекурсивно перечислимым; использованный при этом метод позволяет также установить рекурсивную перечислимость ряда инвариантных свойств А. и.

Лит.: [1] Thue A., «Videnskapsselskapets Skrifter. 1. Mat. Naturv. Kl.», 1914, № 10; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 42); [3] его же, «Докл. АН СССР», 1947, т. 55, № 7, с. 587—90; [4] Post E. L., «J. Symb. Logic», 1947, v. 12, p. 1—11; [5] Цейтин Г. С., «Докл. АН СССР», 1956, т. 107, № 3, с. 370—71; [6] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 6, с. 1264—66; [7] Адян С. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 85, с. 1—123; [8] Нагорный Н. М., «Z. math. Logik und Grundl. Math.», 1960, Bd 6, S. 319—24. *Н. М. Нагорный.*

АССОЦИАТИВНОСТЬ, сочетательность, сочетательный закон,— свойство *алгебраической операции*. Для сложения и умножения чисел А. выражается тождествами

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ и } (ab)c = a(bc).$$

Бинарная алгебраич. операция $*$ ассоциативна (или, что то же, для $*$ выполняется закон ассоциативности), если в данной алгебраич. системе справедливо тождество

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Аналогично, тождествами

$$(x_1x_2 \ldots x_n\omega)\, x_{n+1} \ldots x_{2n-1}\omega = \\ = x_1x_2 \ldots x_i\,(x_{i+1}x_{i+2} \ldots x_{i+n}\omega)\, x_{i+n+1} \ldots x_{2n-1}\omega,$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, может быть определена А. для n-арной операции ω. *О. А. Иванова, Д. М. Смирнов.*

АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — кольца и алгебры с ассоциативным умножением, т. е. множества с двумя бинарными операциями — сложением $+$ и умножением $\cdot$, являющиеся абелевой группой по сложению и полугруппой по умножению, причем умножение дистрибутивно (слева и справа) относительно сложения. Ассоциативная алгебра, кроме того, должна быть векторным пространством над фиксированным полем F и умножение в ней связано с умножением на элементы поля условиями $\alpha(ab) = (\alpha a)\, b = a\,(\alpha b)$ для всех $\alpha \in F$, a, b из алгебры.

Первыми примерами ассоциативных колец (А. к.) и ассоциативных алгебр (А. а.) были числовые кольца и поля (поле комплексных чисел и его подкольца), алгебры многочленов, алгебры матриц над полями, кольца функций. Как самостоятельная область алгебры теория А. к. и А. а. оформилась к началу 20 в. Эта теория имеет много точек соприкосновения с многими областями математики, в особенности с алгебраич. геометрией и алгебраич. теорией чисел (коммутативные кольца), функциональным анализом (коммутативные нормированные кольца, кольца операторов и кольца функций), топологией (кольца непрерывных функций на топологич. пространствах). Из теории А. к. и А. а. выделились в самостоятельные области алгебры теория *полей* и теория *коммутативных колец* (см. также *Коммутативная алгебра*), теория представлений ассоциативных алгебр.

Теория топологич. колец и тел входит в качестве составной части в *топологическую алгебру*.

Классич. часть теории А. к. и А. а.— теория конечномерных А. а. (см. [2]). Центральные результаты этой теории: конечномерная простая (т. е. без собственных идеалов) А. а. над полем F является полной матричной алгеброй над нек-рым телом, конечномерным над F (т е о р е м а В е д д е р б е р н а); конечномерная А. а. над полем характеристики нуль (и даже более общо — сепарабельная конечномерная А. а.) есть прямая сумма (как линейных пространств) своего радикала I (т. е. максимального нильпотентного идеала) и нек-рой полупростой (т. е. с нулевым радикалом) подалгебры S, причем любые две дополнительные полупростые подалгебры S и S_1 сопряжены (см. *Веддерберна — Мальцева теорема*).

Одним из важнейших классов А. к. являются *тела* (то есть А. к., в к-рых разрешимы уравнения $ax=b$ и $ya=b$ для всех a, b из кольца, $a\neq 0$). Тела, являющиеся алгебрами над нек-рым полем, наз. *алгебрами с делением*. Теория конечномерных алгебр с делением классич. часть теории тел. Описаны все конечномерные А. а. с делением над полем действительных чисел это само поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов (*Фробениуса теорема*). Всякое конечное тело коммутативно (т е о р е м а В е д д е р б е р н а о т е л а х). Построена теория Галуа тел [5].

Центральными понятиями структурной теории А. к. являются понятия *Джекобсона радикала*, полупростоты и примитивности. А. к. наз. полупростым (в смысле Джекобсона), если его радикал Джекобсона равен нулю. Кольцо наз. примитивным (справа), если оно обладает правым неприводимым точным модулем. Всякое полупростое А. к. является подпрямой суммой примитивных колец. Каждое примитивное А. к. R есть плотное кольцо линейных преобразований нек-рого векторного пространства V над телом (т е о р е м а п л о т н о с т и Д ж е к о б с о н а); здесь плотность означает, что для любых линейно независимых элементов $v_1, \ldots, v_k$ из V и любых элементов $u_1, \ldots, u_k$ из V существует преобразование $r\in R$ такое, что $v_ir=u_i$ при $1\leqslant i\leqslant k$. Важное место в структурной теории колец занимает общая теория радикалов (см. *Радикалы колец*).

Классич. частью теории А. к. является теория *артиновых колец* (справа), т. е. колец с условием минимальности для правых идеалов. Центральный результат этой теории: А. к. будет полупростым артиновым кольцом тогда и только тогда, когда оно является прямой суммой конечного числа полных матричных колец над телами (*Веддерберна — Артина теорема*).

Большое значение в структурной теории А. к. имеет понятие (классического) кольца частных. Кольцо $Q(R)$ наз. (правым) кольцом частных своего подкольца R, если в $Q(R)$ все регулярные элементы (т. е. не делители нуля) кольца R обратимы и любой элемент из $Q(R)$ имеет вид ab^{-1}, где a, $b\in R$. А. к. обладает кольцом частных тогда и только тогда, когда для любых элементов a, $b\in R$, где b регулярен, существуют элементы $a_1, b_1\in R$ такие, что $ab_1=ba_1$ и b_1 регулярен (т е о р е м а О р е). Кольцо R обладает полупростым артиновым кольцом частных тогда и только тогда, когда оно полупервично (т. е. $I^2\neq 0$ для всякого ненулевого идеала $I\subseteq R$), удовлетворяет условию минимальности для правых аннуляторных идеалов вида

$$r(S)=\{x\in R,\ \ Sx=0\},$$

где S — подмножество R, и не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов (т е о р е м а Г о л д и). Наряду с классич. кольцами частных изучаются и кольца частных в других смыслах, в первую очередь максимальные, или полные, кольца частных [8].

Значительное внимание уделяется изучению *свободных ассоциативных алгебр*. Пусть F — поле, X — множество. Свободная А. а. с единицей $F\langle X\rangle$ над F с базой X есть алгебра некоммутативных многочленов со свободными членами от множества переменных X с коэффициентами из F. Алгебра $F\langle X\rangle$ характеризуется тем, что порождается как алгебра с единицей множеством X и любое отображение X в А. а. R с единицей может быть и притом единственным способом продолжено до гомоморфизма $F\langle X\rangle$ в R. Свободная А. а. является кольцом со свободными идеалами, т. е. правые (левые) идеалы кольца $F\langle X\rangle$ суть свободные правые (левые) $F\langle X\rangle$-модули, при этом любые базисы свободного конечно порожденного $F\langle X\rangle$-модуля содержат одинаковое число элементов (теорема Кона). Другие примеры колец со свободными идеалами — групповые алгебры свободных групп и свободные произведения А. а. с делением. Свободная А. а. $F\langle X\rangle$ является также областью с однозначным разложением: любой необратимый элемент $a\in F\langle X\rangle$ обладает представлением $a=p_1\dots p_n$, где p_i неприводимые элементы, и это представление единственно с точностью до порядка членов и подобия (два элемента a и b кольца R наз. подобными, если R/aR и R/bR изоморфны как правые R-модули). *Централизатор* каждого нескалярного элемента алгебры $F\langle X\rangle$ изоморфен алгебре многочленов $F[t]$ от одного переменного t (теорема Бергмана).

Важными классами А. а. являются *групповые алгебры* и PI-*алгебры*. Развивается теория многообразий колец.

Роль теории колец в математике возросла в связи с развитием *гомологической алгебры*. Многие известные классы колец можно охарактеризовать в терминах свойств *модулей категорий* над этими кольцами. Напр., кольцо R является полупростым артиновым тогда и только тогда, когда все правые (левые) модули над R проективны (инъективны). Кольцо R регулярно (в смысле фон Неймана) тогда и только тогда, когда все правые (левые) модули над R являются плоскими; см. также *Регулярное кольцо*, *Гомологическая классификация колец*, *Квазифробениусово кольцо*.

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. 1—2, пер. с нем., М.—Л., 1947; [2] Albert A. A., Structure of alrebras, N. Y., 1939; [3] Artin E., Nesbitt C. J., Thrall R. M., Rings with minimum conditions, Ann Arbor, 1944; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [5] его же, Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [6] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [7] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [8] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [9] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [10] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [11] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [12] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, 2, пер. с англ., М., 1963; [13] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [14] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 59—79; [15] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—180; [16] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970, с. 9—56; [17] Бокуть Л. А., Кузьмин Е. Н., Ширшов А. И., Кольца, т. 1—3, Новосибирск, 1973; [18] Divinsky N. J., Rings and radicals, L., 1965; [19] Passman D. S., Infinite group rings, N. Y., 1971; [20] Procese C., Rings with polynomial identities, N. Y., 1973.

Л. А. Бокуть.

АССОЦИАТОР элементов a, b, c кольца R — элемент, равный

$$(ab)\,c-a\,(bc);$$

обозначается (a, b, c).

К. А. Жевлаков.

АССОЦИИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ комплексного переменного — функция, получаемая каким-либо способом из заданной функции $f(z)$ при помощи нек-рой фиксированной функции $F(z)$. Напр., если

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

— целая функция, а

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

— фиксированная целая функция с $b_k \neq 0$, $k \geqslant 0$, то

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} z^{-(k+1)}$$

есть функция, ассоциированная с $f(z)$ по функции $F(z)$; при этом предполагается, что ряд сходится в нек-рой окрестности $|z| > R$. Функция $f(z)$ представляется в этом случае через $\gamma(z)$ формулой:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| = R_1 > R} \gamma(t) F(zt)\, dt.$$

В частности, если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

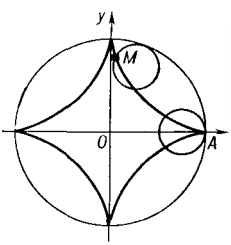
целая функция экспоненциального типа и $F(z) = e^z$, то

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-(k+1)}$$

есть функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$ (см. *Бореля преобразование*).

А. Ф. Леонтьев.

АСТРОИДА — плоская алгебраич. кривая 6-го порядка, к-рая описывается точкой M окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$; *гипоциклоида* с модулем $m = 4$. Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:



$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3};$$

параметрич. уравнения:

$$x = R\cos^3\frac{t}{4}, \quad y = R\sin^3\frac{t}{4}.$$

Имеются четыре точки возврата (см. рис.). Длина дуги от точки A:

$$l = \frac{3}{2} R \sin^2\frac{t}{4}.$$

Длина всей кривой $6R$. Радиус кривизны:

$$r_k = \frac{3}{2} R \sin\frac{t}{2}.$$

Площадь, ограниченная кривой:

$$S = \frac{3}{8}\pi R^2.$$

А. является огибающей семейства отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух взаимно перпендикулярных прямых. С этим свойством А. связано одно из ее обобщений — так наз. косая астроида — огибающая отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух прямых, пересекающихся под произвольным углом.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

АСТРОМЕТРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи астрономии, возникающие в связи с созданием опорной инерциальной системы координат в пространстве и согласованием комплекса фундаментальных астрономических постоянных на основе определения координат небесных объектов и изучения вращения Земли. Методы астрометрии основываются на теории и практике геометрич. измерений на небесной сфере и определении расстояний до светил.

Важным элементом астрометрич. исследований является возможно более точное определение направления прямой линии «наблюдатель — светило» в момент наблюдения. Поскольку изучение взаимного расположения точек более удобно и наглядно, чем изучение взаимного расположения направлений, в рассмотрение

вводится вспомогательная сферич. поверхность (так наз. небесная сфера), а все объекты принимаются находящимися от наблюдателя на равном расстоянии и расположенными на этой сфере. При этом сферич. тригонометрия позволяет ввести на небесной сфере различные системы координат и установить многочисленные соотношения между углами и дугами конфигураций небесных объектов. Эти соотношения предопределяют большую часть астрометрич. методов наблюдений и геометрич. основу астрометрич. телескопов.

Явления, изучаемые астрометрией, связаны с различного рода нерегулярностями вращения Земли (неравномерность вращения Земли, движение полюсов, прецессионно-нутационные изменения оси вращения и т. д.), с одной стороны, и собственными перемещениями небесных тел - с другой. Эти обстоятельства задают временную и качественную структуру выполняемых рядов наблюдений и приводят к необходимости использования специфических математич. методов для их анализа. Так, весьма актуальной является задача решения и исследования обширных систем линейных уравнений, насчитывающих тысячи уравнений с сотнями неизвестными, и осложняемая зачастую их недостаточной определенностью. Типичным примером возникновения подобных задач является обработка наблюдений тел солнечной системы (главным образом малых планет) для определения нульпунктов фундаментальной системы координат. Другой пример — вывод составляющих гравитационного поля Земли по наблюдениям искусственных спутников Земли, осуществляемым всемирными сетями станций слежения.

Сложность вращения Земли, отличие реальной упруго-вязкой Земли от модели абсолютно твердого тела приводят к необходимости применения методов поиска скрытых закономерностей таких, как корреляционно-спектральный анализ и различные способы сглаживания. Таковы исследования изменяемости широт и долгот и связанного с ними блуждания полюса, а также очень тонких и сложных колебаний скорости вращения Земли.

Часто специфика явлений не позволяет охватить их в одном цикле наблюдений, что приводит к перекрывающимся отдельным отрезкам наблюдений с переменными нульпунктами. Такие наблюдения требуют применения методов решений уравнений в конечных разностях. Эта тематика характерна для инструментальных исследований астрометрии, а также тех ее задач, где измеряется какая-либо линейная комбинация ошибок координат небесных тел.

Для учета ошибок наблюдений в астрометрии широко применяются методы математич. статистики (в основном линейные). *В. В. Нестеров, В. В. Подобед.*

АСТРОНОМИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математические задачи, возникающие при исследованиях небесных объектов. Для решения ряда таких задач разработаны специальные методы, к-рые нашли применение и в других разделах науки. С другой стороны, в астрономии широко используется математический аппарат, созданный для решения сугубо «земных» задач, в необходимых случаях модифицированный должным образом.

Астрономия — комплексная наука, исследующая небесные тела и их системы с различных, порой чрезвычайно далеких друг от друга, точек зрения. Это обусловливает и весьма широкий круг А. м. з.

Важным разделом астрономии является астрометрия, одна из основных задач которой состоит в определении опорной инерциальной системы координат в пространстве. Традиционно используемые в астрономии, геодезии и других разделах науки координатные системы, связанные с плоскостью земного экватора и направлением на точку весеннего равноденствия (т. е.

прямой пересечения плоскости земного экватора с плоскостью эклиптики), отнюдь не являются инерциальными и не могут быть строго зафиксированы в пространстве из-за непрерывного сложного движения обеих упомянутых плоскостей (вследствие прецессии, нутации, движения земных полюсов). Для сравнимости координаты небесных светил относят, обычно, к положению плоскости экватора и точки весеннего равноденствия в нек-рую фиксированную дату («эпоху»), причем саму определенную таким образом координатную систему фиксируют наиболее тщательно измеренными координатами нек-рого количества звезд, занесенными в специальные каталоги (фундаментальные звездные каталоги). Однако остается существенная трудность: для восстановления такой координатной системы в момент, отличный от эпохи каталога, необходимо знать, как изменятся вследствие собственных движений положения фундаментальных звезд относительно системы координат. Для преодоления этой трудности, начиная с середины 20 в., инерциальную систему координат стремятся определить относительно далеких галактик, собственные движения к-рых исчезающе малы. В связи с этим в астрометрии особенно большое значение приобретают математические задачи вычисления наиболее вероятных значений параметров, определяющих направления на небесное светило, из многократных наблюдений, а также оценка вероятностных характеристик этих значений. Решение этой задачи характерно и для большинства других разделов астрономии, поскольку астрономия в значительной мере является наукой наблюдательной.

С разнообразными математич. задачами сталкивается теоретич. астрофизика, к-рая на основе результатов наблюдений небесных объектов исследует их строение, происходящие в них физич. процессы, их эволюцию. Одной из главных проблем астрофизики является проблема строения и эволюции звезд. Теория внутреннего строения звезд приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим условия механич. и энергетич. равновесия звезды. В частных случаях решения этих уравнений выражаются через элементарные функции; в большинстве же случаев уравнения (вследствие их сложности) решают численными методами.

Исследования звездных атмосфер, так же как и процессов, происходящих в туманностях и межзвездной среде, основаны на математич. теории переноса излучения, получившей существенное развитие в астрофизике. В некоторых случаях, напр. при исследованиях прохождения излучения через плоский слой вещества, уравнение переноса излучения приводится к интегральным уравнениям, решение к-рых позволяет определить характеристики поля излучения внутри среды, а также излучения, выходящего из среды и доступного наблюдениям.

При изучении движения газовых масс в звездах и туманностях, процессов, связанных с расширением газовых облаков, столкновениями их друг с другом и с межзвездной средой, широко используется математич. аппарат газодинамики и электродинамики.

В звездной астрономии, предметом к-рой является изучение закономерностей строения, динамики и эволюции звездных систем, используются математич. зависимости, связывающие распределение тех или иных истинных характеристик звездной системы (так наз. функций распределения) с распределением наблюдаемых характеристик. Так напр., изучение зависимостей (при нек-рых дополнительных допущениях) между функциями распределения звезд по расстоянию в нек-ром телесном угле и их абсолютными и видимыми величинами (получаемыми из наблюдений) приводит к интегральному уравнению, решение к-рого позволяет выяснить закономерности распределения звездной плотности в

этом телесном угле. К таким же уравнениям приводит сопоставление функций распределения искомых пространственных скоростей звезд и наблюдаемых лучевых скоростей.

В звездной кинематике задача определения компонент скорости Солнца и характеристик вращения Галактики на основе статистич. исследований координат, собственных движений и лучевых скоростей звезд приводит к избыточной системе условных уравнений, составляемых для отдельных звезд (или для отдельных площадок неба). Математич. аппарат механики используется при решении задач звездной динамики, связанных с исследованием звездных скоплений, галактик и скоплений галактик. При этом отдельные объекты, составляющие систему, рассматриваются как материальные точки, взаимодействующие по закону тяготения, но с учетом специфич. особенностей, характерных для систем небесных тел. Решение задач небесной механики, изучающей движение небесных тел в гравитационном поле, приводит к системам дифференциальных уравнений движения. Решение наиболее общей задачи n тел, в к-рой рассматривается движение n взаимнопритягивающихся тел для произвольных начальных условий, получается методом численного интегрирования. Однако этот метод дает удовлетворительное решение только на ограниченных интервалах времени и не позволяет делать заключения об эволюции системы тел. Более полно изучена частная задача трех тел с помощью рядов по степеням времени; однако эти ряды, крайне медленно сходящиеся, непригодны для приложения к исследованиям движений конкретных тел. Исследованы также нек-рые частные случаи задачи трех тел, десяти тел (Солнце и 9 больших планет) и др.

Задачи движения конкретных небесных тел решаются с помощью разложений в ряды по степеням малого параметра и при тех или иных допущениях, упрощающих решение.

Со специфическими дифференциальными уравнениями движения сталкивается астродинамика, изучающая движение искусственных небесных тел. В решениях задач движения искусственных спутников Земли приходится учитывать возмущающие силы, обусловленные несферичностью Земли, сопротивлением атмосферы, световым давлением Солнца (в случае спутников-баллонов) и нек-рыми другими факторами.

Подробнее см. в статьях *Астрометрии математические задачи*, *Астрофизики математические задачи*, *Звездной астрономии математические задачи*, *Классической небесной механики математические задачи*.

Н. П. Ерпылев.

АСТРОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — круг задач теоретич. астрофизики, в к-рых широко используются математич. методы исследования. Основной предмет теоретич. астрофизики составляет истолкование результатов наблюдений с целью изучения строения объектов, наблюдаемых во Вселенной, а также исследования происходящих в них физич. процессов. Наряду с этим в А. м. з. развиваются нек-рые общие математич. вопросы, имеющие, кроме астрофизики, существенное значение для ряда других разделов физики и для математики. Наиболее яркий пример влияния А. м. з. на развитие математики представляет введенный впервые в А. м. з. так наз. *инвариантности принцип* [1], к-рый получил применение при решении обширного класса задач математич. физики, а также нек-рых задач вероятностей теории.

Одной из главных проблем астрофизики является изучение строения и эволюции звезд, поскольку основная масса вещества во Вселенной сосредоточена в звездах. Обычно отдельно рассматривают внутреннее строение звезд и строение звездных атмосфер. Задачи теории внутреннего строения формулируются в виде

дифференциальных уравнений, вытекающих из условий механич. и энергетич. равновесия звезды [2]. Условие механич. равновесия звезды выражает равенство силы тяготения, направленной внутрь звезды, и силы газового и светового давления, направленной наружу. Условие энергетич. равновесия отражает равенство количества энергии, вырабатываемого в нек-ром объеме звезды, и количества энергии, к-рое из этого объема выходит. Кроме условий равновесия, считаются известными уравнения состояния вещества звезды, коэффициент поглощения излучения и закон выделения энергии в результате термоядерных реакций в зависимости от плотности вещества и температуры при заданном химич. составе. Вследствие сложности уравнений для их решения обычно применяются численные методы. Иногда в качестве граничных условий используют результаты теории звездных атмосфер, что приводит к более надежным выводам. Указанные уравнения равновесия звезды в ряде частных случаев сводятся к *Эмдена уравнению*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^n = 0 \qquad (1)$$

с условиями $y=1$ и $y'=0$ при $x=0$. Для значений $n = 0$, 1, 5 решения уравнения (1) выражаются через элементарные функции. Уравнение (1) применимо, напр., в тех областях звезды, где перенос энергии осуществляется главным образом конвективными потоками, а перенос лучистой энергии сравнительно мал. Трудность развития теории внутреннего строения звезд состоит еще и в том, что звездные недра ненаблюдаемы. Обычно сопоставляют с данными наблюдений только вычисленные интегральные характеристики звезды такие, как масса, радиус и полное количество энергии, излучаемое звездой в единицу времени. Использование статистич. материала, относящегося к указанным характеристикам, позволяет строить гипотезы о возможных путях эволюции звезд.

Теория звездных атмосфер основывается на исследовании процессов переноса излучения (см. *Переноса излучения теория*). Энергия, вырабатываемая во внутренних областях звезды, после сложного процесса переноса через атмосферу, выходит наружу. Решение уравнения переноса осуществляется здесь при условии лучистого равновесия, выражающем тот факт, что каждый элемент объема атмосферы излучает столько энергии, сколько поглощает. Кроме того, обычно делается предположение о существовании локального термодинамич. равновесия. Результаты решения уравнения переноса при указанных условиях позволяют теоретически построить спектр звезды, а сопоставление с результатами наблюдений дает возможность судить о строении звездной атмосферы и о происходящих в ней процессах. В частности, на исследовании линейчатых спектров звезды основаны способы определения химич. состава звездных атмосфер.

Процессы переноса излучения происходят также в туманностях и межзвездной среде. Часто процесс переноса состоит в многократном рассеянии света при его прохождении через вещество. Солнечный свет после рассеяний в планетной атмосфере несет с собой информацию о ее строении и физич. свойствах. В атмосферах планет и в пылевых туманностях происходит анизотропное рассеяние света.

Теория переноса излучения является одним из важнейших разделов теоретич. астрофизики. Эта теория получила большое развитие в А. м. з. (см. [3], [4]) в связи с решением указанных задач астрофизики. Ее методы находят также различные применения в других разделах физики, например в геофизике (см. *Геофизики математические задачи*), в теории переноса нейтронов и при расчетах свечения плазмы. Наиболее часто

встречается случай, когда излучение проходит через плоский слой вещества. Звездные и планетные атмосферы представляют пример такого рода, поскольку их геометрич. толщина в большинстве случаев мала по сравнению с радиусом. В этом случае для изотропного рассеяния уравнение переноса излучения приводится к интегральному уравнению

$$y(x)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{x_0} K(|x-x'|)\,y(x')\,dx'+f(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ определяет распределение источников излучения в слое, а $y(x)$ — искомое поле излучения. Ядро $K(x)$ интегрального уравнения и параметр λ включают закон взаимодействия вещества с излучением, а x_0 есть толщина среды, выраженная в единицах длины свободного пробега излучения. Исследование интегральных уравнений типа (2) составляет одну из основных математич. задач теории переноса излучения. В А. м. з. развит общий метод получения точных аналитич. решений таких уравнений [4]. В частном случае, когда $x_0=\infty$, $\lambda=1$ и $f(x)\equiv 0$, а также $K(x)=E_1(x)$, где $E_1(x)$ — первая интегральная показательная функция, уравнение (2) наз. уравнением Милна. Его решение (см. *Милна проблема*) при нек-рых дополнительных условиях дает распределение температуры в атмосфере звезды. В более сложных задачах (анизотропное рассеяние, рассеяние света с учетом поляризации, рассеяние света в среде произвольной формы и т. п.) вместо искомой функции $y(x)$ возникают функции, зависящие, кроме координат, также от направления и от других величин, характеризующих поле излучения в данной точке. Для определения этих функций используются соответствующие системы интегральных уравнений, обобщающие уравнение (2).

Указанные методы служат для определения полного решения задачи, что позволяет найти как поле излучения внутри среды, так и характеристики выходящего из среды излучения. Для применений теории часто необходимо знать лишь выходящее излучение. Было показано, что определение характеристик выходящего из среды излучения можно сделать непосредственно, без предварительного нахождения полного решения. Это часто значительно упрощает задачу и осуществляется либо с использованием интегрального уравнения (2), либо путем применения принципа инвариантности. Другой путь заключается в представлении заданного слоя как суммы двух слоев и в установлении связей между характеристиками излучения, выходящего из всей среды, и характеристиками излучения на границе двух слоев. Рассмотренные возможности используются также в теории переноса нейтронов и составляют *альбедный метод*.

Наряду с теорией излучения видное место в астрофизике занимает применение методов газодинамики [5] и электродинамики [6] к исследованию звезд и межзвездной среды. Эти методы необходимы для изучения движений газовых масс в звездах и туманностях. Гидродинамич. эффекты (см. *Гидродинамики математические задачи*) в атмосферах Солнца и других звезд, расширение газовых облаков и их столкновения друг с другом и с более разреженной межзвездной средой, возникающие при этом ударные волны и турбулентные движения в межзвездной среде — некоторые из рассматриваемых здесь проблем.

Одной из самых существенных особенностей межзвездной газодинамики является необходимость учета взаимодействия ионизированного газа с магнитными полями. Это взаимодействие оказывает влияние как на движение газа, так и на изменение конфигурации и плотности энергии магнитного поля. При движении газа его частицы остаются все время как бы «приклеенными» к магнитной силовой линии, двигаясь вдоль нее либо

увлекая ее за собой при движении поперек поля. Говорят также, что силовые линии «вморожены» в вещество (см. *Вмороженности интеграл*). Уравнения движения межзвездной магнитной газодинамики включают: уравнение непрерывности (закон сохранения массы); уравнение индукции магнитного поля, выражающее принцип вмороженности; уравнение притока энергии межзвездного излучения (закон сохранения энергии); уравнение, выражающее закон сохранения импульса. При составлении системы используются уравнения электродинамики (*Максвелла уравнения*) и гидродинамики. Решение этой системы весьма осложняется нелинейностью уравнений. Обычно исследуют упрощенные варианты, напр. одномерные и автомодельные движения (см. *Магнитной гидродинамики математические задачи*).

Большое значение для развития астрофизики имеют результаты, получаемые радиоастрономич. методами. Поскольку излучение радиоволн происходит обычно в понизированном газе (плазме), то возникают задачи об определении свойств плазмы для условий, осуществляющихся в звездах и межзвездной среде [7]. Наиболее полно поведение плазмы описывается *кинетическими уравнениями*. Отличие кинетич. уравнения для плазмы от кинетического *Больцмана уравнения* для обычного газа состоит в том, что кулоновское взаимодействие заряженных частиц плазмы распространяется на сравнительно большие расстояния, тогда как в газе из нейтральных атомов и молекул силы взаимодействия существенны лишь при непосредственных столкновениях частиц.

Изучение распределения вещества в Галактике затруднено поглощением света, производимым межзвездными пылевыми частицами. Этот эффект проявляется главным образом в направлениях, близких к Млечному Пути, поскольку слой межзвездной пыли сконцентрирован вблизи плоскости Галактики. Уменьшение числа наблюдаемых галактик при приближении направления наблюдения к плоскости Галактики вызвано тем же эффектом поглощения света. Однако поглощающее вещество распределено не равномерно, а в основном в виде отдельных облаков различной величины, случайным образом распределенных в пространстве. Поэтому возникает задача о статистич. изучении видимого распределения яркости Млечного Пути и видимого распределения галактик. Указанные вопросы подробно исследованы [1] в теории флуктуации яркости Млечного Пути. При выводе уравнений был использован принцип инвариантности. Математич. вопросы теории флуктуаций яркости близки к теории нек-рых типов случайных процессов. В простейшем варианте считается, что вся экваториальная плоскость Галактики с равномерной плотностью заполнена до бесконечности звездами и поглощающими свет облаками. Если принять долю пропускаемого света q одинаковой для всех облаков и ввести $g(u)du$ вероятность того, что безразмерная яркость u заключена в пределах от u до $u+du$, то для определения функции $g(u)$ получается уравнение

$$g(u) = g'(u) = \frac{1}{q}\, g\left(\frac{u}{q}\right). \qquad (3)$$

Уравнения аналогичного типа возникают и при рассмотрении более общих моделей. Для анализа результатов наблюдений часто используют моменты исследуемых величин; поэтому решение исходных сложных уравнений не всегда необходимо. Получаемые из исходных уравнений соотношения для моментов достаточно просто и быстро приводят к цели.

Исследование структуры, динамики и эволюции звездных систем составляет предмет статистич. механики звездных систем. В ней изучаются системы тел, рассматриваемых обычно как материальные точки и взаимодействующих по закону тяготения. Важнейшими

системами являются звездные скопления, галактики и скопления галактик. Указанные задачи входят в круг вопросов, исследуемых в физич. кинетике. Однако, в отличие от изучения свойств обычного газа, при рассмотрении звездного газа встречаются весьма существенные специфич. особенности. Во-первых, для звездного газа нет состояния полного статистич. равновесия. Во-вторых, важно то, что газ находится в собственном гравитационном поле, к-рое должно быть определено наряду с другими искомыми величинами. Наконец, в-третьих, взаимодействие между звездами отличается от взаимодействия между молекулами газа тем, что относится к разряду дальнодействия, аналогичного кулоновскому взаимодействию заряженных частиц в плазме. Указанные особенности весьма усложняют теоретич. рассмотрение. Правда, при исследовании движения звезд в Галактике можно в первом приближении пренебречь взаимодействием благодаря тому, что время релаксации оказывается бо́льшим по сравнению с интервалом времени, определяющим сроки эволюции Вселенной (см. [1], [8]).

Для звездных скоплений время релаксации сравнительно невелико, и в этом случае учет взаимодействий звезд необходим. Здесь обычно используют аналогию гравитационного и кулоновского взаимодействий и применяют кинетич. уравнение Ландау. Это уравнение получено для плазмы с использованием приближения Фоккера — Планка (см. *Фоккера — Планка уравнение*) при представлении процесса диффузии в пространстве скоростей. Уравнение Ландау не может дать достаточно строгого описания процесса эволюции звездной системы, связанного с неизбежной потерей звезд. Поэтому при исследовании эволюции звездных скоплений применяют более общие кинетич. уравнения.

Одним из важнейших этапов астрофизич. исследований является получение наиболее полной и надежной информации об изучаемых объектах на основе сопоставления результатов наблюдений и теории. Обычно обсуждается рассчитанная теоретич. модель и делается проверка правильности предположений, положенных в основу ее построения. В нек-рых случаях удается избежать модельных представлений и непосредственно связать наблюдаемые характеристики с искомыми, вводя лишь минимальное количество исходных обоснованных допущений. Классич. примером такого подхода служит задача о нахождении распределения пространственной плотности звезд по распределению звезд в проекции (см. [8]). Связь между наблюдаемым и пространственным распределением плотности получается в форме интегрального уравнения Абеля, решение которого приводит к цели. Это же уравнение получается и в ряде других задач, например при изучении распределения атомов по высоте в хромосфере и электронов в короне Солнца. Во всех таких случаях делается лишь одно предположение о сферической симметрии. Более сложное интегральное уравнение получается при выводе функции распределения пространственных скоростей звезд из распределения наблюдаемых лучевых скоростей. Здесь восстанавливается функция в трехмерном пространстве по значениям интегралов от нее по всевозможным плоскостям. Рассмотренные примеры относятся к совокупности вопросов, составляющих обратные задачи. При решении обратных задач в астрофизике возникают значительные трудности и неопределенности как математич. характера, так и в получении необходимых результатов наблюдений. Математич. вопросы связаны, в частности, с корректностью постановки задач. При решении многих проблем астрофизики ценным оказывается использование метода регуляризации решения некорректных задач.

Пример некорректной обратной задачи в А. м. з. представляет нахождение оптич. свойств атмосфер планет

по измеренным фотометрич. характеристикам. При многократном рассеянии света в атмосфере и отражении от поверхности планеты происходит потеря информации о величинах, определяющих искомые оптич. свойства атмосферы. Для получения однозначного решения приходится вводить значительные упрощающие допущения, сильно ограничивающие возможности исследования. В А. м. з. обратная задача часто связана с решением интегрального уравнения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y) f(y)\, dy \qquad (4)$$

1-го рода, к-рое определяет переход от функции $F(x)$, представляющей известные результаты наблюдений некоторой величины, к искомой функции $f(x)$, дающей истинные значения величины. Результаты наблюдений по различным причинам бывают искажены, что выражается количественно функцией $A(x)$, входящей в уравнение (4) и обычно известной для данной задачи. Напр., функции $F(x)$ и $f(x)$ определяют измеренный и истинный профили спектральной линии, а функция $A(x)$ соответствует наблюдаемому профилю расширения идеально монохроматич. спектральной линии, обусловленному свойствами спектрографа.

Много обратных задач возникает в радиоастрономии как при обработке результатов наблюдений, так и при истолковании полученных данных. Переход от наблюдаемого распределения температуры к истинному в одномерном случае осуществляется с использованием уравнения (4), где функция $A(x)$ определяет свойство антенны радиотелескопа и наз. ее диаграммой. Среди радиоастрономич. исследований важное место занимает использование радиолинии с волной 21 *см*, возникающей при переходе между подуровнями сверхтонкой структуры атома водорода. Изучение межзвездного радиоизлучения на этой длине волны дает ценные сведения о структуре Галактики и ее вращении, о распределении в ней межзвездного газа, а также позволяет судить о строении центральной части Галактики, недоступной для оптич. методов. Наблюдаемые в различных направлениях профили линии имеют сложный вид вследствие влияния ряда факторов (тепловое движение атомов, хаотич. движение межзвездного газа, вращение Галактики и т. п.). Поэтому при переходе от измеренных характеристик к искомым возникает ряд своеобразных обратных задач. Для освобождения наблюдаемого профиля от замывающего влияния тепловых и хаотических макроскопич. движений газа применяется уравнение (4), где функция $A(x)$ описывает распределение скоростей. После указанной процедуры находятся систематич. скорости газа и другие величины.

Лит.: [1] Амбарцумян В. А., Научные труды, т. 1, Ер., 1960; [2] Шварцшильд М., Строение и эволюция звезд, пер. с англ., М., 1961; [3] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956; [4] его же, Курс теоретической астрофизики, М., 1967; [5] Каплан С. А., Межзвездная газодинамика, М., 1958; [6] Пикельнер С. Б., Основы космической электродинамики, 2 изд., М., 1966; [7] Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, пер. с англ., М., 1965; [8] Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, пер. с англ., М., 1948.

И. Н. Минин.

АТОМ — минимальный ненулевой элемент *частично упорядоченного множества* с нулем 0, т. е. такой элемент p, что $0 < x \leqslant p$ влечет $x = p$. *Л. А. Скорняков.*

АТОМАРНОЕ КОЛЬЦО — *область целостности* с единицей, удовлетворяющая условию максимальности для главных идеалов. Другими словами, любое семейство главных идеалов А. к. обладает максимальным элементом. Элемент кольца наз. а т о м о м, или э к с т р е м а л ь н ы м э л е м е н т о м, или н е р а з л о ж и м ы м э л е м е н т о м, если он не разложим в произведение необратимых элементов. Область целостности является А. к. тогда и только тогда, когда каждый ненулевой необратимый элемент есть произведение ато-

мов. Всякое нётерово кольцо является атомарным. Факториальные кольца — это А. к., в к-рых каждый атом является простым элементом (т. е. элементом, порождающим простой идеал). Атомарное *Безу кольцо* будет кольцом главных идеалов.

В. И. Данилов.

АТОМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω, сосредоточенное на множестве своих *атомов*. При этом множество $A \in \mathcal{A}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ наз. атомом распределения, если $P(A)>0$ и из $A \supset B \in \mathcal{A}$ следует $P(B)=0$ или $P(A \setminus B)=0$. В частном случае, когда атомы суть отдельные точки, А. р. совпадает с *дискретным распределением*.

А. В. Прохоров.

АТОМНАЯ РЕШЕТКА — решетка с нулем, для всякого ненулевого элемента a к-рой найдется *атом* $p \leqslant a$.

О. А. Иванова.

АФФИКС комплексного числа $z=a+bi$ при геометрическом его представлении — точка комплексной плоскости, соответствующая этому числу, т. е. точка с декартовыми координатами (a, b). Иногда А. не различают с самим комплексным числом.

АФФИНИТЕТ — сокращенное название для *аффинного преобразования*, определяемого невырожденной линейной подстановкой

$$\tilde{x}^i = A^i_s x^s + a^i.$$

А. П. Широков.

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, инвариантные относительно *аффинных преобразований*. Напр., простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, параллельность прямых (плоскостей). Впервые свойства геометрич. образов, переходящих друг в друга при аффинных преобразованиях, изучались А. Ф. Мёбиусом (A. F. Möbius) в 1-й пол. 19 в.; однако понятие «А. г.» возникло лишь после появления в 1872 *эрлангенской программы*, согласно к-рой каждой группе преобразований отвечает своя геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно преобразований этой группы. Группа аффинных преобразований содержит различные подгруппы, в связи с чем наряду с общей А. г. возникли подчиненные ей геометрии, отвечающие этим подгруппам: *эквиаффинная геометрия*, *центроаффинная геометрия* и др. В А. г. изучаются также вопросы дифференциальной геометрии, отвечающие той или иной аффинной подгруппе преобразований (см. *Аффинная дифференциальная геометрия*).

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 4 изд., М., 1961.

Е. В. Шикин.

АФФИННАЯ ГРУППА — фундаментальная группа преобразований *аффинного пространства*. А. г. является подгруппой проективной группы и представляется теми *проективными преобразованиями*, к-рые переводят в себя фиксированную гиперплоскость проективного пространства.

А. П. Широков.

АФФИННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий дифференциально-геометрич. свойства кривых и поверхностей, сохраняющиеся при преобразованиях *аффинной группы* или ее подгрупп. Наиболее полно изучена дифференциальная геометрия эквиаффинного пространства.

В эквиаффинной плоскости каждые два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ имеют инвариант $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. С помощью этого понятия для кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, отличной от прямой, строится инвариантный параметр

$$s = \int_{t_0}^{t} |(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})|^{1/3} dt,$$

наз. эквиаффинной дугой. Дифференциальный инвариант

$$k = \left(\frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^3r}{ds^3}\right)$$

наз. эквиаффинной кривизной плоской кривой. Постоянство эквиаффинной кривизны характеризует кривые 2-го порядка. Натуральное уравнение $k=f(s)$ определяет кривую с точностью до эквиаффинного преобразования. Вектор $n=d^2r/ds^2$ направлен по аффинной нормали к плоской кривой; аффинная нормаль в точке M, $k\neq 0$, касается геометрич. места середин хорд кривой, параллельных касательной в точке M и совпадает с диаметром параболы, имеющей в точке M соприкосновение 3-го порядка с кривой.

При переходе к общей аффинной группе у кривой рассматривают два более сложных инварианта: аффинную дугу σ и аффинную кривизну $\varkappa$. Они могут быть выражены через введенные выше инварианты s и k:

$$\sigma = \int k^{1/2}\, ds, \quad \varkappa = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{dk}{ds}$$

(в эквиаффинной геометрии сами величины s и k для краткости наз. аффинной дугой и аффинной кривизной). Подобным же образом строятся центроаффинная дуга, центроаффинная кривизна, эквицентроаффинная дуга и эквицентроаффинная кривизна плоской кривой.

В эквиаффинном пространстве каждым трем векторам a, b, c может быть отнесен инвариант (a, b, c) — объем ориентированного параллелепипеда, определяемого этими векторами. Натуральный параметр (эквиаффинная дуга) кривой $r=r(t)$ $(r\in C^3)$ определяется формулой

$$s = \int_{t_0}^{t} |(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})|^{1/6}\, dt.$$

Дифференциальные инварианты $\varkappa=(r', r''', r^{IV})$, $\tau=-(r'', r''', r^{IV})$, где штрихи означают дифференцирование по натуральному параметру, наз. соответственно эквиаффинной кривизной и эквиаффинным кручением пространственной кривой. Изучение кривой сводится к выбору того или иного сопровождающего репера; особую роль играет репер, образованный векторами

$$\left\{\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} + \varkappa \frac{\dot{r}}{4}\right\}$$

и определяемый дифференциальной окрестностью 4-го порядка рассматриваемой кривой. Разработана также центроаффинная теория пространственных кривых (см. [5]).

Для поверхности $r=r(u^1, u^2)$ в эквиаффинном пространстве, отличной от развертывающейся поверхности, строится тензор

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{|a|^{1/4}},$$

где $a_{ij}=(r_1, r_2, r_{ij})$, $a=\det(a_{ij})$, $r_i=\partial_i r, r_{ij}=\partial_{ij} r$. Вектор

$$N = \frac{1}{2} g^{ks} \nabla_k r_s,$$

где ∇_k — символ ковариантной производной в связности с метрич. тензором g_{ij}, задает направление аффинной нормали к поверхности. Аффинная нормаль проходит через центр соприкасающейся квадрики Ли. Деривационные уравнения

$$\partial_j r_i = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{s} r_s + g_{ij} N$$

определяют внутреннюю связность 1-го рода $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ поверхности. Наряду с ней возникает внутренняя связность 2-го рода $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$, определяемая деривационными уравнениями

$$\partial_j \nu_i = \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{s} \nu_s + A_{ij} \nu,$$

где ν — ковариантный вектор, определяющий касательную плоскость к поверхности и подчиненный условию нормировки $N\nu=1$. Связности $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ являются сопряженными относительно тензора g_{ij} в смысле А. П. Нордена (см. [3]). Тензор

$$T^{k}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} - \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\right),$$

играющий также основную роль в *проективной дифференциальной геометрии*, позволяет построить симметрич. ковариантный тензор

$$T_{ijk} = g_{ks}T^{s}_{ij}.$$

Строятся также две основные формы поверхности: квадратичная форма

$$\varphi = g_{ij}\,du^i\,du^j$$

и кубическая форма Фубини — Пика

$$\psi = T_{ijk}\,du^i\,du^j\,du^k.$$

Эти формы связаны условием аполярности

$$g^{ij}T_{ijk} = 0.$$

Две такие формы, удовлетворяющие дополнительным дифференциальным условиям, определяют поверхность с точностью до эквиаффинных преобразований. Все эти положения обобщаются на многомерный случай.

В аффинном и эквиаффинном пространствах выделяется много специфич. классов поверхностей: аффинные сферы (у к-рых аффинные нормали образуют связку), аффинные поверхности вращения (аффинные нормали пересекают одну собственную или несобственную прямую), аффинные минимальные поверхности и др.

Помимо кривых и поверхностей, изучаются также иные геометрич. образы эквиаффинного пространства, напр. конгруэнции и комплексы прямых, векторные поля и др.

Наряду с эквиаффинной дифференциальной геометрией разрабатывается дифференциальная геометрия общей аффинной группы и других ее подгрупп как в трехмерном, так и в многомерном пространствах (центроаффинном, эквицентроаффинном, аффинно-симплектическом, биаффинном и т. д.).

Лит.: [1] Blaschke W., Affine Differentialgeometrie, B., 1923; [2] Salkowski E., Affine Differentialgeometrie, B.-Lpz., 1934; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950; [4] Итоги науки. Геометрия. 1963, М., 1965, с. 3—64; [5] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

А. П. Широков.

АФФИННАЯ КРИВИЗНА — дифференциальный инвариант плоской кривой в геометрии общей *аффинной группы* или ее подгруппы. Обычно под А. к. понимают дифференциальный инвариант кривой в геометрии аффинной унимодулярной (или эквиаффинной) группы. В этой геометрии А. к. (точнее, эквиаффинная кривизна) плоской кривой $y=y(x)$ вычисляется по формуле

$$k = -\frac{1}{2}\left[(y'')^{-2\ 3}\right]'',$$

а аффинная (точнее, эквиаффинная) длина дуги кривой равна

$$s = \int (y'')^{1/3}\,dx.$$

Имеется геометрич. истолкование А. к. в точке M_0 кривой: если M — близкая к M_0 точка кривой, s — аффинная длина дуги M_0M, а σ — аффинная длина дуги параболы, касающейся данной кривой в точках M_0 и M, то А. к. в точке M_0 равна

$$k_0 = \pm \lim_{M \to M_0} \sqrt{\frac{720\,(\sigma - s)}{s^5}}.$$

В аффинной теории пространственных кривых и поверхностей также существуют понятия А. к., напоминаю-

щие аналогичные понятия евклидовой дифференциальной геометрии.

Лит. см. при ст. *Аффинная дифференциальная геометрия.* *А. П. Широков.*

АФФИННАЯ МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, средняя аффинная кривизна к-рой равна нулю. В отличие от обычных минимальных поверхностей, состоящих лишь из седловых точек, А. м. п. может содержать эллиптич. точки. Так, эллиптич. параболоид состоит целиком из эллиптич. точек и является А. м. п. *Е. В. Шикин.*

АФФИННАЯ НОРМАЛЬ — прямая, аффинно-инвариантным способом определенная в каждой точке гиперповерхности аффинного пространства с помощью дифференциальной окрестности 3-го порядка этой гиперповерхности; при этом существенно, чтобы у гиперповерхности не вырождалась основная квадратичная форма. А. н. в точке M плоской кривой совпадает с диаметром параболы, имеющей с кривой соприкосновение в M 3-го порядка. Аналогично истолковывается и А. н. гиперповерхности, если использовать соприкасающиеся гиперквадрики. В частности, А. н. гиперквадрики совпадает с ее диаметром. *А. П. Широков.*

АФФИННАЯ ОБОЛОЧКА множества M в векторном пространстве — множество, заполненное точками прямых, полученных при продолжении всех ненулевых отрезков с концами в выпуклой оболочке множества M. *В. А. Залгаллер.*

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M, специальный вид *связности на многообразии*, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет типовым слоем аффинное пространство A_n размерности $n=\dim M$. Структурой такого E к каждой точке $x\in M$ присоединяется экземпляр аффинного пространства $(A_n)_x$, к-рый отождествляется с касательным центроаффинным пространством $T_x(M)$. А. с. предусматривает такое сопоставление каждой гладкой кривой $L\in M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t аффинного отображения $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$, что удовлетворяется ниже сформулированное условие. Пусть M покрыто координатными областями, в каждой из к-рых фиксировано гладкое поле аффинного репера в $(A_n)_x$, у к-рого начало совпадает с x (т. е. фиксированы n гладких векторных полей, линейно независимых в каждой точке x области). Требуется, чтобы при $t\to 0$, когда x_t перемещается по L до x_0, отображение $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ стремилось к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего определялось относительно некоторого из реперов системой линейных дифференциальных форм

$$\left.\begin{aligned}&\omega^i=\Gamma^i_k\,dx^k,\ \det\|\Gamma^i_k\|\neq 0,\\&\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Итак, образом при $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ репера в точке x_t является система из точки в $(A_n)_{x_0}$ с радиус-вектором $e_i\,[\omega^i(X)\,t+\varepsilon^i(t)]$ и n векторов $e_i\,[\delta^i_j+\omega^i_j(X)\,t+\varepsilon^i(t)]$, где X — касательный вектор к L в точке x_0, причем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon^i(t)}{t}=0,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon^i_j(t)}{t}=0.$$

Многообразие M с заданной на ней А. с. наз. пространством аффинной связности. При преобразовании репера поля в произвольной точке $x\in M$ согласно формулам $e_{i'}=A^i_{i'}e_i$, $e_j=A^{i'}_j e_{i'}$, т. е. при переходе к произвольному элементу главного расслоенного пространства P реперов в касательных пространствах $(A_n)_x$ с началами в точке x, формы (1) заменяются следующими 1-формами на P:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{i'}=A^{i'}_j\,\omega^j,\\&\omega^{i'}_{j'}-A^{i'}_k\,dA^k_{j'}+A^{i'}_k A^l_{j'}\omega^k_l,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

а 2-формы

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j,\\ \Omega^i_j &= d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

преобразуются так:

$$\Omega^{i'} = A^{i'}_j \Omega^j, \quad \Omega^{i'}_{j'} = A^{i'}_k A^l_{j'} \Omega^k_l,$$

где $\Omega^{i'}$ и $\Omega_{j'}$ составлены согласно (3) из форм (2). Уравнения (3) называются структурными уравнениями А. с. на M, где левые части — так наз. *кручения формы* Ω^i и *кривизны формы* Ω^i_j — полубазовы, т. е. являются линейными комбинациями $\omega^k \wedge \omega^l$:

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,\\ \Omega^i_j &= \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Любые 1-формы ω^i и ω^i_j, заданные на P и удовлетворяющие уравнениям (3) с левыми частями вида (4), определяют нек-рую А. с. на M. Отображение $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ для кривой $L \in M$ получается следующим образом: нужно выбрать нек-рое гладкое поле репера в координатной окрестности начала x_0 кривой L, и образ репера в точке x_t определить как решение $\{x(t), e_i(t)\}$ системы

$$\left.\begin{aligned}du &= (\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_i,\\ du_j &= (\omega^i_j)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_i\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при начальных условиях $u(0)=0$, $u_i(0)=e_i$, где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой L. Кривая, описываемая в $(A_n)_{x_0}$ точкой с радиус-вектором $x(t)$ относительно x_0, наз. развертко й кривой L. Поле репера в координатной окрестности можно выбрать так, чтобы $\omega^i = dx^i$; тогда $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$. На пересечении координатных окрестностей $dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \omega^j$, т. е. $A^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ и

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}S^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},\\ R^i_{jkl} &= \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь S^i_{jk} и R^i_{jkl} составляют, соответственно, *кручения тензор* и *кривизны тензор* А. с. на M. А. с. на M может быть задана системой функций Γ^i_{jk} на каждой координатной окрестности, преобразующейся на пересечении окрестностей по формуле (5) — так наз. о б ъ е к т о м А. с. Отображение $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ получается с помощью системы (5), в к-рую следует подставить

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k.$$

Если в нек-рой окрестности точки x_0 дано векторное поле $X = \xi^i e_i$, то при $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ вектор $X_{x(t)}$ отображается в вектор $\xi^i(x_t)\, e_i(t)$ (где $\{e_i(t)\}$ — решение системы (5)), дифференциал к-рого в $(A_n)_{x_0}$ при $t=0$:

$$(d\xi^i + \xi^j \omega^i_j)\, e_i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \xi^j \Gamma^i_{jk}\right) dx^k e_i,$$

наз. *ковариантным дифференциалом* поля X относительно данной А. с. Здесь

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \xi^j \Gamma^i_{jk}$$

образуют тензорное поле, наз. *ковариантной производной* поля $X = \xi^i e_i$. Если дано второе векторное поле $Y = \eta^k e_k$, то определяется ковариантная производная поля X в направлении Y:

$$\nabla_Y X = \eta^k \nabla_k \xi^i e_i,$$

к-рая относительно произвольного поля репера может быть определена также формулой

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X) + \omega_k^i(Y)\,\omega^k(X).$$

А. с. на M может быть задана и как билинейный оператор ∇, к-рый двум векторным полям X, Y ставит в соответствие третье $\nabla_Y X$ и обладает свойствами:

$$\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X,\ \nabla_{fY}X = f\nabla_Y X,$$

где f — гладкая функция на M. Связь с вышеуказанными способами задания устанавливается формулой: $\nabla_{e_k} e_j = \Gamma_{jk}^i e_i$, где $\{e_i\}$ — поле репера; поля тензоров кручения и кривизны

$$S(X, Y) = S_{jk}^i \xi^j \eta^k e_i = \Omega^i(X, Y) e_i,$$

$$R(X, Y)Z = (R_{jkl}^i \xi^k \eta^l)\,\xi^j e_i = \Omega_j^i(X, Y)\,\omega^j(Z)\,e_i$$

определяются формулами

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Векторное поле X наз. параллельным вдоль кривой L, если $\nabla_{\dot{x}(t)} X_{x(t)} = 0$ тождественно относительно t, т. е. если вдоль L

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = 0.$$

Параллельными векторными полями осуществляется *параллельное перенесение* векторов (и вообще тензоров) в А. с., представляющее собой линейное отображение касательных векторных пространств $T_{x_t}(M) \to T_{x_0}(M)$, определяемые отображением $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$. В этом смысле каждая А. с. порождает нек-рую *линейную связность* на M.

Кривая L наз. геодезической линией в данной А. с., если ее развертка является прямой линией; другими словами, если в подходящей параметризации ее касательное векторное поле $\dot{x}(t)$ параллельно вдоль ее. Относительно локальной координатной системы геодезич. линии определяются системой

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Через каждую точку в каждом направлении проходит одна геодезическая.

Существует взаимно однозначное соответствие между А. с. на M и связностями в главных расслоенных пространствах свободных аффинных реперов в $(A_n)_x$, $x \in M$, ими порождаемыми. Замкнутым кривым с началом и концом в x соответствуют аффинные преобразования $(A_n)_x \to (A_n)_x$, к-рые образуют неоднородную *голономии группу* данной А. с. Соответствующие линейные автоморфизмы $T_x(M) \to T_x(M)$ образуют однородную группу голономии. Согласно теореме о голономии алгебры Ли этих групп определяются 2-формами кручения Ω^i и кривизны Ω_j^i. Для последних имеют место тождества Бианки:

$$d\Omega^i = \Omega_j^i \wedge \omega^j - \omega_j^i \wedge \Omega^j,\ d\Omega_j^i = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k,$$

к-рые, в частности, для А. с. без кручения, когда $\Omega^i = 0$, сводятся к следующим:

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0,\ \nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jmk}^i = 0.$$

Понятие А. с. возникло в 1917 в римановой геометрии (в виде *Леви-Чивита связности*); самостоятельный смысл оно обрело в 1918—24 в работах Г. Вейля [1] и Э. Картана [2].

Лит.: [1] Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., B., 1923; [2] Cartan E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1923, т. 40, p. 325—412; 1924, t. 41, p. 1—25; 1925, t. 42, p. 17—88; [3] Картан Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Постников М. М., Вариационная теория геодезических, М., 1965.

Ю. Г. Лумисте.

АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ — прямолинейная система координат в *аффинном пространстве*. А. с. к. на плоскости задается упорядоченной парой неколлинеарных векторов e_1 и e_2 (аффинный базис) и точкой O (начало координат). Прямые, проходящие через точку O параллельно векторам базиса, наз. осями координат. Векторы e_1 и e_2 задают на осях координат положительное направление. Ось, параллельная вектору e_1, наз. осью абсцисс, а параллельная вектору e_2,— осью ординат. Аффинными координатами точки M наз. упорядоченная пара чисел (x, y), к-рые являются коэффициентами разложения вектора OM по векторам базиса:

$$\overline{OM} = xe_1 + ye_2.$$

Первое из этих чисел x наз. абсциссой, а второе y — ординатой точки M.

А. с. к. в трехмерном пространстве задается упорядоченной тройкой линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 и нек-рой точкой O. Аналогично случаю плоскости определяются оси координат: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, и координаты точки: абсцисса, ордината и аппликата. Плоскости, проходящие через пары осей координат, наз. координатными плоскостями. *А. С. Пархоменко.*

АФФИННАЯ СФЕРА — поверхность, *аффинные нормали* к-рой пересекаются в одной точке. А. с. наз. несобственной в случае бесконечно удаленной точки и собственной — в противном случае. В частности, любая поверхность 2-го порядка является А. с. Несобственная выпуклая А. с. является эллиптич. параболоидом. *Е. В. Шикин.*

АФФИННАЯ СХЕМА — обобщение понятия *аффинного многообразия*, играющее роль локального объекта в теории схем. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Аффинная схема состоит из топологич. пространства Spec A и пучка колец $\tilde{A}$ на Spec A. При этом Spec A есть множество всех простых идеалов кольца A (называемых точками аффинной схемы), наделенное *Зарисского топологией* (или, что то же, спектральной топологией), в к-рой базис открытых множеств составляют подмножества $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, f \notin \mathfrak{p}\}$, когда f пробегает элементы кольца A. Пучок локальных колец $\tilde{A}$ определяется условием $\Gamma(D(f), \tilde{A}) = A_f$, где A_f — кольцо частных кольца A относительно мультипликативной системы $\{f^n\}_{n \geqslant 0}$.

А. с. введены А. Гротендиком [1] при построении теории схем. Схема есть окольцованное пространство, локально изоморфное А. с.

А. с. Spec A наз. нётеровой А. с. (соответственно целостной, приведенной, нормальной, регулярной), если кольцо A нётерово (соответственно целостно, без нильпотентов, целозамкнуто, регулярно). А. с. наз. связной (соответственно неприводимой, дискретной, квазикомпактной), если таковым является топологич. пространство Spec A. Пространство Spec A А. с. всегда квазикомпактно.

А. с. образуют категорию, если морфизмами А. с. считать морфизмы этих схем как локально окольцованных пространств. Каждый гомоморфизм колец $\varphi: A \to B$ определяет морфизм А. с.: (Spec B, $\tilde{B}$) $\to$ (Spec A, $\tilde{A}$), состоящий из непрерывного отображения ${}^a\varphi$: Spec $B \to$ Spec A (${}^a\varphi(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ для $\mathfrak{p} \in$ Spec B) и гомоморфизма пучков колец $\tilde{\varphi}$: $\tilde{A} \to {}^a\varphi_*(\tilde{B})$, переводящего сечение a/f^n пучка $\tilde{A}$ над множеством $D(f)$ в сечение $\varphi(a)/\varphi(f^n)$. Морфизмы произвольной схемы $(X, \mathcal{O}_X)$ в А. с. (Spec A, $\tilde{A}$) (называемые также X-значными точками схемы Spec A) взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам колец $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; тем самым сопоставление

$A \longmapsto (\operatorname{Spec} A, \tilde{A})$ является контравариантным функтором из категории коммутативных колец с единицей в категорию А. с., устанавливающим антиэквивалентность этих категорий. В частности, в категории А. с. существуют конечные прямые суммы и расслоенные произведения, двойственные конструкциям прямой суммы и тензорного произведения колец. Морфизмы А. с., соответствующие сюръективным гомоморфизмам колец, наз. замкнутыми вложениями А. с.

Наиболее важными примерами А. с. являются аффинные многообразия; другими примерами служат аффинные *групповые схемы*.

Подобно тому, как строится пучок $\tilde{A}$, для любого A-модуля M может быть построен пучок $\tilde{A}$-модулей $\tilde{M}$ на Spec A, для к-рого

$$\Gamma(D(f), \tilde{M}) = M_f = M \underset{A}{\otimes} A_f.$$

Такие пучки являются квазикогерентными пучками. Категория A-модулей эквивалентна категории квазикогерентных пучков $\tilde{A}$-модулей на Spec A; проективным модулям соответствуют локально свободные пучки. Когомологии квазикогерентных пучков на А. с. описываются теоремой Серра:

$$H^q(\operatorname{Spec} A, \tilde{M}) = 0 \text{ при } q > 0.$$

Обращение этой теоремы — критерий аффинности Серра — утверждает, что если $(X, \mathcal{O}_X)$ — квазикомпактная отделимая схема и $H^1(X, F) = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-модулей F, то X есть А. с. Существуют и другие критерии аффинности (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, t. 1, P., 1960; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126; [3] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, ч. 1, М., 1970; [4] Goodman J., Hartshorne R., «Amer. J. Math.», 1969, v. 91, № 1, p. 258—66.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

АФФИННАЯ УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА, эквиаффинная группа,— подгруппа общей *аффинной группы*, состоящая из аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства

$$\tilde{x}^i = A^i_s x^s + a^i, \qquad (*)$$

удовлетворяющих условию $\det(A^i_j) = 1$. Если истолковать величины x^i и $\tilde{x}^i$ как прямоугольные координаты точек в n-мерном евклидовом пространстве E^n, то преобразование $(*)$ сохраняет объемы n-мерных областей пространства E^n. Это позволяет ввести понятие объема в эквиаффинном пространстве — пространстве с фундаментальной А. у. г. Если в формулах $(*)$ положить $a^i = 0$, то возникает центроаффинная унимодулярная группа преобразований, изоморфная группе всех матриц порядка n с определителем, равным единице. Такая группа матриц наз. унимодулярной группой порядка n и обозначается через $\mathrm{SL}(n)$.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО, аффинное алгебраическое k-множество,— множество решений нек-рой системы алгебраич. уравнений. Пусть k поле и $\bar{k}$ — его алгебраич. замыкание. Подмножество X декартова произведения $\bar{k}^n$ наз. аффинным алгебраическим k-множеством, если его точки являются общими нулями нек-рого семейства S *многочленов кольца* $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$. Множество $\mathfrak{A}_X$ всех многочленов из $k[T_1, \ldots, T_n]$, обращающихся в нуль на X, образует идеал, к-рый наз. идеалом аффинного алгебраического k-множества. Идеал $\mathfrak{A}_X$ совпадает с радикалом идеала $I(S)$, порожденного семейством S, т. е. с множеством таких многочленов $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$, что $f^m \in I(S)$ для нек-рого натураль-

ного m. А. а. м. X и Y совпадают тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}_Y$. А. а. м. X может быть задано системой образующих идеала $\mathfrak{A}_X$. В частности, всякое А. а. м. может быть задано конечным числом многочленов $(f_1, \ldots, f_k) \in k[T]$. Равенства $f_1 = \ldots = f_k = 0$ наз. уравнениями А. а. м. X. А. а. м. пространства $\bar{k}^n$ образуют решетку относительно операций пересечения и объединения. При этом идеал пересечения $X \cap Y$ совпадает с суммой идеалов $\mathfrak{A}_X + \mathfrak{A}_Y$, а идеал объединения $X \cup Y$ — с пересечением идеалов $\mathfrak{A}_X \cap \mathfrak{A}_Y$. Все множество $\bar{k}^n$ является А. а. м., к-рое наз. аффинным пространством над полем k и обозначается $\underline{A}^n_k$; ему соответствует нулевой идеал. Пустое подмножество множества $\bar{k}^n$ тоже есть А. а. м. с единичным идеалом. Факторкольцо $k[X] = k[T]/\mathfrak{A}_X$ наз. координатным кольцом А. а. м. X. Оно отождествляется с кольцом k-регулярных функций на X, т. е. с кольцом $\bar{k}$-значных функций $f : X \to \bar{k}$, для к-рых существует такой многочлен $F \in k[T]$, что $f(x) = F(x)$ для всех $x \in X$. А. а. м. X наз. неприводимым, если оно не является объединением двух собственных аффинных алгебраич. подмножеств. Эквивалентное определение состоит в том, что идеал $\mathfrak{A}_X$ должен быть простым. Неприводимые А. а. м. вместе с проективными алгебраич. множествами являлись объектами классической алгебраич. геометрии. Они наз. соответственно аффинными алгебраическими многообразиями и проективными алгебраическими многообразиями над полем k (или k-многообразиями). А. а. м. наделяются структурой топологич. пространства. Замкнутыми множествами этой топологии *(Зарисского топологии)* являются неприводимые аффинные алгебраич. подмножества. А. а. м. неприводимо тогда и только тогда, когда оно неприводимо как топологич. пространство. Дальнейшее развитие понятия А. а. м. приводит к понятиям *аффинного многообразия* и *аффинной схемы*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских.

АФФИННОЕ КРУЧЕНИЕ — один из дифференциальных инвариантов пространственной кривой в эквиаффинном пространстве:

$$\tau = -(r'', r''', r^{IV}),$$

где штрихи означают производные по аффинному параметру от радиус-вектора кривой. Аналогичные понятия вводятся для кривых в пространствах с другими фундаментальными группами, напр. центроаффинной.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ МНОГООБРАЗИЕ, аффинное алгебраическое многообразие,— обобщение понятия *аффинного алгебраического множества*. А. м. есть приведенная *аффинная схема* X конечного типа над полем k, т. е. $X = \operatorname{Spec} A$, где A — коммутативная k-алгебра конечного типа без нильпотентных элементов. А. м. $X = \operatorname{Spec} k[T_1, \ldots, T_n]$, где $k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов над полем k, наз. аффинным пространством над k и обозначается A^n_k. Аффинная схема является А. м. тогда и только тогда, когда она изоморфна приведенной замкнутой подсхеме аффинного пространства. Каждая система образующих $x_1, \ldots, x_n$ k-алгебры A определяет сюръективный гомоморфизм $\varphi : k[T_1, \ldots, T_n] \to A$, определяемый формулой $\varphi(T_i) = x_i$. Пусть $\bar{k}$ — алгебраич. замыкание поля k. Подмножество множества $\bar{k}^n$, состоящее из общих нулей всех многочленов идеала $\ker \varphi$, является аффинным алгебраич. множеством над полем k. Координатное кольцо такого аффинного алгебраич. множества изоморфно кольцу A. В свою очередь каждое аффинное алгебраич. множество X над полем k определяет А. м.

Spec $k[X]$, где $k[X]$ — координатное кольцо X. При этом множество точек А. м. находится во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми подмногообразиями соответствующего аффинного алгебраич. множества.

С каждым А. м. X — Spec A связан функтор на категории k-алгебр, определяемый соответствием

$$B \longrightarrow X(B) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, B).$$

В случае, когда $B = \bar{k}$ (соответственно $B = k$), элементы множества $X(\bar{k})$ (соответственно $X(k)$) наз. геометрическими (соответственно рациональными) точками А. м. X. Множество $X(\bar{k})$ находится в биективном соответствии с множеством максимальных идеалов Specm (A) кольца A, а также с множеством точек любого аффинного алгебраич. множества V, координатное кольцо к-рого изоморфно A. При этом спектральная топология в пространстве X индуцирует на всюду плотном подмножестве Specm (A) топологию, к-рая соответствует топологии Зарисского на V.

И. В. Долгачев.

АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ евклидова пространства — взаимно однозначное точечное отображение плоскости или пространства на себя, при к-ром трем точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой. Таким образом, при А. п. прямые переходят в прямые. А. п. плоскости переводит пересекающиеся прямые в пересекающиеся, параллельные — в параллельные. При А. п. пространства каждая плоскость аффинно отображается на нек-рую плоскость; при этом пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся, параллельные — в параллельные. Кроме того, сохраняется взаимное расположение двух прямых: пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, параллельные — в параллельные, скрещивающиеся — в скрещивающиеся.

При А. п. отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению их образов. Сохраняется также отношение площадей двух квадрируемых фигур (на евклидовой плоскости) и отношение объемов двух кубируемых тел (в евклидовом пространстве). При А. п. множество векторов плоскости (пространства) взаимно однозначно отображается на множество векторов плоскости (пространства) и это отображение является линейным. А. п. задается в аффинной системе координат невырожденным (неоднородным) *линейным преобразованием*; таким образом, в случае плоскости А. п. аналитически выражаются при помощи формул

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13},$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}$$

с дополнительным требованием

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аналогично задаются А. п. в пространстве.

При А. п. алгебраич. линия переходит в алгебраическую; при этом порядок линии сохраняется. В частности, линия 2-го порядка переходит в линию 2-го порядка, причем эллипсы переходят в эллипсы, гиперболы — в гиперболы, параболы — в параболы и т. д.

Примеры А. п.: изометрич. преобразование, преобразование подобия, равномерное сжатие плоскости к прямой. Всякое А. п. плоскости является произведением изометрич. преобразования и двух равномерных сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым. Всякое А. п. пространства является произведением изометрич. преобразования и трех равномерных сжатий к трем попарно перпендикулярным плоскостям.

А. п. образуют группу; преобразования подобия составляют подгруппу этой группы; множество изометрич. преобразований — подгруппу группы преобразований подобия.

А. п. являются самыми общими взаимно однозначными отображениями плоскости (пространства) на себя, сохраняющими прямые линии.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

А. С. Пархоменко.

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО над полем k — множество A (элементы к-рого наз. точками А. п.), к-рому сопоставлены векторное пространство L над k (наз. пространством присоединенным к A) и отображение множества $A\times A$ в пространство L (образ элемента $(a, b)\in A\times A$ обозначается $\overrightarrow{ab}$ и наз. вектором с началом a и концом b), обладающее свойствами:

для любой фиксированной точки a отображение $x\to\overrightarrow{ax}$, $x\in A$, является биекцией A на L,

для любых точек $a, b, c\in A$ выполняется соотношение Шаля:

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}+\overrightarrow{ca}=\overrightarrow{0},$$ где $\overrightarrow{0}$ — нулевой вектор.

Размерностью А. п. A наз. размерность L. Точка $a\in A$ и вектор $l\in L$ определяют другую точку, обозначаемую $a+l$, т. е. аддитивная группа векторов пространства L транзитивно и свободно действует на А. п., соответствующем L.

Примеры. 1) Множество векторов пространства L является А. п. $A(L)$, присоединенное к нему пространство совпадает с L. В частности, поле скаляров есть А. п. размерности 1. Если L k^n, то $A(k^n)$ наз. n-мерным координатным А. п. над полем k, точки его $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, \ldots, b_n)$ определяют вектор $\overrightarrow{ab}=(b_1-a_1, \ldots, b_n-a_n)$.

2) Дополнение к любой гиперплоскости в проективном пространстве над полем k является А. п.

3) Множество решений системы линейных (алгебраических или дифференциальных) уравнений является А. п., присоединенным к к-рому является пространство решений соответствующей однородной системы уравнений.

Подмножество A' А. п. A наз. аффинным подпространством (или линейным многообразием) в A, если множество векторов $\overrightarrow{ab}$, $a, b\in A$ образует подпространство пространства L. Каждое аффинное подпространство $A'\subset A$ имеет вид $a+L'=\{a+l \mid l\in L'\}$, где L' — нек-рое подпространство в L, а a — произвольный элемент из A'.

Отображение $f\colon A_1\to A_2$ А. п. A_1 в A_2 наз. аффинным, если существует линейное отображение присоединенных векторных пространств $\varphi\colon L_1\to L_2$ такое, что $f(a+l)=f(a)+\varphi(l)$ для любых $a\in A_1$, $l\in L_1$. Биективное аффинное отображение наз. аффинным изоморфизмом. Все А. п. одинаковой размерности аффинно изоморфны между собой.

Аффинные изоморфизмы А. п. A в себя образуют группу, наз. аффинной группой А. п. A и обозначаемую $\mathrm{Aff}(A)$. Аффинная группа А. п. $A(k^n)$ обозначается $\mathrm{Aff}_n(k)$. Каждый элемент $f\in\mathrm{Aff}_n(k)$ задается формулой

$$f((a_1, \ldots, a_n))=(b_1, \ldots, b_n),$$

где

$$b_i=\sum\nolimits_j a_i^j a_j+c_i,$$

(a_i^j) — обратимая матрица. Аффинная группа $\mathrm{Aff}(A)$ содержит инвариантную подгруппу, наз. подгруппой параллельных переносов, состоя-

щую из отображений $f\colon A\to A$, для к-рых отображение $\varphi\colon L\to L$ является тождественным. Эта группа изоморфна аддитивной группе векторов пространства L. Отображение $f\to\varphi$ определяет сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Aff}(A)$ в общую линейную группу GL, ядром к-рого является подгруппа параллельных переносов. Если L — евклидово пространство, то прообраз ортогональной группы наз. подгруппой евклидовых движений. Прообраз специальной линейной группы SGL наз. эквиаффинной подгруппой (см. *Аффинная унимодулярная группа*). Подгруппа $G_a\subset\mathrm{Aff}_n(A)$, состоящая из отображений $f\colon A\to A$ таких, что $f(a+l)=a+\varphi(l)$ для нек-рого $a\in A$ и любых $l\in L$, наз. центроаффинной подгруппой, она изоморфна общей линейной группе GL пространства L.

В алгебраич. геометрии А. п. также наз. *аффинные алгебраические множества*, *аффинные многообразия* или *аффинные схемы* специального вида. Каждое конечномерное А. п. можно, в свою очередь, снабдить структурой аффинного алгебраич. множества, снабженного топологией Зарисского.

Аналогично строится А. п., ассоциированное с векторным пространством над телом k.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

И. В. Долгачев, А. П. Широков.

АФФИННОЕ ПСЕВДОРАССТОЯНИЕ — число $\rho=(\overline{MM}^*, t)$, равное модулю векторного произведения векторов $\overline{MM}^*$ и t, где M^* — произвольная точка в *эквиаффинной плоскости*, M — точка на плоской кривой $r=r(s)$, s - аффинный параметр кривой, а $t=dr/ds$ — касательный вектор в точке M. Это число ρ наз. А. п. от M^* до M. Если точку M^* зафиксировать, а точку M перемещать по кривой, то А. п. от M^* до M принимает стационарное значение тогда и только тогда, когда M^* оказывается расположенной на аффинной нормали кривой в точке M. Аналогично можно определить А. п. в эквиаффинном пространстве после задания гиперповерхности.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ РАССТОЯНИЕ — инвариант, определяемый двумя линейными элементами в *эквиаффинной плоскости*. Линейным элементом (M, m) наз. совокупность точки M и проходящей через нее прямой m. Для двух линейных элементов (M, m) и (N, n) А. р. равно $2f^{1/3}$, где f — площадь треугольника MNP, P - точка пересечения прямых m и n. А. р. для двух линейных элементов, касающихся параболы, равно аффинной длине дуги этой параболы (см. *Аффинный параметр*). В трехмерном эквиаффинном пространстве тоже определяется А. р., если пользоваться элементами, состоящими из попарно инцидентных точки, прямой и плоскости.

А. П. Широков.

АФФИННЫЙ МОРФИЗМ — морфизм *схем* $f\colon X\to S$ такой, что прообраз любой открытой аффинной подсхемы в S является аффинной схемой; при этом схема X наз. аффинной S-схемой.

Пусть S — схема, A — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_S$-алгебр и пусть U_i — открытые аффинные подсхемы в S, образующие покрытие схемы S. Тогда склейка аффинных схем $\mathrm{Spec}\,\Gamma(U_i, A)$ определяет аффинную S-схему, обозначаемую $\mathrm{Spec}\,A$. Обратно, любая аффинная S-схема, определяемая А. м. $f\colon X\to S$, изоморфна (как схема над S) схеме $\mathrm{Spec}\,f_*(\mathcal{O}_X)$. Множество S-морфизмов S-схемы $f\colon Z\to S$ в аффинную S-схему $\mathrm{Spec}\,A$ находится в биективном соответствии с гомоморфизмами пучков $\mathcal{O}_S$-алгебр $A\to f_*(\mathcal{O}_Z)$.

Замкнутые вложения схем или произвольные морфизмы аффинных схем являются А. м.; другие примеры А. м. доставляют целые морфизмы и конечные морфизмы. Так, морфизм нормализации схемы есть А. м. Свойство морфизма быть А. м. сохраняется при композиции и замене базы.

Лит.: [1] Гротендик А., В сб.: Международный математический конгресс в Эдинбурге. 1958, М., 1962, с. 116—37; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

АФФИННЫЙ ПАРАМЕТР, аффинная длина дуги,— параметр на кривой, к-рый сохраняется при преобразованиях *аффинной группы* и для определения к-рого необходимо знать производные от радиус-вектора кривой наиболее низкого порядка. Больше всего известен параметр, инвариантный по отношению к эквиаффинной, т. е. *аффинной унимодулярной группе*. Для плоской кривой $r=r(t)$ такой А. п. вычисляется по формуле

$$s=\int_{t_0}^{t}(\dot{r},\ddot{r})\,|^{1/3}\,dt,$$

где $(\dot{r},\ddot{r})$ — косое произведение векторов $\dot{r}$ и $\ddot{r}$. В частности, для аффинной длины дуги M_0M_1 параболы А. п. $s=2f^{1/3}$, где f — площадь треугольника, образованного хордой M_0M_1 и касательными к параболе в точках M_0 и M_1. Аналогично вводится А. п. пространственной кривой в геометрии общей аффинной группы или какой-либо ее подгруппы.

А. П. Широков.

АФФИННЫЙ РЕПЕР — совокупность n линейно независимых векторов e_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ n-мерного аффинного пространства A_n и точки O. Точка O наз. начальной точкой, а векторы e_i — масштабными векторами. По отношению к А. р. каждая точка M определяется n числами — координатами x^i, входящими в разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по масштабным векторам: $\overrightarrow{OM}=x^se_s$. Задание двух А. р. определяет единственное аффинное преобразование пространства A_n, переводящее первый репер во второй (см. также *Аффинная система координат*).

А. П. Широков.

АФФИННЫЙ ТЕНЗОР — элемент *тензорного произведения* p экземпляров n-мерного векторного пространства E_n и q экземпляров дуального ему векторного пространства E_n^*. Такой тензор наз. тензором типа (p, q), а число $p+q$ определяет валентность тензора. После выбора в пространстве E_n базиса $\{e_i\}$ А. т. типа (p, q) определяется с помощью n^{p+q} координат $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, преобразующихся при замене базиса $e_{i'}=A^s_{i'}e_s$ по закону

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{i'_1\ldots i'_q}=A^{i'_1}_{s_1}\ldots A^{i'_p}_{s_p}A^{t_1}_{j'_1}\ldots A^{t_q}_{j'_q}T^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_q},$$

где $A^s_{j'}\ A^{i'}_s=\delta^{i'}_{j'}$. Принято говорить, что по верхним индексам координаты тензора преобразуются контравариантно, а по нижним — ковариантно.

А. П. Широков.

АФФИНОР — *аффинный тензор* типа (1,1). Задание А. с координатами f^i_j эквивалентно заданию эндоморфизма векторного пространства по правилу $v^i=f^i_sv^s$. Тождественному эндоморфизму отвечает единичный А. Соответствие, относящее каждому А. матрицу $\|f^i_j\|$, осуществляет изоморфизм между алгеброй А. и алгеброй матриц. Иногда в литературе А. определяется как общий аффинный тензор.

А. П. Широков.

АЦИКЛИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ — компонента множества разделяющих точек и концевых точек континуума.

А. А. Мальцев.

АЦИКЛИЧНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум с тривиальными *гомологий группами*.

П. С. Александров.

АЭРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с решением основных уравнений аэродинамики, к-рые точно описывают законы движения газообразной среды и ее силового взаимодействия с движущимися в этой среде твердыми телами. Исключение составляет турбулентность, для к-рой не построена сколько-нибудь удовлетворительная математич. модель. Те процессы, при к-рых турбулентность не возни-

кает или не играет существенной роли, могут быть в принципе достаточно полно исследованы с помощью математич. решения соответствующих уравнений. Реальные возможности решения отстают от принципиальных, и на основе оценок порядков различных членов в уравнениях создаются упрощенные математич. модели для различных классов аэродинамич. процессов, в к-рых отброшены те или другие «малые» члены из полной системы уравнений аэродинамики. Даже для таких упрощенных моделей возможность получения аналитич. решений ограничена простейшими случаями и в решении практич. задач аэродинамики широко использовались численные методы. С появлением ЭВМ численные методы стали главенствующими.

В соответствии с характером уравнений А. м. з. можно разбить на четыре крупных раздела.

1) Задачи аэродинамики идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Слово «жидкость» применяется здесь в общем смысле: капельная жидкость и газы.

2) Задачи аэродинамики вязкой жидкости.

3) Задачи аэродинамики излучающего газа.

4) Задачи аэродинамики разреженного газа.

Уравнения идеальной жидкости получаются из общих уравнений при неограниченном возрастании числа Рейнольдса, характеризующего порядок отношения инерционных сил к силам вязкости.

Для большинства прикладных задач аэродинамики самолетов и ракет, гидродинамики корабля числа Рейнольдса весьма велики (10^6 10^8), так что модель идеальной жидкости весьма точно описывает процессы обтекания тел в этих условиях, за исключением области пограничного слоя. Система уравнений аэродинамики идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho \boldsymbol{g} - g\,\mathrm{grad}\, p \quad \text{(уравнение движения)},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{V} = 0 \quad \text{(уравнение неразрывности)},$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + U\right) = \rho\,(\boldsymbol{gV}) - \mathrm{div}\,(p\boldsymbol{V}) \quad \text{(уравнение сохранения энергии)}$$

(где $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести, U — внутренняя энергия) является системой уравнений 1-го порядка относительно искомых функций. Это остается в силе и для смесей химически реагирующих газов: к упомянутым уравнениям прибавляются уравнения переноса компонентов смеси и в уравнении энергии добавится выделение тепла вследствие химич. реакций.

Из модели идеальной жидкости выделяется ряд более упрощенных моделей. Важнейшими являются модель невесомой и модель несжимаемой жидкости. Первая модель предельный случай общей модели при неограниченном возрастании числа Фруда, характеризующего порядок отношений сил инерции к силам тяжести. Эта модель весьма точна в приложении к аэродинамике самолетов и ракет (число Фруда порядка 10^2 10^3). Однако для гидродинамики корабля и особенно в метеорологич. применениях аэродинамики сила тяжести играет существенную роль (число Фруда порядка $\leqslant 1$).

Уравнение несжимаемой жидкости получается из общей системы, если в ней положить плотность $\rho = \mathrm{const}$. К этой форме уравнений движения можно придти при стремлении к нулю числа Маха (отношения характерной скорости звука в жидкой среде). В общем случае такое утверждение неверно. Оно справедливо лишь при числах Фруда $\geqslant 1$ (должно быть $\mathrm{Ma} \ll \mathrm{Fr}$), а также для процессов, близких к стационарным: число Струхаля (Строухала) — критерий подобия нестационарных движений жидкости или газа — порядка $\leqslant 1$.

Модель несжимаемой жидкости наиболее проста. Для нее вся система уравнений сводится к одному уравне-

нию Лапласа для потенциала скорости Φ ($\operatorname{grad}\Phi = V$). Однако только в случае плоскопараллельных движений невесомой жидкости и осесимметричных движений около тел вращения решение аэродинамич. задач сводится к классич. задачам теории непрерывного потенциала.

Задача обтекания профиля заданной формы решается классич. методами конформных преобразований. Обтекание тел вращения под нулевым углом атаки определяется классич. решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Ввиду практич. важности этих задач (определение характеристик крыловых профилей, фюзеляжей) были разработаны многочисленные приемы их решения, позволившие относительно простыми вычислениями получить приемлемую точность решения. При использовании ЭВМ эти приемы теряют свой смысл, так как точные численные методы решения указанных задач относятся к простейшим задачам вычислительной математики.

В пространственном случае формальное решение задачи Неймана для потенциала скоростей лишь в исключительных случаях может соответствовать физически реальной картине обтекания. В вязкой жидкости за телом следует вихревой след. При увеличении числа Рейнольдса этот след утоньшается (при безотрывном обтекании) и в пределе переходит в бесконечно тонкую вихревую поверхность, интенсивность вихревого слоя к-рой лишь в редких случаях обращается в нуль (напр., при плоскопараллельных движениях). Поэтому реальными пространственными задачами несжимаемой жидкости являются задачи с разрывным потенциалом скорости в области течения. Положение этой поверхности разрыва неизвестно, поэтому точная задача обтекания пространственных тел при наличии поверхностей разрыва потенциала в потоке является весьма сложной нелинейной задачей. Лишь в линейном приближении, то есть в предположении, что обтекаемое тело мало возмущает основной равномерный поток (тонкое крыло под малым углом атаки), задача получила решение. В этом случае вихревую поверхность можно считать горизонтальной, условием на ней — постоянство разрыва потенциала вдоль потока. На площади проекции тела заданы нормальные производные от потенциала скорости. В этой постановке были получены аналитич. решения (для круглого и эллиптич. крыла). Для любой же формы крыла разработаны численные методы решения, к-рые делают задачу достаточно простой (см. *Крыла теория*).

В задачах для случая тяжелой жидкости основная трудность состоит в нелинейных граничных условиях для потенциала на свободной поверхности. В точной постановке решены лишь плоские задачи теории волн. Весьма мало продвинута пространственная задача о волнах конечной амплитуды. В то же время в линеаризованной постановке (малые амплитуды волн) задача исследована достаточно полно, и именно линейная теория является основой расчета волнового сопротивления корабля.

Выход летательных аппаратов на большие околозвуковые и сверхзвуковые скорости стимулировал быстрое развитие методов решения задач аэродинамики сжимаемой жидкости. Методы существенно различны в разных диапазонах скоростей: дозвуковые скорости течений, трансзвуковые и сверхзвуковые. В дозвуковом диапазоне уравнения аэродинамики остаются эллиптическими и качественный характер решений сохраняется тем же, что и для несжимаемой жидкости.

В начальный период исследований по аэродинамике сжимаемой жидкости были выполнены многочисленные работы, позволяющие оценивать влияние сжимаемости на аэродинамич. характеристики обтекаемых тел. Все эти методы в том или ином виде использовали линеаризацию относительно скорости невозмущенного потока. Исключением явился метод Христиановича, который

позволял находить точные решения уравнений дозвуковой аэродинамики, но для тела неизвестной заранее формы.

Задачи дозвуковой аэродинамики в практике имеют те же трудности, что и соответствующие задачи для несжимаемой жидкости: решение задач для плоскопараллельных и осесимметричных течений может быть получено численными методами без значительных трудностей *(интегральных соотношений метод, установления метод)*. В случае пространственных течений с разрывным потенциалом скоростей решение может быть получено лишь для линеаризированных уравнений. Но эти последние элементарным преобразованием сводятся к уравнениям для несжимаемой жидкости с условиями на границе и на поверхности разрыва, аналогичными несжимаемой жидкости.

Наиболее сложной для математич. решений (в том числе и численных) является область трансзвуковой аэродинамики. Наличие местных сверхзвуковых (гиперболических) зон, заканчивающихся почти всегда ударными волнами, не позволяет вводить к.-л. аналитич. аппроксимации. В то же время эти задачи обладают главным недостатком уравнений эллиптич. типа — распространение влияния любого возмущения на все пространство. Для решения задач трансзвуковой аэродинамики наиболее подходящим является метод установления, заключающийся в том, что решается нестационарная аэродинамич. задача (исходя из произвольного начального состояния), а решение стационарной задачи обтекания тела трансзвуковым потоком получается как предел решения нестационарной задачи при стремлении времени к бесконечности. Метод этот весьма трудоемкий, но по мере роста эффективности ЭВМ он становится практически вполне осуществимым.

Сверхзвуковая аэродинамика по методам математич. исследований разделяется на три области.

1) Чисто сверхзвуковые течения.

2) Смешанные течения, с образованием локальных дозвуковых зон.

3) Высокотемпературные гиперзвуковые течения, при к-рых в газе возникают химич. реакции.

При более высоких скоростях и, как следствие, температурах возникает ионизация и существенными становятся процессы излучения. Эта часть гиперзвуковой аэродинамики выделяется в специальный раздел, так как математич. задачи, связанные с указанными процессами, резко отличаются от задач «прозрачного» газа.

Задачи чисто сверхзвуковых течений наиболее полно исследованы. Разработанные здесь численные методы характеристик, конечно разностный методы и полухарактеристические позволяют сравнительно просто рассчитывать не только плоскопараллельные или осесимметричные течения, но и пространственные. Исчерпывающе разработана также линейная теория сверхзвуковых течений. Для очень многих практических задач она позволяет получать решения в аналитической форме. Некоторую сложность в этих задачах представляют случаи возникновения слабых ударных волн. Но и эти трудности вычислительного, а не принципиального характера.

В практическом отношении эти задачи ограничиваются обтеканием заостренных тел, а также задачами внутренней аэродинамики (расчет сопел). В то же время при больших сверхзвуковых скоростях не используются заостренные тела (обгорание острых кромок), а у затупления обязательно образуется местная дозвуковая область. После расчета этой области дальнейший расчет течения (уже чисто сверхзвукового) проводится методами сверхзвуковой аэродинамики.

По сравнению с аэродинамикой трансзвуковых течений задачи сверхзвуковой аэродинамики с местными дозвуковыми зонами, хотя таковые являются смешанными,

имеют то преимущество, что эти зоны ограничены и не только ограничены, но представляют собой, как правило, узкие зоны в окрестности затупления. Именно это позволило разработать эффективные численные методы для расчета местных дозвуковых зон (метод интегральных соотношений, метод обратных задач, а также метод установления). Следует, однако, отметить, что строгого математич. исследования этих задач пока (1977) не существует. Нет доказательства существования и единственности решения. Поэтому численные методы строятся на основании математич. гипотезы, что условие непрерывности скоростей и ускорений при переходе из дозвуковой в сверхзвуковую область выделяет единственное решение, к-рое и является физически реальным. Все результаты численных расчетов подтверждают эту гипотезу.

Как уже было сказано, после расчета местной дозвуковой зоны (включая сверхзвуковую часть области влияния), дальнейший расчет течения проводится методами чисто сверхзвуковой аэродинамики.

Существует еще круг задач, связанных с гиперзвуковым обтеканием тонких тел (до возникновения химич. реакций). Гиперзвуковые течения возле тонких тел (исключая область затупления), характеризуются малыми изменениями составляющей скорости вдоль основного потока. Этот факт позволяет упростить уравнения так, что задача обтекания тонкого тела заданной формы (в плоском и осесимметричном случаях) становится аналогичной одномерной нестационарной задаче. На этом пути были получены важные качественные характеристики гиперзвуковых течений и установлены приближенные законы подобия, широко используемые также при анализе результатов численных расчетов, позволяя сводить их к весьма компактным зависимостям в широком диапазоне чисел Маха и геометрич. параметров тела.

Аэродинамич. задачи для химически реагирующего газа приводят к необходимости совместного решения уравнений движения и уравнений химич. кинетики. Несмотря на все усложнение системы уравнений, численные методы решения этих задач не отличаются принципиально от задач аэродинамики совершенного газа, приводя лишь к значительному увеличению трудоемкости соответствующих расчетов. Такие расчеты широко внедрены в практику, и поскольку для этого температурного диапазона моделирование натурных условий в аэродинамич. трубах практически неосуществимо, расчетные методы являются основным средством определения аэродинамич. характеристик гиперзвуковых аппаратов.

Теория вязкой жидкости имеет два главных направления — теорию полных уравнений вязкой жидкости (*Навье — Стокса уравнения*) и *пограничного слоя теорию*. Уравнения пограничного слоя представляют собой главный член асимптотич. разложения уравнений Навье — Стокса вблизи твердой границы, на к-рой происходит полное или частичное прилипание частиц жидкости к твердой поверхности. Именно это условие нарушает коренным образом решения, соответствующие идеальной жидкости вблизи поверхности обтекаемого тела. Погрешность уравнений пограничного слоя составляет порядок $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, т. е. эта теория справедлива при больших числах Рейнольдса (при этом лишь в областях плавного безотрывного обтекания). Несмотря на то, что уравнения пограничного слоя сохраняют все основные члены вязких напряжений, математическая их структура значительно проще. Если полные уравнения являются уравнениями эллиптич. типа, то уравнения пограничного слоя — параболич. типа с характеристиками, направленными по нормали к поверхности тела. Поэтому они дают возможность «послойного» расчета, т. е. перехода от одного сечения пограничного слоя

к другому, независимо от к.-л. условий вне промежутка между этими сечениями.

Важное практич. значение теории пограничного слоя (расчет сопротивления, температур поверхности, скорости разрушения поверхности при гиперзвуковых скоростях полета) породило многочисленные приближенные методы его расчета (метод Польхаузена, однопараметрич. метод Кочина — Лойцянского и др.). Однако при применении ЭВМ все эти упрощенные приемы становятся ненужными, так как задача точного численного решения уравнений пограничного слоя, даже в сложных случаях химически реагирующего высокотемпературного газа, не представляет сколько-нибудь большой трудности. Численные схемы могут быть построены таким образом, что на каждом шаге по переменной x (вдоль касательной к контуру тела) система уравнений разбивается на совокупность разделенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, что дает весьма большие вычислительные преимущества.

Сказанное относится к плоскопараллельным и осесимметричным течениям. Трехмерный пограничный слой имеет более сложную структуру. Сами уравнения трехмерного слоя существенно зависят от геометрии обтекаемого тела. Методы решения трехмерного пограничного слоя гораздо меньше разработаны, отчасти потому, что на практике широко используются расчеты по плоским сечениям, хотя и мало обоснованные, но дающие во многих случаях достаточную точность. Для точных уравнений трехмерного слоя нет принципиальных трудностей в решении.

Методы решения полной системы уравнений вязкой жидкости, за исключением немногих частных случаев, когда удавалось получать аналитич. решение, начали развиваться с использованием ЭВМ. Основная трудность в решении этих уравнений состоит в их высоком порядке и неограниченности области влияния. В простейшем случае стационарных движений вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости уравнения приводятся к системе двух уравнений 2-го порядка относительно функции тока ψ и вихря скорости ω. В безразмерной форме их можно записать в виде:

$$\Delta\omega = 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),$$

$$\Delta\psi = \omega.$$

Граничные условия на твердых границах имеются только для функции тока $\psi = \text{const}$, $\partial\psi/\partial n = 0$. Решение этой нелинейной системы 4-го порядка может быть получено лишь с помощью нек-рого итерационного процесса. Итерационный процесс строится таким образом, чтобы на каждом шаге итерации получались раздельные уравнения для вихря и функции тока. Это разделение нужно проводить не только в уравнениях, но и в граничных условиях. Напр., выбирая за первое приближение реше-

ние уравнений идеальной жидкости, можно получить следующую систему итераций:

$$\Delta\omega_{n+1} - 2\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\omega_n}{\partial y}\right),$$

$$\Delta\psi_{n+1} = \omega_{n+1}$$

при граничных условиях на твердых границах:

$$\psi_{n+1} = \text{const}, \quad \omega_{n+1} = \alpha\frac{\partial\psi_n}{\partial n} + \omega_n$$

(здесь $\varphi = \psi - y$), т. е. получаем раздельную систему уравнений для вихря и функции тока в $(n+1)$-м приближении. Аналогичным образом можно вести решение методом установления, однако для этой цели не обязательно брать реальную систему нестационарных уравнений, а можно рассмотреть более удобную для численных расчетов систему параболич. уравнений:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \Delta\omega - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi - \omega.$$

Задача обтекания тел вязкой жидкостью требует не только разработки методов расчета, но и принципиальных исследований. Не ясен вопрос существования стационарного решения при больших числах Рейнольдса (напр., при обтекании цилиндра). Численные методы позволяют найти решение до числа Рейнольдса порядка нескольких сотен, но при больших значениях этого числа численные расчеты не дают сходимости.

В аэродинамике излучающего газа и аэродинамике разряженного газа решены задачи лишь для простейших случаев движения газа. Однако практическая важность этих вопросов привела к появлению — как в том, так и в другом разделе — упрощенных математич. моделей явлений, к-рые часто вообще не являются к.-л. предельными случаями полных уравнений (модель серого излучения, модель диффузного излучения в теории излучающего газа, модель Крука в теории разряженного газа), а лишь качественно отражают зависимости, содержащиеся в полных уравнениях. Решение задач этих разделов не может быть получено малыми объемами вычислений и успешное их разрешение зависит от повышения эффективности ЭВМ.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1963; [2] Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, М., 1940; [3] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [4] Hayes W., Probstein R., Hypersonic flow theory, N. Y.—L., 1959; [5] Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, М., 1959; [6] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., в кн.: Basic developments in fluid dynamics, v. 1, N. Y.—L., 1965; [7] Чушкин П. И., Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений, М., 1968; [8] Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа, 2 изд., М., 1967; [9] Metody numeryczne w mechanice plynow, Wrocław, 1969.

А. А. Дородницын.

БАЗА топологического пространства X (база топологии, базис топологии, открытая база) — семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X такое, что каждое открытое множество $G \subset X$ является объединением элементов $U \subset \mathfrak{B}$. Понятие Б.— одно из основных в топологии: во многих вопросах, относящихся к открытым множествам нек-рого пространства, достаточно ограничиться рассмотрением элементов его Б. Пространство может иметь много Б., наибольшую из к-рых образует семейство всех открытых множеств. Минимум мощностей всех Б. наз. весом топологич. пространства X. В пространстве веса τ существует всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$. Пространства со счетной Б. наз. также пространствами со второй аксиомой счетности. Двойственное понятие замкнутой Б., образованной дополнениями к элементам Б., мало употребительно.

Локальной Б. пространства X в точке $x \in X$ (базой точки x) наз. семейство $\mathfrak{B}(x)$ его открытых множеств, обладающее свойством: для любой окрестности Ox точки x найдется элемент $V \in \mathfrak{B}(x)$ такой, что $x \in V \subset Ox$. Пространства, имеющие счетную локальную Б. в каждой точке, наз. также пространствами с первой аксиомой счетности. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых в X множеств является Б. тогда и только тогда, когда оно является локальной Б. каждой его точки $x \in X$.

Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — нек-рые кардинальные числа. Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. $\mathfrak{m}$-точечной, если каждая точка $x \in X$ принадлежит не более чем $\mathfrak{m}$ элементам семейства $\mathfrak{B}$; в частности, при $\mathfrak{m}=1$ Б. наз. дизъюнктной, при конечном $\mathfrak{m}$ — точечно конечной, при $\mathfrak{m}=\aleph_0$ — точечно счетной.

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. $\mathfrak{m}$-локальной, если для каждой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox, пересекающаяся с не более чем $\mathfrak{m}$ элементами семейства $\mathfrak{B}$; в частности, при $\mathfrak{m}=1$ Б. наз. дискретной, при конечном $\mathfrak{m}$ — локально конечной, при $\mathfrak{m}=\aleph_0$ — локально счетной. Б. $\mathfrak{B}$ наз. $\mathfrak{n}$-$\mathfrak{m}$-точечной ($\mathfrak{n}$-$\mathfrak{m}$-локальной), если она является объединением множества мощности $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{m}$-точечных ($\mathfrak{m}$-локальных) Б.; таковы, напр., при $\mathfrak{n}=\aleph_0$ σ-дизъюнктные, σ-точечно конечные, σ-дискретные, σ-локально конечные Б.

Эти понятия находят применение главным образом в критериях метризуемости пространств. Так, пространство со счетной Б. или с первой аксиомой счетности и точечно счетной Б. метризуемо; регулярное пространство с σ-дискретной или с σ-локально конечной Б. метризуемо (обратное верно, однако, лишь для первого утверждения).

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. равномерной (k-равномерной), если для каждой точки $x \in X$ (каждого бикомпактного подмножества F) и каждой ее (его) окрестности Ox (OF) лишь конечное число элементов Б. содержит x (пересекается с F) и одновременно пересекается с дополнением $X \setminus Ox$ ($X \setminus OF$). Пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно является паракомпактом с равномерной Б. (колмогоровским, или T_0-пространством с k-равномерной Б.).

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. р е г у л я р н о й, если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности Ox существует такая окрестность $O'x$, что множество всех элементов Б., пересекающихся одновременно с $O'x$ и $X \setminus Ox$, конечно. Для метризуемости достижимого или T_1-пространства необходимо и достаточно наличие в нем регулярной Б.

Обобщением понятия Б. является так наз. π - б а з а (р е ш е т о ч н а я Б.) — семейство $\mathfrak{B}$ открытых в пространстве X множеств такое, что каждое непустое открытое в X множество содержит непустое множество из $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}$ плотно в X по Хаусдорфу. Всякая Б. является π-базой; обратное неверно, напр., в *Стоуна — Чеха бикомпактном расширении* в $\mathbb{Z}^+$ множества натуральных чисел множество $\mathbb{Z}^+$ образует лишь π-базу.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., К о л м о г о р о в А. Н., Введение в общую теорию множеств и функций, М. -Л., 1948; [2] У р ы с о н П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.—Л., 1951; [3] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973; [4] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [5] Б у р б а к и Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *А. А. Мальцев.*

БАЗИС м н о ж е с т в а X — минимальное порождающее его подмножество B. П о р о ж д е н и е означает, что применением операций нек-рого класса Ω к элементам $b \in B$ получается любой элемент $x \in X$. Это понятие связано с понятием зависимости: элементы X посредством операций из Ω ставятся в зависимость от элементов B. М и н и м а л ь н о с т ь означает, что никакое собственное подмножество $B' \in B$ не порождает X. Это свойство обусловливает в нек-ром смысле независимость его элементов: никакой элемент $b \in B$ не порождается остальными его элементами. Напр., множество всех натуральных чисел $\mathbb{Z}_0$ имеет Б. единственный элемент 0 и порождается из него операцией $'$ непосредственного следования и ее итерациями; множество всех натуральных чисел >1 порождается операцией умножения из Б., состоящего из всех простых чисел. Б а з и с а л г е б р ы к в а т е р н и о н о в состоит из четырех элементов $\{1, i, j, k\}$, если порождающими операциями являются сложение и умножение на действительные числа; если же кроме этих операций используется еще и умножение кватернионов, то Б. будет состоять лишь из трех элементов $\{1, i, j\}$ (ибо $k = ij$).

Б а з и с н а т у р а л ь н о г о р я д а п о р я д к а k — подпоследовательность Ω множества $\mathbb{Z}_0$ натуральных чисел с включением 0, к-рая в результате k-кратного сложения с собой (операция порождения) дает все $\mathbb{Z}_0$. Это означает, что каждое натуральное число n представимо в виде

$$n = a_1 + \ldots + a_k,$$

где $a_i \in \Omega$. Напр., всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов натуральных чисел (т е о р е м а Л а г р а н ж а), т. е. последовательность квадратов есть Б. $\mathbb{Z}_0$ порядка 4. Вообще, последовательность m-х степеней натуральных чисел является Б. $\mathbb{Z}_0$ (т е о р е м а Г и л ь б е р т а), порядок к-рого оценивается *Виноградова методом*. Понятие Б. $\mathbb{Z}_0$ обобщается на случай произвольных числовых последовательностей, т. е. функций на $\mathbb{Z}_0$.

Порождающие X множества существуют всегда (тривиально: X порождает X), однако минимальность может оказаться принципиально невозможной (подобная ситуация типична для классов Ω, содержащих бесконечноместные операции, в частности в топологич. структурах, решетках и т. п.). Поэтому условие минимальности заменяется более слабым требованием: Б. есть порождающее множество минимальной мощности. В связи с этим обычно Б. B определяется как параметризованное множество (или с е м е й с т в о), т. е. как функция $b(t)$ на множестве индексов T со значениями в X, причем $b(T) = B$; мощность T иногда наз. б а з и с н о й р а з м е р н о с т ь ю (или р а н г о м) X. Напр., счетное всюду плотное множество B сепарабельного топологич. пространства P можно считать его Б.; P порождается из B операцией замыкания (к-рая, кстати, и в более общих случаях родственна порождению, см. ниже).

Б а з и с т о п о л о г и и топологич. пространства X (*база*) — Б. $\mathfrak{B}$ совокупности всех открытых подмножеств X; порождение осуществляется объединением элементов $\mathfrak{B}$.

Б а з и с б у л е в о й а л г е б р ы $\mathfrak{A}$ (двойственный базе $\mathfrak{A}$ в смысле Тарского) — плотное множество (минимальной мощности) S в $\mathfrak{A}$; порождение $\mathfrak{A}$ из S (а тем самым и само S) определяется условием $s \to a = \vee$ (что равносильно $s \subset a$), где $s \in S$, $a \in \mathfrak{A}$, $\vee$ — единица $\mathfrak{A}$, «$\to$» — операция импликации. Аналогично вводится и б а з и с ф и л ь т р а ∇, как множество S такое, что для любого $a \in \nabla$ существует $s \in S$, и $s \subset a$.

Большинство частных случаев Б. множества X вводится по следующей схеме. Пусть $B(X)$ — б у л е а н X, т. е. совокупность всех его подмножеств. П о р о ж д а ю щ и м о п е р а т о р о м (или о п е р а т о р о м з а м ы к а н и я) J называется отображение $B(X)$ в себя такое, что: если $A \subset B$, то $J(A) \subset J(B)$; $A \subset J(A)$; $JJ(A) = J(A)$.

Элемент $x \in X$ п о р о ж д а е т с я множеством A, если $x \in J(A)$; в частности, A порождает X, если $J(A) = X$. Минимальное множество B, обладающее этим свойством, и наз. б а з и с о м X, о п р е д е л е н н ы м о п е р а т о р о м J. Порождающий оператор J имеет к о н е ч н ы й т и п, если для любых $A \subset X$, и $x \in X$ из $x \in J(A)$ следует $x \in J(A_0)$ для нек-рого конечного подмножества $A_0 \subset A$; порождающий оператор J обладает с в о й с т в о м з а м е щ е н и я, если для любых y, $z \in X$ и $A \subset X$ из $y \notin J(A)$ и $y \in J(A \cup \{z\})$ следует $z \in J(A \cup \{y\})$. Порождающий оператор J конечного типа со свойством замещения определяет на X о т н о ш е н и е з а в и с и м о с т и, т. е. разбиение $B(X)$ на два класса — зависимых и независимых множеств; множество A наз. з а в и с и м ы м, если $y \in J(A \setminus y)$ для нек-рого $y \in A$, и н е з а в и с и м ы м, если $y \notin J(A \setminus y)$ для любого $y \in A$. При этом A зависимо (независимо) тогда и только тогда, когда некоторое (любое) непустое конечное подмножество $A_0 \subset A$ зависимо (независимо).

Для того чтобы множество B было Б. множества X, необходимо и достаточно, чтобы B было независимым порождающим X множеством или, иначе, максимальным независимым в X множеством.

Если A — произвольное независимое множество, а C — порождающее X множество, содержащее A, то существует Б. B в X такой, что $A \subset B \subset C$. В частности, X всегда обладает Б., и любые два его Б. равномощны.

В алгебраич. системах X важную роль играет понятие так наз. с в о б о д н о г о б а з и с а B, характеризующегося следующим свойством: произвольное отображение $B \subset X$ в любую алгебраич. систему Y (той же сигнатуры) может быть продолжено до (гомо) морфизма X в Y, или, что то же самое, для любого (гомо)морфизма

θ: $X \to Y$ и любого множества $A \subset X$ порождающие операторы J_X и J_Y удовлетворяют условию:

$$\theta\{J_X(A)\} = J_Y(\theta\{A\}).$$

Алгебраич. система, имеющая свободный Б., наз. с в о б о д н о й.

Типичным примером является б а з и с (унитарного) м о д у л я M н а д к о л ь ц о м K · свободное семейство элементов из M, порождающее M (см. [3]). Здесь семейство $A = \{a_t,\ t \in T\}$ элементов K-модуля M наз. с в о б о д н ы м, если из $\Sigma \xi_t a_t = 0$ (где $\xi_t = 0$ для всех, кроме конечного числа индексов t) следует $\xi_t = 0$ для всех t, а порождение осуществляется представлением элементов x в виде л и н е й н ы х к о м б и н а ц и й э л е м е н т о в a_t: существует (зависящее от x) множество элементов $\xi_t \in K$ такое, что $\xi_t = 0$ для всех, кроме конечного числа индексов t, и имеет место разложение

$$x = \sum \xi_t a_t$$

(т. е. X — л и н е й н а я о б о л о ч к а A). Б. M в этом смысле является его свободным Б. в вышеуказанном смысле; обратное также верно. Так, множество периодов двоякопериодич. функции f одного комплексного переменного, являющееся дискретной абелевой группой (и потому модулем над кольцом $\mathbb{Z}$), имеет свободный Б., наз. б а з и с о м п е р и о д о в функции f; он состоит из двух так наз. примитивных периодов. Аналогично определяется Б. периодов абелевой функции нескольких комплексных переменных.

В случае, когда K — тело, всякий Б. (в прежнем смысле) является свободным. Напротив, существуют модули, не имеющие свободного Б.; таковы, напр., неглавные идеалы в области целостности K, рассматриваемой как K-модуль.

Б а з и с в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а X над полем K — (свободный) Б. подлежащего X унитарного модуля. Аналогично, б а з и с а л г е б р ы A над полем K — Б. подлежащего A векторного пространства. Все Б. данного векторного пространства X имеют одинаковую мощность, равную мощности T, к-рая наз. его а л г е б р а и ч е с к о й р а з м е р н о с т ь ю. Каждый элемент $x \in X$ представим линейной комбинацией элементов Б. единственным образом. Элементы $\xi_t(x) \in K$, являющиеся линейными функционалами на X, наз. к о м п о н е н т а м и (к о о р д и н а т а м и) x в данном Б. $\{a_t\}$.

Множество A является Б. в X тогда и только тогда, когда A — максимальное (относительно включения) *свободное множество* в X.

Отображение

$$\Xi : x \to \xi_x(t),$$

где $\xi_x(t) = \xi_t(x)$, если ξ_t — значение t-й компоненты x в Б. A и 0 в противном случае, наз. б а з и с н ы м о т о б р а ж е н и е м; оно является линейным инъективным отображением X в пространство K^T функций на T со значениями в K. В данном случае образ $\Xi(X)$ состоит из функций с конечным числом значений, отличных от нуля (конечнозначных функций). Эта интерпретация позволяет определить о б о б щ е н н ы й б а з и с векторного пространства X над полем K как биективное линейное отображение его на нек-рое подпространство $K(T)$ пространства K^T функций на T со значениями в K, где T нек-рое надлежащим образом подобранное множество. Однако без введения дополнительных ограничений на T (напр., порядка) и структур на T (напр., топологии) и согласованных с этим условий на $K(T)$ понятие обобщенного Б. практически мало полезно.

Иногда Б. векторного пространства X наз. а л г е б р а и ч е с к и м б а з и с о м (чем подчеркивается отсутствие связи с дополнительными структурами на X, даже если они и согласованы с его векторной структурой).

Б а з и с Г а м е л я (Х а м е л я) — Б. поля действительных чисел $\mathbb{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над полем рациональных чисел. Введен Г. Гамелем [4] для получения разрывного решения функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)$; график решения его всюду плотен на плоскости $\mathbb{R}^2$. Каждой почти периодич. функции f соответствует нек-рый счетный базис Гамеля β такой, что каждый показатель Фурье Λ_n этой функции принадлежит линейной оболочке β. При этом элементы β можно выбрать принадлежащими последовательности $\{\Lambda_i\}$; множество β наз. б а з и с о м п о ч т и п е р и о д и ч е с к о й ф у н к ц и и. Аналогичный Б. строится в кольце, содержащем тело P и имеющем единицу тела P своей единицей. Алгебраич. Б. произвольного векторного пространства также наз. иногда базисом Гамеля.

Б а з и с т о п о л о г и ч е с к и й (Б. топологического векторного пространства X над полем K) — семейство $A=\{a_t,\ t\in T\}\subset X$, свойства и функции к-рого аналогичны свойствам и функциям алгебраич. Б. векторного пространства. Понятие топологич. Б. — одно из важнейших в функциональном анализе — расширяет и углубляет понятие алгебраич. Б. с учетом топологич. структуры X и позволяет получать для каждого элемента $x\in X$ его р а з л о ж е н и е по Б. $\{a_t\}$ и притом единственное, т. е. представление x в виде предела (в том или ином смысле) линейных комбинаций элементов a_t:

$$x-\lim\sum\xi_t(x)\,a_t,$$

где $\xi_t(x)$ — линейные функционалы на X со значениями в K, наз. к о м п о н е н т а м и x в Б. A, или к о э ф ф и ц и е н т а м и р а з л о ж е н и я x по Б. A. Очевидно, для существования разложения любого x необходимо, чтобы A было полным множеством в X, а для единственности такого разложения (т. е. для того, чтобы нулевой элемент X имел все компоненты равными нулю) необходимо, чтобы A было топологическим свободным множеством в X.

Смысл и практич. значение топологич. Б. (наз. далее просто Б.) заключается в установлении биективного линейного отображения X, наз. б а з и с н ы м о т о б р а ж е н и е м Ξ, на нек-рое, зависящее от X, пространство $K(T)$ функций со значениями в K, определенных на (топологическом) пространстве T, а именно:

$$\Xi(x):x\in X\ \to\xi_x(t)\in K(T),$$

где $\xi_x(t)=\xi_t(x)$, так что символически $\{\xi_t(X)\}=K(T)$ и $\{\xi_x(T)\}=X$; при этом строение $K(T)$ вследствие конкретности, эффективности своего определения проще и обозримее, чем строение абстрактно заданного X. Так, напр., алгебраич. Б. бесконечномерного банахова пространства несчетен, в то время как в ряде случаев при надлежащем обобщении понятия Б. мощность T существенно уменьшается, одновременно упрощается и $K(T)$.

Пространство $K(T)$ содержит все конечнозначные функции, и множество элементов Б. $\{a_t\}$ является биективным прообразом множества функций $\{\xi_t(s)\}$, имеющих лишь одно ненулевое значение, равное 1 («однозначных» функций):

$$a_t=\Xi^{-1}[\xi_t(s)],$$

где $\xi_t(s)=1$ при $t=s$ и $\xi_t(s)=0$ при $t\neq s$. Другими словами, a_t — образующая одномерного подпространства A_t, дополнительного в X к гиперплоскости, определяемой уравнением $\xi_t(x)=0$.

Таким образом, роль Б. $\{a_t\}$ сводится к организации из множества компонент $\xi_t(x)$, составляющих образ x при базисном отображении, суммируемого (в том или ином смысле) семейства $\{\xi_t(x)a_t\}$, т. е. Б. «разлагает» пространство X в (обобщенную) прямую сумму одномерных подпространств:

$$X=\lim\sum\xi_t(X)\,A_t.$$

Аналогичным образом определяется Б. в векторных пространствах, наделенных равномерной, предельной (псевдотопологической), линейной (L-), близостной и другими дополнительными структурами.

Мыслимы (и существуют) обобщения понятия Б., идущие в различных направлениях. Так, введение топологии и меры на T приводит к понятию так наз. н е п р е р ы в н о й с у м м ы элементов из X и соответствующим интегральным представлениям; разложение пространства X на необязательно одномерные компоненты находит применение в спектральной теории линейных операторов; рассмотрение вместо $K(T)$ произвольных топологич. алгебр над полем K (напр., алгебры мер на T со значениями в K или даже в X, алгебры проекторов и т. д.) позволяет конкретизировать многие понятия абстрактной двойственности для топологич. векторных пространств и, в частности, использовать развитый аппарат теории характеров.

Б а з и с с ч е т н ы й — наиболее исследованный (и в то же время практически наиболее важный) пример Б.— последовательность $\{a_i\}$ элементов пространства X такая, что каждому элементу x однозначно соответствует разложение его в ряд по Б. $\{a_i\}$

$$\sum \xi_i(x)\, a_i,\ \xi_i(x) \in K,$$

сходящийся (в топологии X) к x. Здесь $T=\mathbb{Z}$, причем существен естественный порядок в нем. Часто счетный Б. наз. просто Б. [Аналогично, если подразумевается слабая сходимость разложения x, определяется с л а б ы й с ч е т н ы й б а з и с.] Так, напр., функции e^{ikt}, $k\in\mathbb{Z}$ образуют Б. в пространствах L^p, $1<p<\infty$ (абсолютно суммируемых в степени p периодич. функций), напротив, в пространствах L^1, L^∞ (измеримых функций, совпадающих почти всюду с ограниченными функциями) и C' (непрерывных периодич. функций) эти функции Б. не образуют. Необходимым (но далеко не достаточным) условием существования счетного Б. является сепарабельность X (напр., в пространстве измеримых на отрезке $[a,\ b]$ функций со значениями в $\mathbb{R}$ счетного Б. быть не может). Впрочем, пространство l_∞ ограниченных последовательностей, не будучи сепарабельным в топологии l_∞, не обладает счетным Б., однако элементы $a_i=\{\delta_{ik}\}$, где $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$, образуют Б. в слабой топологии $\sigma(l_\infty,\ l_1)$. Вопрос о существовании счетного Б. в сепарабельных банаховых пространствах (п р о б л е м а б а з и с а) решен отрицательно [6]. Аналогичный вопрос для ядерных пространств также решен отрицательно [7].

Счетный Б., однако, не всегда оказывается «достаточно хорошим» для применений (напр., компоненты $\xi_i(x)$ не являются непрерывными, разложение x не сходится безусловно и т. п.), в связи с чем на Б. накладываются некоторые условия или вводится надлежащее его обобщение.

Б а з и с с ч е т н о г о т и п а — одно из обобщений понятия счетного Б., для к-рого хотя T и несчетно, но разложение элемента $x\in X$ по нему естественно определяется: соответствующее пространство $K(T)$ состоит из счетнозначных функций. Напр., полное ортонормированное множество $\{a_t\}$ в гильбертовом пространстве H является Б.; если $x\in H$, то $\xi_t(x)=\langle x,\ a_t\rangle$ (где $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в H) для всех, за исключением быть может счетного множества, индексов $t\in T$, и ряд $\Sigma\xi_t a_t$ сходится к x. Базисное отображение определяется ортогональным проектированием на замкнутые подпространства, порожденные элементами a_t. Б. пространства AP всех комплекснозначных почти периодич. функций на $\mathbb{R}$ состоит из функций $e^{it\lambda}$; здесь $T=\mathbb{R}$, $K(T)$ — совокупность счетнозначных функций, а базисное отображение определяется формулой

$$\Xi[x(\lambda)]=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} x(\lambda)\, e^{it\lambda}d\lambda.$$

Базис безусловный — счетный Б. в пространстве X такой, что разложение любого элемента x сходится безусловно (т. е. сумма ряда не изменяется при перестановке любого числа его слагаемых). Так, напр., в пространствах c_0 (последовательностей, сходящихся к нулю) и l_p (последовательностей, суммируемых в степени p, $1 \leqslant p < \infty$) элементы $a_i = \{\delta_{ik}\}$ образуют безусловный Б.; в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (любой) Б. не может быть безусловным. Ортонормированный счетный Б. гильбертова пространства — безусловный Б. Банахово пространство с безусловным Б. слабо полно (соответственно обладает сепарабельным сопряженным пространством) в том и только в том случае, когда оно не содержит подпространства, изоморфного c_0 (соответственно l_1).

Б. $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ соответствующих банаховых пространств X и Y наз. эквивалентными, если существует биективное линейное отображение T: $a_i \to b_i$, распространяемое до изоморфизма X в Y; эти Б. наз. квазиэквивалентными, если они становятся эквивалентными после нек-рой перестановки и нормировки элементов одного из них. Пространства l_1, l_2, c_0 обладают тем свойством, что в каждом из них все нормированные безусловные Б. эквивалентны. В декартовом произведении $l_p \times l_q$ $(1 \leqslant p < q < \infty)$ квазиэквивалентны все безусловные Б. Существуют, однако, нормированные Б., не эквивалентные ортонормированному.

Базис суммирующий — обобщение понятия безусловного Б., соответствующее множеству T произвольной мощности и совпадающее с ним при $T = -\mathbb{Z}$,— семейство $A = \{a_t,\ t \in T\}$ такое, что для любого элемента $x \in X$ существует семейство линейных комбинаций (частичных сумм) элементов из A, называемое обобщенным разложением x, суммируемое к x: для любой окрестности нуля $U \subset X$ найдется конечное подмножество $A_U \subset A$ такое, что для каждого конечного множества $A' \supset A_U$ имеет место

$$\left(\sum_{t \in A'} \xi_t a_t - x\right) \in U,$$

т. е. когда частичные суммы образуют систему (фильтр) Коши. Так, напр., любой ортонормированный Б. гильбертова пространства является суммирующим Б. Аналогично определяется слабый суммирующий базис. Вполне суммирующий базис — такой суммирующий Б., что существует ограниченное множество B такое, что множество полунорм $\{p_B(\xi_t a_t)\}$ суммируемо. Вполне суммирующий Б. не более чем счетен. В дуально ядерном пространстве каждый слабо суммирующий Б. вполне суммирующий.

Базис абсолютный (абсолютно суммирующий базис) — суммирующий Б. локально выпуклого пространства над нормированным полем такой, что для каждой окрестности нуля U и для каждого $t \in T$ суммируемо семейство полунорм $\{p_U(a_t)\}$. Всякий безусловный счетный Б. абсолютен, т. е. ряд $\Sigma |\xi_i(x)| p(a_i)$ сходится для всех $x \in X$ и всех непрерывных полунорм $p(\cdot)$. Среди банаховых пространств абсолютным счетным Б. обладают только пространства l_1. Если пространство Фреше имеет абсолютный Б., то все его безусловные Б. абсолютны. В ядерных пространствах Фреше каждый счетный Б. (если он существует) абсолютный [13].

Базис Шаудера — Б. $\{a_t,\ t \in T\}$ пространства X такой, что определенное им базисное отображение непрерывно [и, следовательно, является изоморфизмом на нек-рое пространство $K(T)$], т. е. Б., в к-ром компоненты $\xi_t(x)$ для любого $x \in X$ и, в частности, коэффициенты разложения x по этому Б., являются непрерывными функционалами на X. Определен впервые Ю. Шаудером [5] для случая $T = \mathbb{Z}$. Понятие базиса Шаудера является важнейшим среди всех модификаций понятия Б.

Базис Шаудера характеризуется тем, что $\{a_t\}$ и $\{\xi_t\}$ образуют биортогональную систему. Напр., в пространствах c_0 и l_p, $p \geqslant 1$ последовательности $a_i = \{\delta_{ik}\}$ образуют счетный базис Шаудера. В пространстве $C[a, b]$ счетный базис Шаудера образует *Хаара система*. В полных метрич. векторных (в частности, банаховых) пространствах всякий счетный Б. является базисом Шаудера [10]. В пространствах Фреше понятия слабого Б. и базиса Шаудера совпадают [11]. В бочечных пространствах, в к-рых нет вообще линейных непрерывных функционалов [8], не существует и базиса Шаудера. Однако, если в них существует слабый базис Шаудера, то он является (обычным) базисом Шаудера [9]. Рефлексивность бочечного локально выпуклого пространства со счетным базисом Шаудера имеет место тогда и только тогда, когда этот Б. является одновременно н а т я г и в а ю щ и м, т. е. если для него $\{\xi_t\}$ будет Б. в сопряженном пространстве X^*, и о г р а н и ч е н н о п о л н ы м, т. е. если ограниченность множества частных сумм ряда $\sum \xi_i a_i$ влечет сходимость этого ряда [12]. Если базис Шаудера является безусловным Б. в банаховом пространстве, то он тогда и только тогда является натягивающим (соответственно ограниченно полным), когда в X нет подпространств, изоморфных l_1 (соответственно c_0).

Базис Шаудера в локально выпуклом пространстве р а в н о с т е п е н н о н е п р е р ы в е н, если для каждой окрестности нуля U найдется окрестность нуля V такая, что

$$|\xi_t(x)|\, p_U(a_t) \leqslant p_V(x)$$

для всех $x \in X$, $t \in T$. Каждый базис Шаудера бочечного пространства равностепенно непрерывен, и каждое полное локально выпуклое пространство со счетным равностепенно непрерывным Б. отождествимо с некоторым пространством последовательностей [15]. Равностепенно непрерывный Б. ядерного пространства абсолютен.

Лит.: [1] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] М а л ь ц е в А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [3] Б у р б а к и Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [4] H a m e l G., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 459—62; [5] S c h a u d e r J., «Math. Z.», 1927, Bd 26, S. 47—65, 417—31; [6] Э н ф л о П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—155; [7] З о б и н Н. М., М и т я г и н Б. С., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 35—47; [8] Э д в а р д с Р. Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [9] D i e u d o n n é J., «Arch. Math.», 1951, Bd 1, S. 81—115; [10] A r s o v M. G., «Pacific J. Math.», 1960, t. 10, p. 365—79; [11] B e s s a g a C., P e l c z y ń s k i A., «Studia Math.», 1960, v. 19, p. 53—62; [12] J a m e s R. C., «Ann. Math.», 1950, v. 52, № 2, p. 518—27; [13] Д ы н и н А. С., М и т я г и н Б. С., «Bull. Acad. Polon. Sci.», (Ser. Sci math.), 1960, t. 8, p. 535—40; [14] Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [15] П и ч А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967.

М. И. Войцеховский, М. И. Кадец.

БАЗИСНОЕ МНОЖЕСТВО л и н е й н о й с и с т е м ы — множество точек алгебраич. многообразия (или схемы) X, принадлежащих всем дивизорам подвижной части заданной линейной системы L на X.

П р и м е р. Пусть

$$\lambda_0 F_n(x_0, x_1, x_2) + \lambda_1 G_n(x_0, x_1, x_2) = 0$$

— пучок кривых степени n на проективной плоскости. Тогда Б. м. этого пучка состоит из множества общих нулей форм F' и G', где

$$F' \cdot H = F_n, \quad G' \cdot H = G_n,$$

а H — наибольший общий делитель форм F_n и G_n.

Если φ_L: $X \to P(L)$ — рациональное отображение, определяемое линейной системой L, то Б. м. линейной системы L — множество точек неопределенности отображения φ_L. Б. м. обладает структурой замкнутой подсхемы B в X, к-рая задается как пересечение всех дивизоров из подвижной части линейной системы. Устранение точек неопределенности отображения φ_L сводится к тривиа-

ализации когерентного пучка идеалов, определяющего подсхему B (см. *Бирациональная геометрия*).

Для любой линейной системы без неподвижных компонент L на гладкой проективной поверхности F существует такое целое число n_0, что при $n>n_0$ Б. м. полной линейной системы $|nL|$ пусто (т е о р е м а З а р и с к о г о). В многомерном случае аналогичный факт неверен.

Лит.: [1] *Алгебраические поверхности*, М., 1965.

В. А. Исковских.

БАЗИСНЫЙ КОММУТАТОР, п р а в и л ь н ы й к о м м у т а т о р,— объект, построенный индуктивно из элементов данного множества R и из скобок следующим образом. Элементы из R считаются, по определению, Б. к. длины 1 и произвольно линейно упорядочиваются. Пусть Б. к. длин, меньших n, где $n>1$ — целое число, определены и упорядочены. Если a, b суть Б. к. длин, меньших n, то $[ab]$ считается Б. к. длины n тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) a, b суть Б. к. длины k, l, соответственно, $k+l=n$; 2) $a>b$; 3) если $a=[cd]$, то $d\leqslant b$. Полученные Б. к. длины, не превосходящей n, упорядочивают произвольно с выполнением условия $[ab]>b$, сохраняя порядок Б. к. длин, меньших n. Любое построенное таким образом множество Б. к. есть база свободной алгебры Ли [1] с множеством свободных образующих R.

Лит.: [1] Ш и р ш о в А. И. «Алгебра и логика», 1962, т. 1, № 1, с. 14—19.

Ю. М. Горчаков.

БАНАХА ИНДИКАТРИСА, ф у н к ц и я к р а т н о с т и, непрерывной функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$,— целочисленная функция $N(y, f)$, $-\infty<y<+\infty$, равная числу корней уравнения $f(x)=y$. Если это уравнение при данном значении y имеет бесконечное множество корней, то

$$N(y, f)=+\infty,$$

а если оно не имеет корней, то

$$N(y, f)=0.$$

Функция $N(y, f)$ была определена С. Банахом [1] (см. также [2], с. 246). Он доказал, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ ее индикатриса $N(y, f)$ есть функция не выше 2-го класса Бэра, причем

$$\bigvee_a^b (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y, f)\, dy, \qquad (*)$$

где $\bigvee_a^b (f)$ — вариация функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Таким образом, равенство (*) можно принять за определение вариации непрерывной функции $f(x)$. Б. и. определяют [с сохранением равенства (*)] и для функций, имеющих разрывы 1-го рода (см. [3]). Понятие Б. и. было использовано для определения вариаций функции нескольких переменных (см. [4], [5]).

Лит.: [1] B a n a c h S., «Fundam. math.», 1925, t. 7, p. 225—36; [2] Н а т а н с о н И. П., *Теория функций вещественной переменной*, 2 изд., М., 1957; [3] Л о з и н с к и й С. М., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1958, т. 7. Сер. Математика, механика, астрономия, № 2, с. 70—87; [4] К р о н р о д А. С., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 1, с. 24—134; [5] В и т у ш к и н А. Г., *О многомерных вариациях*, М., 1955.

Б. И. Голубов.

БАНАХА — МАЗУРА ФУНКЦИОНАЛ, Б а н а х а — М а з у р а о п е р а т о р, — концепция вычислимого функционала (оператора), предложенная С. Банахом (S. Banach) и С. Мазуром (см. [1]) и трактующая вычислимость функционала (оператора), действующего из множества M_1 в множество M_2, как его свойство переводить всякую вычислимую последовательность элементов M_1 в вычислимую последовательность элементов M_2 (см. *Вычислимая функция*).

Пусть R — множество всех одноместных *общерекурсивных функций*. Функционал Ф, определенный на R и принимающий натуральные значения, наз. в ы ч и с л и м ы м п о Б а н а х у — М а з у р у, или Б.—

М. ф., если для всякой двухместной общерекурсивной функции g существует общерекурсивная функция f такая, что

$$f(n)=\Phi(g(n,\ m))$$

(здесь g рассматривается как функция от m при каждом фиксированном n). Всякий общерекурсивный функционал и всюду определенный эффективный функционал (см. *Конструктивное метрическое пространство*) являются Б.— М. ф. С другой стороны, был построен пример Б.— М. ф., не совпадающего ни с каким общерекурсивным, а следовательно, и ни с каким эффективным функционалами (см. [2]). Важнейшим свойством Б.— М. ф. является их непрерывность (см. [1]): значения таких функционалов на любой общерекурсивной функции определяются лишь конечным числом значений этой функции.

Вышеописанная концепция вычислимости распространяется на функции действительного переменного. Пусть C — множество вычислимых последовательностей вычислимых действительных чисел; каждая последовательность $\{a_k\}\in C$ задается парой общерекурсивных функций f и g таких, что при всех n, k

$$\left|a_k-\frac{f(k,\ n)-g(k,\ n)}{n+1}\right|<\frac{1}{n+1}\cdot$$

Функция действительного переменного φ наз. в ы ч и с л и м о й п о Б а н а х у — М а з у р у (множество таких функций обозначим $\mathfrak{R}$), если для любой последовательности $\{a_k\}$ из C последовательность $\{\varphi(a_k)\}$ также принадлежит C. Каждая функция $\varphi\in\mathfrak{R}$ непрерывна во всех вычислимых точках (см. [1]; таким образом, напр., $\operatorname{sgn} x\notin\mathfrak{R}$). Вопрос о том, являются ли все функции из $\mathfrak{R}$ вычислимо непрерывными, остается открытым (1977). Множество $\mathfrak{R}$ оказывается замкнутым относительно ряда используемых в анализе операций, что позволяет успешно развивать на его базе вычислимый анализ (см. [1]).

Лит.: [1] M a z u r S., Computable analysis, Warsz., 1963; [2] F r i e d b e r g R. M., «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1958, t. 6, № 1, p. 1—5; [3] М а р к о в А. А., «Тр. Матем. ин-та. АН СССР», 1958, т. 52, с. 315—48; [4] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *Б. А. Кушнер.*

БАНАХА — ШТЕЙНХАУЗА ТЕОРЕМА — общее название ряда результатов о топологич. свойствах пространства непрерывных линейных отображений одного линейного топологич. пространства в другое. Пусть E, F — локально выпуклые линейные топологич. пространства, где E — *бочечное пространство*, или E, F — линейные топологич. пространства, причем E — *Бэра пространство*; тогда: 1) любое ограниченное в топологии простой сходимости подмножество пространства $L(E, F)$ непрерывных линейных отображений пространства E в F равностепенно непрерывно (п р и н ц и п р а в н о м е р н о й о г р а н и ч е н н о с т и), 2) если фильтр F в пространстве $L(E, F)$ содержит множество, ограниченное в топологии простой сходимости, и сходится в топологии простой сходимости к нек-рому отображению v пространства E в F, то v — непрерывное линейное отображение E в F, и фильтр F сходится к v равномерно на каждом компактном подмножестве пространства E (см. [2, 3]).

Этот общий результат позволяет уточнить классич. результаты С. Банаха и Х. Штейнхауза (см. [1]): пусть E, F — банаховы пространства, M — подмножество второй категории в E; тогда: 1) если $H\subset L(E, F)$ и $\sup\{\|u(x)\|,\ u\in H\}$ конечен для всех $x\in M$, то $\sup\{\|u\|,\ x\in H\}<\infty$, 2) если u_n — последовательность непрерывных линейных отображений E в F и последовательность $u_n(x)$ сходится в F для всех $x\in M$, то u_n сходится к непрерывному линейному отображению v пространства E в F равномерно на любом компактном подмножестве пространства E.

Лит.: [1] Banach S., Steinhaus H., «Fundam. math.», 1927, t. 9, p. 50—61; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.
А. И. Штерн.

БАНАХОВ МОДУЛЬ (левый) над банаховой алгеброй A — *банахово пространство* X вместе с непрерывным билинейным оператором m: $A\times X\to X$, задающим на X структуру левого *модуля* над A в алгебраич. смысле. Аналогично определяется правый Б. м. и банахов бимодуль над A. Морфизмом двух Б. м. наз. их непрерывный гомоморфизм. Примерами Б. м. над A служат замкнутый идеал в A и банахова алгебра $B\supset A$. Б. м. над A, представимый как прямое слагаемое Б. м. $A_+\hat{\otimes}E$, где A_+ — это A с присоединенной единицей, E — банахово пространство, а $m(a, b\hat{\otimes}x)=ab\hat{\otimes}x$, наз. проективным. См. *Топологическое тензорное произведение*).

Лит.: [1] Rieffel M. A., «J. Func. Analysis», 1967, v. 1, № 4, p. 443—91.
А. Я. Хелемский.

БАНАХОВА АЛГЕБРА — *топологическая алгебра* A над полем комплексных чисел, топология к-рой определяется нормой, превращающей A в *банахово пространство*, причем умножение элементов непрерывно по каждому из сомножителей. Б. а. наз. коммутативной, если $xy=yx$ для всех $x, y\in A$ (см. *Коммутативная банахова алгебра*). Б. а. A наз. алгеброй с единицей, если A содержит такой элемент e, что $ex=xe=x$ для любого $x\in A$. Если в Б. а. A нет единицы, то ее можно присоединить, т. е. построить Б. а. $\tilde{A}$ с единицей такую, что $\tilde{A}$ содержит исходную алгебру A в качестве замкнутой подалгебры коразмерности 1. В любой Б. а. A с единицей e можно так изменить норму на эквивалентную, чтобы в новой норме выполнялись соотношения $\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|$, $\|e\|=1$. (Последующее изложение предполагает, как правило, наличие в алгебре единицы и выполнение приведенных соотношений для нормы.)

Примеры. 1) Пусть X — компактное топологич. пространство, $C(X)$ — совокупность всех непрерывных комплексных функций на X. Тогда $C(X)$ является Б. а. относительно поточечных операций и нормы

$$\|f\|=\max_X|f|.$$

2) Множество всех ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве образует Б. а. относительно обычных операций сложения и умножения линейных операторов и нормы оператора.

3) Пусть V — ограниченная область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Совокупность ограниченных голоморфных функций на V является Б. а. относительно поточечных операций и естественной sup-нормы:

$$\|f\|=\sup_V|f|.$$

Эта Б. а. содержит замкнутую подалгебру, образованную ограниченными голоморфными функциями на V, допускающими непрерывное продолжение на замыкание области V. Простейшим примером является алгебра непрерывных в круге $|z|\leqslant1$ функций, аналитических в круге $|z|<1$.

4) Пусть G — локально компактная группа и $L^1(G)$ — пространство (классов эквивалентности) всех измеримых относительно меры Хаара на G абсолютно интегрируемых по этой мере функций, снабженное нормой

$$\|f\|=\int_G|f(g)|\,dg$$

(интеграл по левой мере Хаара).

Если в качестве умножения в $L^1(G)$ рассмотреть операцию свертки

$$(f_1*f_2)(h)=\int_G f_1(g)\,f_2(g^{-1}h)\,dg,$$

то $L^1(G)$ становится Б. а.; если G — абелева локально

компактная группа, то Б. а. $L^1(G)$ коммутативна. Б. а. $L^1(G)$ наз. *групповой алгеброй* локально компактной группы G. Групповая алгебра $L^1(G)$ обладает единицей (относительно свертки) тогда и только тогда, когда G дискретна.

Если G коммутативна, то можно построить точное представление Б. а. $L^1(G)$, сопоставляя каждой функции $f \in L^1(G)$ преобразование Фурье этой функции, т. е. функцию

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \chi(g) f(g)\, dg,$$

на группе характеров $\hat{G}$ группы G. Совокупность функций $\hat{f}(\chi)$, образует нек-рую алгебру $A(\hat{G})$ непрерывных функций на $\hat{G}$ (относительно обычных поточечных операций), наз. алгеброй Фурье локально компактной абелевой группы $\hat{G}$. В частности, если G есть группа целых чисел $\mathbb{Z}$, то $A(\mathbb{Z})$ есть алгебра непрерывных функций на окружности, разлагающихся в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд.

5) Пусть G — топологич. группа. Непрерывная комплексная функция $f(g)$ на G наз. почти периодической, если совокупность ее сдвигов $f(g_0 g)$, $g_0 \in G$, образует компактное семейство относительно равномерной сходимости на G. Совокупность почти периодич. функций образует коммутативную Б. а. относительно поточечных операций и нормы

$$\| f \| = \sup_{g \in G} | f(g) |.$$

6) Тело кватернионов не образует Б. а. над полем комплексных чисел, так как произведение элементов Б. а. A должно быть согласовано с умножением на числа: для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x, y \in A$ должно выполняться равенство

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y),$$

к-рое не выполняется в теле кватернионов при $\lambda = i$, $x = j$, $y = k$.

Всякая Б. а. с единицей есть топологич. алгебра с непрерывным обратным. Более того, если $\varepsilon(A)$ — множество элементов Б. а. A, обладающих (двусторонним) обратным относительно умножения, то $\varepsilon(A)$ — топологич. группа в топологии, индуцированной вложением $\varepsilon(A) \subset A$. Если $\| e - a \| < 1$, то $a \in \varepsilon(A)$, причем

$$a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n,$$

где $b = e - a$, и ряд сходится абсолютно. Совокупность элементов, обратимых справа (слева) в A, также образует открытое множество в A.

Если в Б. а. A всякий элемент обладает обратным (или хотя бы левым обратным), то алгебра A изометрически изоморфна полю комплексных чисел (теорема Гельфанда — Мазура).

Поскольку нек-рая окрестность единицы в Б. а. A состоит из обратимых элементов, то замыкание любого нетривиального идеала есть снова идеал, не совпадающий с A. В частности, максимальный (левый, правый, двусторонний) идеал замкнут.

Одну из важных задач теории Б. а. составляет задача описания замкнутых идеалов в Б. а. В ряде случаев она решается просто. В алгебре $C(X)$ (см. пример 1) всякий замкнутый идеал имеет вид $I = \{f \in C(X) : f|_Y = 0\}$, где Y — замкнутое множество в X. Если A — алгебра всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве, то единственным замкнутым двусторонним идеалом в A служит идеал вполне непрерывных операторов.

Элемент $a \in A$ имеет левый (правый) обратный тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком максимальном левом (правом) идеале. Пересечение всех левых максимальных идеалов в A совпадает с пересе-

чением всех правых максимальных идеалов; это пересечение наз. радикалом алгебры A и обозначается $\mathrm{Rad}\,A$. Элемент $a_0 \in A$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,A$ тогда и только тогда, когда $e + aa_0 \in \varepsilon(A)$ для любого $a \in A$. Алгебры, для к-рых $\mathrm{Rad}\,A = \{0\}$, наз. полупростыми. Алгебры $C(X)$ и групповые алгебры $L^1(G)$ полупросты. Полупростыми являются все неприводимые (т. е. не имеющие нетривиального инвариантного подпространства) замкнутые подалгебры алгебры всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве.

Резольвентой элемента $a \in A$ наз. функция

$$\lambda \longrightarrow a_\lambda = (a - \lambda e)^{-1},$$

определенная на множестве тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для к-рых (двусторонний) обратный к $a - \lambda e$ существует. Область существования резольвенты содержит все точки λ с $|\lambda| > \|a\|$. Максимальная область существования резольвенты есть открытое множество; на этом множестве резольвента непрерывна и даже аналитична, причем $\frac{da_\lambda}{d\lambda} = a_\lambda^2$. Кроме того, имеет место тождество Гильберта

$$a_{\lambda_2} - a_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}.$$

Дополнение к области существования резольвенты наз. спектром элемента a и обозначается $\sigma(a)$. Для любого $a \in A$ множество $\sigma(a)$ непусто, замкнуто и ограничено.

Если $a, b \in A$, то множества $\sigma(ab)$ и $\sigma(ba)$ могут не совпадать, но

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}.$$

Число

$$|a| = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

наз. спектральным радиусом элемента $a \in A$; имеет место формула Гельфанда

$$|a| = \lim \|a^n\|^{1/n},$$

где предел справа всегда существует. Если $a \in \mathrm{Rad}\,A$, то $|a| = 0$; обратное верно, вообще говоря, лишь в коммутативных Б. а., радикал к-рых совпадает с множеством обобщенных нильпотентов, т. е. элементов $a \in A$, для к-рых $|a| = 0$. В любой Б. а. справедливы соотношения $|a^k| = |a|^k$, $|\lambda a| = |\lambda|\,|a|$ и $|a| \leqslant \|a\|$; если A коммутативна, то $|ab| \leqslant |a|\,|b|$ и $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Известны примеры некоммутативных алгебр, в к-рых отсутствуют ненулевые обобщенные нильпотенты. Однако, если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$, то Б. а. A коммутативна. Условие $\|ab\| = \|ba\|$ для всех $a, b \in A$ также достаточно для коммутативности (алгебры с единицей) A.

Алгебра A наз. алгеброй с инволюцией, если на A определена операция $a \to a^*$, удовлетворяющая условиям:

$$(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*, \quad (a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для всех $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; отображение $a \to a^*$ наз. инволюцией в A. Линейный функционал ψ на алгебре A с инволюцией наз. положительным, если $\psi(aa^*) \geqslant 0$ для любого $a \in A$. При положительном линейном функционале ψ

$$|\psi(a)|^2 \leqslant \psi(e)\, \psi(aa^*)$$

для всех $a \in A$. Если инволюция в A изометрична, т. е. $\|a^*\| = \|a\|$ для всех $a \in A$, то

$$\psi(a^* a) \leqslant \psi(e)\, |a^* a|.$$

Б. а. с инволюцией A наз. вполне симметричной, если $e + a^* a \in \varepsilon(A)$ для любого $a \in A$; A наз. *C*-алгеброй* (вполне регулярной алгеброй), если $\|a^* a\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. Всякая C^*-алгебра вполне симметрична. Примерами вполне сим-

метричных алгебр служат групповые алгебры $L^1(G)$ коммутативных, или компактных, групп. Примерами C^*-алгебр служат алгебры $C(X)$ (инволюция в $C(X)$ определяется как переход к комплексно сопряженной функции) и замкнутые подалгебры алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, содержащие вместе с данным оператором сопряженный оператор (инволюция определяется как переход к сопряженному оператору). Любая C^*-алгебра изометрически изоморфна (с сохранением инволюции) одной из таких алгебр (теорема Гельфанда — Наймарка). В частности, любая коммутативная C^*-алгебра A изометрически изоморфна (с сохранением инволюции) одной из алгебр $C(X)$ (это утверждение содержит теорему Стоуна — Вейерштрасса).

Элемент a Б. а. с инволюцией наз. эрмитовым, если $a^*=a$. Для того чтобы Б. а. с инволюцией была C^*-алгеброй, необходимо и достаточно выполнение условия $\|e^{ia}\|=1$ для всех эрмитовых элементов a. Если в Б. а. с инволюцией $\sup \|e^{ia}\|<\infty$ (верхняя грань по всем эрмитовым элементам), то такая алгебра топологически t-изоморфна C^*-алгебре. Если в произвольной Б. а. $\|e^{ita}\|=1$ при всех действительных t для нек-рого элемента a, то $\|a\|$ совпадает со спектральным радиусом, т. е. $\|a\|=|a|$.

Теория Б. а. (в особенности коммутативных Б. а.) имеет многочисленные приложения в различных областях функционального анализа и ряде других математич. дисциплин.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [2] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1941, т. 9 (51), с. 3—24; [5] Глисон А., «Математика», 1961, т. 5, в. 2, с. 161—6; [6] Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, пер. с англ., М., 1963; [7] Горин Е. А., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 2, с. 173—78; [8] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [9] Želazko W., Algebry Banacha, Warsz., 1968; [10] Капланский И., «Математика», 1959, т. 3, в. 5, с. 91—115; [11] Люмис Л. Х., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [12] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [13] Некоторые вопросы теории приближений, сб. пер. с англ., М., 1963; [14] Rickart C. E., General theory of Banach algebras, N. Y., 1960; [15] Ройден Х. Л., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 98—114; [16] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [17] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962.

Е. А. Горин.

БАНАХОВА РЕШЕТКА, банахова структура,— векторная решетка (структура), являющаяся одновременно *банаховым пространством* с нормой, удовлетворяющей условию монотонности:

$$|x|\leqslant|y|\Rightarrow\|x\|\leqslant\|y\|.$$

Б. р. наз. также KB-линеалом, а произвольную нормированную, т. е. векторную решетку с монотонной нормой — KN-линеалом. При пополнении нормированной решетки по норме порядковые отношения могут быть распространены на получающееся банахово пространство так, что оно оказывается Б. р. Если в решетке можно ввести банахову топологию, превращающую ее в Б. р., то такая топология единственна. Простейший пример Б. р.— пространство $C(Q)$ непрерывных функций на произвольном компактном топологич. пространстве Q с естественным упорядочением и с обычной (равномерной) нормой. Другие примеры Б. р.— пространства L_p, пространства Орлича. В Б. р. сходимость по норме есть (*)-сходимость для сходимости с регулятором. В нормированной решетке это не так.

Важный частный случай — Б. р. ограниченных элементов. Если в решетке X имеется сильная единица $\mathbf{1}$, т. е. для каждого $x\in X$ существует такое λ, что $|x|\leqslant\lambda\mathbf{1}$, то наименьшее λ, для к-рого это неравенство справедливо, принимается за $\|x\|$. Полученная нормированная решетка наз. нормированной решет-

кой ограниченных элементов; если же она полна по норме, то она наз. Б. р. ограниченных элементов. В Б. р. (и даже в нормированной решетке) ограниченных элементов сходимость по норме совпадает со сходимостью с регулятором, а ограниченность множества элементов по норме совпадает с ограниченностью по упорядочению. Если нормированная решетка ограниченных элементов есть условно σ-полная решетка, то она полна по норме.

Пространство $C(Q)$ есть Б. р. ограниченных элементов, в к-рой за единицу принята функция $x(q)\equiv 1$. Для всякой Б. р. X ограниченных элементов существует такое компактное хаусдорфово пространство Q, что X алгебраически и структурно изоморфна пространству $C(Q)$. Это — абстрактная характеристика Б. р. непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

В любой нормированной решетке каждый аддитивный и непрерывный по норме функционал регулярен и, более того, представим в виде разности двух аддитивных и непрерывных по норме положительных функционалов. В Б. р. всякий положительный аддитивный функционал непрерывен по норме, и значит классы регулярных и аддитивных непрерывных по норме функционалов совпадают. Пространство X', сопряженное в банаховом смысле к нормированной решетке X, есть условно полная Б. р. В нормированной решетке теорема Хана — Банаха допускает следующее уточнение: для любого $x_0>0$ существует такой положительный аддитивный непрерывный по норме функционал f, что $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$.

Лит.: [1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [2] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961. *Б. З. Вулих.*

БАНАХОВО АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — бесконечномерное обобщение понятия аналитич. пространства, возникшее в связи с изучением *деформаций* аналитических структур. Локальной моделью здесь служит банахово аналитическое множество, т. е. подмножество $\mu(U, F, f)=f^{-1}(0)$ открытого множества U в *банаховом пространстве* E над $\mathbb{C}$, где $f\colon U\to F$ — *аналитическое отображение* в банахово пространство F. В отличие от конечномерного случая, на локальной модели задается не один структурный пучок, а набор пучков $\Phi(W)$, где W — открытое множество в произвольном банаховом пространстве G. При этом $\Phi(G)$ определяется как фактор пучка ростков аналитич. отображений $U\to G$ по подпучку ростков отображений вида $x\to\varphi(x)f(x)$, где $\varphi\colon U\to \mathrm{Hom}(F, G)$ — локальное аналитич. отображение, а $\Phi(W)\subset\Phi(G)$ порождается отображениями, принимающими значения в W. Пучки $\Phi(W)$ определяют функтор из категории K открытых множеств банаховых пространств и их аналитич. отображений в категорию пучков множеств на $f^{-1}(0)$.

Банаховым аналитическим пространством наз. топологич. пространство X, снабженное функтором из категории K в категорию пучков множеств на X, каждая точка к-рого имеет окрестность, изоморфную нек-рой локальной модели.

Комплексные аналитич. пространства образуют полную подкатегорию в категории банаховых аналитич. пространств. Б. а. п. конечномерно, если у каждой его точки x есть окрестность, изоморфная такой модели $\mu(U, F, f)$, что существует отображение $g\colon U\to U$, индуцирующее автоморфизм модели и имеющее вполне непрерывный дифференциал dg_x (см. [1]).

Другой частный случай Б. а. п.— банахово аналитическое многообразие, т. е. аналитич. пространство, локально изоморфное открытым подмножествам банаховых пространств. Важным примером является многообразие замкнутых и допу-

скающих замкнутое дополнение линейных подпространств банахова пространства над $\mathbb{C}$.

Конечно определённые банаховы аналитические множества, т. е. модели вида $\mu(U, \mathbb{C}^k, f)$, обладают локальными свойствами, аналогичными классическим: для них имеют место примарное разложение, теорема Гильберта о нулях, теорема о локальном описании и др. (см. [2]).

Лит.: [1] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t. 16, № 1, p. 1–95; [2] Ramis J.-P., Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, B.— Hdlb.— N.Y., 1970.

Д. А. Пономарев.

БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО, *B*-пространство,— полное нормированное *векторное пространство*. Исходными для создания теории Б. п. послужили введенные (в 1904–18) Д. Гильбертом (D. Hilbert), М. Фреше (M. Fréchet) и Ф. Рисом (F. Riesz) функциональные пространства. Именно в этих пространствах были первоначально исследованы фундаментальные понятия сильной и слабой сходимости, компактности, линейного функционала, линейного оператора и др. Б. п. названы по имени С. Банаха, к-рый в 1922 (см. [1]) начал систематич. изучение этих пространств на основе введенной им аксиоматики и получил глубокие результаты.

Теория Б. п. развивалась параллельно с общей теорией *линейных топологических пространств*. Эти теории взаимно обогащались идеями и фактами. Так, идея полунормы, заимствованная из теории нормированных пространств, стала необходимым инструментом для построения теории локально выпуклых линейных топологич. пространств. Понятие слабой сходимости элементов и линейных функционалов в Б. п. обрело законченную форму в понятии слабой топологии. Теория Б. п. представляет собой хорошо разработанную область функционального анализа, имеющую (непосредственно или через теорию операторов) многочисленные применения в различных разделах математики.

Проблематика Б. п. складывается из нескольких направлений: геометрия единичной сферы, геометрия подпространств, линейно топологич. классификация, ряды и последовательности в Б. п., наилучшие приближения в Б. п., функции со значениями в Б. п. и др. Относительно теории операторов в Б. п. следует отметить, что многие ее предложения имеют непосредственное отношение к геометрии и топологии Б. п.

Примеры. Встречающиеся в математич. анализе Б. п.— это чаще всего множества функций или числовых последовательностей, подчиненные нек-рым условиям.

1) l_p, $p \geqslant 1$,— пространство числовых последовательностей $x = \{\xi_n\}$, для к-рых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}.$$

2) m — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

3) c — пространство сходящихся числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

4) c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \max_n |\xi_n|.$$

5) $C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $x = x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

6) $C[K]$ — пространство непрерывных функций на компакте K с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

7) $C^n[a, b]$ — пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно, с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|.$$

8) $C^n[I_m]$ — пространство всех непрерывно дифференцируемых до порядка n функций, определенных в m-мерном кубе, с равномерной нормой по всем производным порядка не выше n.

9) $M[a, b]$ — пространство ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|x\| = \operatorname{vrai} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

10) $A(D)$ — пространство функций, аналитических в открытом единичном круге D и непрерывных в замкнутом круге $\bar{D}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{z \in \bar{D}} |x(z)|.$$

11) $L_p(S; \Sigma, \mu)$, $p \geqslant 1$, — пространство функций $x(s)$ на множестве S с вполне аддитивной мерой μ и с нормой

$$\|x\| = \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}.$$

12) $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, — частный случай пространства $L_p(S; \Sigma, \mu)$ — пространство измеримых по Лебегу функций, суммируемых со степенью p, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

13) AP — пространство Бора почти периодич. функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} |x(t)|.$$

Пространства $C[a, b]$, $C^n[a, b]$, $L_p[a, b]$, c, l_p сепарабельны; пространства $M[a, b]$, m, AP несепарабельны; $C[K]$ сепарабельно в том и только в том случае, если K — метрический компакт.

Подпространство Y Б. п., рассматриваемое отдельно от вмещающего пространства X, есть Б. п. Факторпространство X/Y нормированного пространства по подпространству Y становится нормированным пространством, если норму определить так: пусть $Y_1 = x_1 + Y$ — класс смежности. Тогда

$$\|Y\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + y\|.$$

Если X — Б. п., то X/Y — тоже Б. п. Множество всех линейных функционалов, определенных в нормированном пространстве X, с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \quad x \neq 0,$$

наз. пространством, с о п р я ж е н н ы м с X, и обозначается X^*. Оно является Б. п.

Для Б. п. справедлива *Хана — Банаха теорема* о продолжении линейных функционалов: если линейный функционал определен на подпространстве Y нормированного пространства X, то его можно распространить с сохранением линейности и непрерывности на все пространство X. Более того, при этом можно обеспечить сохранение нормы расширенного функционала:

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_Y = \sup_{y \in Y} \frac{|f(y)|}{\|y\|}.$$

Справедливо и более общее утверждение: пусть дейст-

вительная функция $p(x)$, определенная в линейном пространстве, удовлетворяет условиям:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y),$$
$$p(\lambda x)=\lambda p(x), \quad \lambda \geqslant 0, \quad x,\ y \in X,$$

и пусть $f(x)$ — действительный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и такой, что

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in Y.$$

Тогда существует линейный функционал $F(x)$, определенный на всем X и такой, что

$$F(x)=f(x) \text{ для } x \in Y; \quad F(x) \leqslant p(x) \text{ для } x \in Y.$$

Следствием теоремы Хана — Банаха является «обратная» формула, связывающая нормы X и X^*:

$$\| x \| = \max_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\| f \|}, \quad f \neq 0, \ x \in X,$$

причем max в этой формуле достигается на нек-ром $f=f_x \in X^*$. Другое важное следствие — наличие *достаточного множества* непрерывных линейных функционалов. Говорят, что в Б. п. X существует достаточно много непрерывных линейных функционалов, если для любых $x_1 \neq x_2 \in X$ имеется такой определенный на X линейный функционал f, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Для многих конкретных Б. п. известен общий вид линейного функционала. Так, в $L_p[a, b]$, $(p>1)$ каждый линейный функционал определяется по формуле:

$$f(x)=\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y \in L_q[a, b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, а каждая функция $y(t) \in L_q$ определяет по этой формуле линейный функционал f, причем

$$\| f \| = \left\{ \int_a^b | y(t) |^q \, dt \right\}^{1/q}.$$

Таким образом, пространством, сопряженным с L_p, является L_q: $L_p^*=L_q$. В $L_1[a, b]$ линейные функционалы задаются той же формулой, но в этом случае $y \in M$, так что $L_1^*=M$.

Пространство X^{**}, сопряженное с X^*, наз. в т о р ы м с о п р я ж е н н ы м. Аналогично определяются третье, четвертое и т. д. сопряженные пространства. Каждый элемент из X может быть отождествлен с нек-рым линейным функционалом, определенным на X^*:

$$F(f)=f(x), \quad \forall f \in X^* \ (F \in X^{**}, \ x \in X).$$

При этом $\| F \|=\| x \|$. Тогда можно считать X подпространством пространства X^{**} и $X \subset X^{**} \subset X^{IV}\ldots$, $X^* \subset X^{***} \subset \ldots$. Если при указанном вложении Б. п. совпадает со своим вторым сопряженным, то оно наз. р е ф л е к с и в н ы м. В этом случае все включения оказываются равенствами. Если же X не рефлексивно, то среди включений нет ни одного равенства. Если факторпространство X^{**}/X имеет конечную размерность n, то X наз. к в а з и р е ф л е к с и в н ы м п о р я д к а n. Квазирефлексивные пространства существуют для любого n.

К р и т е р и и р е ф л е к с и в н о с т и Б. п. 1) X рефлексивно тогда и только тогда, когда для каждого $f \in X^*$ найдется $x \in X$, на к-ром достигается sup в формуле

$$\| f \| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\| x \|}, \quad x \neq 0.$$

2) В рефлексивных Б. п., и только в них, каждое ограниченное множество компактно относительно слабой сходимости: любая его бесконечная часть содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (т е о р е м а Э б е р л е й н а — Ш м у л ь я н а). Пространства L_p и l_p, $p>1$, рефлексивны. Пространства L_1, l_1, C, M, c, m, AP нерефлексивны.

Б. п. наз. с л а б о п о л н ы м, если в нем каждая слабо сходящаяся в себе последовательность слабо сходится к элементу пространства. Каждое рефлексивное пространство слабо полно. Кроме того, слабо полны Б. п. L_1 и l_1. Еще более широкий класс — Б. п., не содержащие подпространств, изоморфных c_0. Эти пространства во многом подобны слабо полным.

Б. п. наз. с т р о г о н о р м и р о в а н н ы м, если его единичная сфера S не содержит отрезков. Для количественной оценки выпуклости единичного шара вводятся модули выпуклости: локальный модуль выпуклости

$$\delta(x, \varepsilon) = \inf_{\|x-y\| \geqslant \varepsilon} \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right\}, \quad x, y \in S, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 2,$$

и равномерный модуль выпуклости

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{x \in S} \delta(x, \varepsilon).$$

Если $\delta(x, \varepsilon) > 0$ для всех $x \in X$ и всех $\varepsilon > 0$, то Б. п. наз. л о к а л ь н о р а в н о м е р н о в ы п у к л ы м. Если $\delta(\varepsilon) > 0$, то пространство наз. р а в н о м е р н о в ы п у к л ы м. Каждое равномерно выпуклое Б. п. локально равномерно выпукло; каждое локально равномерно выпуклое Б. п. строго нормировано. В конечномерных Б. п. верны и обратные включения. Если Б. п. равномерно выпукло, то оно рефлексивно.

Б. п. наз. г л а д к и м, если для любых линейно независимых элементов x и y функция $\psi(t) = \|x + ty\|$ дифференцируема при всех t. Б. п. наз. р а в н о м е р н о г л а д к и м, если для его модуля гладкости

$$\rho(\tau) = \sup_{x, y \in S} \left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1\right\}, \quad \tau > 0,$$

выполняется условие

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} = 0.$$

В равномерно гладких Б. п., и только в них, норма равномерно дифференцируема по Фреше. Равномерно гладкое Б. п. гладко. Обратное верно, если Б. п. конечномерно. Б. п. X равномерно выпукло (равномерно гладко) в том и только в том случае, если X^* равномерно гладко (равномерно выпукло). Между модулем выпуклости Б. п. X и модулем гладкости X^* существует связь

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{0 < \varepsilon \leqslant 2} \left[\frac{\varepsilon(\tau)}{2} - \delta_X(\varepsilon)\right].$$

Если Б. п. равномерно выпукло (равномерно гладко), то таковы любое его подпространство и факторпространство. Б. п. L_p и $l_p (p > 1)$ равномерно выпуклы и равномерно гладки, причем

$$\delta(\varepsilon) \asymp \begin{cases} \varepsilon^2 \ (1 < p \leqslant 2), \\ \varepsilon^p \ (2 \leqslant p < \infty); \end{cases}$$

$$\rho(\tau) \asymp \begin{cases} \tau^p \ (1 < p \leqslant 2), \\ \tau^2 \ (2 \leqslant p < \infty); \end{cases}$$

$$(f(\varepsilon) \asymp \varphi(\varepsilon) \Longleftrightarrow a < f(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon) < b).$$

Б. п. M, C, A, L_1, AP, m, c, l_1 не являются строго нормированными и не являются гладкими.

В Б. п. справедливы следующие важные теоремы для линейных операторов:

Т е о р е м а Б а н а х а — Ш т е й н г а у з а. Если семейство линейных операторов $\mathcal{T} = \{T_\alpha\}$ ограничено в каждой точке:

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T_\alpha x\| < \infty \quad \text{для всех } x \in X,$$

то оно ограничено по норме:

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T_\alpha\| < \infty.$$

Т е о р е м а Б а н а х а о б о б р а т н о м о п е р а т о р е. Если линейный непрерывный оператор ото-

бражает взаимно однозначно Б. п. X на Б. п. Y, то обратный оператор T^{-1} тоже непрерывен.

Теорема о замкнутом графике. Если замкнутый линейный оператор отображает Б. п. X в Б. п. Y, то он непрерывен.

Изометрия Б. п. сравнительно редкое явление. Классич. пример — Б. п. L_2 и l_2. Б. п. $C[K_1]$ и $C[K_2]$ изометричны в том и только в том случае, если K_1 и K_2 гомеоморфны (теорема Банаха — Стоуна). Для изоморфных Б. п. мерой близости служит число

$$d(X, Y) = \ln \inf_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\|,$$

где T пробегает всевозможные операторы, осуществляющие изоморфизм между X и Y. Если X изометрично Y, то $d(X, Y)=0$. Однако существуют и не изометричные пространства, для к-рых $d(X, Y)=0$; их наз. почти изометричными. Свойства Б. п., сохраняющиеся при изоморфизме, наз. линейно топологическими. К ним относятся сепарабельность, рефлексивность, слабая полнота. Изоморфная классификация Б. п. содержит, в частности, следующие утверждения:

$$L_r \neq L_s;\ l_r \neq l_s,\ r \neq s;$$

$$L_r \neq l_s,\ r \neq s \text{ или } r = s = 2;$$

$$M = m;\ C[0, 1] \neq A(D);$$

$C[K] - C[0, 1]$, если K — метрич. компакт мощности континуума;

$$C^n[I_m] \neq C[0, 1].$$

Каждое сепарабельное Б. п. изоморфно локально равномерно выпуклому. Неизвестно (1977), каждое ли Б. п. изоморфно своей гиперплоскости. Существует Б. п., не изоморфное строго нормированному.

Отвлекаясь от линейной природы нормированных пространств, можно рассматривать их топологич. классификацию. Два пространства гомеоморфны, если между их элементами может быть установлено взаимно однозначное и взаимно непрерывное (не обязательно линейное) соответствие. Неполное нормированное пространство не гомеоморфно никакому Б. п. Все бесконечномерные сепарабельные Б. п. гомеоморфны.

Универсальными (см. *Универсальное пространство*) в классе сепарабельных Б. п. являются $C[0, 1]$ и $A(D)$. В классе рефлексивных сепарабельных Б. п. нет даже изоморфно универсального. Б. п. l_1 универсально в несколько ином смысле: каждое сепарабельное Б. п. изометрично нек-рому его факторпространству.

В каждом из перечисленных выше Б. п., кроме l_2 и l_2, существуют подпространства без дополнения. В частности, в m и M не дополняемо каждое бесконечномерное сепарабельное подпространство, в $C[0, 1]$ не дополняемо каждое бесконечномерное рефлексивное подпространство. Если в Б. п. все подпространства дополняемы, то оно изоморфно гильбертову пространству. Неизвестно (1977), каждое ли Б. п. есть прямая сумма каких-то двух бесконечномерных подпространств. Подпространство Y дополняемо в том и только в том случае, если существует проектор, отображающий X на Y. Относительной проекционной константой $\lambda(Y, X)$ подпространства Y в X наз. нижняя грань норм проекторов на Y. Каждое n-мерное подпространство Б. п. дополняемо и $\lambda(Y_n, X) \leqslant \sqrt{n}$. Абсолютной проекционной константой $\lambda(Y)$ Б. п. Y наз.

$$\lambda(Y) = \sup_X \lambda(Y, X),$$

где X пробегает все Б. п., содержащие Y в качестве подпространства. Для любого бесконечномерного сепарабельного Б. п. Y имеем $\lambda(Y)=\infty$. Б. п., для к-рых $\lambda(Y) \leqslant \lambda < \infty$, образуют класс $\mathcal{P}_\lambda$ ($\lambda \geqslant 1$). Класс $\mathcal{P}_1$ сов-

падает с классом пространств $C(Q)$, где Q — экстремально несвязные компакты (см. *Экстремально несвязные пространства*).

Основные теоремы о конечномерных Б. п. 1) Конечномерное нормированное пространство *(Минковского пространство)* полно, т. е. является Б. п. 2) Каждый линейный оператор в конечномерном Б. п. непрерывен. 3) Конечномерное Б. п. рефлексивно (размерность X^* равна размерности X). 4) Б. п. конечномерно в том и только в том случае, если его единичный шар компактен. 5) Все n-мерные Б. п. попарно изоморфны; их множество становится компактом, если ввести расстояние

$$d(X, Y) = \ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x \in X, \qquad (*)$$

наз. сходящимся, если существует предел S последовательности частных сумм:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| S - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| < \infty,$$

то ряд (*) сходится; в этом случае он наз. абсолютно сходящимся. Ряд наз. безусловно сходящимся, если он сходится при любой перестановке его членов. Сумма безусловно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов. Для рядов в конечномерном пространстве (и, в частности, для числовых рядов) безусловная сходимость эквивалентна абсолютной. В бесконечномерных Б. п. из абсолютной сходимости следует безусловная, но обратное неверно ни в одном бесконечномерном Б. п. Последнее есть следствие теоремы Дворецкого — Роджерса: каковы бы ни были числа $a_k \geqslant 0$, подчиненные условию $\Sigma a_k^2 < \infty$, в любом бесконечномерном Б. п. существует такой безусловно сходящийся ряд Σx_k, что $\| x_k \| = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$. В пространстве c_0 (а значит, и в любом Б. п., содержащем подпространство, изоморфное c_0) для любой сходящейся к нулю последовательности $a_k \geqslant 0$ существует безусловно сходящийся ряд Σx_k, $\|x_k\| = a_k$. В $L_p(S, \Sigma, \mu)$ из безусловной сходимости ряда Σx_k следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^s < \infty,$$

где

$$s = \begin{cases} 2 & (1 \leqslant p \leqslant 2), \\ p & (p \geqslant 2). \end{cases}$$

В равномерно выпуклом Б. п. с. модулем выпуклости $\delta(\varepsilon)$ из безусловной сходимости ряда Σx_k следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\| x_k \|) < \infty.$$

Ряд Σx_k наз. слабо абсолютно сходящимся, если для каждого $f \in X^*$ сходится числовой ряд $\Sigma |f(x_k)|$. Каждый слабо абсолютно сходящийся ряд в X сходится в том и только в том случае, если X не содержит подпространства, изоморфного c_0.

Последовательность элементов $\{e_k\}_1^\infty$ Б. п. наз. минимальной, если любой ее член лежит вне замыкания $X^{(n)} = \{e_k\}_{k \neq n}$ линейной оболочки остальных членов. Последовательность наз. равномерно минимальной, если

$$\rho(e_n; X^{(n)}) \geqslant \gamma \| e_n \|, \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Если $\gamma = 1$, то последовательность наз. системой Ауэрбаха. В каждом n-мерном Б. п. существует полная система Ауэрбаха $\{e_n\}_1^n$. Неизвестно (1977), в

каждом ли сепарабельном Б. п. существует полная система Ауэрбаха. Для каждой минимальной системы существует сопряженная система линейных функционалов $\{f_n\}$, связанная с $\{e_k\}$ соотношениями биортогональности: $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. В этом случае система $\{e_k, f_k\}$ наз. б и о р т о г о н а л ь н о й. Множество линейных функционалов наз. т о т а л ь н ы м, если оно аннулирует только нулевой элемент пространства. В каждом сепарабельном Б. п. существует полная минимальная система с тотальной сопряженной. Каждый элемент $x \in X$ может быть формально разложен в ряд по биортогональной системе:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, e_k,$$

однако в общем случае этот ряд расходится.

Система элементов $\{e_k\}_1^\infty$ наз. б а з и с о м в X, если каждый элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad a_k = a_k(x).$$

Каждый базис в Б. п.— полная равномерная минимальная система с тотальной сопряженной. Обратное неверно, как показывает пример системы $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $C[0, 2\pi]$ и $L_1\{0, 2\pi]$.

Базис наз. б е з у с л о в н ы м, если каждая его перестановка — также базис, в противном случае базис наз. у с л о в н ы м. Система $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $L_p[0, 2\pi]$, $p>1$, $p\neq 2$,— условный базис. Безусловным базисом в L_p, $p>1$, является система Хаара. В пространствах C и L_1 нет безусловного базиса. Неизвестно (1977), в каждом ли Б. п. есть бесконечномерное подпространство с безусловным базисом. Каждое Б. п. с безусловным базисом либо рефлексивно, либо содержит подпространство, изоморфное l_1 или c_0.

Нормированные базисы $\{e'_k\}$ и $\{e''_k\}$ в Б. п. X_1 и X_2 наз. эквивалентными, если соответствие $e'_k \leftrightarrow e''_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) может быть продолжено до изоморфизма между X_1 и X_2. В каждом из пространств l_2, l_1, c_0 каждый нормированный безусловный базис эквивалентен естественному базису. Базисы, построенные в важных для приложений Б. п., не всегда хорошо приспособлены к решению задач, напр. теории операторов. В связи с этим введены T-б а з и с ы, или б а з и с ы с у м м и р о в а н и я. Пусть $\{t_{ij}\}_1^\infty$ — матрица *регулярного метода суммирования*. Система элементов $\{e_n\} \subset X$ наз. T-базисом, соответствующим данному методу суммирования, если каждый $x \in X$ единственным образом представляется в виде ряда

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

суммируемого этим методом к x. Тригонометрич. система $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $C[0, 2\pi]$ — базис суммирования для методов Чезаро и Абеля. Каждый T-базис полная минимальная (не обязательно равномерно) система с тотальной сопряженной. Обратное неверно. До недавнего времени (70-е гг.) одной из основных проблем теории Б. п. была восходящая к С. Банаху п р о б л е м а б а з и с а: в каждом ли сепарабельном Б. п. существует базис? Оставались открытыми также вопросы существования базиса в конкретных Б. п. Первый пример сепарабельного Б. п. без базиса построен в 1972; построены базисы в пространствах $C^n(I_m)$ и $A(D)$.

Лит.: [1] B a n a c h S., «Fund. math.», 1922, t. 3, p. 133–81; [2] Б а н а х С. С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [3] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [5] Б у р б а к и Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959. *М. И. Кадец, Б. М. Левитан.*

БАРБЬЕ ТЕОРЕМА о к р и в ы х п о с т о я н н о й ш и р и н ы: если расстояние между любыми двумя па-

раллельными опорными прямыми к кривой постоянно и равно a, то длина этой кривой равна πa. Установлена С. Барбье (S. Barbier, 1860). *А. Б. Иванов.*

БАР-ИНДУКЦИЯ — индуктивный способ рассуждения, используемый в интуиционистской математике (см. *Интуиционизм*) и состоящий в следующем. Пусть на конечных *кортежах* натуральных чисел заданы нек-рые свойства R и S такие, что: 1) свойство R разрешимо, т. е. для всякого кортежа $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ эффективно выясняется, выполнено R на этом кортеже или нет; 2) для всякой свободно становящейся последовательности α найдется кортеж вида $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$, для к-рого выполнено R. При этом, если выполняется 2), то говорят, что R «запирает» пустой кортеж $\langle\ \rangle$ (отсюда и назв. «Б.-и.», «bar» «запирать», «замок»); 3) для всякого кортежа π натуральных чисел, если $R(\pi)$, то $S(\pi)$ - так наз. б а з и с Б.-и.; 4) если $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ — кортеж такой, что для всякого натурального k имеет место $S(\langle n_1, \ldots, n_m, k \rangle)$, то необходимо $S(\langle n_1, \ldots, n_m \rangle)$; это свойство наз. ш а г о м Б.-и.

Если выполняются перечисленные условия 1) - 4), то принцип Б.-и. позволяет заключить, что имеет место $S(\langle\ \rangle)$.

Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer) предложил Б.-и. как интуиционистски приемлемый способ рассуждения, указывающий на незавершенность, нек-рую эффективную несчетность совокупности всех свободно становящихся последовательностей. В частности, было показано [С. К. Клини (S. C. Kleene) и независимо А. А. Марковым], что из принципа Б.-и. (фактически даже из нек-рого следствия Б.-и. теоремы о *веере*) следует, что не все свободно становящиеся последовательности рекурсивны.

С 60-х гг. 20 в. в основаниях математики нашли употребление формы Б.-и., рассматривающие не кортежи натуральных чисел, а кортежи более сложных объектов, напр. кортежи свободно становящихся последовательностей.

На языке формального интуиционистского математич. анализа Б.-и. может быть записана в виде:

$$\forall x\,(R(x) \vee \neg R(x)) \,\&\, \forall\alpha\exists x R(\overline{\alpha}(x)) \,\&$$
$$\forall x\,(R(x) \supset S(x)) \,\&$$
$$\forall x\,(\forall y S(x * \widehat{y}) \supset S(x)) \supset S(0).$$

Лит.: [1] K l e e n e S. C., V e s l e y R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965.

А. Г. Драгалин.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты точки n-мерного векторного пространства E^n, отнесенные к нек-рой фиксированной системе $p_0, p_1, \ldots, p_n$ точек, не лежащих в $(n-1)$-мерном подпространстве. Каждая точка $x \in E^n$ может быть единственным образом представлена в виде

$$x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$. Точка x, по определению, есть центр тяжести масс $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, помещенных в точках $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ наз. б а р и ц е н т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и точки x; точка с Б. к. $1/(n+1)$ наз. б а р и ц е н т р о м.

Б. к. введены А. Мёбиусом в 1827 (см. [1]) как ответ на вопрос о том, какие массы следует поместить в вершинах заданного треугольника, чтобы данная точка была центром тяжести этих масс. Б. к. являются частным случаем общих *однородных координат*; они аффинно инвариантны.

Б. к. точек симплекса используются в алгебраич. топологии (см. [2]). Б а р и ц е н т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и точек n-мерного симплекса σ относительно его вершин $A_0, A_1, \ldots, A_n$ наз. их (общие)

декартовы координаты в базисе векторов $\overline{OA}_0$, $\overline{OA}_1$, . . . , $\overline{OA}_n$, где O — любая точка, не лежащая в n-мерном подпространстве, несущем σ (считается, что σ лежит в нек-ром евклидовом пространстве; при этом определение не зависит от точки O), или проективные координаты относительно $A_0, A_1, \ldots, A_n$ в проективном пополнении содержащего σ подпространства. Б. к. точек симплекса неотрицательны и их сумма равна единице. Обращение в нуль i-й Б. к. равносильно тому, что точка лежит на противоположной вершине A_i грани симплекса σ. Это позволяет рассматривать Б. к. точек геометрич. комплекса относительно всех его вершин. При помощи Б. к. производится *барицентрическое подразделение* комплекса.

По аналогии с этим вводится формальное определение Б. к. для абстрактных симплексов (см. [3]).

Лит.: [1] Möbius A. F., Der barycentrische Calcul, в его кн.: Gesammelte Werke, Bd 1, Lpz., 1885; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Е. Г. Скляренко.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ геометрического комплекса K — комплекс K', получающийся заменой симплексов комплекса K на более мелкие путем следующего процесса. Каждый одномерный симплекс (отрезок) делится пополам. В предположении, что все симплексы размерности $\leqslant n-1$ уже подразделены, разбиение любого n-мерного симплекса σ определяется посредством конусов над симплексами границы симплекса σ, имеющих общую вершину, являющуюся барицентром симплекса σ, т. е. точкой с *барицентрическими координатами* $1/(n+1)$. Вершины полученного комплекса K' находятся во взаимно однозначном соответствии с симплексами комплекса K, а симплексы комплекса K' — с упорядоченными по включению конечными наборами симплексов из K. По аналогии с этим вводится формальное определение Б. п. и в случае абстрактного комплекса.

Е. Г. Скляренко.

БАРТЛЕТТА КРИТЕРИЙ — статистический критерий в *Беренса — Фишера проблеме*. Относится к случаю, когда две выборки $x_1, \ldots, x_{n_1} \in N(a_1, \sigma_1^2)$ и $y_1, \ldots, y_{n_2} \in N(a_2, \sigma_2^2)$ имеют одинаковый объем: $n_1 = n_2 = n$. Критические области даются неравенством

$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\overline{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})-(y_i-\overline{y})]^2}} > c$$

при любом постоянном $c>0$, где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Левая часть неравенства имеет *Стьюдента распределение* с $n-1$ степенями свободы, что связывает уровень значимости критерия с постоянной c. Б. к. является частным случаем *Шеффе критерия* и обладает аналогичными экстремальными свойствами, однако предложен М. Бартлеттом [1] ранее этого решения. Другой Б. к. относится к сравнению дисперсий многих выборок.

Лит.: [1] Bartlett M. S., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1936, v. 32, pt 3, p. 560—66.

О. В. Шалаевский.

БАРЬЕР, барьер Лебега, в теории потенциала — функция, существование к-рой является необходимым и достаточным условием регулярности граничной точки в отношении поведения обобщенного решения задачи Дирихле в этой точке (см. также *Перрона метод*, *Регулярная точка*).

Пусть D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и ξ — точка ее границы $\Gamma = \partial D$. Барьером для точки ξ наз. всякая функция $w_\xi(x)$, непрерывная в пересечении $(D \cup \Gamma) \cap B$ замкнутой области $D \cup \Gamma$ и нек-рого шара $B = B(R, \xi)$ с центром в точке ξ,

супергармоническая внутри $D \cap B$ и положительная в $(D \cup \Gamma) \cap B$, за исключением точки ξ, в к-рой она обращается в нуль. Напр., при $n \geqslant 3$ во всякой граничной точке ξ, для к-рой существует замкнутый шар $\bar{B}(R, y)$, имеющий с $D \cup \Gamma$ единственную общую точку ξ, в качестве Б. можно взять гармонич. функцию

$$w_\xi(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

где R — радиус шара $\bar{B}(R, y)$, а y — его центр.

Б. в теории функций комплексного переменного — функция, из существования к-рой для всех граничных точек области D следует, что D является *голоморфности областью*. Пусть D — область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$, и ξ — точка границы $\Gamma = \partial D$. Б. в точке ξ есть всякая аналитич. функция $f(z)$ в D, имеющая особенность в ξ. Так, для граничной точки ξ любой плоской области $D \subset \mathbb{C}'$ Б. является функция $1/(z-\xi)$. В каждой точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ границы шара

$$D = \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n);\ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 < R^2 \right\}$$

также существует Б. — функция $1/(\bar{\xi}_1 z_1 + \ldots + \bar{\xi}_n z_n - R^2)$.

Б. существует в граничной точке ξ области D, если в D определена аналитич. функция $f(z)$, неограниченная в ξ, т. е. такая, что для нек-рой последовательности точек $\{z^{(k)}\} \subset D$, сходящейся к ξ, имеем

$$\lim_{k \to \infty} |f(z^{(k)})| = +\infty.$$

Обратное справедливо для областей $D \subset \mathbb{C}^n$ в следующей усиленной форме: для любого множества E точек границы области D, в к-рых существует Б., найдется голоморфная в D функция, неограниченная во всех точках E. Если E всюду плотно на границе D, то D — область голоморфности.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964, гл. 4; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев, М. Ширинбеков.

БАШНЯ ПОЛЕЙ — последовательность *расширений*

$$k \subset k_1 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots \qquad (*)$$

нек-рого поля k. В зависимости от свойств расширений k_{i+1}/k_i башни наз. нормальными, абелевыми, сепарабельными и др. Понятие Б. п. играет важную роль в *Галуа теории*, где вопрос о разрешимости уравнения в радикалах сводится к возможности погружения поля коэффициентов этого уравнения в нормальную и абелеву Б. п.

В *полей классов теории* возникает башня

$$k \subset k_1 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots,$$

где k — нек-рое поле алгебраич. чисел, а каждое поле k_{i+1} является максимальным абелевым неразветвленным расширением поля k_i. Такие башни наз. башнями полей классов. Группа Галуа каждого расширения k_{i+1}/k_i изоморфна, в силу закона взаимности, группе классов идеалов поля k_i, а так как последняя конечна, то конечны и все расширения k_{i+1}/k_i. Объединение K полей k_i является максимальным разрешимым неразветвленным расширением поля k. Вопрос о конечности расширения K/k (проблема Б. п.) был поставлен К. Фуртвенглером (K. Furtwängler) в 1925 и отрицательно решен в 1964 (см. [2]). Примером поля, Б. п. классов к-рого бесконечна, является расширение поля рациональных чисел, получаемое присоединением $\sqrt{-30030}$. В частности, такое поле нельзя вложить ни в какое поле алгебраич. чисел, в к-ром имеет место однозначность разложения чисел на простые множители. Решение проблемы имеет применения в теории алгебраич. чисел, напр. помогает получить точную оценку роста дискриминантов полей алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Голод Е. С., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 261—72.

А. Н. Паршин.

БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач вариационного исчисления. Применяется для решения задач оптимального управления невысокой размерности, но со сложными ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции. После дискретизации функционала и системы дифференциальных уравнений исходная задача сводится к минимизации функционала:

$$I=\sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}), \tag{1}$$

$$x_{k+1}-x_k-\tau F(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}), \tag{2}$$

$$k=0,\ \ldots,\ N-1,$$

$$(x_k,\ u_k)\in G_k,\ k=0,\ \ldots,\ N. \tag{3}$$

Здесь x_k, u_k — векторы фазовых координат и управлений в узле t_k (имеющие размерности соответственно n и m), причем u_k считается постоянным на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), G_k — заданные области $(n+m)$-мерного пространства (G_0 и G_N описывают граничные условия), $\tau=(T-t_0)/N$ — шаг разбиения исходного интервала $T-t_0$.

Б. в. м. применяется в случае $n\geqslant m$, характерном для практич. задач и для к-рого использование других методов, основанных на варьировании в пространстве состояний *(блуждающей трубки метод, локальных вариаций метод)*, осложнено в связи с трудоемкостью построения функции управления.

Заданное начальное приближение $(\overset{\circ}{x}_0,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_N,\ \overset{\circ}{u}_0,\ \ldots,\ \overset{\circ}{u}_{N-1})$, удовлетворяющее (2) и (3), улучшается в смысле критерия (1) на каждом участке от t_k до t_{k+p} (x_k, x_{k+p} фиксируются), и этот участок последовательно сдвигается на один узел от начала траектории до конца, и обратно (отсюда название «бегущая волна»).

Для каждой волны получается задача нелинейного программирования минимизация

$$\Delta I_k=\sum_{l=k}^{k+p-1} F^0(x_l,\ x_{l+1},\ u_l,\ t_l,\ t_{l+1}) \tag{4}$$

с p связями типа равенства (2) и условиями (3). При практич. реализации Б. в. м. вместо решения задачи (4) даются приращения $\pm h_i$ каждому из r свободных параметров и в случае уменьшения ΔI_k(4) и удовлетворения условий (3) получается новая траектория. Если траектория не меняется при полном проходе волны, то h_i дробятся.

При $m=n$ Б. в. м. переходит в метод локальных вариаций.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., *Элементы теории оптимальных систем*, М., 1975; [2] Ватель И. А., Кононенко А. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1970, т. 10, № 1, с. 67—73; [3] их же, Алгоритмы и программы (Информационный бюллетень), М., 1972, № 2, с. 7.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

БЕЕНКЕ — ШТЕЙНА ТЕОРЕМА: объединение областей голоморфности $G_k\subset\mathbb{C}^n$, $k=1, 2, \ldots$, таких, что $G_k\subset G_{k+1}$ для всех k, тоже является областью голоморфности. Б.— Ш. т. справедлива не только в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, но и на любом *Штейна многообразии*. Без условия монотонности последовательности G_k по вложению эта теорема неверна, напр. объединение двух областей голоморфности

$$G_1=\{(z_1,\ z_2):|z_1|<1,\ |z_2|<2\}$$

и

$$G_2=\{(z_1,\ z_2):|z_1|<2,\ |z_2|<1\}$$

в $\mathbb{C}^2$ не является областью голоморфности.

Лит.: [1] Behnke H., Stein K., «Math. Ann.», 1938, Bd 116, S. 204—16; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, к-рое при любом $n=2, 3, 4, \ldots$ может быть представлено как композиция (свертка) n одинаковых распределений вероятностей. Определение Б. д. р. в равной степени применимо к распределениям на прямой, в конечномерных евклидовых пространствах и в нек-рых еще более общих случаях. Ниже рассматривается одномерный случай.

Характеристич. функции $f(t)$ Б. д. р. наз. безгранично делимыми. Каждая такая функция при любом n может быть представлена как n-я степень некоторой другой характеристич. функции:

$$f(t) = (f_n(t))^n.$$

Примерами Б. д. р. могут служить *нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, *Коши распределение*, *«хи-квадрат» распределение*. Проверять свойство безграничной делимости проще всего с помощью характеристич. функций. Композиция Б. д. р. и предел слабо сходящейся последовательности Б. д. р. суть снова Б. д. р.

Случайную величину, определенную на нек-ром вероятностном пространстве, наз. безгранично делимой, если при любом n она может быть представлена в виде суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на том же пространстве. Распределение каждой такой величины Б. д. р. Обратное не всегда верно. Так, если взять дискретное вероятностное пространство, образованное неотрицательными целыми числами m 0, 1, 2, ... с приписанными им пуассоновскими вероятностями

$$\mathsf{P}(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

то случайная величина $X(m) - m$ не будет безгранично делимой, хотя ее распределение вероятностей (распределение Пуассона) есть Б. д.р.

Б. д. р. впервые появились в связи с изучением стохастически непрерывных однородных *случайных процессов с независимыми приращениями* (см. [1], [2], [3]). Так называют процессы $X(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющие требованиям: 1) $X(0) = 0$; 2) распределение вероятностей приращения $X(\tau_2) \quad X(\tau_1)$, $\tau_2 > \tau_1$, зависит только от $\tau_2 \quad \tau_1$; 3) при $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k$ разности

$$X(\tau_2) - X(\tau_1),\ X(\tau_3) - X(\tau_2),\ \ldots,\ X(\tau_k) - X(\tau_{k-1})$$

являются взаимно независимыми случайными величинами; 4) для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|X(\tau)| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

при $\tau \to 0$. Для такого процесса значение $X(\tau)$ при любом τ будет иметь Б. д. р. и соответствующая характеристич. функция удовлетворяет соотношению:

$$f_\tau(t) = (f_1(t))^\tau.$$

Общий вид $f_\tau(t)$ для таких процессов в предположении конечности дисперсий $\mathsf{D}X(\tau)$ был найден А. Н. Колмогоровым [2] (частный случай приводимого ниже общего канонич. представления Б. д. р.).

Характеристич. функция Б. д. р. нигде не обращается в нуль, и ее логарифм (в смысле главного значения) допускает представление вида:

$$\ln f(\tau) = i\gamma t - \int_{-\infty}^{+\infty} L(u, t) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \qquad (*)$$

(так наз. каноническое представление Леви — Хинчина), где

$$L(u, t) = e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2},$$

γ — нек-рая действительная постоянная, $G(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации с $G(-\infty) = 0$. Подинтегральное выражение при $u = 0$ принимают равным $-t^2/2$. При любом выборе постоянной γ

и функции $G(x)$ с указанными выше свойствами формула (*) определяет логарифм характеристич. функции нек-рого Б. д. р. Соответствие между Б. д. р. и парами (γ, G) взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Последнее означает, что Б. д. р. слабо сходятся к предельному Б. д. р. тогда и только тогда, когда $\gamma_n \to \gamma$ и $G_n(x)$ слабо сходятся к $G(x)$ при $n \to \infty$.

Примеры. Пусть $U(x)=0$, $x \leqslant 0$, $U(x)=1$, $x>0$. Тогда для нормального распределения с математич. ожиданием a и дисперсией σ^2 в формуле (*) следует положить

$$\gamma = a, \quad G(x) = \frac{\sigma^2}{2} U(x).$$

Для распределения Пуассона с параметром λ имеем

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}, \quad G(x) = \frac{\lambda}{2} U(x-1).$$

Для распределения Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

имеем $\gamma=0$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Канонич. представление (*) удобно с чисто «технической» точки зрения (благодаря тому, что G имеет ограниченную вариацию), однако функция G не имеет прямого вероятностного истолкования. Поэтому используют и другую форму представления Б. д. р., допускающую непосредственную вероятностную интерпретацию. Пусть функции $M(u)$ и $N(u)$ определены при $u<0$ и $u>0$, соответственно, формулами:

$$dM(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

$$dN(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

$$M(-\infty) = N(\infty) = 0.$$

Эти функции неубывающие, $M(u) \geqslant 0$ при $u<0$ и $N(u) \leqslant 0$ при $u>0$; в окрестности нуля функции могут неограниченно возрастать. Обозначая дополнительно через σ^2 скачок функции G в нуле, формулу (*) можно переписать в виде:

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{-0} L(u, t)\, dM(u) + \int_{+0}^{\infty} L(u, t)\, dN(u)$$

(каноническое представление Леви). Функции M и N описывают, грубо говоря, частоту скачков различного размера в однородном процессе $X(\tau)$ с независимыми приращениями, для к-рого

$$\ln f_\tau(t) = \tau \ln f(t).$$

Важная роль Б. д. р. в предельных теоремах теории вероятностей связана с тем, что эти и только эти распределения могут быть предельными для сумм независимых случайных величин, подчиненных требованию *асимптотической пренебрегаемости*. При этом рассматривают последовательность серий $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, взаимно независимых случайных величин и затем подбирают взаимно независимые случайные величины $Y_{n1}, \ldots, Y_{nk_n}$, имеющие Б. д. р. (так наз. сопровождающие Б. д. р.); характеристич. функция $g_{nk}(t)$ величины Y_{nk} определяется по характеристич. функции $f_{nk}(t)$ величины X_{nk} так, чтобы выполнялось следующее основное свойство: распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - A_n$$

сходятся к предельному распределению (при нек-ром

выборе констант A_n) тогда и только тогда, когда сходятся к предельному распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk} - A_n.$$

Для симметричного распределения X_{nk} полагают

$$g_{nk}(t) = \exp(f_{nk}(t) - 1).$$

В других случаях выражение g_{nk} сложнее и содержит так наз. урезанные математич. ожидания X_{nk}. Свойства Б. д. р. описывают в терминах функций, входящих в канонич. представления. Так, напр., безгранично делимая функция распределения $F(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, dG(u) = \infty$.

Важным частным случаем Б. д. р. являются так наз. *устойчивые распределения*. См. также *Безгранично делимых распределений разложение*.

Лит.: [1] Finetti B. de, «Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur, Sez. 1», ser. 6, 1929, v. 10, p. 163—68; [2] Колмогоров А. Н., там же, 1932, v. 15, p. 866—69; [3] Lévy P., «Ann. Scuola Norm. di Pisa», 1934, v. 3, p. 337—66; [4] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; [5] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [7] Fisz M., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 68—84; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Сазонов В. В., Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, с. 3—55.

Ю. В. Прохоров.

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление безгранично делимых распределений в виде композиции (свертки) нек-рых распределений вероятностей. Распределения, участвующие в Б. д. р. р., наз. компонентами разложения.

Нек-рые Б. д. р. р. могут иметь компоненты, к-рые не являются безгранично делимыми распределениями (см. [1]). Важная задача теории Б. д. р. р.— описание класса I_0 безгранично делимых распределений, имеющих только безгранично делимые компоненты. Представители класса I_0: *нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, их композиция (см. *Леви — Крамера теорема*).

В исследованиях по проблеме описания класса I_0 важную роль играет введенный Ю. В. Линником [2] класс $\mathfrak{L}$ безгранично делимых распределений, у к-рых функция $G(x)$ в каноническом представлении Леви — Хинчина является функцией скачков с точками роста среди 0, $\mu_{m,1}$, $\mu_{m,2}$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\mu_{m,1}>0$, $\mu_{m,2}<0$ и числа $\mu_{m+1,r}\,\mu_{m,r}$ ($r=1, 2$; $m=0; \pm 1, \pm 2, \ldots$) — натуральные, отличные от 1. Если безгранично делимое распределение таково, что $G(+0) - G(-0)>0$, то для его принадлежности к I_0 необходимо, чтобы оно принадлежало к $\mathfrak{L}$. Достаточным это условие не является, но известно, что распределение класса $\mathfrak{L}$ принадлежит I_0, если

$$\int_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-ky^2\}),$$

при нек-ром $k>0$ и при $y\to\infty$.

Если $G(+0) - G(-0)=0$, то принадлежность к $\mathfrak{L}$ не является необходимым условием принадлежности к I_0. Так, напр., к I_0 принадлежат все безгранично делимые распределения, у к-рых функция $G(x)$ постоянна при $x<a$ и $x>b$, где $0<a<b\leqslant 2a$.

Простое достаточное условие того, чтобы безгранично делимое распределение не принадлежало к I_0, состоит в следующем: на интервале $a<x<b$, где $0<a<2a<b$, выполняется неравенство $G'(x)\geqslant \text{const}>0$. Из этого условия вытекает, что все *устойчивые распределения*, кроме нормального и единичного, а также гамма-распределение и χ^2-распределение, не принадлежат к I_0.

Класс I_0 является плотным в классе всех безгранично делимых распределений в топологии слабой сходимости,

всякое безгранично делимое распределение представляется в виде композиции конечного или счетного множества распределений из I_0.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Бюлл. МГУ, секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6—17; [2] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, с. 3—40; [3] его же, Разложения вероятностных законов, Л., 1960; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [5] Ramachandran B., Advanced theory of characteristic functions, Calcutta, 1967; [6] Lukas E., Characteristic functions, L., 1970; [7] Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, [т. 12], М., 1975, с. 5—42.

И. В. Островский.

БЕЗИКОВИЧА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ класс (B^p-п. п.) почти периодических функций, в к-ром справедлив аналог теоремы Рисса — Фишера: любой тригонометрич. ряд

$$\sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где

$$\sum_n |a_n|^2 < \infty,$$

служит рядом Фурье нек-рой B^2-п. п. функции. Определение Б. п. п. ф. (А. С. Безикович [1], [2]), основанное на обобщении понятия *почти периода*, требует введения нек-рых дополнений. Множество E действительных чисел наз. достаточно однородным, если существует $L>0$ такое, что отношение наибольшего количества членов E в интервале длины L к наименьшему количеству в том же интервале L меньше 2. Достаточно однородное множество является относительно плотным. Комплексная функция $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, суммируемая со степенью p в каждом конечном интервале действительной оси, наз. Б. п. п. ф., если каждому $\varepsilon>0$ соответствует достаточно однородное множество чисел [т. н. (B^p,ε)-почти периодов функции $f(x)$]:

$$\ldots<\tau_{-2}<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\ldots$$

такое, что для каждого i

$$\overline{M}_x\{|f(x+\tau_i)-f(x)|^p\}<\varepsilon^p,$$

и для каждого $c>0$

$$\overline{M}_x\overline{M}_i\frac{1}{c}\int_x^{x+c}|f(x+\tau_i)-f(x)|^p\,dx<\varepsilon^p,$$

где

$$\overline{M}_x\{F(x)\}=\varlimsup_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}F(x)\,dx,$$

$$\overline{M}_i\{F(i)\}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}F(i),$$

$F(x)$ — действительная функция, определенная, соответственно, для действительного переменного и натурального аргумента.

Лит.: [1] Besicovitch A. S., «Proc. London Math. Soc.», 1927, v. 27, p. 495—512; [2] его же, там же, 1927, v. 26, p. 25—34; [3] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БЕЗУ КОЛЬЦО — *область целостности* с единицей, в к-рой любой идеал конечного типа является главным. Любое кольцо главных идеалов, а также любое кольцо нормирования суть Б. к. Кольцо Безу целозамкнуто, и его локализация (т. е. кольцо частных) снова есть Б. к. Для конечного множества $a_1,\ldots,a_n$ элементов Б. к. A существуют их наибольший общий делитель (причем н. о. д. $(a_1,\ldots,a_n)$ имеет вид $\sum b_i a_i$, $b_i\in A$ так наз. тождество Безу) и наименьшее общее кратное. Нётерово (и даже атомарное) Б. к.— кольцо главных идеалов. Как и для колец главных идеалов, модуль конечного типа над Б. к. является прямой суммой модуля кручения и свободного модуля.

В. И. Данилов.

БЕЗУ ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о делении многочлена на линейный двучлен: остаток от деления многочлена

$$f(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$$

на двучлен $x-a$ равен $f(a)$. Предполагается, что коэффициенты многочленов содержатся в нек-ром коммутативном кольце с единицей (напр., в поле действительных или комплексных чисел). Следствие Б. т.: число α является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится без остатка на двучлен $x-\alpha$.

2) Б. т. для системы однородных уравнений: если система n однородных уравнений от $n+1$ неизвестных

$$f_i(x_0, \ldots, x_n)=0, \quad i=1,2,\ldots, n, \qquad (*)$$

обладает лишь конечным числом непропорциональных ненулевых решений в алгебраически замкнутом поле, содержащем коэффициенты системы, то число этих решений с учетом кратности равно произведению степеней уравнений. Кратность решения есть, по определению, индекс пересечения гиперповерхностей (*) (см. *Пересечения индекс*) в соответствующей точке. Теорема носит имя Э. Безу [1], изучавшего системы алгебраич. уравнений высших степеней.

Лит.: [1] Bézout E., Théorie générale des équations algébriques, P., 1779. *В. Н. Ремесленников, В. Е. Воскресенский.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ — суммируемость ряда при любой перестановке его членов. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

наз. безусловно суммируемым нек-рым методом суммирования A (безусловно A-суммируемым), если он суммируем этим методом к сумме s при любой перестановке его членов, где s может зависеть от перестановки (см. *Суммирования методы*). Начало исследований по Б. с. положено В. Орличем [1]; в частности, он показал, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из Б. с. ряда линейным регулярным методом (см. *Регулярные методы суммирования*) следует его *безусловная сходимость*. Позднее было показано, что это условие можно заменить более слабым: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$ (см. [2]). Б. с. матричным методом не влечет безусловной сходимости, по существу, для единственного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Именно если A — матричный регулярный метод суммирования и ряд (*) безусловно A-суммируем, то все члены ряда имеют вид $a_n = c+\eta_n$, где c — постоянная, а ряд с членами η абсолютно сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty$; при этом $c=0$, если метод A не суммирует ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ (см. [3]).

В случае функциональных рядов рассматривают Б. с. по мере, всюду, почти всюду и т. п. Для Б. с. функциональных рядов почти всюду справедливо утверждение: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ измеримых на множестве E функций $f_n(x)$ безусловно A-суммируем почти всюду на E, то члены ряда имеют вид $f_n(x)=f(x)+\eta_n(x)$, где $f(x)$ — конечная измеримая на E функция, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на E; при этом $f(x)=0$, если метод A не суммирует ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ (см. [2]).

Лит.: [1] Orlicz W., «Bull. de l'Acad. polonaise», 1927, № 3A, p. 117—25; [2] Ульянов П. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, №5, с. 781—808; [3] Гапошкин В. Ф., Олевский А. М., «Науч. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки», 1958, т. 6, с. 81—86. *И. И. Волков.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ — свойство ряда сходиться при любой перестановке его членов. Точнее, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

из элементов линейного пространства E, в к-ром определено понятие сходящейся последовательности, наз. безусловно сходящимся, если он сходится при любой перестановке его членов.

Одно направление исследований относится к изучению безусловно сходящихся рядов в векторных метри-

ческих (или топологических) пространствах (см. [1] — [3]). Так, для Б. с. ряда (*) из элементов банахова пространства E необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, был сходящимся [4]. Б. с. числового ряда равносильна его абсолютной сходимости (см. *Римана теорема* о перестановке членов ряда). Вообще, если E - конечномерное векторное нормированное пространство, то Б. с. ряда равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|_E$. В бесконечномерном банаховом пространстве такое утверждение неверно.

Другое направление исследований касается свойств безусловно сходящихся почти всюду функциональных (или ортогональных) рядов [5]. Эти свойства зачастую принципиально отличны от свойств Б. с. рядов в банаховых пространствах. Так, напр., аналог сформулированной выше теоремы Орлича не имеет места для Б. с. почти всюду [6].

Лит.: [1] Банах С., Курс функціонального аналізу, К., 1948; [2] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., [ч. 1], М., 1962; [4] Orlicz W., «Stud. math.», 1929, t. 1, p. 241–55; [5] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [6] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 61—142. *Б. И. Голубов.*

БЕЙЕСА ФОРМУЛА — формула, позволяющая вычислять апостериорные вероятности событий (или гипотез) через априорные вероятности. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — полная группа несовместимых событий: $\bigcup A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда апостериорная вероятность $P(A_i|B)$ события A_i при условии, что произошло событие B (с $P(B)>0$), может быть найдена по формуле Бейеса:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)}, \qquad (*)$$

где $P(A_i)$ — априорная вероятность события A_i, $P(B|A_i)$ — условная вероятность события B при условии, что произошло событие A_i (с $P(A_i)>0$). Б. ф. доказана Т. Бейесом (T. Bayes, опубликована в 1763).

Формула (*) является частным случаем следующего абстрактного варианта Б. ф. Пусть θ и ξ — случайные элементы со значениями в измеримых пространствах (Θ, B_Θ) и (X, B_X) и $\mathsf{E}|g(\theta)|<\infty$. Для всякого множества $A \in F_\xi = \sigma\{\omega : \xi(\omega)\}$ положим

$$G(A) = \int_\Omega g(\theta(\omega))\,\mathsf{E}[I_A(\omega)\,|\,F_\theta](\omega)\,P(d\omega),$$

где $F_\theta = \sigma\{\omega : \theta(\omega)\}$ и $I_A(\omega)$ - индикатор множества A. Тогда мера G абсолютно непрерывна относительно меры P ($G \ll P$) и $\mathsf{E}[g(\theta)\,|\,F_\xi](\omega) = \frac{dG}{dP}(\omega)$, где $\frac{dG}{dP}(\omega)$ производная Радона — Никодима меры G по мере P.

Лит.: [1] Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *А. Н. Ширяев.*

БЕЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА — оценка неизвестного параметра по результатам наблюдений при *бейесовском подходе*. При таком подходе к задачам статистич. оценивания обычно предполагается, что неизвестный параметр $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ является случайной величиной с заданным (априорным) распределением $\pi = \pi(d\theta)$, пространство решений D совпадает с множеством Θ, а потери $L(\theta, d)$ отражают расхождение между значением θ и его оценкой d. Поэтому, как правило, считается, что функция $L(\theta, d)$ имеет вид $L(\theta, d) = a(\theta)\lambda(\theta - d)$, где λ — некоторая неотрицательная функция от вектора погрешностей $\theta - d$. В случае $k=1$ часто полагают $\lambda(\theta - d) = |\theta - d|^\alpha$, $\alpha>0$; при этом наиболее употребительной и математически более удобной оказывается квадратичная функция потерь $L(\theta, d) = |\theta - d|^2$. Для такой функции потерь Б. о. (*бейесовская решающая*

функция) $\delta^*=\delta^*(x)$ определяется как функция, на к-рой достигаются минимальные полные потери

$$\inf_{\delta}\rho(\pi,\delta)=\inf_{\delta}\int_{\Theta}\int_{X}|\theta-\delta(x)|^2\,P_\theta(dx)\,\pi(d\theta),$$

или, что эквивалентно, минимальные условные потери

$$\inf_{\delta}\mathsf{E}\{[\theta-\delta(x)]^2\mid x\}.$$

Отсюда следует, что в случае квадратичной функции потерь Б. о. $\delta^*(x)$ совпадает с апостериорным средним: $\delta^*(x)=\mathsf{E}(\theta|x)$, а байесовский риск

$$\rho(\pi,\delta^*)=\mathsf{E}[\mathsf{D}(\theta\mid x)],$$

где $\mathsf{D}(\theta|x)$ — дисперсия апостериорного распределения:

$$\mathsf{D}(\theta\mid x)=\mathsf{E}\{[\theta-\mathsf{E}(\theta\mid x)]^2\mid x\}.$$

Пример. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_1,\ldots,x_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальные распределения $N(\theta,\sigma^2)$, σ^2 известно, а неизвестный параметр θ имеет нормальное распределение $N(\mu,\tau^2)$. Поскольку апостериорное распределение для θ (при заданном x) является нормальным $N(\mu_n,\tau_n^2)$ с

$$\mu_n=\frac{n\bar{x}\sigma^{-2}+\mu\tau^{-2}}{n\sigma^{-2}+\tau^{-2}},\quad \tau_n^{-2}=n\sigma^{-2}+\tau^{-2},$$

где $\bar{x}=(x_1+\ldots+x_n)/n$, то в случае квадратичной функции потерь $|\theta-d|^2$ байесовская оценка $\delta^*(x)=\mu_n$, а байесовский риск равен $\tau_n^2=\sigma^2\tau^2/(n\tau^2+\sigma^2)$. *А. Н. Ширяев.*

БАЙЕСОВСКАЯ РЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — правило (функция) $\delta=\delta(x)$, которое сопоставляет каждому результату статистич. эксперимента x решение $\delta(x)$ со значениями в заданном множестве решений и доставляет минимум полным потерям, определяемым в рамках *байесовского подхода* к статистич. задачам. *А. Н. Ширяев.*

БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД к статистическим задачам — подход, основанный на предположении, что всякому параметру в статистич. проблеме принятия решения приписано нек-рое распределение вероятностей. Всякая общая статистич. проблема принятия решения определяется следующими элементами: пространством $(X,\mathscr{B}_X)$ выборок x, пространством $(\Theta,\mathscr{B}_\Theta)$ значений неизвестного параметра θ, семейством распределений вероятностей $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ на $(X,\mathscr{B}_X)$, пространством решений $(D,\mathscr{B}_D)$ и функцией $L(\theta,d)$, характеризующей потери от принятия решения d, когда истинное значение параметра есть θ. Цель же проблемы принятия решения состоит в отыскании в определенном смысле наилучшего правила (решающей функции) $\delta=\delta(x)$, сопоставляющей каждому результату наблюдения $x\in X$ решение $\delta(x)\in D$. При Б. п., когда считается, что неизвестный параметр θ является случайной величиной с заданным (априорным) распределением $\pi=\pi(d\theta)$ на $(\theta,\mathscr{B}_\theta)$, наилучшая решающая функция (*байесовская решающая функция*) $\delta^*=\delta^*(x)$ определяется как функция, на к-рой достигаются минимальные полные потери $\inf_{\delta}\rho(\pi,\delta)$, где

$$\rho(\pi,\delta)=\int_{\Theta}\rho(\theta,\delta)\,\pi(d\theta),$$

а

$$\rho(\theta,\delta)=\int_{X}L(\theta,\delta(x))\,P_\theta(dx).$$

Таким образом,

$$\rho(\pi,\delta^*)=\inf_{\delta}\int_{\Theta}\int_{X}L(\theta,\delta(x))\,P_\theta(dx)\,\pi(d\theta).$$

При отыскании байесовской решающей функции $\delta^*=\delta^*(x)$ полезным оказывается следующее замечание. Пусть $P_\theta(dx)=p(x|\theta)d\mu(x)$, $\pi(d\theta)=\pi(\theta)d\nu(\theta)$, где μ и ν — некоторые σ-конечные меры. Тогда, предполагая

возможным смену порядков интегрирования, находим

$$\int_\Theta \int_X L(\theta, \delta(x))\, P_\theta(dx)\, \pi(d\theta) =$$

$$= \int_\Theta \int_X L(\theta, \delta(x))\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\mu(x)\, d\nu(\theta) =$$

$$= \int_X d\mu(x) \left[\int_\Theta L(\theta, \delta(x))\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta) \right].$$

Отсюда видно, что для данного $x \in X$ $\delta^*(x)$ есть то значение d^*, на к-ром достигается

$$\inf_d \int_\Theta L(\theta, d)\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta)$$

или, что эквивалентно,

$$\inf_d \int_\Theta L(\theta, d)\, \frac{p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)}{p(x)}\, d\nu(\theta),$$

где

$$p(x) = \int_\Theta p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta).$$

Но по *Бейеса формуле*

$$\int_\Theta L(\theta, d)\, \frac{p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)}{p(x)}\, d\nu(\theta) = \mathsf{E}[L(\theta, d) \mid x].$$

Тем самым для данного x $\delta^*(x)$ есть то значение d^*, на к-ром достигают минимума условные средние потери $\mathsf{E}[L(\theta, d)|x]$.

Пример (Б. п. в задаче различения двух простых гипотез). Пусть $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$, $L_{ij} = L(\theta_i, d_j)$, $i, j = 1, 2$; $\pi(\theta_1) = \pi_1$, $\pi(\theta_2) = \pi_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Отождествляя решение d_i с принятием гипотезы H_i: $\theta = \theta_i$, естественно считать, что $L_{11} < L_{12}$, $L_{22} < L_{21}$. Тогда

$$\rho(\pi, \delta) = \int_X [\pi_1 p(x \mid \theta_1)\, L(\theta_1, \delta(x)) +$$

$$+ \pi_2 p(x \mid \theta_2)\, L(\theta_2, \delta(x))]\, d\mu(x),$$

откуда следует, что $\inf_\delta \rho(\pi, \delta)$ достигается на функции

$$\delta^*(x) = \begin{cases} d_1, \text{ если } \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} \leqslant \dfrac{\pi_1}{\pi_2} \dfrac{L_{12} - L_{11}}{L_{21} - L_{22}}, \\ d_2, \text{ если } \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} > \dfrac{\pi_1}{\pi_2} \dfrac{L_{12} - L_{11}}{L_{21} - L_{22}}. \end{cases}$$

Преимущество Б. п. состоит в том, что полные потери $\rho(\pi, \delta)$ оказываются числом (в отличие от потерь $\rho(\theta, \delta)$, зависящих от неизвестного параметра θ), и, следовательно, заведомо существуют, если и не оптимальные, то, по крайней мере, ε-оптимальные ($\varepsilon > 0$) решающие функции δ^*_ε, для к-рых

$$\rho(\pi, \delta^*_\varepsilon) \leqslant \inf_\delta \rho(\pi, \delta) + \varepsilon.$$

Недостатком Б. п. является необходимость постулировать как существование априорного распределения для неизвестного параметра, так и знание его формы (в определенной степени последнее обстоятельство преодолевается в рамках *бейесовского подхода эмпирического*).

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522; [2] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974.

А. Н. Ширяев.

БЕЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД ЭМПИРИЧЕСКИЙ — статистич. интерпретация *бейесовского подхода* к построению выводов о ненаблюдаемых значениях случайных параметров при неизвестном их *априорном распределении*. Пусть (Y, X) – случайный вектор, причем предполагается, что плотность $p(y|x)$ условного распределения Y при любом заданном значении случайного параметра $X = x$ известна. Если в результате нек-рого эксперимента наблюдается лишь реализация Y, а соответствующая реализация X неизвестна и требуется оценить значение заданной функции $\varphi(X)$ от ненаблюдаемой реализации, то согласно Б. п. э. в качестве приближенного значения $\psi(Y)$ для $\varphi(X)$ следует ис-

пользовать условное математич. ожидание $\mathsf{E}\{\varphi(X)|Y\}$, к-рое в силу *Бейеса формулы* выражается отношением

$$\psi(Y)=\left[\int \varphi(x)\,p(Y\mid x)\,p(x)\,d\mu(x)\right]\Big/ q(Y), \qquad (1)$$

где

$$q(y)=\int p(y\mid x)\,p(x)\,d\mu(x), \qquad (2)$$

$p(x)$ — плотность безусловного (априорного) распределения X, $\mu(x)$ — соответствующая σ-конечная мера; функция $q(y)$ представляет собой плотность безусловного распределения Y.

Если априорная плотность $p(x)$ неизвестна, то вычисление значений ψ и q невозможно. Однако, если имеется достаточно большое количество реализаций независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, подчиняющихся распределению с плотностью $q(y)$, то для $q(y)$ можно построить состоятельную оценку $\hat{q}(y)$, зависящую лишь от $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. Для оценки значения $\psi(Y)$ С. Н. Бернштейн [1] предложил заменить в (2) $q(y)$ на $\hat{q}(y)$ и найти решение $\hat{p}(x)$ этого интегрального уравнения, а затем подставить $\hat{p}$ и $\hat{q}$ в правую часть (1). Однако этот путь затруднителен, так как решение указанного интегрального уравнения принадлежит к числу некорректно поставленных задач вычислительной математики.

В нек-рых исключительных случаях статистич. подход может быть применен не только для оценки q, но и ψ (см. [3]). Такая возможность возникает тогда, когда справедливо тождество относительно x и y

$$\varphi(x)\,p(y\mid x)=\lambda(y)\,r[z(y)\mid x], \qquad (3)$$

где $\lambda(y)$ и $z(y)$ — функции, зависящие лишь от y, а $r(z|x)$ как функция от z является плотностью вероятности (т. е. ее можно рассматривать как плотность условного распределения нек-рой случайной величины Z при заданном значении $X=x$). Если (3) справедливо, то числитель отношения (1) равен произведению $\lambda(Y)s[z(Y)]$, где $s(z)=\int r(z|x)p(x)d\mu(x)$ — плотность безусловного распределения Z. Т. о., если имеется достаточно большое количество реализаций независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, подчиняющихся распределению с плотностью $s(z)$, то для $s(z)$ можно построить состоятельную оценку $\hat{s}(z)$, а значит, и найти состоятельную оценку $\hat{\psi}(Y)$ для $\psi(Y)$:

$$\varphi(X)\approx\psi(Y)\approx\hat{\psi}(Y)=\lambda(Y)\,\hat{s}[z(Y)]\,\hat{q}(Y). \qquad (4)$$

Напр., если требуется оценить $\varphi(X)=X^h$ (h целое >0), причем $p(y|x)=x^y e^{-x}/y!$ ($y=0, 1, 2, \ldots$; $x>0$), то $\varphi(x)p(y|x)=\lambda(y)p(y+h|x)$, где $\lambda(y)=(y+h)!/y!$. Так как здесь $r(z|x)=p(z|x)$, то $s(z)=q(z)$. Поэтому $\hat{\psi}(Y)=\lambda(Y)q(Y+h)\,\hat{q}(Y)$, т. е. для отыскания $\hat{\psi}$ нужна лишь последовательность реализаций $Y_1, Y_2, \ldots$. Если же $p(y|x)=b_n(y|x)=C_n^y x^y(1-x)^{n-y}$ ($y=0, 1, \ldots, n$; n целое >0; $0\leqslant x\leqslant 1$), то $\varphi(x)p(y|x)=\lambda(y)r(y+h|x)$, где $\lambda(y)=C_n^y/C_{n+h}^{y+h}$ и $r(z|x)=b_{n+h}(z|x)\neq p(z|x)$. Поэтому для построения $\hat{\psi}(Y)$ в этом случае нужно иметь две последовательности эмпирических значений Y_i и Z_j.

Указанная методика Б. п. э. применима к весьма узкому классу плотностей $p(y|x)$ и функций $\varphi(x)$, удовлетворяющему условию (3); и если даже это условие выполняется, то для построения оценки (4) нужно располагать реализациями случайных величин Z_j, распределение к-рых, как правило, отлично от распределения непосредственно наблюдаемых величин Y_i. Для практич. целей предпочтительнее видоизмененная методика Б. п. э., лишенная указанных недостатков. Суть этого видоизменения заключается в построении не самой состоятельной оценки для $\psi(Y)$ (эта оценка может и не существовать), а нижней и верхней оценок для этой

функции, отыскание к-рых сводится к решению задачи линейного программирования следующим образом. Пусть $\Psi_1(Y)$ и $\Psi_2(Y)$ — условные минимум и максимум линейного функционала (относительно неизвестной априорной плотности $p(x)$) в числителе (1), вычисленные при линейных условиях $p(x)\geqq 0$, $\int p(x)d\mu(x)=1$ и $q(Y)=\int p(Y|x)p(x)d\mu(x)=\hat{q}(Y)$ ($\hat{q}(Y)$ — упомянутая выше оценка для $q(Y)$, построенная по результатам наблюдений $Y_1, \ldots, Y_k$). В таком случае можно заключить, что $\Psi_1(Y)/\hat{q}(Y)\leqq\psi(Y)\leqq\Psi_2(Y)/\hat{q}(Y)$, причем вероятность справедливости такого заключения в силу *больших чисел закона* стремится к единице при неограниченном увеличении количества случайных величин Y_i, используемых при построении оценки $\hat{q}(Y)$. Возможны и другие видоизменения Б. п. э., напр., за счет добавления к последнему условию $q(Y)=\hat{q}(Y)$ конечного числа условий вида $q(y_i)=\hat{q}(y_i)$, где y_i — заранее заданные числа; если $\hat{q}$ заменить соответствующими доверительными пределами для q, то получаются условия в виде неравенств $q_1(y_i)\leqq q(y_i)\leqq q_2(y_i)$ и т. д.

В нек-рых практически важных случаях для функций Ψ_1 и Ψ_2 удается найти удовлетворительные мажоранты, вычисляемые без применения трудоемких методов линейного программирования (см. пример, посвященный статистич. контролю, в ст. *Выборочный метод*).

О применении Б. п. э. к решению задач статистич. проверки гипотез о значениях случайных параметров см. *Дискриминантный анализ*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 85—94; [2] Большев Л. Н., в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 48—55; [3] Robbins H., в кн.: Proceedings Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability, v. 1, Berk.—Los Ang., 1956, p. 157—63.

Л. Н. Большев.

БЕЙТМЕНА МЕТОД — метод приближения интегрального оператора одномерного интегрального уравнения Фредгольма II рода, частный случай *вырожденных ядер метода*. В Б. м. вырожденное ядро $K_N(x, s)$ строится по правилу:

$$K_N(x,\ s)=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x,\ s_1) & \ldots & K(x,\ s_N)\\ K(x_1,\ s) & K(x_1,\ s_1) & \ldots & K(x_1,\ s_N)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_N,\ s) & K(x_N,\ s_1) & \ldots & K(x_N,\ s_N)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,\ s_1) & \ldots & K(x_1,\ s_N)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_N,\ s_1) & \ldots & K(x_N,\ s_N)\end{vmatrix}},$$

где s_i, x_i, $i=1, 2, \ldots, N$,— нек-рые точки отрезка интегрирования в рассматриваемом интегральном уравнении. Б. м. предложен Г. Бейтменом [1].

Лит.: [1] Bateman H., «Messeng. Math.», 1908, v. 37, p. 179—87; [2] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962.

А. Б. Бакушинский.

БЕЙТМЕНА ФУНКЦИЯ, k-функция, — функция

$$k_\nu(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\operatorname{tg}\theta-\nu\theta)\,d\theta, \qquad (1)$$

где x и ν—действительные числа; определена Г. Бейтменом [1]. Б. ф. может быть выражена с помощью вырожденной гипергеометрич. функции 2-го рода $\psi(a, b, x)$:

$$\Gamma(\nu+1)\,k_{2\nu}(x)=e^{-x}\psi(-\nu,\ 0;\ 2x),\quad x>0. \qquad (2)$$

Соотношение (2) удобно принять в качестве определения Б. ф. в комплексной плоскости с разрезом $(0, \infty)$. Справедливы следующие соотношения: для случая (1)

$$k_\nu(-x)=k_{-\nu}(x),$$

для случая (2)

$$k_{2\nu}(-\xi\pm i0)=k_{2\nu}(\xi)=e^{\pm\nu\pi i}\cdot e^{\xi}\Phi(-\nu,\ 0,\ -2\xi),$$

где $\xi>0$, $\Phi(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрич. функция 1-го рода.

Лит.: [1] Bateman H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1931, v. 33, p. 817—31; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., 2 изд., М., 1973.

Л.Н. Кармазина.

БЕЛЛМАНА УРАВНЕНИЕ — 1) Дифференциальное уравнение с частными производными специального типа для решения задачи *оптимального управления*. В случаях, когда удается найти решение задачи Коши для Б. у., нетрудно построить оптимальное решение исходной задачи. 2) Рекуррентное соотношение для решения дискретной задачи оптимального управления. Метод получения оптимального решения с помощью Б. у. носит назв. *динамического программирования*.

Лит.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960.

В. Г. Карманов.

БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА ПРОЦЕСС — частный случай *ветвящегося процесса с зависимостью от возраста*, впервые рассмотренный Р. Беллманом и Т. Харрисом [1]. В Б.— Х. п. предполагается, что частицы живут независимо друг от друга случайное время, а в конце жизни производят случайное число новых частиц. Если $G(t)$ — функция распределения времени жизни частиц, $h(s)$ — производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы, и если при $t=0$ была одна частица нулевого возраста, то производящая функция $F(t;\ s)=\mathsf{E}s^{\mu(t)}$ числа частиц $\mu(t)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$F(t;\ s)=\int_0^t h(F(t-u;\ s))\,dG(u)+s(1-G(t)).$$

В случае

$$G(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,$$

Б.— Х. п. есть марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем.

Лит.: [1] Bellman R., Harris T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601—04.

Б. А. Севастьянов.

БЕЛЫЙ ШУМ — обобщенный стационарный случайный процесс $X(t)$ с постоянной *спектральной плотностью*. Корреляционная (обобщенная) функция процесса Б. ш. имеет вид: $B(t)=\sigma^2\delta(t)$, где σ^2 — некрая положительная постоянная, а $\delta(t)$ — дельта-функция. Процесс Б. ш. широко используется в приложениях для описания случайных возмущений с очень малым временем корреляции (напр., «теплового шума» — пульсаций силы тока в проводнике, вызываемых тепловым движением электронов). В спектральном разложении Б. ш.

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$$

«элементарные колебания» $e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$ при всех частотах λ имеют в среднем одинаковую интенсивность, точнее, их средний квадрат амплитуды есть

$$\mathsf{E}\,|\,dz(\lambda)\,|^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}\,d\lambda,\qquad -\infty<\lambda<\infty.$$

Указанное выше спектральное разложение означает, что для любой интегрируемой с квадратом функции $\varphi(t)$

$$\langle X,\ \varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,X(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\,dz(\lambda),$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье $\varphi(t)$; более явная зависимость обобщенного процесса X $\langle X,\ \varphi\rangle$ от функции $\varphi(t)$ может быть описана с помощью соответствующей стохастич. меры $d\eta(t)$ того же типа, что и $dz(\lambda)$ ($d\eta(t)$ — преобразование Фурье стохастич. меры $dz(\lambda)$), а именно

$$\langle X,\ \varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,d\eta(t).$$

Гауссовский белый шум $X(t)$, являющийся обобщенной производной от броуновского движения $\eta(t)$ ($X(t)=\eta'(t)$), служит основой для построения стохастических *диффузионных процессов* $Y(t)$, «управляемых» стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$Y'(t)=a(t,\ Y(t))+\sigma(t,\ Y(t))\cdot\eta'(t);$$

эти уравнения обычно записывают в форме дифференциалов:

$$dY(t) = a(t, Y(t))dt + \sigma(t, Y(t))d\eta(t).$$

Другой важной моделью с использованием Б. ш. является случайный процесс $Y(t)$, описывающий поведение устойчивой колебательной системы под воздействием стационарных случайных возмущений $X(t)$, когда $Y(s)$, $s<t$, не зависят от $X(u)$, $u>t$; простейшим примером может служить система вида

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) Y(t) = X(t),$$

где $P(z)$ - многочлен с корнями в левой полуплоскости; после затухания «переходных процессов»

$$Y(t) = \int \frac{1}{P(i\lambda)}\, dz(\lambda).$$

В приложениях, при описании так наз. процессов *дробового эффекта*, большую роль играет Б. ш. вида

$$X(t) = \sum_k \delta(t - \tau_k)$$

(k изменяется от $-\infty$ до ∞ и $\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots$ — случайные моменты, распределенные во времени по пуассоновскому закону), точнее, $X(t)$ является обобщенной производной пуассоновского процесса $\eta(t)$. Сам процесс дробового эффекта имеет вид:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s) X(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s)\, d\eta(s) =$$

$$= \sum_k c(t, s - \tau_k),$$

где $c(t, s)$ — нек-рая весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t, s)|^2\, ds < \infty;$$

при этом среднее значение обобщенного процесса $X = \langle X, \varphi \rangle$ есть

$$a(\varphi) = a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt,$$

где a — параметр упомянутого выше пуассоновского закона, и стохастич. мера $dz(\lambda)$ в спектральном представлении

$$X(t) = a + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dz(\lambda)$$

этого процесса такова, что

$$\mathsf{E}\,|dz(\lambda)|^2 = \frac{a}{2\pi}\, d\lambda.$$

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, М., 1967. *Ю. А. Розанов.*

БЕЛЬТРАМИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — реализация части плоскости Лобачевского на псевдосфере — поверхности постоянной отрицательной кривизны. В Б. и. *геодезические линии* и их отрезки на псевдосфере играют роль прямых и их отрезков на плоскости Лобачевского. Изометрич. отображение псевдосферы на себя представляет собой движения на плоскости Лобачевского, сохраняющие ориокруги. Длины, углы и площади на псевдосфере соответствуют длинам, углам и площадям на плоскости Лобачевского. При этих условиях каждому утверждению планиметрии Лобачевского, относящемуся к куску плоскости Лобачевского, отвечает непосредственный факт внутренней геометрии псевдосферы. Б. и. реализует часть плоскости Лобачевского, вся же плоскость Лобачевского не может быть реализована в трехмерном евклидовом пространстве в виде регулярной поверхности (теорема Гильберта).

Б. и. была предложена Э. Бельтрами (E. Beltrami) в 1868 (см. [1]). В этом мемуаре им впервые была приведена реализация «воображаемой геометрии» Лобачевского в трехмерном евклидовом пространстве.

О других интерпретациях геометрии Лобачевского см. *Клейна интерпретация*, *Пуанкаре интерпретация*.

Лит.: [1] Бельтрами Э., Опыт интерпретации неевклидовой геометрии, в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.—Л., 1949—56. *Е. В. Шикин.*

БЕЛЬТРАМИ КООРДИНАТЫ — координаты на поверхности, в к-рых все геодезич. линии выражаются линейными уравнениями. Поверхности, допускающие введение Б. к., наз. проективными (проективные преобразования таких поверхностей переводят геодезические в геодезические). Названы по имени Э. Бельтрами (E. Beltrami), к-рый рассмотрел такие поверхности в 1866. *Е. В. Шикин.*

БЕЛЬТРАМИ МЕТОД — метод решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными, предложенный Э. Бельтрами (E. Beltrami) в 1864. Б. м. основан на том, что на поверхности характеристич. конуса с помощью внутренних дифференциальных операторов волновое уравнение преобразуется к специальному простому виду и для решения $u(x, t)$ используется формула

$$4\pi u(x_0, t) = \int\int_{\Omega} \left(u - \tau \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma,$$

где Ω — сфера $\{x; |x - x_0| = \tau\}$. Б. м. может быть применен в случае неоднородного уравнения и уравнения с любым нечетным числом пространственных переменных.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.*

БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ — см. *Лапласа — Бельтрами уравнение.*

БЕЛЬТРАМИ — ЭННЕПЕРА ТЕОРЕМА о свойстве *асимптотических линий* поверхности отрицательной кривизны [Э. Бельтрами (E. Beltrami), 1866; А. Эннепер (A. Enneper), 1870]: если кривизна асимптотич. линии в заданной точке отлична от нуля, то квадрат кручения этой линии равен абсолютному значению кривизны поверхности в этой точке. Б.— Э. т. переносится на случай, когда кривизна асимптотич. линии в данной точке равна нулю. Квадрат кручения заменяется квадратом скорости вращения касательной плоскости к поверхности в этой точке при смещении по асимптотической. Асимптотич. линии, исходящие из одной точки, имеют кручения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. *Е. В. Шикин.*

БЕМОЛЬНАЯ НОРМА r-мерной полиэдральной цепи A в пространстве E^n — норма $|A|^\flat$, определяемая следующим образом:

$$|A|^\flat = \inf\{|A - \partial D| + |D|\},$$

где $|C|$ — *масса* цепи C, ∂C — ее граница, и нижняя грань берется по всем $(r+1)$-мерным полиэдральным цепям. Свойства Б. н.:

$$|aA|^\flat = |a|\,|A|^\flat, \quad |A+B|^\flat \leqslant |A|^\flat + |B|^\flat,$$

$$|A|^\flat = 0 \Leftrightarrow A = 0, \quad |A|^\flat \leqslant |A|, \quad |\sigma|^\flat = |\sigma|$$

для любой клетки σ, если π — проекция E^n на нек-рую плоскость, то $|\pi A|^\flat \leqslant A^\flat$.

Пополнение линейного пространства полиэдральных цепей $C_r(E^n)$ является сепарабельным банаховым пространством $C_r^\flat(E^n)$; элементы его наз. r-мерными бемольными цепями, и каждой из них можно приписать конечную или бесконечную массу:

$$|A|_\flat = \inf\left\{\lim_{i\to\infty} |A_i|,\ A_i \xrightarrow{\flat} A — \text{полиэдральные цепи}\right\}.$$

Граница ∂ бемольной цепи также определяется предельным переходом, она является непрерывной операцией, и

$$|\partial A|^\flat \leqslant |A|^\flat, \quad |A|^\flat = \inf\{|A - \partial D|^\flat + |D|^\flat\}.$$

Б. н. представляет собой наибольшую из полунорм $|\cdot|'$ в $C_r(E^n)$, удовлетворяющую для любой клетки σ

неравенствам: $|\sigma^r|' \leqslant |\sigma^r|$, $|\partial\sigma^{r+1}|' \leqslant |\sigma^{r+1}|$. r-мерная бемольная цепь X — линейная функция r-мерных бемольных цепей A (обозначается через $X \cdot A$) такая, что ($|X|$ — комасса X)

$$|X \cdot A| \leqslant N |A|^\flat \text{ для нек-рого } N.$$

Она является элементом сопряженного с $C^\flat_r(E^n)$ пространства $C^{\flat r}(E^n)$, к-рое оказывается несепарабельным.

Бемольная норма $|X|^\flat$-мерной бемольной цепи X определяется стандартным образом:

$$|X|^\flat = \sup_{|A|^\flat = 1} |X \cdot A|,$$

так что

$$|A|^\flat = \sup_{|X|^\flat = 1} |X \cdot A| \quad \text{и} \quad |X \cdot A| \leqslant |X|^\flat |A|^\flat,$$

причем $|X| \leqslant |X|^\flat$.

Для координаты dX бемольной цепи (определяемой условием: $dX \cdot A = X \cdot dA$): $|dX|^\flat \leqslant |X|^\flat$,

так что $|X|^\flat = \sup\{|X|, |dX|\}$.

Аналогичные понятия вводятся для полиэдральных r-мерных цепей, расположенных в открытых подмножествах $R \subset E^n$. См. также *Бемольная форма*.

Лит.: [1] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960. *М. И. Войцеховский.*

БЕМОЛЬНАЯ ФОРМА — измеримая r-мерная дифференциальная форма ω на открытом множестве $R \subset E^n$ такая, что:

комасса $|\omega|_0 \leqslant N_1$ для нек-рого N_1;

существует N_2 с

$$\left| \int_{\partial\sigma^{r+1}} \omega \right| \leqslant N_2 |\sigma^{r+1}|$$

для любого симплекса σ^{r+1}, удовлетворяющего условию: существует измеримое $Q \subset R$, $|R \setminus Q|_n = 0$ такое, что ω измерима на σ^{r+1} и на любой из его граней σ^r, составляющих $\partial\sigma^{r+1}$, причем

$$|\sigma^{r+1} \setminus Q|_{r+1} = 0, \quad |\sigma^r \setminus Q|_r = 0;$$

здесь $|M|_s$ означает s-мерную меру Лебега пересечения множества M с нек-рой s-мерной плоскостью.

Если X есть r-мерная бемольная цепь в R, то существует ограниченная r-мерная форма ω_X в R, измеримая в любом симплексе σ^r относительно плоскости, содержащей σ^r, и

$$X\sigma^r = \int_{\sigma^r} \omega_X, \tag{1}$$

причем $|\omega_X|_0 = |X|, \quad |\omega_{dX}|_0 = |dX|,$

где $|X|$ — комасса цепи X. Обратно, любой r-мерной Б. ф. ω в R соответствует по формуле (1) единственная r-мерная бемольная цепь X_ω для любого симплекса σ^r, удовлетворяющего вышеуказанному условию, причем

$$|X_\omega| \leqslant N_1, \quad |dX_\omega| \leqslant N_2.$$

Форма ω и цепь X наз. ассоциированными. Формы, ассоциированные с одной и той же цепью, эквивалентны, т. е. равны почти всюду в R, и среди них есть бемольный представитель.

Между n-мерными бемольными цепями X и классами эквивалентных измеримых ограниченных функций $\varphi(p)$ существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром $\omega_X \sim \varphi(p)\, dp$, а

$$\varphi(p) = \lim_{i \to \infty} \frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — последовательность n-мерных симплексов, стягивающихся к точке p так, что их диаметры $\to 0$,

но

$$\frac{|\sigma_i|}{(\operatorname{diam}\sigma_i)^n} \geqslant \eta$$

при нек-ром η для всех i, $|\sigma_i|$ — объем σ_i.

Пусть $\alpha(p)$ — измеримая суммируемая функция в R, значениями к-рой являются r-векторы; она наз. соответствующей r-мерной бемольной цепи A, если

$$\int_R \omega_X \cdot \alpha = X \cdot A \qquad (2)$$

для всех r-мерных бемольных коцепей X (и тогда A наз. лебеговой цепью). Отображение $\alpha \to A$ является линейным взаимно однозначным отображением множества классов эквивалентности функций $\alpha(p)$ в пространство бемольных цепей $C_r^\flat(R)$, причем $|A| = \int_R |\alpha|_0$, где $|A|$ — *масса* цепи A, $|\alpha|_0$ — масса r-вектора $\alpha(p)$. Кроме того, множество образов непрерывных функций α плотно в $C_r^\flat(R)$.

Представления (1) и (2) обобщают аналогичные результаты для *диезных форм* и диезных коцепей; напр., дифференциал Б. ф. ω_X, определяемый формулой $d\omega_X = \omega_{dX\omega}$, является также Б. ф., и выполнена теорема Стокса: $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$ для любого симплекса σ; r-мерная бемольная коцепь слабый предел гладких коцепей, т. е. таких, для к-рых ассоциированные формы ω являются гладкими, и т. д.

Лит.: [1] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960.

М. И. Войцеховский.

БЕНДИКСОНА КРИТЕРИЙ — теорема, позволяющая установить отсутствие замкнутых траекторий у динамич. систем на плоскости:

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \qquad (*)$$

Впервые был указан И. Бендиксоном [1] в следующей формулировке: если в односвязной области G выражение $P'_x + Q'_y$ знакопостоянно (т. е. сохраняет знак и обращается в нуль лишь в отдельных точках или на нек-рых кривых), то система (*) не имеет в области G замкнутых траекторий. Обобщение Б. к. принадлежит А. Дюлаку [2]: если G — односвязная область в плоскости x, y, функции P и $Q \in C^1(G)$ и если найдется такая функция $f(x, y) \in C^1(G)$, что

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial (fP)}{\partial x} + \frac{\partial (fQ)}{\partial y} \right\} dxdy \neq 0$$

для любой односвязной подобласти $D \subset G$, то в области G не существует ни одной простой спрямляемой замкнутой кривой, составленной из траекторий и особых точек системы (*). В случае кольцеобразной области G аналогичная теорема утверждает единственность замкнутой траектории (если она существует) системы (*). Возможно обобщение на случай системы (*) с цилиндрич. фазовым пространством (см. [3]).

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta Math.», 1901, Bd 24, № 1, S. 1—88; [2] Dulac H., «C.r. Acad. sci.», 1937, t. 204, № 23, p. 1703—06; [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. Х. Розов.

БЕНДИКСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение

$$u = \frac{4x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{4y}{x^2 + y^2}$$

«проколотой» в точке (0,0) евклидовой плоскости (x, y) на такую же плоскость (u, v), представляющее собой координатное выражение биекции φ, порождаемой *Бендиксона сферой*. В случае совпадения плоскостей (u, v) и (x, y) Б. п. есть инверсия плоскости (x, y) относительно окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966. *А. Ф. Андреев.*

БЕНДИКСОНА СФЕРА — сфера в вещественном анализе, к-рая в теории функций комплексного переменного известна как *Римана сфера*.

Пусть Σ: $X^2+Y^2+Z^2=1$ есть единичная сфера в евклидовом пространстве (X, Y, Z), $N(0, 0, 1)$ и $S(0, 0, -1)$ — ее северный и южный полюсы, соответственно; ν и σ — касательные плоскости к Σ в точках N и S, соответственно; xSy и uNv — системы координат в σ и ν, оси к-рых параллельны соответствующим осям системы XOY в плоскости $Z=0$ и одинаково направлены с ними; наконец, пусть Π — *стереографическая проекция* Σ на σ из центра N, Π' — стереографич. проекция Σ на ν из центра S. Тогда Σ есть Б. с. по отношению к любой из плоскостей σ, ν. Порождаемая ею биекция $\varphi=\Pi'\Pi^{-1}$ плоскости σ (с «выколотой» точкой S) на («проколотую» в точке N) плоскость ν применяется при изучении вопроса о поведении траекторий вещественной алгебраической (правые части уравнений — многочлены от искомых функций) автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в окрестности бесконечно удаленной точки фазовой плоскости. Она сводит этот вопрос к аналогичному вопросу для окрестности точки (0,0). Названа по имени И. Бендиксона (I. Bendixson).

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966. *А. Ф. Андреев.*

БЕРГМАНА ЯДРО ФУНКЦИЯ — функция комплексных переменных, обладающая свойством воспроизводящего ядра и определяемая для любой области $D\subset\mathbb{C}^n$, в к-рой существуют голоморфные функции $f\not\equiv 0$, принадлежащие классу $L^2(D)$ по мере Лебега dV. Введена С. Бергманом [1]. Множество указанных функций f образует гильбертово пространство $L^2_h(D)\subset L^2(D)$ с ортонормированным базисом $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$; $L^2_h(D)=L^2(D)\cap O(D)$, где $O(D)$ — пространство голоморфных функций. Функция

$$K_D(z, \zeta)=K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)},$$

$$z=(z_1, \ldots, z_n), \quad \zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

наз. Б. я. (или просто ядром функцией) области D. Ряд справа равномерно сходится на компактных подмножествах D и принадлежит $L^2_h(D)$ при каждом фиксированном $\zeta\in D$, его сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$. Б. я. зависит от $2n$ комплексных переменных и определена в области $D\times D\subset\mathbb{C}^{2n}$; она обладает свойством симметрии $K(\zeta, z)=\overline{K(z, \zeta)}$, голоморфна по переменным z и антиголоморфна по ζ. Если $D=D'\times D''$, $D'\subset\mathbb{C}^m$, $D''\subset\mathbb{C}^{n-m}$, то

$$K_D(z, \zeta)=K_{D'}(z', \zeta')\,K_{D''}(z'', \zeta''),$$

где $z'=(z_1, \ldots, z_m)$, $z''=(z_{m+1}, \ldots, z_n)$.

Основным свойством Б. я. является ее воспроизводящее свойство: для любой функции $f\in L^2_h(D)$ и любой точки $z\in D$ справедливо интегральное представление

$$f(z)=\int_D f(\zeta)\,K(z, \zeta)\,dV(\zeta).$$

Экстремальные свойства Б. я. 1) Для любой точки $z\in D$

$$K(z, z)=\sup\{|f(z)|^2: f\in L^2_h(D),\ \|f\|_{L^2(D)}\leqslant 1\}.$$

2) Пусть точка $\zeta\in D$ такова, что в классе $L^2_h(D)$ имеются функции с условием $f(\zeta)=1$. Тогда функция $K(z, \zeta)/K(\zeta, \zeta)$ удовлетворяет этому условию и имеет норму $K(\zeta, \zeta)^{-1/2}$, минимальную для всех таких f. Функция $K(z, \zeta)/K(\zeta, \zeta)$ наз. экстремальной функцией области D.

Изменение Б. к. при биголоморфных отображениях выражается в следующей теореме: если φ — биголоморфное отображение области D на область D^*, $\varphi(z)=w$, $\varphi(\zeta)=\eta$, то

$$K_{D^*}(w,\ \eta) = K_D(z,\ \zeta)\,\frac{dz}{dw}\,\overline{\frac{d\zeta}{d\eta}},$$

где $\frac{dz}{dw}$ — якобиан обратного отображения. Благодаря этому свойству эрмитова квадратичная форма

$$ds^2 = \sum_{j,\ k=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z,\ z)}{\partial z_j\,\partial \bar{z}_k}\,dz_j\,d\bar{z}_k$$

инвариантна относительно биголоморфных отображений.

Функция $K(z) = K(z, z)$, к-рую также наз. кернфункцией, играет значительную роль во внутренней геометрии областей. В общем случае она неотрицательная, а функция $\log K(z)$ плюрисубгармоническая. В областях D, для к-рых $K(z)$ положительная (напр., в ограниченных областях), функции $K(z)$ и $\log K(z)$ строго плюрисубгармонические. Последнее эквивалентно тому, что в таких областях D указанная форма ds^2 положительно определена и, следовательно, задает в D эрмитову риманову метрику. Эта метрика не меняется при биголоморфных отображениях и наз. м е т р и к о й Б е р г м а н а. Ее можно рассматривать как частный случай *Кэлера метрики*. Из экстремального свойства 1) следует, что коэффициенты метрики Бергмана неограниченно возрастают при подходе к нек-рым граничным точкам. Если $D\subset\mathbb{C}^n$ – строго псевдовыпуклая область или аналитич. полиэдр, то $K(z)$ неограниченно возрастает при любом подходе z к границе области D. Всякая область, обладающая этим свойством Б. к., является областью голоморфности.

Для простейших областей Б. к. вычисляется в явном виде. Напр., Б. к. для шара B: $|z|<R$ в $\mathbb{C}^n$ имеет вид:

$$K_B(z,\zeta) = \frac{n!R^n}{\pi^n}\left(R^2 - \sum_{j=1}^{n} z_j\bar{\zeta}_j\right)^{-n-1},$$

для поликруга U: $|z_j|<R_j$, $j=1,\ \ldots,\ n$, в $\mathbb{C}^n$:

$$K_U(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{R_j^2}{\left(R_j^2 - z_j\bar{\zeta}_j\right)^2}.$$

В частном случае, когда $n=1$ и область U есть круг $|z|<R$ на комплексной плоскости z, метрика Бергмана обращается в классическую гиперболич. метрику

$$ds^2 = \frac{2R^2}{(R^2-|z|^2)^2}\,|dz|^2,$$

инвариантную относительно конформных отображений и определяющую в U геометрию Лобачевского.

Лит.: [1] Б е р г м а н S., The kernel function and conformal mapping, N. Y., 1950; [2] Ф у к с Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [3] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969, ч. 2, гл. 4.

Е. М. Чирка.

БЕРГМАНА — ВЕЙЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, Б е р г м а н а — В е й л я ф о р м у л а, В е й л я ф о р м у л а,— интегральное представление голоморфных функций, полученное А. Вейлем и С. Бергманом (см. [1], [2]) и определяемое следующим образом. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$, функции $W_1,\ \ldots,\ W_N$ голоморфны в D и $V=\{z\in D: |W_k(z)|<1,\ k=1,\ \ldots,\ N\}\Subset D$. Тогда любую функцию f, голоморфную в V и непрерывную в V в любой точке $z\in V$, можно представить формулой

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum\int \frac{f(\zeta)\det(P_{ijk})}{\prod_{k=1}^{n}\left(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z)\right)}\,d\zeta, \qquad (*)$$

где суммирование производится по всем $j_1<\ldots<j_n$, а интегрирование — по соответствующим образом ориентированным n-мерным поверхностям $\sigma_{j_1,\ \ldots,\ j_n}$, образующим остов области V (см. *Аналитический полиэдр*), $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, а функции $P_{ij}(\zeta,\ z)$ голоморфны

в области $D\times D$ и определяются в соответствии с Хефера теоремой (см. [3], с. 245) из равенств

$$W_j(\zeta)-W_j(z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\,P_{ij}(\zeta,z).$$

Интегральное представление (*) наз. представлением Бергмана – Вейля.

Области V, фигурирующие в Б.– В. п., наз. областями Вейля; обычно для них требуется дополнительное условие, чтобы ранги матриц $(\partial W_{j\nu}/\partial z_\mu)$, $\nu=1,\ldots,k$, $\mu=1,\ldots,n$, $k\leqslant n$, на соответствующих множествах

$$\{z\in\bar{V}:\ |W_{j_1}|=\ldots=|W_{j_k}|=1\}$$

были максимальными ($=k$) для всех $j_1<\ldots<j_k$ (такие области Вейля наз. регулярными). Области Вейля в Б.– В. п. можно заменить аналитическими полиэдрами

$$U=\{z\in D: W_j(z)\in D_j,\ j=1,\ldots,N\}\Subset D,$$

где D_j – ограниченные области с кусочно гладкими границами ∂D_j на плоскости $\mathbb{C}$. Б.– В. п. определяет значение голоморфной функции f внутри аналитич. полиэдра U по значениям f на его остове σ; при $n>1$ размерность σ строго меньше размерности ∂U. При $n=1$ аналитич. полиэдры вырождаются в области с кусочно гладкими границами, остов и граница совпадают, а если еще $N=1$ и $W(z)=z$, то Б.– В. п. совпадает с интегральной формулой Коши.

Важным свойством Б.– В. п. является голоморфность (по z) его ядра. Поэтому если вместо голоморфной функции f поставить произвольную интегрируемую на σ функцию, то правая часть Б.– В. п. даст функцию, голоморфную всюду в U и почти всюду в $D\setminus\partial U$; такие функции наз. интегралами типа Бергмана – Вейля. Если f голоморфна в U и непрерывна в $\bar{U}$, то ее интеграл типа Бергмана – Вейля равен нулю почти всюду в $D\setminus\bar{U}$.

Из Б.– В. п. в области Вейля V после замены

$$(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z))^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{W_{j_k}^{\nu}(z)}{W_{j_k}^{\nu+1}(\zeta)}$$

получается разложение Вейля

$$f(z)=$$

$$=\sum_{s_k\geqslant 0}\sum_{j_1<\ldots<j_k}Q_{j_1\ldots j_n s_1\ldots s_n}(z)\left(W_{j_1}^{s_1}(z)\ldots W_{j_k}^{s_k}(z)\right)$$

в ряд по функциям, голоморфным в области D, и этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах V.

Лит.: [1] Weil A., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 178—82; [2] Bergman S., «Матем., сб.», 1936, т. 1, с. 242—57; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

БЕРЕНСА — ФИШЕРА ПРОБЛЕМА — аналитическая проблема, возникшая в связи со статистич. задачей сравнения по эмпирич. данным математич. ожиданий в двух нормальных распределениях, дисперсии к-рых неизвестны (предполагается, что отношение дисперсий также неизвестно). Эта задача была поставлена В. Беренсом [1] в связи с вопросом обработки данных об урожайности. Современная формулировка Б.– Ф. п. принадлежит Р. Фишеру (R. Fisher) и основана на понятии достаточной статистики. Пусть $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ и $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ – взаимно независимые случайные величины, распределенные нормально, причем $\mathsf{E}X_{1i}=\mu_1$, $\mathsf{E}(X_{1i}-\mu_1)^2=\sigma_1^2$ ($i=1,\ldots,n_1$) и $\mathsf{E}X_{2j}=\mu_2$, $\mathsf{E}(X_{2j}-\mu_2)^2=\sigma_2^2$ ($j=1,\ldots,n_2$). Предполагается, что значения математич. ожиданий μ_1,μ_2, дисперсий σ_1^2,σ_2^2, а также их отношения σ_1^2/σ_2^2 неизвестны. Достаточная статистика в случае $n_1\geqslant 2$, $n_2\geqslant 2$ есть четырехмерный

вектор ($\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2, S_2^2), компоненты к-рого выражаются формулами

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i},\quad \overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{2j},$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2,\ S_2^2 = \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\overline{X}_2)^2$$

и представляют собой взаимно независимые случайные величины, причем $\sqrt{n_1}(\overline{X}_1-\mu_1)/\sigma_1$ и $\sqrt{n_2}(\overline{X}_2-\mu_2)\cdot\sigma_2$ подчиняются стандартному нормальному распределению, а S_1^2/σ_1^2 и $S_2^2\,\sigma_2^2$ - распределению хи-квадрат с n_1-1 и n_2-1 степенями свободы соответственно. Поскольку достаточная статистика несет в себе ту же информацию о неизвестных параметрах μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, что и исходные случайные величины X_{1i} и X_{2j} в количестве n_1+n_2, то при проверке гипотез о значениях этих параметров разумно рассматривать лишь достаточную статистику. В частности, это соображение служит основой современной формулировки задачи о проверке гипотезы, согласно к-рой $\mu_1-\mu_2=\Delta$ (Δ — заранее заданное число); при этом Б.— Ф. п. заключается в отыскании такого множества K_α в пространстве возможных значений случайных величин $\overline{X}_1-\overline{X}_2$, S_1^2, S_2^2, чтобы при справедливости проверяемой гипотезы вероятность события $(\overline{X}_1-\overline{X}_2,\ S_1^2,\ S_2^2)\in K_\alpha$ не зависела от всех неизвестных параметров и в точности равнялась наперед заданному числу α из интервала $0<\alpha<1$.

Вопрос о существовании решения Б. - Ф. п. долгое время дискутировался видными математиками (главным образом в связи с предложенным Р. Фишером подходом к этой проблеме, по существу выходящим за рамки теории вероятностей). В 1964 Ю. В. Линник (совместно с учениками) доказал, что при объемах выборок n_1 и n_2 разной четности решение Б. — Ф. п. K_α существует. Вопрос же о существовании решения для n_1 и n_2 одинаковой четности остался открытым.

Б.— Ф. п. неоднократно подвергалась видоизменениям и обобщениям. В частности, А. Вальд (A. Wald) предложил задачу об отыскании множества K_α в пространстве двух переменных $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)/S_1^2$ и S_1^2/S_2^2. Вопрос о существовании такого решения остается открытым. Однако можно эффективно построить такое множество K_α^*, что в случае справедливости проверяемой гипотезы $\mu_1-\mu_2=\Delta$ вероятность события $((\overline{X}_1-\overline{X}_2)/S_1^2,\ S_1^2/S_2^2)\in K_\alpha^*$ хотя и будет зависеть от неизвестного отношения $\sigma_1^2\,\sigma_2^2$, но ее отклонение от заданного α будет мало. Это обстоятельство и служит основой современных рекомендаций для практич. построения критериев сравнения μ_1 и μ_2.

Простые и удобные в вычислительном отношении критерии для сравнения μ_1 и μ_2 предложены В. И. Романовским, М. Бартлеттом (M. Bartlett), Г. Шеффе (H. Scheffe) и др. Однако статистики этих критериев в терминах достаточной статистики не выражаются и поэтому имеют, вообще говоря, меньшую мощность, чем критерии, конструируемые с помощью решения Б.— Ф. п. и ее обобщений.

Лит.: [1] Behrens W. U., «Landwirtsch. Jahrb.», 1929, Bd 68, № 6, S. 807—37; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Линник Ю. В., Романовский И. В., Судаков В. Н., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 6, с. 1262—64. *Л. Н. Большев.*

БЁРКИЛЯ ИНТЕГРАЛ — понятие, введенное Дж. Бёркилем [1] для определения площади поверхности. В современном виде Б. и. вводится для интегрирования неаддитивной функции $F(J)$ n-мерного сегмента (бруса). Пусть R есть множество, представимое в виде суммы (объединения) конечного числа сегментов (такое множество наз. фигурой). Каждое представление $R=\bigcup J_k$ наз. разбиением фигуры R. Верхним Б. и. и нижним Б. и. от функции

сегмента $F(J)$ по фигуре R наз. соответственно верхний и нижний пределы сумм $\Sigma_k F(J_k)$ для всевозможных разбиений при стремлении к нулю максимума диаметров сегментов, входящих в разбиение. Если эти интегралы равны, то их общее значение наз. интегралом Бёркиля от функции F по R и обозначается $\int_R F$. Если F интегрируема на R, то F интегрируема на каждой фигуре $R_1 \subset R$. Тем самым вводится неопределенный Б. и., к-рый является аддитивной функцией множества. Если F непрерывна, то и неопределенный Б. и. непрерывен.

Понятие Б. и. может быть обобщено на случай функции множества, определенной на нек-ром классе подмножеств абстрактного пространства с мерой. Этот класс должен удовлетворять ряду требований; в частности, каждое множество из данного класса должно допускать разбиение на составляющие множества из того же класса, имеющие произвольно малые меры. Тогда для любого множества из класса определяется Б. и. по аналогии с n-мерным случаем, причем соответствующие пределы берутся при стремлении к нулю максимума мер составляющих множеств. Б. и. естественным образом обобщается на функции множества со значениями в коммутативной топологич. группе. Б. и. является менее общим, чем введенный позднее *Колмогорова интеграл*, наз. также интегралом Бёркиля - Колмогорова. Всякая интегрируемая по Бёркилю функция интегрируема по Колмогорову при соответствующем упорядочении разбиений. Обратное верно лишь при нек-рых дополнительных условиях. Б. и. используется для построения *Данжуа интеграла* в различных пространствах.

Интегралом Бёркиля наз. также ряд введенных Дж. Бёркилем обобщений *Перрона интеграла* (*AP*-интеграл, *CP*-интеграл, *SCP*-интеграл), в определении к-рых вместо обычных производных чисел используются нек-рые обобщенные производные числа. Эти Б. и. находят применение в теории тригонометрич. рядов.

Лит.: [1] Burkill J. C., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1924, v. 22, p. 275—336; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Романовский П. И., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 1, с. 67—120; [4] Burkill J. C., «Proc. London Math. Soc.», ser. III, 1951, v. 1, № 1, p. 46—57.

В. А. Скворцов.

БЁРНСАЙДА ПРОБЛЕМА — 1) Б. п. о конечных группах: существуют ли неразрешимые конечные группы нечетного порядка? Другая формулировка: имеют ли все конечные простые неабелевы группы четные порядки? Эта Б. п. связана с именем У. Бёрнсайда, отметившего в 1897, что порядки всех известных к тому времени простых неабелевых групп четны [1]. Решена в 1962 У. Фейтом и Дж. Томпсоном [2], показавшими, что все конечные группы нечетного порядка разрешимы.

Лит.: [1] Burnside W., The theory of groups of finite order, 2 ed., Camb., 1911; [2] Feit W., Thompson J., «Pacific J. Math.», 1963, v. 13, № 3, p. 775—1029. *В. Д. Мазуров.*

2) Б. п. о периодических группах; поставлена У. Бёрнсайдом в 1902 (см. [1]): всегда ли конечна конечно порожденная группа, каждый элемент к-рой имеет конечный порядок (неограниченная Б. п.)? Эта Б. п. может быть сформулирована также в виде вопроса: будет ли *локально конечной группой* всякая периодическая группа? У. Бёрнсайд специально выделил важный случай этой проблемы, когда порядки всех элементов группы ограничены в совокупности (ограниченная Б. п.), т. е. в группе выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$ при нек-ром натуральном n. Наибольшее внимание было привлечено именно к ограниченному варианту Б. п. Другими словами, изучалась факторгруппа $B(d,n) = F/F^n$ свободной группы F с $d \geqslant 2$ образующими по подгруппе F^n, порожденной n-ми степенями f^n всех

элементов $f \in F$. Известны следующие результаты: $B(d, 2)$ — элементарная абелева группа порядка 2^d; $B(d,3)$ — конечная группа порядка 3^{m_d}, где $m_d = d + \binom{d}{2} + \binom{d}{3}$ (см. [1], [2]); $B(d, 4)$ — конечная группа (порядка 2^{12} при $d=2$ и 2^{69} при $d=3$ (см. (1), (3), (4)); $B(d, 6)$ — конечная группа порядка $2^s\ 3^t$, где $s = 1+(d-1)3^{m_d}$, $t = m_r$ и $r = 1+(d-1)2^d$ (см. [5],[6]). В 1959 (см. [7]) было анонсировано отрицательное решение ограничений Б. п. В [8] опубликовано отрицательное решение неограниченной Б. п. В дальнейшем была предложена еще одна конструкция периодич. группы, не являющейся локально конечной [9]. В 1968 (см. [10]) было опубликовано доказательство теоремы о бесконечности группы $B(d, n)$, $d \geqslant 2$, для всех нечетных $n \geqslant 4381$ (отрицательное решение ограниченной Б. п.). Позднее было доказано, что в $B(d, n)$ разрешимы проблема тождества слов и проблема сопряженности; $B(d, n)$ не может быть задана конечным числом *определяющих соотношений*; все конечные подгруппы в $B(d, n)$ абелевы, а все абелевы подгруппы являются циклическими; $B(d, n)$, $d \geqslant n$, не удовлетворяют ни условию максимальности, ни условию минимальности для нормальных подгрупп; $B(d, n)$, $d > 2$, изоморфно вкладывается в группу $B(2, n)$. Изучению свойств бесконечных групп $B(d, n)$ на основе усовершенствованных методов из [10] посвящена монография [11], где, в частности, указанная выше граница для нечетных n снижена до $n \geqslant 665$. Трудной задачей является окончательное разграничение показателей n, к-рым соответствуют конечные или бесконечные группы $B(d, n)$. Значения $n=5$ и $n=2^m$, $m \geqslant 3$, представляют в этой связи особый интерес. Остается открытым (1977) вопрос о локальной конечности групп с условием минимальности для подгрупп; в классе 2-групп ответ на него положителен (см. [12]).

С сер. 30-х гг. стала постепенно выкристаллизовываться мысль о том, что для теории конечных групп важно, собственно, знать ответ на следующий вопрос: будет ли порядок любой конечной группы с d образующими и тождественным соотношением $x^n = 1$ ограничен сверху нек-рым натуральным числом $b(d, n)$, зависящим только от d и n? Это так наз. о с л а б л е н н а я Б. п. Она решена положительно для любого простого показателя $n = p$ (см. [13]). Доказано, таким образом, существование универсальной конечной p-группы $\overline{B(d, p)}$ порядка $b(d, p)$, факторгруппам к-рой изоморфны все другие конечные p-группы с d образующими и соотношением $x^p = 1$. В случае конечности $B(d, p)$ имеет место совпадение: $\overline{B(d, p)} = B(d, p)$. Сопоставление результатов из [10] и из [13] приводит к существованию при достаточно большом p конечно порожденной бесконечной простой p-группы показателя p. Было доказано, что $b(2,5) = 5^{34}$. Для $b(d, p)$ при $p \geqslant 7$ имеются лишь нек-рые оценки снизу, связанные с соответствующими оценками для класса нильпотентности $c(d, p)$ группы $\overline{B(d, p)}$. По-видимому, $c(2, p)$ не может быть линейной функцией p. Что более существенно, $c(d, p)$ растет неограниченно вместе с d (см. [14], [15]). Вопрос о существовании $\overline{B}(d, n)$ при $n = p^m$, $m > 1$, начиная с $n = 8$ и 9, открыт (1977). В то же время из результатов, полученных в [6] и [13], а также из теоремы о разрешимости групп нечетного порядка (см. *Бернсайда проблема* о конечных группах) и нек-рых классификационных фактов о простых группах вытекает существование $b(d, n)$ для всех n, свободных от квадратов.

В первоначальном решении [8] неограниченной Б. п. и ослабленной Б. п. [13] для простого показателя p использован выход в теорию алгебр, в первом случае - на основе признака бесконечномерности алгебры, а во втором — на основе одного тождества в *Ли алгебрах*, являющегося аналогом тождества $x^p = 1$ в группах

(см. [16], [17]). Проблемы бернсайдовского типа, помимо уже упомянутых, получили весьма широкое распространение (см. [8], [9]).

Лит.: [1] Burnside W., «Quart. J. Pure and Appl. Math.», 1902, v. 33, p. 230—38; [2] Levi F. W., Van der Waerden B. L., «Abh. Math. Sem. in Univ., Hamburg», 1932, Bd 9, S. 154—58; [3] Санов И. Н., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем.», 1940, в. 10, с. 166—70; [4] Bayes A. J., Kautsky J., Wamsley T. W., в кн.: Proc. Second internat. conf. theory of groups, Canberra, 1973, p. 82—89; [5] Hall M., «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 1957, v. 43, p. 751—53; [6] Hall Ph., Higman G., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, № 21, p. 1—42; [7] Новиков П. С. «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 4, с. 749—52; [8] Голод Е. С., в кн.: Труды Международного конгресса математиков, М., 1968, с. 284—89; [9] Алёшин С. В., «Матем. заметки», 1972, т. 11, № 3, с. 319—28; [10] Новиков П. С., Адян С. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 212—44, № 3, с. 709—31; [11] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975; [12] Шмидт О. Ю., Избранные труды. Математика, М., 1959, с. 298—300; [13] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [14] Buchmuth S. M., Muchizuki H. Y., Walkup D. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 76, № 3, p. 638—40; [15] Размыслов Ю. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 1, с. 33—44; [16] Magnus W., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, № 1, S. 105—15; [17] Higman G., в кн.: Proceedings of the International congress of mathematicians, Camb., 1960, p. 307—12; [18] Курош А. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 233—40.

А. И. Кострикин.

БЕРНУЛЛИ АВТОМОРФИЗМ — автоморфизм пространства с мерой, описывающий *Бернулли испытания* и их обобщение — последовательность независимых испытаний, имеющих одни и те же исходы и одно и то же распределение вероятностей.

Пусть A — совокупность всевозможных исходов испытания, а вероятность события $B \subset A$ дается мерой ν; для счетного A обозначим его элементы через a_i и их вероятности через $p_i = \nu(a_i)$. Фазовым пространством Б. а. служит прямое произведение счетного числа экземпляров множества A, т. е. точки фазового пространства суть бесконечные последовательности $b = \{b_k\}$, где k пробегает множество целых чисел и каждое $b_k \in A$. Преобразование T состоит в сдвиге всех членов каждой последовательности влево на одно место: $T\{b_k\} = \{b_{k+1}\}$. Мера μ определяется как прямое произведение счетного числа мер ν; таким образом, если A счетно, то

$$\mu\{b : b_{i_1} = a_{j_1}, \ldots, b_{i_k} = a_{j_k}\} = p_{j_1} \ldots p_{j_k}.$$

В последнем случае *энтропия* Б. п. равна $-\Sigma p_i \log p_i$.

В эргодической теории Б. а. (точнее, получающийся при его итерировании каскад) играет роль стандартного примера динамич. системы, в поведении к-рой проявляются статистич. свойства. Б. а. является K-автоморфизмом, но существуют K-автоморфизмы, метрически неизоморфные Б. а., хотя многие K-автоморфизмы метрически изоморфны Б. а. Два Б. а. метрически изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую энтропию [1]. Б. а. является факторавтоморфизмом любого эргодического автоморфизма пространства Лебега с большей энтропией [2].

Лит.: [1] Орнштейн Д., «Математика», 1971, т. 15, № 1, с. 114—30, 131—50; [2] Синай Я. Г., «Матем. сб.», 1964, т. 63, № 1, с. 23—42.

Д. В. Аносов.

БЕРНУЛЛИ БЛУЖДАНИЕ — *случайное блуждание*, порождаемое *Бернулли испытаниями*. На примере Б. б. можно пояснить нек-рые основные черты более общих случайных блужданий. В частности, уже в этой простейшей схеме проявляются свойства «случайности», парадоксальные с точки зрения интуиции.

Б. б. можно описать, напр., в следующих терминах. Частица движется по оси x («блуждает») по решетке точек вида kh (k — целое, $h>0$). Движение начинается в момент $t=0$, и положение частицы отмечается только в дискретные моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$. На каждом шаге координата частица увеличивается или уменьшается на величину h с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно, независимо от предшествую-

щего движения. Таким образом, перемещения в положительном и отрицательном направлениях («успехи» и «неудачи») описываются схемой испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной p. Обычно Б. б. изображают геометрически, беря ось t за ось абсцисс, а ось x — за ось ординат (см. рис. 1, где показан начальный участок графика движения частицы, начинающей блуждание из нуля). Пусть X_j — случайная величина, равная перемещению частицы на j-м шаге. Тогда X_1, X_2, ..., X_n, ... образуют последовательность независимых случайных величин. Координата блуждающей частицы в момент $n\Delta t$ равна сумме $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Поэтому график Б. б. дает также наглядное представление о поведении нарастающих сумм случайных величин, причем многие характерные черты флуктуаций сохраняются и для сумм значительно более общих случайных величин. Этот график показывает также изменения капитала одного из игроков в классич. задаче о разорении (именно в связи с этой задачей были найдены формулы для вероятностей многих событий в Б. б.).

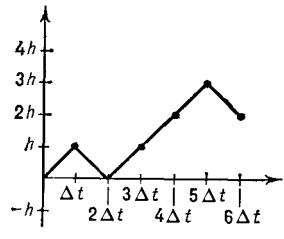


Рис. 1. Начальный участок графика движения частицы, совершающей блуждание Бернулли.

В физике Б. б. используют для грубого описания одномерных процессов диффузии (см. *Диффузионный процесс*) и броуновского движения материальных частиц под действием ударов молекул.

Из важнейших фактов, связанных с Б. б., можно отметить следующие (при этом ниже, если не оговорено противное, принято допущение $\Delta t = 1$, $h = 1$).

Вероятности возвращения. Пусть блуждание начинается из нуля. Тогда вероятность хотя бы одного возвращения в нуль равна $1 - |p - q|$, т. е. равна единице в симметричном случае $p = q = \frac{1}{2}$ и меньше единицы при $p \neq q$. В симметричном случае величины τ_1 (время до первого возвращения в нуль) и τ_2 (время между первым и вторым возвращениями) и т. д. суть независимые случайные величины с бесконечным математич. ожиданием. Время до N-го возвращения, т. е. сумма $\tau_1 + \ldots + \tau_N$ растет как N^2, а среднее число N_{2n} возвращений за $2n$ шагов задается формулой

$$\mathsf{E}(N_{2n}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} - 1$$

и растет как $\sqrt{n}$:

$$\mathsf{E}(N_{2n}) \sim 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Отсюда вытекает парадоксальное следствие: в симметричном Б. б. «волны» на графике между последовательными возвращениями в нуль оказываются поразительно длинными (рис. 2). С этим связано и другое обстоятельство, а именно, что для T_n/n (доли времени, когда график находится выше оси абсцисс) наименее вероятными оказываются значения, близкие к $\frac{1}{2}$. Точнее, справедливо следующее утверждение: при $k \to \infty$, $n - k \to \infty$ для вероятности $p_{2n,\,2k}$ равенства $T_{2n} = 2k$ имеет место формула:

$$p_{2n,\,2k} \sim \frac{1}{\pi n \sqrt{x(1-x)}},$$

где $x = x_{n,k} = k/n$. Следствием является так наз. закон арксинуса: при каждом $0 < \alpha < 1$ вероятность неравенства $T_n/n < \alpha$ стремится к

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

Опираясь на этот факт, можно показать, что при 10 000 шагов частица остается на положительной стороне более чем 9930 моментов времени с вероятностью $\geqslant 0{,}1$,

т. е., грубо говоря, подобное положение будет наблюдаться не реже, чем в одном случае из десяти (хотя на первый взгляд оно кажется абсурдным).

Максимальное отклонение. При $p>q$ или $p<q$ блуждающая частица уходит с вероятностью единица в $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому, напр., при $p<q$ определена случайная величина

$$M^+ = \max_{0\leqslant j<\infty} S_j,$$

и вероятность того, что $M^+=x$, равна

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^x.$$

Бернулли блуждание с границами. Часто рассматривают Б. б. при наличии поглощающих или отражающих экранов. Пусть, напр., блуждание начинается из нуля. Наличие в точке a поглощающего экрана проявляется в том, что по достижении этой точки частица перестает двигаться. При наличии в точке $a=(k+1/2)$ ($k\geqslant 0$ целое) отражающего экрана частица с вероятностью q переходит из k в $(k-1)$ и с вероятностью p остается на месте. Основным средством вычисления вероятностей поглощения и вероятностей достижения тех или иных точек служат разностные уравнения. Пусть, напр., поглощающий экран стоит

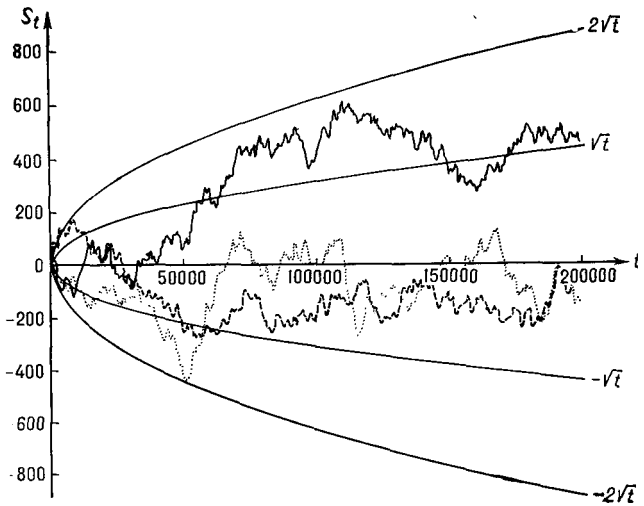


Рис. 2. Графики трех блужданий Бернулли; каждое наблюдалось на протяжении 200 000 единиц времени.

в точке $-a$ ($a>0$). Если $z_{t,x}$ есть вероятность того, что частица, находящаяся в точке x в момент времени t, поглотится до момента n (включительно), то имеет место уравнение:

$$z_{t,x} = qz_{t+1,\,x-1} + pz_{t+1,\,x+1},\ x > -a,$$

со следующими очевидными граничными условиями:

$$z_{t,\,-a} = 1,\ 0\leqslant t\leqslant n,$$

$$z_{n,\,x} = 0,\ x > -a.$$

Решение этой задачи при $p=q=1/2$ было известно А. Муавру (A. Moivre) и П. Лапласу (P. Laplace). Формула Лапласа имеет вид:

$$z_{t,\,x} = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^\gamma d\varphi, \qquad (*)$$

где

$$\gamma = a + x + 2\left[\frac{n-t-x-a}{2}\right] + 1.$$

Переход к процессам диффузии. Пусть, напр., $p=q=1/2$, $\Delta t=1/N$, $h=1/\sqrt{N}$. Тогда при $N\to\infty$ многие вероятности, вычисленные для схемы Б. б.,

стремятся к пределам, равным аналогичным вероятностям для броуновского движения. Пусть речь идет о вероятности того, что частица, вышедшая из нуля, поглотится экраном, стоящим в точке α, до момента T. Предельным переходом из формулы (*) при $n/N=T$, $t=0$, $x=0$, $a/\sqrt{N}=\alpha$ получается величина

$$1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sqrt{T}} e^{-z^2/2}\,dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/\sqrt{T}}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz,$$

равная вероятности того, что координата $X(v)$ частицы, совершающей броуновское движение, удовлетворяет неравенству:

$$\min_{0\leqslant v\leqslant T} X(v)\leqslant -\alpha,$$

т. е. вероятности того, что частица поглотится на барьере $-\alpha$. Для более или менее полного описания всех подобных предельных соотношений уместно встать на общую точку зрения и рассмотреть переход от дискретного процесса «нарастающих сумм» к непрерывному случайному процессу (см. *Предельные теоремы*).

На схеме Б. б. можно весьма наглядно пояснить такие закономерности поведения сумм случайных величин, как *больших чисел усиленный закон* и *повторного логарифма закон*.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

Ю. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ ИНТЕГРАЛ уравнений гидродинамики — интеграл, определяющий давление p в каждой точке установившегося потока идеальной однородной жидкости или баротропного газа ($p=F(\rho)$) через скорость v потока в соответствующей точке и через силовую функцию $u(x, y, z)$ объемных сил:

$$\int\frac{dp}{\rho}=C-\frac{1}{2}|\,v\,|^2+u. \qquad (1)$$

Постоянная C имеет для каждой линии тока свое значение, меняющееся при переходе от одной линии тока к другой. Если движение потенциальное, то постоянная C для всего потока одна и та же.

Для неустановившегося движения Б. и. (наз. иногда интегралом Коши — Лагранжа) имеет место при наличии потенциала скоростей:

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}|\,v\,|^2+u+f(t), \qquad (2)$$

причем

$$v=\operatorname{grad}\varphi(x, y, z, t)$$

и $f(t)$ есть произвольная функция времени.

Для несжимаемой жидкости левая часть уравнений (1), (2) приводится к виду p/ρ; для баротропного газа ($p=F(\rho)$) — к виду:

$$\int\frac{dp}{\rho}=\int F'(\rho)\,\frac{dp}{\rho}.$$

Б. и. предложен Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1738).

Лит.: [1] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Л. Н. Сретенский.

БЕРНУЛЛИ ИСПЫТАНИЯ — независимые испытания с двумя исходами каждое («успехом» и «неудачей») и такие, что вероятности исходов не изменяются от испытания к испытанию. Б. и. служат одной из основных схем, рассматриваемых в теории вероятностей.

Пусть p — вероятность успеха и $q=1-p$ — вероятность неудачи, и пусть 1 обозначает наступление успеха, а 0 — наступление неудачи. Тогда вероятность определенного чередования успехов и неудач, напр.,

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 1,$$

равна

$$p\ q\ q\ p\ p\ q\ p\ q\ \ldots\ p=p^m q^{n-m},$$

где m — число успехов в рассматриваемом ряду n испытаний. Со схемой Б. и. связаны многие распростра-

ненные распределения вероятностей. Пусть S_n — случайная величина, равная числу успехов в n Б. и. Тогда вероятность события $\{S_n=k\}$ равна

$$C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. S_n имеет *биномиальное распределение*. Последнее при $n\to\infty$ аппроксимируется *нормальным распределением* или *Пуассона распределением*. Пусть Y_1 — число испытаний до первого успеха. Тогда вероятность события $\{Y_1=k\}$ равна

$$q^k p,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. Y_1 имеет *геометрическое распределение*. Если Y_r — число неудач, предшествующих r-му появлению успеха, то Y_r имеет так наз. *отрицательное биномиальное распределение*. Число успехов S_n в Б. и. можно представить в виде суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимых случайных величин, где X_j равно 1, если j-е испытание закончилось успехом, и равно 0 в противном случае. Поэтому многие важные закономерности теории вероятностей, относящиеся к суммам независимых случайных величин, были первоначально установлены для схемы Б. и. (*Бернулли теорема*, *больших чисел закон*, *больших чисел усиленный закон*, *повторного логарифма закон*, *центральная предельная теорема* и т. д.).

Строгое изучение бесконечных последовательностей Б. и. требует введения *вероятностной меры* в пространстве бесконечных последовательностей нулей и единиц. Это можно сделать или непосредственно, или с помощью приема, к-рый иллюстрируется ниже случаем $p=q=1/2$. Пусть ω — число, выбираемое наудачу на отрезке (0, 1) с равномерным распределением, и пусть

$$\omega=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{X_j(\omega)}{2^j},$$

где $X_j(\omega)=0$ или 1, есть разложение ω в двоичную дробь. Тогда X_j, $j=1,\ 2,\ \ldots$, независимы и принимают значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое, т. е. чередование нулей и единиц в двоичном разложении ω описывается схемой Б. и. с $p=1/2$. Однако меру на (0, 1) можно задать и так, чтобы получить Б. и. с любым p (при $p\neq1/2$ получается мера, сингулярная относительно меры Лебега).

Б. и. часто трактуют геометрически (см. *Бернулли блуждание*). Ряд вероятностей, связанных с Б. и., был вычислен на самой ранней ступени развития теории вероятностей в связи с задачей о разорении игроков.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ ЛЕМНИСКАТА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Б. л. симметрична относительно начала координат O (см. рис.), к-рое является узловой точкой с касательными $y=\pm x$ и точкой перегиба. Радиус кривизны: $r=2a^2/3\rho$. Площадь каждой петли: $S=a^2$. Произведение расстояний каждой точки M Б. л. до двух данных точек $F_1(-a,\ 0)$ и $F_2(a,\ 0)$ равно квадрату расстояний между точками F_1 и F_2. Б. л.— частный случай *Кассини овалов*, *лемнискат*, *синусоидальных спиралей*.

Б. л. названа по имени Я. Бернулли (J. Bernoulli), в статье к-рого впервые встречается уравнение этой кривой (1694).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

БЕРНУЛЛИ МЕТОД — метод нахождения наибольшего по абсолютной величине действительного корня алгебраич. уравнения вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (*)$$

Предложен Д. Бернулли [1]; состоит в следующем. Пусть $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$ — произвольно выбранные числа. Значения $y(n)$, $y(n+1)$, ... вычисляют, пользуясь разностным уравнением:

$$a_0y(m+n) + a_1y(m-n-1) + \ldots + a_ny(m) = 0.$$

Отношение $y(m+1)/y(m)$ при $m \to \infty$ стремится, вообще говоря, к наибольшему по абсолютной величине корню уравнения (*).

Лит.: [1] Bernoulli D., в кн.: Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae, Petropoli, 1732, t. 3, p. 62—69; [2] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, пер. с англ., Л.—М., 1935.

Л. Н. Довбыш.

БЕРНУЛЛИ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены вида

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где B_s — *Бернулли числа*. Так, для $n = 0, 1, 2, 3$

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Б. м. можно вычислять по рекуррентной формуле

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} B_s(x) = nx^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Для натурального $x = m$ Б. м. впервые рассматривались Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713) в связи с вычислением суммы

$$\sum_{k=0}^{m} k^n.$$

При произвольном x Б. м. впервые изучал Л. Эйлер (L. Euler) (см. [1], с. 300). Термин «Б. м.» ввел И. Л. Раабе (J. L. Raabe, 1851). Основное свойство: Б. м. удовлетворяют разностному уравнению

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

и поэтому играют в исчислении конечных разностей туже роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Б. м. принадлежат к классу *Аппеля многочленов*, т. е. удовлетворяют условию:

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

и тесно связаны с *Эйлера многочленами*:

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n}\left[B_n(x) - 2^nB_n\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Производящая функция Б. м. имеет вид:

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Для Б. м. справедливо разложение в *Фурье ряд*: для $n = 1$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi sx}{s\pi}, \quad 0 < x < 1,$$

и для $n = 2, 3, \ldots$

$$B_n(x) = -2n! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi sx - \frac{n\pi}{2}\right)}{(2\pi s)^n}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Б. м. удовлетворяют соотношениям:

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{s}{m}\right)$$

(теорема умножения),

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

(теорема дополнения),

$$B_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s(y)\, x^{n-s}$$

(теорема сложения аргументов).

Б. м. используются для выражения остаточного члена *Эйлера — Маклорена формулы* суммирования и для разложения функций в ряды. Из свойств Б. м. выводятся многие важные свойства чисел Бернулли. Б. м. используются для интегрального представления дифференцируемых периодич. функций

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(t)\, f^{(k-1)}(x+\pi-t)\,dt,$$

$$\varphi_k(t) = \frac{2^{k-1}\pi^k}{k!} B_k\left(\frac{\pi+t}{2\pi}\right),$$

и играют важную роль в теории приближения таких функций тригонометрич. полиномами и др. агрегатами, см. *Фавара задача*.

Известны различного рода обобщения Б. м. Н. Э. Нёрлундом введены обобщенные Б. м. порядка ν и степени n:

$$B_n^{(\nu)}(x \mid \omega) = B_n^{(\nu)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_\nu)$$

(нек-рые частные случаи этих многочленов рассматривались ранее В. Г. Имшенецким, Н. Я. Сониным и Д. М. Синцовым). Пусть

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$$

и

$$B_n^{(0)}(x \mid \omega) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

тогда $B_n^{(\nu)}(x \mid \omega)$ последовательно определяются как полиномиальные решения степени n разностного уравнения

$$\underset{\omega_\nu}{\Delta} B_n^{(0)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_\nu) = nB_{n-1}^{(\nu-1)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}),$$

$\nu = 1, 2, \ldots$, с начальными условиями

$$B_n^{(\nu)}(0 \mid \omega_1, \ldots, \omega_\nu) = B_n^{(\nu)}[\omega_1, \ldots, \omega_\nu],$$

где $B_n^{(\nu)}[\omega_1, \ldots, \omega_\nu]$ (обобщенные числа Бернулли) находятся из рекуррентного соотношения

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \omega_\nu^s B_{n-s}^{(\nu)} = \omega_\nu^n B_{n-1}^{(\nu-1)}$$

$$(B_n^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^n B_n,\ B_0^{(\nu)} = 1,\ B_n^{(0)} = 0,\ B_0^{(0)} = 1).$$

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.—Л., 1949; [2] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Лихин В. В., в сб.: Историко-математические исследования, в. 12, М., 1959, с. 59—134.

Ю. Н. Субботин.

БЕРНУЛЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *биномиальное распределение*.

БЕРНУЛЛИ СХЕМА — то же, что схема *Бернулли испытаний*.

БЕРНУЛЛИ ТЕОРЕМА — исторически первая форма *больших чисел закона*. Б. т. приведена в четвертой части книги Я. Бернулли (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Искусство предположений»). Эту часть можно считать первым серьезным трудом по теории вероятностей. Книга издана в 1713 Н. Бернулли (племянником Я. Бернулли). Б. т. относится к последовательности независимых испытаний (см. *Бернулли испытания*), в каждом из к-рых вероятность появления нек-рого события (успеха) равна p. Пусть n — число испытаний и m — случайная величина, равная числу успехов.

Б. т. утверждает, что каковы бы ни были положительные числа ε и η при всех достаточно больших n ($n \geqslant n_0$) вероятность P неравенства

$$-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \varepsilon$$

будет больше $1-\eta$. Доказательство этой теоремы, данное Я. Бернулли (и основанное только на изучении характера убывания вероятностей в биномиальном распределении по мере удаления от наивероятнейшего значения), сопровождалось неравенством, позволяющим указать нек-рую границу для указанного n_0 по данным ε и η. Напр., Я. Бернулли находит, что при $p = {}^2/_5$ вероятность неравенства

$$-\frac{1}{50} \leqslant \frac{m}{n} - \frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{50}$$

будет больше 0,999 при $n \geqslant 25\,550$. Несколько совершенствуя первоначальное рассуждение Я. Бернулли, можно установить, что n достаточно выбирать с условием

$$n > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\varepsilon},$$

что дает, в свою очередь, для вероятности $1-P$ неравенства $\left| \frac{m}{n} - p \right| > \varepsilon$ оценку вида

$$2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} n \varepsilon^2 \right\}.$$

Для приведенного выше примера получается условие $n \geqslant 17\,665$ (более сложные оценки показывают, что достаточно брать $n \geqslant 6\,502$; для сравнения заметим, что теорема Муавра—Лапласа в качестве приближенного значения n_0 дает 6 498). Другие оценки для $1-P$ можно получить, используя *Бернштейна неравенство* и его аналоги (см. также *Биномиальное распределение*).

Лит.: [1] Бернулли Я., Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi», СПБ, 1913; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946.

Ю. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = f(x)\, y^{\alpha},$$

где α — действительное число, не равное нулю и единице. Это уравнение впервые было рассмотрено Я. Бернулли [1]. Подстановкой $y^{1-\alpha} = z$ Б. у. приводится к линейному неоднородному уравнению 1-го порядка (см. [2]). Если $\alpha > 0$, то Б. у. имеет решение $y \equiv 0$; при $0 < \alpha < 1$ в точках этого решения нарушается единственность. Уравнение вида

$$[f(y)\, x - g(y)\, x^{\alpha}]\, y' = h(y), \quad \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1,$$

также есть Б. у., если рассматривать y как независимую переменную, а x — как неизвестную функцию от y.

Лит.: [1] Bernoulli J., «Acta Erud.», 1695, p. 59—67, 537—57; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

БЕРНУЛЛИ ЧИСЛА — последовательность рациональных чисел $B_0, B_1, B_2, \ldots$, найденная Я. Бернулли [1] в связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^{s} B_s m^{n+1-s}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Значения первых Б. ч.:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0,$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0.$$

Все Б. ч. с нечетными номерами, кроме B_1, равны нулю, знаки B_{2n} чередуются. Б. ч. являются значениями при $x=0$ *Бернулли многочленов*: $B_n=B_n(0)$; коэффициентами разложения нек-рых элементарных функций в степенные ряды часто служат Б. ч. Напр.

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}, \quad |x|<2\pi$$

(т. н. производящая функцию для Б. ч.),

$$x\operatorname{ctg} x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu B_{2\nu}\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}, \quad |x|<\pi,$$

$$\operatorname{tg} x=\sum_{\nu=1}^{\infty}|B_{2\nu}|\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}x^{2\nu-1}, \quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

Л. Эйлер (L. Euler, 1740) указал на связь между Б. ч. и значениями дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при четных $s=2m$:

$$\zeta(2m)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-2m}=\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2n)!}|B_{2m}|.$$

Через Б. ч. выражаются многие несобственные интегралы, напр.

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{1}{4n}|B_{2n}|, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Некоторые соотношения для Б. ч.:

$$B_0=1, \quad \sum_{k=0}^{n-1}C_n^k B_k=0, \quad n\geqslant 2,$$

(рекуррентная формула):

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}4n\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}dx, \quad n\geqslant 1;$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2n}}, \quad n\geqslant 1,$$

оценка:

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}<(-1)^{n-1}B_{2n}\leqslant\frac{\pi^2(2n)!}{3(2\pi)^{2n}}, \quad n\geqslant 1.$$

Для Б. ч. имеются обширные таблицы, напр., в [2] приведены точные значения B_{2n} для $n\leqslant 90$ и приближенные значения для $n\leqslant 250$.

Б. ч. находят многочисленные применения в математич. анализе, теории чисел, приближенных вычислениях.

Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, Basileae, 1713; [2] Tables of the higher mathematical functions, v. 2, Bloomington, 1935; [3] Saalschuetz L., Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, B., 1893; [4] Чистяков И. И., Бернуллиевы числа, М., 1895; [5] Nielsen N., Traité élémentaire de nombres de Bernoulli, P., 1923; [6] Кудрявцев В. А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли, М.—Л., 1936; [7] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [8] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [9] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *Ю. Н. Субботин.*

БЕРНШТЕЙНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС — последовательность алгебраич. многочленов, равномерно сходящаяся на отрезке $[-1,1]$ к функции $f(x)$, непрерывной на том же отрезке. Точнее, Б. п. п.— последовательность алгебраич. многочленов

$$P_n(f;x)=\frac{\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

— *Чебышева многочлены*;

$$x_k^{(n)}=\cos[(2k-1)\pi/2n]$$

— узлы интерполяции;

$$A_k^{(n)}=f(x_k^{(n)}),$$

если $k\neq 2ls$, l — произвольное натуральное число, $n=2lq+r$, $q\geqslant 1$, $0\leqslant r<2l$, $s=1, 2, \ldots, q$;

$$A_{2ls}^{(n)}=\sum_{i=0}^{l-1}f(x_{2l(s-1)+2i+1}^{(n)})-\sum_{i=1}^{l-1}f(x_{2l(s-1)+2i}^{(n)}).$$

Отношение степени многочлена $P_n(f;\ x)$ к числу точек, в к-рых $P_n(f;\ x)$ совпадает с $f(x)$, равно $(n-1)/(n-q)$, которое при $n\to\infty$ стремится к $2l/(2l-1)$; при l достаточно большом этот предел сколь угодно близок к единице. Б. и. п. указан С. Н. Бернштейном в 1931 (см. [1]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., в кн.: Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 130—40.

П. П. Коровкин.

БЕРНШТЕЙНА МЕТОД, метод вспомогательных функций,— метод, применяемый в теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Б. м. состоит в введении нек-рых новых (вспомогательных) функций, зависящих от искомого решения и позволяющих устанавливать для этого решения априорные оценки максимума модуля производных требуемого порядка.

Простым примером применения Б. м. является априорная оценка модуля производных решения задачи Дирихле для нелинейного (квазилинейного) эллиптич. уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\equiv\\ &\equiv a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}+c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\\ &\quad+2d\,\frac{\partial z}{\partial x}+2e\,\frac{\partial z}{\partial y}+g\ \text{в круге } D\\ &z\,|_C=0,\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

где a, b, c, d, e, g — гладкие функции от x, y, z; C — окружность, граница круга D с радиусом R (предположение о том, что D — круг, а $z|_C=0$, не существенно, ибо общий случай произвольной односвязной области и неоднородного граничного условия легко приводятся к рассматриваемому случаю с помощью замены функции и конформного преобразования области).

Если $f'_z\geqslant 0$, то оценка максимума модуля n

$$n=\max_{(x,\ y)\,\in\, D+C}|z\ (x,\ y)|$$

решения задачи (*) сразу получается из принципа максимума.

Для доказательства существования регулярного решения задачи (*) достаточно иметь априорные оценки максимума модуля производных решения до 3-го порядка (см. *Продолжения по параметру метод*). Для оценки $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$ достаточно оценить $\max\limits_C\frac{\partial z}{\partial \rho}$ (т. к. $z|_C=0$), ρ, θ — полярные координаты в круге D. Пусть введена новая (вспомогательная) функция u по формуле

$$z=\varphi_1(u)=-n-\alpha+\alpha\ln u,$$

где $\alpha>0$ будет выбрано позже. Функция $u=u(x,\ y)$ изменяется от e до $e^{(2n+\alpha)/\alpha}$ и в том же направлении, что и $z(x,\ y)$ $(-n\leqslant z\leqslant n)$. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\alpha}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha}{u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

и аналогично для производных по y, то u удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\\ &+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\\ &+2d\,\frac{\partial u}{\partial x}+2e\,\frac{\partial u}{\partial y}+g\,\frac{u}{\alpha}\equiv Q.\end{aligned}$$

Пусть M — верхняя грань $|a|$, $|b|$, $|c|$ в D, а $\alpha=1/8M$.

Если рассматривать $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ как текущие координаты на плоскости, а x, y, z как параметры, то уравнение $Q=0$ есть уравнение эллипса, т. к. определитель $a_1c_1-b_1^2>3/4u^2$, где

$$a_1=\frac{1}{u}\left(1+\frac{a}{8M}\right),\quad b_1=\frac{b}{8Mu},\quad c_1=\frac{1}{u}\left(1+\frac{c}{8M}\right).$$

Таким образом, Q при любых $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ не меньше нек-рого отрицательного числа $-P$, $Q\geqslant -P$ (число P легко указать в явном виде). Если ввести функцию u_1 по формуле

$$u_1=u+\frac{P}{4}(x^2+y^2),$$

то

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=Q+P\geqslant 0$$

и u_1 достигает максимума на границе C области D, а так как u_1 постоянна на C, то

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\geqslant 0\quad\text{и}\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{1}{2}PR,$$

R — радиус окружности C. Отсюда может быть найдена отрицательная нижняя грань для $\frac{\partial z}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{\alpha PR}{2e^{(n+\alpha)/\alpha}}.$$

Применение тех же рассуждений к другой вспомогательной функции u

$$z=\varphi_2(u)=-n-\alpha+\alpha\ln\frac{1}{1-u}$$

позволяет получить оценку сверху

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}\leqslant\frac{\alpha P_1R}{2}e^{(n+\alpha)/2}.$$

Таким образом, оценивается $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right|$, а значит, и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$. Оценка максимума модуля первых производных внутри области D проводится аналогично: вводится вспомогательная функция u по формуле

$$z=\varphi_3(u)=-n+\alpha\ln\ln u.$$

Функция u изменяется в том же направлении, что и z, от e до $e^{e^{2n/\alpha}}$. Для u из (*) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u\ln u}\left[(1+\ln u+\alpha a)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\alpha b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+(1+\ln u+\alpha c)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{u\ln u}{\alpha}\equiv Q_1.$$

Рассуждения, подобные приведенным, показывают, что если функция

$$w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

достигает максимума в области D, то этот максимум не превосходит некоторого числа, зависящего лишь от n и M. Это дает требуемую оценку $\max\limits_D\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_D\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$.

Б. м. позволяет аналогичным образом оценить и максимум модуля в области $D+C$ всех старших производных решения (при этом дополнительно надо лишь дифференцировать исходное уравнение (*)).

Б. м. впервые был применен С. Н. Бернштейном [1]. В дальнейшем Б. м. развивался и систематически употреблялся при изучении различных задач для эллипти-

ческих и параболических дифференциальных операторов ([3] — [5]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 253—71; 1910, Bd 69, S. 82—136; [2] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1960; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [4] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.— Л., 1951; [5] Олейник О. А., Кружков С. Н., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 115—55.

И. А. Шишмарёв.

БЕРНШТЕЙНА МНОГОЧЛЕНЫ — алгебраические многочлены, определяемые формулой

$$B_n(f;\ x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Введены С. Н. Бернштейном в 1912 (см. [1], т. 1, с. 13). Последовательность Б. м. сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, если функция $f(x)$ на этом отрезке непрерывна. Для функции, ограниченной в точке C, $0<C<1$, имеющей разрыв 1-го рода, имеем

$$B_n(f;\ C) \longrightarrow \frac{f(C_-)+f(C_+)}{2}.$$

Справедливо равенство:

$$B_n(f;\ c) - f(c) = \frac{f''(c)\,c(1-c)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

если в точке c функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Для функции, k-я производная $f^{(k)}(x)$ к-рой непрерывна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$B_n^{(k)}(f;\ x) \longrightarrow f^{(k)}(x)$$

равномерно на этом отрезке. Исследовалась сходимость Б. м. в комплексной плоскости, если $f(x)$ — аналитическая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция (см. [1], т. 2, с. 310, и [5]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 105—06; т. 2, М., 1954, с. 310—48; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954, гл. 2; [3] Баскаков В. А., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 2, с. 249—51; [4] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959, с. 117—24; [5] Канторович Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1931, № 8, с. 1103—15.

П. П. Коровкин.

БЕРНШТЕЙНА НЕРАВЕНСТВО — 1) Б. н. в теории вероятностей — уточнение классического *Чебышева неравенства*, принадлежащее С. Н. Бернштейну (1911, см. [1]); позволяет заменить степенную оценку вероятности больших отклонений на экспоненциально убывающую, см. *Больших отклонений вероятности*. Именно, если для независимых случайных величин $X_1,\ \ldots,\ X_n$ с

$$\mathsf{E}X_j = 0,\quad \mathsf{E}X_j^2 = b_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

выполняется

$$\mathsf{E}\,|X_j|^l \leqslant \frac{b_j}{2} H^{l-2}\, l!$$

($l>2$, H — постоянная, не зависящая от j), то для суммы $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ справедливо Б. н. ($r>0$):

$$\mathsf{P}\{|S_n| > r\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{r^2}{2(B_n + Hr)}\right\}, \qquad (1)$$

где $B_n = \Sigma b_j$. Для одинаково распределенных ограниченных случайных величин X_j ($\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{E}X_j^2 = \sigma^2$ и $|X_j| \leqslant L$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) неравенство (1) приобретает наиболее простой вид:

$$\mathsf{P}\{|S_n| > t\sigma\sqrt{n}\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2\left(1+\frac{a}{3}\right)}\right\}, \qquad (2)$$

где $a = Lt/\sqrt{n}\sigma$. А. Н. Колмогоровым была получена нижняя оценка вероятности в (1). Оценки Бернштейна — Колмогорова используются, в частности, при доказательстве *повторного логарифма закона*. Нек-рое пред-

ставление о точности (2) можно получить из сравнения с приближенным значением для левой части (2), даваемым *центральной предельной теоремой* в виде

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2/2}\,du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,t}\left(1-\frac{\theta}{t^2}\right)e^{-t^2/2},$$

где $0<\theta<1$. После 1967 одномерные Б. н. были распространены на многомерный и бесконечномерный случаи.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946; [2] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126—35; [3] Hoeffding W., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1963, v. 58, № 301, p. 13—30; [4] Прохоров Ю. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 266—74; [5] Прохоров А. В., «Матем. заметки», 1968, т. 3, в. 6, с. 731—9; [6] Юринский В. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 1, с. 106—7. *А. В. Прохоров.*

2) Б. н. для производной от тригонометрич. полинома или алгебраич. многочлена, дающее оценку этой производной через наибольшее значение самого полинома (многочлена). Если $T_n(x)$ — тригонометрич. полином порядка не выше n,

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|T_n(x)|,$$

то для любого x выполняются неравенства (см. [1]):

$$|T_n^{(r)}(x)|\leqslant Mn^r,\quad r=1,\ 2,\ \ldots.$$

Оценка неулучшаема; ибо число $M=1$ для

$$T_n(x)=\cos n(x-x_0)$$

и

$$\max_x|T_n^{(r)}(x)|=n^r.$$

Б. н. для тригонометрич. полиномов является частным случаем следующей теоремы [1]: если $f(x)$ — целая функция степени $\leqslant\sigma$ и

$$M=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|,$$

то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f^{(r)}(x)|\leqslant M\sigma^r\ \ (r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Б. н. для алгебраич. многочленов имеет следующий смысл [1]: если многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^n\alpha_kx^k$$

удовлетворяет условию

$$|P_n(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

то для его производной $P_n'(x)$ выполняется соотношение

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad a<x<b,$$

к-рое является неулучшаемым. Как заметил сам С. Н. Бернштейн (см. [1], с. 20), последнее неравенство в сущности вытекает из доказательства *Маркова неравенства* самим А. А. Марковым.

Б. н. существенно используются при получении обратных теорем теории приближения функций. Имеется ряд обобщений Б. н., в частности для целых функций многих переменных.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 13—42, 269—70; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. *Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.*

БЕРНШТЕЙНА ТЕОРЕМА о минимальных поверхностях: если минимальная поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$, где f имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков при всех действительных x и y, то F — плоскость. Доказательство этой теоремы, предложенное самим С. Н. Бернштейном [1], является следствием одной его более общей теоремы о поведении поверхностей с неположительной

кривизной. Предложены многочисленные обобщения Б. т., идущие гл. обр. в трех направлениях: 1) Количественные уточнения; напр., получение априорных оценок вида $|K(0)| \leqslant \text{const}/R^2$, где R — радиус круга, над к-рым определена минимальная поверхность $z = f(x, y)$, $K(0)$ — гауссова кривизна поверхности в центре круга. 2) Поиски других априорно задаваемых геометрич. условий, при удовлетворении к-рым минимальная поверхность необходима была бы какой-нибудь конкретной поверхностью: плоскостью, катеноидом и т. д.; напр., если сферич. образ полной минимальной поверхности не содержит нек-рое открытое на сфере множество, то такая минимальная поверхность есть плоскость. 3) Перенесение Б. т. на минимальные поверхности F^k размерности k, расположенные в евклидовом пространстве E^n; напр., если $k = n-1$, то при $n \leqslant 8$ всякая минимальная поверхность, однозначно определенная над всем E^{n-1}, есть гиперплоскость, а при $n > 8$ существуют минимальные поверхности, отличные от плоскости; если же $k < n-1$, то уже при $n \geqslant 4$ можно найти нелинейные минимальные поверхности F^k, определенные над всем E^{n-1}.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 3, 1960, с. 251—58; [2] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [3] Оссерман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [4] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 2, с. 104—25. *И. Х. Сабитов.*

БЕРНШТЕЙНА — РОГОЗИНСКОГО МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов Фурье; обозначается $(BP,\ \alpha_n)$. Тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \qquad (*)$$

суммируется методом Бернштейна—Рогозинского в точке x_0 к значению S, если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x_0;\ \alpha_n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x_0+\alpha_n) + S_n(x_0-\alpha_n)}{2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k(x_0) \cos k\alpha_n = S,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$, — числовая последовательность, а $S_n(x)$ — частичные суммы ряда $(*)$.

В. Рогозинский (см. [1]) сначала рассмотрел (1924) случай $\alpha_n = p\pi/2n$ (p — нечетное число), потом (1925) общий случай. С. Н. Бернштейн (см. [2]) рассматривал (1930) случай $\alpha_n = \pi/(2n+1)$. $(BP,\ \alpha_n)$-метод суммирует ряд Фурье функции $f(x) \in L[0,\ 2\pi]$ в случаях $\alpha_n = p\pi/2n$ и $\alpha_n = \pi/(2n+1)$ в точках непрерывности функции к ее значению и является *регулярным методом суммирования*.

Суммы $B_n(x,\ \alpha_n)$ Бернштейна — Рогозинского применяются как аппарат приближения. В обоих указанных выше случаях они осуществляют приближение того же порядка, что и наилучшее приближение для функций из классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$ и $W^1\,\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Лит.: [1] Rogosinski W., «Math. Ann.», 1925, Bd 95, № 1, S. 110—34; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 523—25; [3] Стечкин С. Б., Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского, в кн.: Г. Харди, Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *А. А. Захаров.*

БЕРТИНИ ТЕОРЕМЫ — две теоремы о свойствах *линейных систем* на алгебраических многообразиях, принадлежащие Э. Бертини (см. [1]).

Пусть V — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, L — линейная система без неподвижных компонент на V и W — образ многообразия V при отображении с помощью L. Следующие два утверждения известны как 1-я и 2-я Б. т.

1) Если $\dim W > 1$, то почти все дивизоры из линейной системы L (т. е. все, кроме замкнутого подмножества в пространстве параметров $P(L)$, отличного от

$P(L)$) являются неприводимыми и приведенными алгебраич. многообразиями.

2) Почти все дивизоры из L не имеют особых точек вне базисных точек линейной системы L и особых точек многообразия V.

Обе Б. т. неверны, если характеристика поля не равна 0.

Условия, при к-рых Б. т. верны и для случая конечной характеристики поля, изучены в [3] и [6]. В случае $\dim W = 1$ 1-я Б. т. заменяется следующим утверждением: почти все слои отображения $\varphi_L: V \to W$ являются неприводимыми и приведенными, если поле функций $k(W)$ алгебраически замкнуто внутри поля $k(V)$ при вложении $\varphi_L^* : k(W) \to k(V)$. В случае, когда характеристика поля k конечна, соответствующая теорема верна при условии сепарабельности расширения $k(V)/k(W)$ (см. [3], [6]). Для линейной системы гиперплоских сечений Б. т. верны без всяких ограничений на характеристику поля [5].

Лит.: [1] Bertini E., Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2 ed., Messina, 1923; [2] Алгебраические поверхности, М., 1965; [3] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Akizuki Y., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 170—80; [5] Nakai Y., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A», 1950, v. 26, № 2, p. 185—87; [6] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 56, № 1, p. 130—40.
В. А. Исковских.

БЕРТРАНА КРИВЫЕ, пара Бертрана,— две пространственные кривые L и L' с общими главными нормалями. Пусть k_1 и k_2 — соответственно кривизна и кручение кривой L. Для того чтобы кривая L' образовывала с L пару Бертрана, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$ak_1 \sin\omega + ak_2 \cos\omega - \sin\omega,$$

где a — постоянная, а ω — угол между касательными векторами к L и L'. Кривой Бертрана наз. также кривая L, для к-рой существует кривая L', образующая с ней пару Бертрана. Рассмотрены Ж. Бертраном (J. Bertrand) в 1850.
Е. В. Шикин.

БЕРТРАНА ПАРАДОКС (в теории вероятностей) — один из парадоксов, связанных с нечеткой формулировкой исходных допущений при решении вероятностных задач. Отмечен Ж. Бертраном [1]. В задаче Бертрана разыскивается вероятность того, что длина хорды, «наудачу» выбранной в круге радиуса 1, превзойдет длину стороны вписанного правильного треугольника. Ж. Бертран указывает три различных значения искомой вероятности ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$), в зависимости от того, какими параметрами характеризуется положение хорды (в первом случае — расстоянием ρ до центра круга и углом θ между нормалью к хорде и осью x; во втором — угловыми координатами α и β точек пересечения хорды с окружностью; в третьем — декартовыми координатами (x, y) основания перпендикуляра, опущенного из центра круга; во всех трех случаях центр круга расположен в начале координат). А. Пуанкаре [2] показал, что источник парадокса заключается в следующем: каждый раз соответствующую пару параметров предполагают равномерно распределенной в соответствующей области и таким образом решают три различные задачи. Если распределение к.-л. пары (скажем, α и β) фиксировано, то распределение любых других параметров однозначно вычисляется (и не обязано быть равномерным, даже если α и β распределены равномерно). Наиболее естественным (с геометрической точки зрения) является предположение о том, что ρ и θ независимы и распределены равномерно в интервале $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (см. [3]).

Лит.: [1] Bertrand J., Calcul des probabilités, P., 1889; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités, 2 éd., P., 1912; [3] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972.
А. В. Прохоров.

БЕРТРАНА ПОСТУЛАТ: при натуральном $n>3$ существует простое число, большее n и меньшее $2n-2$. В более слабой формулировке Б. п. утверждает, что при любом $x>1$ имеется простое число, принадлежащее интервалу $(x, 2x)$. Этот постулат был высказан Ж. Бертраном (J. Bertrand) в 1845 на основе табличных данных. Доказательство Б. п. было дано П. Л. Чебышевым (см. *Чебышева теорема* о распределении простых чисел).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 1, М.—Л., 1946.

Б. М. Бредихин.

БЕРТРАНА ПРИЗНАК сходимости числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами: если

$$B_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$$

и существует предел (конечный или бесконечный)

$$B = \lim_{n \to \infty} B_n,$$

то при $B>1$ ряд сходится, а при $B<1$ — расходится. Установлен Ж. Бертраном (J. Bertrand).

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 7 изд., М., 1970.

Л. Д. Кудрявцев.

БЕСКОАЛИЦИОННАЯ ИГРА — система

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J} \rangle,$$

где J — множество игроков, S_i — множество *стратегий* i-го игрока, H_i — функция выигрыша i-го игрока, определенная на декартовом произведении $S = \Pi_{i \in J} S_i$. Б. и. разыгрывается следующим образом: игроки, действуя изолированно (не вступая в коалиции), выбирают свои стратегии $s_i \in S_i$, в результате чего складывается ситуация $s = \Pi_{i \in J} s_i$, в к-рой игрок i получает выигрыш $H_i(s)$. Основным принципом оптимальности в Б. и. является принцип осуществимости цели (см. [1]), приводящий к ситуациям равновесия по Нэшу. Ситуация s^* наз. ситуацией равновесия, если для всех $i \in J$, $s_i \in S_i$ справедливо неравенство

$$H_i(s^*) \geqslant H_i(s^* \| s_i),$$

где $s^* \| s_i = \Pi_{j \in J \setminus i} s_j^* \times s_i$. Таким образом, в одностороннем нарушении договора между игроками, соответствующего ситуации равновесия, не заинтересован ни один из игроков. Было доказано (теорема Нэша), что конечная Б. и. (множества J и S_i конечны) обладает ситуацией равновесия в смешанных стратегиях. Имеются обобщения этой теоремы на бесконечные Б. и. с конечным числом игроков (см. [3]) и на Б. и. с бесконечным числом игроков (см. *Неатомическая игра*).

Ситуации равновесия s и t наз. взаимозаменяемыми, если любая ситуация $r = \Pi_{i \in J} r_i$, где $r_i = s_i$ или $r_i = t_i$, $i \in J$, также равновесна. Они наз. эквивалентными, если $H_i(s) = H_i(t)$ для всех $i \in J$. Пусть Q — множество всех ситуаций равновесия, $Q' \subset Q$ — множество ситуаций равновесия, оптимальных по Парето (см. *Арбитражная схема*). Игра наз. разрешимой в смысле Нэша, а Q наз. решением по Нэшу, если все $s \in Q$ эквивалентны и взаимозаменяемы. Игра наз. строго разрешимой, если Q' не пусто и все $s \in Q'$ эквивалентны и взаимозаменяемы. *Антагонистические игры*, обладающие оптимальными стратегиями, разрешимы в смысле Нэша и строго разрешимы; однако в общем случае такая разрешимость возможна далеко не всегда.

Имеются другие попытки дополнения принципа осуществимости цели. Так, было предложено (см. [4]) решением Б. и. считать единственную ситуацию равновесия или максиминную ситуацию (выигрыши в последней ситуации каждый из игроков может себе га-

рантировать независимо от выбора стратегий остальными игроками), выбор к-рой основан на введении нового отношения предпочтения на множестве ситуаций. Иным подходом к определению решения Б. и. является предположение о субъективном прогнозе поведения игроков (см. [5]).

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2 (152), с. 81-140; [2] Нэш Дж., в сб.: Матричные игры, М., 1961, с. 205—21; [3] Гликсберг И. Л., в сб.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 497—503; [4] Harsanyi J. C., в кн.: Advances in game theory, Princeton (N. Y.), 1964, p. 651-79; [5] Вилкас Э. Й., «Теория вероят. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 555-60.

Э. Й. Вилкас, Е. Б. Яновская.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — запись числа в виде десятичной дроби, у к-рой ни один знак не является последним. Напр., $\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$, $1\frac{3}{4} = 1{,}75000\ldots$, или $1\frac{3}{4} = 1{,}74999\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ и т. д. Если число рационально, то Б. д. д. является периодической; она состоит, начиная с некоторого места, из неограниченно повторяющихся знаков или групп знаков — периодов Б. д. д. (в приведенных примерах периоды таковы: 09 в случае $\frac{1}{11}$ и 0 или 9 в случае $1\frac{3}{4}$. Если число иррационально, то Б. д. д. не может быть периодической (напр., $\sqrt{2}$).

В. И. Битюцков.

БЕСКОНЕЧНАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра*, в частности *антагонистическая игра*, с бесконечными множествами стратегий игроков. Пусть

$$\Gamma = \langle X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n \rangle$$

— Б. и. n лиц. К. Берж доказал [см. 1], что если $X_1, \ldots, X_n$ - локально выпуклые бикомпактные линейные топологические пространства, функции выигрыша H_i непрерывны на $\prod_{i=1}^{n} X_i$ и квазивогнуты по $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, то в игре Γ существуют ситуации равновесия. Показано также [2], что если X_i - бикомпактные хаусдорфовы пространства, H_i непрерывны на $\prod_{i=1}^{n} X_i$, $i = 1, \ldots, n$, то игра Γ имеет ситуации равновесия в смешанных стратегиях. Однако не все Б. и. имеют ситуации равновесия даже в смешанных стратегиях. Напр., для антагонистич. игры, в к-рой пространствами стратегий игроков являются множества целых чисел, а функция выигрыша имеет вид

$$H(m, n) = \begin{cases} 1, & m > n, \\ 0, & m = n, \\ -1, & m < n, \end{cases}$$

не существует значения. Наиболее исследованным классом Б. и. в нормальной форме являются бесконечные антагонистич. игры и, в частности, *игра на единичном квадрате*.

Лит.: [1] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [2] Гликсберг И. Л., в сб.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 497—503.

Е. Б. Яновская.

БЕСКОНЕЧНАЯ ИНДУКЦИЯ, правило Карнапа, ω-правило,— неэлементарное *вывода правило* с бесконечным числом посылок. Точнее, пусть в нек-ром логико-математич. языке переменная x рассматривается как пробегающая натуральные числа и $\varphi(x)$ — формула этого языка. Если доказана выводимость каждой из бесконечной совокупности формул

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots,$$

то правило Б. и. позволяет заключить, что выводима и формула $\forall x \varphi(x)$.

Применение правила Б. и. для вывода формул ведет обычно к тому, что понятие вывода становится неразрешимым. Аксиоматич. системы, содержащие такого рода правила, наз. полуформальными теориями (полуформальными аксио-

матическими системами). Полуформальные теории играют большую роль в *доказательств теории*. При этом на выводы посылок в применении правила Б. и. часто накладывают дополнительные ограничения с целью обеспечить эффективность понятия вывода в теории. Напр., требуют, чтобы выводы посылок перечислялись нек-рой общерекурсивной функцией (так наз. конструктивное правило бесконечной индукции). Известно, что *арифметика формальная*, пополненная конструктивным правилом Б. и., является полной относительно классич. истинности. Правило Б. и. нашло применение для построения семантики конструктивной математики методом ступенчатой семантич. системы. *А. Г. Драгалин.*

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШАЯ ФУНКЦИЯ — функция переменного x, к-рая в данном процессе изменения x становится и остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, наз. бесконечно большой функцией при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $M>0$ найдется такое число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x\neq x_0$ и таких, что $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Аналогичным образом определяются

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty.$$

Напр.,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

означает, что для любого $M>0$ найдется такое $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x<-\delta$ выполняется неравенство $f(x)>M$. Изучение Б. б. ф. может быть сведено к изучению *бесконечно малых функций*, т. к. если $f(x)$ есть Б. б. ф., то функция $\psi(x)=1/f(x)$ является бесконечно малой. *В. И. Битюцков.*

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ ФУНКЦИЯ — функция переменного x, к-рая при данном процессе изменения x становится и остается по абсолютной величине меньше любого заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, наз. бесконечно малой функцией при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется $|f(x)|<\varepsilon$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

Символ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

напр., означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)>0$, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. Понятие Б. м. ф. может быть положено в основу общего определения *предела* функции. Именно, предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ конечен и равен A тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-A)=0,$$

т. е. функция $f(x)-A$ есть Б. м. ф. См. также ст. *Бесконечно малых исчисление*. *В. И. Битюцков.*

БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ ИЗГИБАНИЕ — понятие, первоначально возникшее при описании деформации поверхности F в трехмерном евклидовом пространстве, при к-рой изменение длин кривых на F является вели-

чиной порядка малости меньшего, чем изменение пространственного расстояния между точками этих кривых. По существу же в теории Б. м. и. исследуются векторные поля и связанные с ними величины, определенные в точках F и удовлетворяющие тем уравнениям, к-рые являются линеаризацией уравнений изгибания F.

Так, если $x(u, v, t)$ — радиус-вектор деформации F_t поверхности $F=F_0$, то Б. м. и. F характеризуется (начальной) скоростью деформации — вектором

$$z(u, v)=\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{t=0},$$

к-рый удовлетворяет уравнению

$$(dxdz)=0$$

или

$$(x_u z_u)=(x_v z_v)=(x_u z_v)+(x_v z_u)=0, \qquad (1)$$

где $x=x(u, v, 0)$ — радиус-вектор F. Вектор z, наз. также полем скоростей Б. м. и., или изгибающим полем. Однозначно определяется вектор y такой, что $dz=[ydx]$ — множество точек пространства, описываемое радиус-вектором y, наз. диаграммой вращения Б. м. и. См. также *Дарбу поверхности*.

В более общей ситуации Б. м. и. многообразия M^k, расположенного в римановом пространстве V^n, представляет собой изометрич. вариацию вложения i: $M^k\to V^n$, т. е. такое векторное поле вдоль вложения

$$Z\in\tau(V^n),$$

где $\tau(V^n)$ — касательное расслоение к V^n, к-рое удовлетворяет на M^k уравнению

$$g(\nabla_X Z, Y)+g(X, \nabla_Y Z)=0; \qquad (1')$$

здесь $X, Y\in i^*\tau(M^k)$ — векторные поля, касательные к вложению, $g(\cdot, \cdot)$ — метрическая форма V^n, ∇_X — ковариантная произвольная относительно *Леви-Чивита связности* на V^n, соответствующей g. Поле Z однозначно определяет поле K_Z кососимметрических тензоров типа (1,1) вдоль вложения: $K_Z X=\nabla_X Z$, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_X K_Z Y-\nabla_Y K_Z X+K_Z[X, Y]=R(X, Y)Z,$$

где R — оператор римановой кривизны V^n.

Если Z индуцируется *Киллинга вектором* $\xi\in\tau(V^n)$, т. е. $Z=\xi\cdot i$, то соответствующее Б. м. и. (а также и само Z) наз. тривиальным. Если M^k допускает только тривиальные Б. м. и., то оно наз. жестким. См. *Жесткость*.

При *геодезическом отображении* $F: V^n\to\tilde{V}^n$ Б. м. и. $M^k\subset V^n$ с вектором Z однозначно соответствует Б. м. и. $F(M^k)\subset\tilde{V}^n$ с вектором $\tilde{z}=F(Z)$, причем

$$\tilde{g}(\tilde{Z}, F^*(Y))=\psi g(Z, Y),$$

где ψ — потенциал отображения F. В частности, это соответствие имеет место при проективном преобразовании евклидова пространства (теорема Дарбу—Зауэра) и при геодезич. отображении евклидова пространства в пространство постоянной кривизны (преобразование Погорелова).

Изометрич. вариациям высших порядков соответствуют Б. м. и. высших порядков: для них, в отличие от определенных выше Б. м. и. первого порядка, известны лишь отдельные результаты, в основном касающиеся поверхностей вращения.

Теория Б. м. и. имеет многочисленные приложения в математике и механике, в частности она применяется в задачах изометрич. вложения методом продолжения по параметру, для исследования изометричных поверхностей пространств постоянной кривизны (см. *Кон-Фоссена преобразование*), в вопросах устойчивости оболочек и т. д.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24); [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [3] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [4] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИСЧИСЛЕНИЕ — термин, ранее объединявший различные разделы математич. анализа, связанные с понятием *бесконечно малой функции*. Хотя «метод бесконечно малых» (в той или иной форме) с успехом применялся учеными Древней Греции и средневековой Европы для решения задач геометрии и естествознания, точные определения основных понятий теории бесконечно малых функций сложились только в 19 в. Для понимания значения этого метода важно заметить, что практич. интерес представляют не Б. м. и. сами по себе, а те случаи, в к-рых рассмотрение Б. м. и. приводит к величинам конечным. В истории математики основное значение имели три типа такого рода задач.

1) Простейшие задачи древнегреческих математиков на *исчерпывания метод*, в к-рых бесконечно малые используются лишь для доказательства равенства двух заранее заданных величин (или двух отношений заранее заданных величин).

2) Более сложные задачи на метод исчерпывания, в к-рых искомая конечная величина получается в виде предела суммы

$$\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}$$

неограниченно возрастающего числа бесконечно малых величин. Эти задачи впоследствии привели к созданию *интегрального исчисления*.

3) Задачи, в к-рых конечная величина получается в виде предела отношения бесконечно малых величин. Они послужили материалом для создания *дифференциального исчисления*.

Изобретение метода исчерпывания приписывается Евдоксу Книдскому (4 в. до н. э.). Во всяком случае, он проходит в качестве основного приема доказательства через всю 12-ю книгу «Начал» Евклида (3 в. до н. э.). В современной форме логич. схема рассуждений Евклида может быть записана так: если все отношения

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \ldots = k$$

равны между собой и имеют постоянное значение k и если при $n \to \infty$ обе разности $a - a_n$, $b - b_n$ бесконечно малы, то

$$\frac{a}{b} = k.$$

Напр., для сравнения площадей двух кругов Евклид вписывает в каждый из них по квадрату и доказывает, что площадь этого квадрата превосходит половину пло-

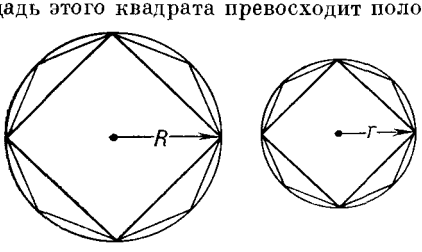


Рис. 1.

щади круга: остающиеся четыре сегмента (рис. 1) составляют вместе меньше половины площади круга; дополнив квадрат до правильного восьмиугольника, он обнаруживает, что остаток составляет уже меньше четверти круга, затем восьмиугольник дополняется до правильного шестнадцатиугольника, причем оставшиеся шестнадцать сегментов составляют в сумме уже

меньше одной восьмой доли площади круга и т. д. Таким образом, площадь круга постепенно «исчерпывается» при переходе к вписанным многоугольникам со все большим числом сторон. Так как в двух кругах площади соответствующих многоугольников относятся как квадраты радиусов, то Евклид заключает отсюда, при помощи доказательства от противного, что то же самое отношение имеют и площади кругов.

Более широкое и свободное употребление бесконечно малых наблюдается у Архимеда (3 в. до н. э.). В своих соч. «О коноидах и сфероидах» и «О спиралях» Архимед систематически пользуется при вычислении площадей и объемов методом, к-рый по своей идее вполне анало-

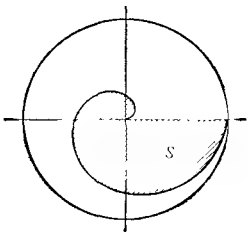


Рис. 2.

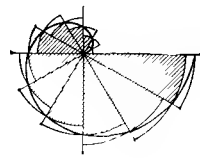


Рис. 3.

гичен современному определению интеграла. Вот как, напр., Архимед определяет площадь первого витка спирали (рис. 2), к-рая наз. теперь «архимедовой» и к-рая в полярных координатах имеет уравнение

$$r = a\varphi.$$

В рассматриваемую фигуру S вписывается фигура, состоящая из $n-1$ круговых секторов с углом при вершине $2\pi/n$ (эти секторы для случая $n=12$ изображены на рис. 3 заштрихованными), а вокруг S описывается фигура, состоящая из n аналогичных круговых секторов (на рис. 3 изображены без штриховки). Легко видеть, что в обоих случаях площадь k-го сектора

$$\Delta_k^{(n)} = 4\pi^3 a^2 k^2 / n^3.$$

Из построения ясно, что площадь S заключена в пределах

$$S_n' < S < S_n'', \qquad (1)$$

где

$$S_n' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_{n-1}^{(n)},$$
$$S_n'' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}.$$

Так как

$$S_n' = 4\pi^3 a^2 [1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2]/n^3 = 2\pi^3 a^2 (n-1)(2n-1)/3n^2,$$

$$S_n'' = 4\pi^3 a^2 [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]/n^3 = 2\pi^3 a^2 (n+1)(2n+1)/3n^2,$$

то при любом n

$$S_n' < \frac{4}{3}\pi^3 a^2 < S_n''.$$

Архимед выражает последнее соотношение в геометрич. форме: при любом n

$$S_n' < \frac{K}{3} < S_n'', \qquad (2)$$

где K — площадь круга, изображенного на рис. 2. Из сопоставления (1) и (2) и того обстоятельства, что разность

$$S_n'' - S_n' = \Delta_n^{(n)}$$

при $n \to \infty$ является бесконечно малой, Архимед делает вывод, что

$$S = \frac{K}{3}.$$

Конец изложенного рассуждения показывает, каким образом Архимедом был развит и усовершенствован метод исчерпывания Евдокса. Начало же этого рассуждения показывает, что Архимед владел и приемами, к-рые были отнесены выше ко второй группе и к-рые по своему идейному замыслу соответствуют современному интегральному исчислению.

При помощи интегрального исчисления рассматриваемая площадь вычисляется как

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{(a\varphi)^2}{2}\,d\varphi=\frac{4}{3}\,\pi^3a^2.$$

Входящий в эту формулу интеграл, по определению, есть предел сумм вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k^2}{2}\,(\varphi_k-\varphi_{k-1}),$$

где

$$0=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=2\pi,$$
$$r_k=av_k^2,\quad \varphi_{k-1}\leqslant v_k\leqslant\varphi_k.$$

В частном случае, когда

$$\varphi_k=\frac{2\pi k}{n},\qquad(3)$$

при $v_k=\varphi_{k-1}$ получается архимедова сумма S_n', а при $v_k=\varphi_k$ — архимедова сумма S_n''. Следует специально отметить, что при выборе (3) точек деления φ_k архимедовы суммы S_n' и S_n'' совпадают с *Дарбу суммами*, для к-рых и в общем случае гарантировано выполнение неравенства (1). Таким образом, Архимед для своей частной задачи проделывает весь ряд рассуждений, свойственных интегральному исчислению, и притом в его логически законченной форме (точные оценки сверху и снизу при помощи сумм Дарбу), разработанной в качестве общей теории лишь во 2-й пол. 19 в. Аналогично Архимед поступает и в ряде других задач на вычисление площадей и объемов.

Отсюда следует, что к концу своего развития древнегреческая математика подошла и к решению задач второй из намеченных выше групп. Следует, однако, здесь же отметить и принципиальное отличие всего характера мышления математиков древности от стиля мышления математиков нового времени. В рассмотренной выше в виде примера задаче Архимед не вычисляет

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{K}{3},$$

а берет, не указывая откуда, величину $K/3$ и доказывает равенство $S=K/3$ от противного, устанавливая, что в силу (1), (2) и бесконечной малости разности $S_n''-S_n'$ неравенство $S\neq K/3$ привело бы к противоречию. Греческие математики не только не разработали к.-л. общих правил вычисления пределов, но и вообще не сформулировали лежащего по существу в основе их приемов понятия предела (даже общее назв. «метод исчерпывания» для их приемов возникло лишь в новое время). Тем более, древняя наука не создала ничего подобного современному алгоритму интегрального исчисления, благодаря к-рому теперь совсем не обращаются при вычислении нового интеграла к определению интеграла в качестве предела сумм, а пользуются значительно более простыми в практич. употреблении правилами интегрирования функций различных специальных классов. Из соч. Архимеда (особенно из «Послания Эратосфену») можно усмотреть, что его логически отточенному методу оценки площадей и объемов при помощи сумм возрастающего числа неограниченно убывающих (т. е. бесконечно малых в современном смысле слова) слагаемых предшествовал более примитивный, но более наглядный метод, восходящий, по утверждению Архимеда, к Демокриту (4 в. до н. э.). Архимед указывает, в частности, что Демокрит

раньше Евдокса определил (хотя и без строгого обоснования своих результатов) объем пирамиды.

Для Евклида и Евдокса основную трудность при выводе объема пирамиды представляло доказательство того факта, что объемы двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями равны. Трудность эта преодолевалась в «Началах» Евклида применением метода исчерпывания.

Судя по указаниям Архимеда, демокритов «атомистический» метод доказательства равенства объемов двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями (рис. 4) можно представить себе так: из соображений подобия вытекает, что площади сечений, проведенных на равной высоте в наших пирамидах, равны; объемы пирамид воспринимаются просто как «суммы» этих площадей, что и позволяет сразу, исходя из равенства соответствующих членов двух сумм, заключить о равенстве самих сумм. В соч. Архимеда дается много примеров применения этого метода к решению более сложных задач. Архимед считал такой метод нестрогим, но очень ценным с эвристической стороны (т. е. для первоначального получения новых результатов, к-рые потом должны быть обоснованы более строго) и был в этом с современной точки зрения, конечно, прав, так как метод Демокрита является лишь не выдерживающей строгой критики попыткой заменить процесс предельного перехода

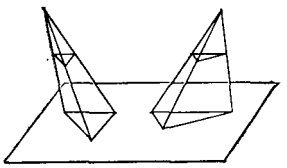


Рис. 4.

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}\right)$$

несостоятельной метафизич. гипотезой о возможности получения объемов суммированием площадей.

Послание Архимеда к Эратосфену, получившее краткое назв. «Эфодикон» (руководство), много комментировалось и цитировалось авторами эллинистич. эпохи, но не дошло до европейских математиков эпохи создания современной высшей математики, к-рые в отношении необычайно простого атомистич. метода рассуждений Демокрита в лучшем случае должны были довольствоваться довольно смутными литературными указаниями других источников (текст «Эфодикона» был вновь открыт лишь в 1906). Тем не менее этот метод получил в 17 в. блестящее развитие в работах И. Кеплера (J. Kepler) и Б. Кавальери (B. Cavalieri). И. Кеплер в своей «Стереометрии винных бочек» (1615) определяет объем 92 тел вращения. Если бы он следовал педантично методу изложения Архимеда при каждом из этих определений, то его труд разросся бы до необъятных размеров. Метод И. Кеплера можно пояснить на простом примере. Определение площади круга И. Кеплер основывает на следующем рассуждении. Круг разбивается на секторы с общей вершиной в центре (рис. 5); чем меньше каждый сектор, тем ближе он подходит к треугольнику, основанием к-рого можно считать дугу сектора; его площадь, следовательно, равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса; если суммировать эти площади, то получится, что площадь круга равна длине его окружности, умноженной на половину радиуса. С такой же простотой И. Кеплер вычисляет объем шара и других тел вращения; но эта простота порождает сомнения (к-рых он не скрывает) и иногда приводит его к ошибкам. Чтобы устранить эти сомнения, И. Кеплер подтверждает свое рассужде-

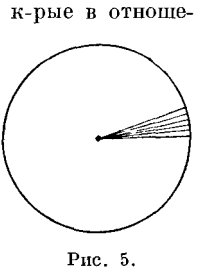


Рис. 5.

ние относительно площади круга такого рода соображениями: составляющие секторы можно сделать настолько малыми, что их основаниями становятся точки, и число секторов тогда становится бесконечным; каждый из этих бесконечно малых секторов уже вовсе не отличается от такого же треугольника. Конечно, это рассуждение ничего не спасает, потому что со сведением основания к точке исчезает сектор, и треугольник превращается просто в радиус. Его существенная особенность заключается в том, что здесь И. Кеплер более или менее сознательно склоняется к статич. разложению круга на бесконечно большое число актуально бесконечно малых секторов — радиусов, а не к потенциальной бесконечности непрерывно возрастающего числа непрерывно убывающих слагаемых; в этом виде неограниченно продолжающийся процесс исчезает. Было бы неправильно сказать, что И. Кеплер твердо стоял на точке зрения актуальной бесконечности: он слишком находился еще под влиянием Архимеда, основные сочинения к-рого ему были хорошо известны; но его позиция не тверда, его воззрения в этой области эклектичны. Они представляют собой переходную ступень к взглядам Б. Кавальери.

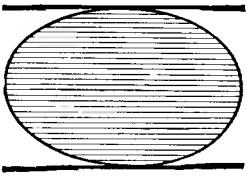


Рис. 6.

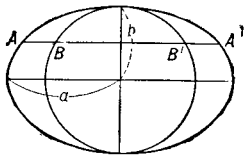


Рис. 7.

В 1635 Б. Кавальери опубликовал трактат «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Задача сочинения та же, к-рую ставил себе Архимед: вычисление площадей и объемов геометрич. фигур произвольной формы. С этой целью Б. Кавальери рассматривает плоскую фигуру как совокупность параллельных прямолинейных отрезков от одной крайней касательной до другой (рис. 6), тело — как совокупность его параллельных плоских сечений. Эти отрезки и плоские сечения суть те «неделимые», по к-рым назван метод Б. Кавальери (см. *Неделимых метод*). Измерение площадей, объемов совершается путем сравнения неделимых двух фигур. Напр., площадь эллипса Б. Кавальери вычисляет с помощью следующего рассуждения (рис. 7). На малой оси эллипса ($2b$) описываем окружность и проводим хорды (неделимые), параллельные большой оси ($2a$). Из определения эллипса нетрудно вывести, что каждый неделимый элемент эллипса относится к соответствующему неделимому круга, как a относится к b, то есть $AA' : BB' = a : b$. Следовательно, совокупность всех неделимых эллипса (т. е. площадь эллипса) относится к совокупности неделимых круга (к площади круга πb^2), как $a : b$; поэтому площадь эллипса равна πab. Те же приемы Б. Кавальери применяет к сравнению объемов; доказательство равновеликости пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты, у Б. Кавальери заканчивается там, где у Архимеда оно только начинается. Общность и простота применения приемов привели Б. Кавальери к результатам, до к-рых не дошел Архимед. Но упрощенность его методов не давала гарантии правильности всех полученных результатов; поэтому он каждое вычисление проводит несколькими различными путями.

Если в отношении строгости логич. обоснования своих результатов Б. Кавальери стоит несравненно ниже Архимеда, то зато он превзошел Архимеда, а с ним и всех математиков древнего мира не только в отношении чис-

ла решенных им специальных задач на определение площадей и объемов, но и в отношении понимания дальнейших перспектив развития учения о бесконечно малых. Не ограничиваясь решением отдельных задач, он в геометрической и нестрогой форме получает, по существу, ряд общих формул интегрального исчисления. Например, его утверждение, что сумма квадратов неделимых, на которые разбит параллелограмм на рис. 8, равна утроенной сумме квадратов неделимых, из к-рых состоит на том же рис. каждый из двух составляющих параллелограмм треугольников, есть по существу не что иное, как формула

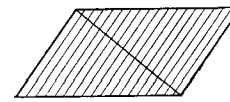


Рис. 8.

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^a a^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

В аналогичной форме Б. Кавальери выражает равенство

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

для степеней n до девятой включительно.

В том же 17 в. внимание математиков привлекает и третья из перечисленных выше групп задач. После создания Р. Декартом (R. Descartes) аналитич. геометрии естественно возникла задача определения углового коэффициента касательной к кривой $y = f(x)$, т. е. определения производной. Приблизительно одновременно развитие механики привело к необходимости определять мгновенную скорость произвольного движения точки, т. е. к той же задаче определения производной. Так как теории пределов и даже отчетливого наглядного понимания предельного перехода еще не было, то производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

пытались получить как отношение

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

статических актуально бесконечно малых приращений dy и dx.

Современная концепция бесконечно малых как переменных величин, стремящихся к нулю, а производной как предела отношения бесконечно малых приращений была намечена (хотя и не вполне последовательно) И. Ньютоном (I. Newton, 17 в.), однако укрепилась только после О. Коши (A. Cauchy, 19 в.). Современное понимание дифференциала как главной части приращения по существу восходит к Ж. Лагранжу (J. Lagrange, 18 в.) и было окончательно закреплено О. Коши, к-рый дал и точное определение интеграла как предела суммы.

Для развитого дифференциального или интегрального исчисления характерно, что после строгого обоснования своих основных понятий при помощи предельного перехода они дают возможность решать разнообразнейшие задачи при помощи простого алгоритма чисто алгебраич. характера (в том смысле, что сам этот алгоритм уже не содержит в явном виде предельных переходов). Благодаря этому современные способы вычисления с дифференциалами и интегралами успешно соединяют в себе строгую логич. обоснованность с простотой и наглядностью.

Лит.: [1] Архимед, Сочинения, М., 1962; [2] Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек..., пер. с нем., М.— Л., 1935; [3] Кавальери Б., Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, [пер. с итал.], т. 1, М.— Л., 1940. *БСЭ*-2.

БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, несобственные элементы,— элементы (точки, прямые, плоскости и т. д.), возникающие при расширении нек-рого аффинного пространства до ком-

пактного пространства. Б. у. э. являются одной из форм проявления в различных математич. теориях «актуальной» *бесконечности*. При этом неразрывная связь бесконечного и конечного проявляется в том, что Б. у. э. имеют смысл лишь постольку, поскольку они рассматриваются при нек-рой конкретной компактификации данного «конечного» пространства. Ниже описываются виды Б. у. э., возникающие при наиболее часто применяемых способах компактификации евклидовых конечномерных пространств.

1) Введением Б. у. э. (точек $-\infty$ и $+\infty$) числовая прямая $\mathbb{R}$ пополняется до компактной расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, гомеоморфной отрезку. Другой способ компактификации состоит в погружении $\mathbb{R}$ в действительную проективную прямую $P_1(\mathbb{R})=\tilde{\mathbb{R}}$, гомеоморфную окружности S_1 (см. *Проективное пространство*); при этом $\mathbb{R}$ пополняется одной единственной бесконечно удаленной точкой ∞.

2) Добавлением одной единственной бесконечно удаленной точки ∞ конечная комплексная плоскость $\mathbb{C}$ пополняется до компактной расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, гомеоморфной комплексной *проективной прямой* или *Римана сфере* S_2 (единичной сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$).

3) Добавлением одной единственной бесконечно удаленной точки ∞ n-мерное действительное числовое пространство $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, пополняется до компактного расширенного числового пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$, гомеоморфного сфере S_n; этот гомеоморфизм наглядно демонстрируется *стереографической проекцией*. Другой способ компактификации состоит в погружении $\mathbb{R}^n$ в n-мерное действительное проективное пространство $P_n(\mathbb{R})$. При $n>1$ эти две компактификации не гомеоморфны.

Например, параллельным прямым в проективной плоскости $P_2(\mathbb{R})$ соответствует одна и та же бесконечно удаленная точка, непараллельным прямым — различные бесконечно удаленные точки. Все бесконечно удаленные точки плоскости $P_2(\mathbb{R})$ составляют бесконечно удаленную прямую. Аналогично, в проективном пространстве $P_3(\mathbb{R})$ каждая плоскость дополнена бесконечно удаленной прямой. Все бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленные прямые в $P_3(\mathbb{R})$ составляют бесконечно удаленную плоскость. Вообще, в $P_n(\mathbb{R})$ все Б. у. э. размерности $\leqslant(n-2)$ составляют бесконечно удаленную $(n-1)$-мерную гиперплоскость.

4) Компактификация комплексного n-мерного числового пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, также возможна посредством погружения $\mathbb{C}^n$ в комплексное n-мерное проективное пространство $P_n(\mathbb{C})$. В $P_n(\mathbb{C})$ также все Б. у. э. размерности $\leqslant(n-2)$ составляют комплексную $(n-1)$-мерную бесконечно удаленную гиперплоскость. Другой способ компактификации состоит в расширении $\mathbb{C}^n$ до расширенного комплексного пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$, представляющего собой топологич. произведение n пространств $\overline{\mathbb{C}}$. При $n>1$ пространства $P_n(\mathbb{C})$ и $\overline{\mathbb{C}^n}$ не гомеоморфны. Бесконечно удаленными точками пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$ являются те наборы $z=(z_1, \ldots, z_n)$, в к-рых хотя бы одна координата $z_\nu=\infty$. Множество всех бесконечно удаленных точек пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$ естественно разбивается на n множеств

$$M_\nu=\{z\in\overline{\mathbb{C}^n};\quad z_\nu=\infty;\quad z_k\in\overline{\mathbb{C}},\quad k\neq\nu\},$$

причем каждое M_ν имеет размерность $n-1$. Точка $(\infty, \ldots, \infty)$ принадлежит всем M_ν, $\nu=1, \ldots, n$. При рассмотрении действительных функций в $\mathbb{C}^n$ применима также одноточечная компактификация $\tilde{\mathbb{C}}^n$, гомеоморфная $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ или сфере S_{2n}.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [3] Хартсхорн Р., *Основы проективной геометрии*, пер. с англ., М., 1970; [4] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЕ в комплексной области — дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\, y^{(n)}(z) = f(z),$$

где $y(z)$ — искомая функция комплексного переменного z, $a_n(z)$, $f(z)$ — заданные функции. Наиболее полно изучены Б. п. у. с постоянными коэффициентами:

$$Ly \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(z) = f(z).$$

Если характеристич. функция

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

есть целая функция экспоненциального типа σ, то левая часть Ly имеет смысл при $z=z_0$, когда $y(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, $R>\sigma$. При $\sigma=\infty$ необходимо предположить, что $y(z)$ — целая функция. Отличие от уравнения конечного порядка состоит уже в том, что решение $y(z)$ может иметь особенности, даже когда $f(z)$ — целая функция. Если $\sigma=0$ и $f(z)$ есть целая функция, то область существования любого решения выпукла [1]. Общее решение слагается из частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — корни характеристич. уравнения $\varphi(\lambda)=0$ и $m_1, m_2, \ldots$ — соответственно их кратности. Однородное уравнение имеет элементарные частные решения $z^k e^{\lambda_n z}$ ($k=0, 1, \ldots, m_n-1$; $n=1, 2, \ldots$). Решению однородного уравнения можно отнести по определенному правилу ряд из элементарных решений. Если характеристич. функция $\varphi(\lambda)$ имеет правильный рост (в нек-ром определенном смысле), то найдется подпоследовательность частичных сумм этого ряда, сходящаяся к $y(z)$ (см. [4]). В общем случае функцию $y(z)$ можно аппроксимировать с любой точностью конечными линейными комбинациями из элементарных решений [5]. В случае $\sigma=0$ Б. п. у. может иметь неаналитические решения [2]. При нек-рых условиях эти решения образуют *квазианалитический класс функций* с менее сильными ограничениями на рост производных, чем в классич. теореме Данжуа — Карлемана.

Б. п. у. имеют различные применения: для изучения последовательностей полиномов Дирихле, полноты систем аналитических функций, единственности аналитических и гармонических функций, разрешимости таких проблем анализа, как обобщенная проблема квазианалитичности, обобщенная проблема единственности моментов и т. д.

Лит.: [1] Polya G., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1927, S. 187—95; [2] Valiron G., «Ann. scient. École norm. supér.», 1929, t. 46, № 1, p. 25—53; [3] Леонтьев А. Ф., «Тр. четвертого всесоюзн. матем. съезда», Л., 1964, т. 2, с. 648—60; [4] его же, «Матем. сб.», 1966, т. 70, № 1, с. 132—44; [5] Красичков-Терновский И. Ф., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 3, с. 331—52.

А. Ф. Леонтьев.

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — выражение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k), \qquad (*)$$

содержащее бесконечное множество числовых или функциональных сомножителей, каждый из к-рых отличен от нуля. Б. п. наз. сходящимся, если существует

отличный от нуля предел последовательности частичных произведений

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k)$$

при $n \to \infty$. Значением Б. п. наз. этот предел

$$\lim_{n \to \infty} p_n = P$$

и пишут

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = P.$$

Б. п. сходится тогда и только тогда, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 + u_k).$$

Тем самым исследование сходимости Б. п. сводится к исследованию сходимости рядов. Б. п. (*) наз. абсолютно сходящимся, если сходится Б. п.

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |u_k|),$$

для абсолютной сходимости Б. п. (*) необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Б. п. обладает переместительным свойством (т. е. его значение не зависит от порядка сомножителей) в том и только в том случае, если оно сходится абсолютно.

Б. п. (*) с функциональными сомножителями

$$1 + u_k = 1 + u_k(z),$$

определенными, напр., в области D плоскости комплексного переменного z, сходится равномерно в D, если последовательность частичных произведений $p_n(z)$ сходится в D равномерно к пределу, отличному от нуля. В приложениях, однако, весьма важен случай, когда нек-рые сомножители имеют нули в D такие, что на любом компакте $K \subset D$ их лежит не более конечного числа. Понятие сходимости обобщается при этом следующим образом: Б. п. (*) наз. (абсолютно, равномерно) сходящимся внутри D, если для любого компакта $K \subset D$ существует такой номер $N = N(k)$, что все сомножители $1 + u_k(z) \neq 0$ на k при $k \geqslant N$ и последовательность частичных произведений

$$\prod_{k=N}^{n} [1 + u_k(z)]$$

сходится на K (абсолютно, равномерно) к пределу, отличному от нуля. Если все сомножители — аналитич. функции на D и Б. п. сходится равномерно внутри D, то оно представляет в D аналитич. функцию.

Б. п. впервые встретилось у Ф. Виета (F. Viète, 1593) при рассмотрении задачи о квадратуре круга, а именно он получил аналитич. представление числа π, построив следующее Б. п.:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots.$$

Другое представление числа π восходит к Дж. Валлису (J. Wallis, 1665):

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots.$$

Б. п. с функциональными сомножителями появились у Л. Эйлера (L. Euler, 1742), напр.:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Б. п. — основной аппарат для представления аналитич. функций с явным указанием их нулей; они явля-

ются для *целых функций* аналогом разложения многочлена на множители. См. также *Бляшке произведение*, *Вейерштрасса теорема* о бесконечном произведении, *Каноническое произведение*.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы Ли — представление группы Ли в бесконечномерном векторном пространстве. Теория представлений групп Ли есть часть общей теории представлений топологич. групп. Специфика групп Ли позволяет использовать в этой теории средства анализа (в частности, инфинитезимальный метод), а также значительно расширить класс «естественных» *групповых алгебр* (функциональных алгебр относительно свертки), рассмотрение к-рых связывает данную теорию с *гармоническим анализом абстрактным*, т. е. с частью общей теории *топологических алгебр*.

Пусть G — группа Ли. Представлением группы G в широком смысле наз. произвольный гомоморфизм $G \to GL(E)$, где $GL(E)$ — группа всех обратимых линейных преобразований векторного пространства E. Если E — топологич. векторное пространство, то обычно рассматриваются гомоморфизмы со значениями в алгебре $C(E)$ всех непрерывных линейных преобразований пространства E, либо в алгебре $S(E)$ всех слабо непрерывных линейных преобразований пространства E. Алгебры $C(E)$, $S(E)$ наделяются одной из стандартных топологий (напр., слабой или сильной). Представление φ наз. непрерывным (раздельно непрерывным), если вектор-функция $\varphi(g)\xi$ непрерывна (раздельно непрерывна) на $G \times E$. Если E — квазиполное бочечное пространство, то всякое раздельно непрерывное представление непрерывно. Непрерывное представление φ наз. дифференцируемым (аналитическим), если операторная функция $\varphi(g)$ дифференцируема (аналитична) в $S(E)$. Под размерностью представления φ понимают размерность пространства E. Важнейшим примером представления группы G является ее *регулярное представление* $\varphi(g)f(x)=f(xg)$, $x,\ g \in G$, определяемое в том или ином классе функций $f(x)$ на группе G. Если G — группа Ли, то ее регулярное представление непрерывно в $C(G)$ и $L^p(G)$ ($L^p(G)$ определяется относительно *Хаара меры* на G) и дифференцируемо в $C^\infty(G)$ (относительно стандартной топологии в $C^\infty(G)$ — топологии компактной сходимости). Всякое непрерывное *конечномерное представление* группы G аналитично. Если G — комплексная группа Ли, то естественно рассматривать также ее комплексно аналитические (голоморфные) представления. Как правило, в теории представлений групп Ли рассматриваются только непрерывные представления, и условие непрерывности специально не оговаривается. Если группа G компактна, то все ее неприводимые (непрерывные) представления конечномерны. Соответственно, если G — полупростая комплексная группа Ли, то все ее неприводимые голоморфные представления конечномерны.

Связь с представлениями групповых алгебр. Для группы Ли важнейшими групповыми алгебрами являются алгебра $L^1(G)$, алгебра $C^*(G)$ — пополнение алгебры $L^1(G)$ по наименьшей регулярной норме (см. *Алгебра функций*), $C_0^\infty(G)$ — алгебра всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на G, $M(G)$ — алгебра всех комплексных мер Радона с компактными носителями на G, $D(G)$ — алгебра всех финитных обобщенных функций (распределений Шварца) на G, а также, для комплексной группы Ли, алгебра $A(G)$ всех аналитич. функционалов над G. Линейные пространства $M(G)$, $D(G)$, $A(G)$ являются

сопряженными, соответственно, к $C(G)$, $C^\infty(G)$, $H(G)$, где $H(G)$ — множество всех голоморфных функций на G (с топологией компактной сходимости). Все эти алгебры наделяются естественными топологиями; в частности, $L^1(G)$ является *банаховой алгеброй*. Умножение (свертка) элементов a, $b \in A$, где A — одна из указанных выше групповых алгебр, определяется равенством

$$ab(g) = \int a(gh^{-1})\, b(h)\, dh$$

относительно правоинвариантной меры на G, с естественным распространением этой операции на класс обобщенных функций. Интегральная формула

$$\varphi(a) = \int a(g)\, \varphi(g)\, dg, \quad a \in A$$

устанавливает естественную связь между представлениями группы G и представлениями алгебры A (при условии корректной определенности интеграла): если интеграл слабо сходится и определяет оператор $\varphi(a) \in S(E)$ при каждом $a \in A$, то отображение $a \to \varphi(a)$ является гомоморфизмом. В этом случае говорят, что представление $\varphi(g)$ группы G продолжается до представления $\varphi(a)$ алгебры A, или является A-представлением. Обратно, всякое слабо непрерывное невырожденное представление алгебры A определяется, по указанной формуле, нек-рым представлением группы G (слабо непрерывным при $A = M(G)$, слабо дифференцируемым при $A = D(G)$, слабо аналитическим при $A = A(G)$). Указанное соответствие сохраняет естественные соотношения между представлениями, такие, как топологич. неприводимость или эквивалентность. Если группа G унимодулярна, то ее *унитарным представлениям* (в гильбертовых пространствах) соответствуют *симметричные представления* алгебры $L^1(G)$ относительно инволюции в $L^1(G)$ (см. *Групповая алгебра*). Если E — секвенциально полное локально выпуклое хаусдорфово пространство, то всякое непрерывное представление группы G в пространстве E является $M(G)$-представлением. Если, кроме того, представление группы G дифференцируемо, то оно является $D(G)$-представлением. В частности, если E — рефлексивное или квазиполное бочечное пространство, то всякое раздельно непрерывное представление $\varphi(g)$ является $M(G)$-представлением, причем $\varphi(a) \in C(E)$ для всех $a \in M(G)$.

Инфинитезимальный метод. Если представление $\varphi(g)$ дифференцируемо, то оно бесконечно дифференцируемо, и пространство E наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, путем рассмотрения инфинитезимальных операторов Ли:

$$\varphi(a) = \frac{d}{dt}\, \varphi(\exp ta)_{t=0}, \quad a \in \mathfrak{g}.$$

Операторы $\varphi(a)$ образуют представление алгебры $\mathfrak{g}$, наз. дифференциалом представления $\varphi(g)$. Вектор $\xi \in E$ наз. дифференцируемым (относительно $\varphi(g)$), если вектор-функция $\varphi(g)\xi$ дифференцируема на G. Вектор $\xi \in E$ наз. аналитическим, если $\varphi(g)\xi$ — аналитич. функция в окрестности единичной точки $e \in G$. Если $\varphi(g)$ является $C_0^\infty(G)$-представлением, то пространство $V(E)$ всех бесконечно дифференцируемых векторов всюду плотно в E. В частности, это верно для всех непрерывных представлений в банаховом пространстве; более того, в этом случае [4] пространство $W(E)$ всех аналитич. векторов всюду плотно в E. Дифференциал $\varphi(g)$ в $V(E)$ может быть приводимым, даже если $\varphi(g)$ топологически неприводимо в E. Двум эквивалентным представлениям группы G соответствуют эквивалентные дифференциалы в $V(E)(W(E))$; обратное, вообще говоря, неверно. Для унитарных представлений в гильбертовых пространствах E, H из экви-

валентности дифференциалов в $W(E)$, $W(H)$ следует эквивалентность представлений [7]. В конечномерном случае представление группы однозначно восстанавливается по своему дифференциалу. Представление алгебры $\mathfrak{g}$ наз. интегрируемым (G-интегрируемым), если оно совпадает с дифференциалом нек-рого представления группы G на подпространстве, всюду плотном в пространстве представления. Критерии интегрируемости известны (к 1977) лишь в частных случаях (см., напр., [4]). Если G односвязна, то всякое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ является G-интегрируемым.

Неприводимые представления. Одной из основных задач теории представлений является классификация всех *неприводимых представлений* данной группы G, определяемых с точностью до эквивалентности, при согласованном определении понятий неприводимости и эквивалентности. Так, представляют интерес следующие две задачи. 1) Описание множества $\hat{G}$ всех классов унитарной эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G. 2) Описание множества $\tilde{G}$ всех классов эквивалентности по Феллу [7] вполне неприводимых представлений группы G. Для полупростых групп Ли с конечным центром эквивалентность по Феллу равносильна эквивалентности по Наймарку [7], причем имеет место естественное вложение $\hat{G} \to \tilde{G}$. Множества $\tilde{G}$, $\hat{G}$ естественно топологизируются; при этом топология в них не обязательно хаусдорфова [5]. Если G — компактная группа Ли, то $\tilde{G} = \hat{G}$ — дискретное пространство. Описание множества $\hat{G}$ в этом случае получено Э. Картаном (E. Cartan) и Г. Вейлем (H. Weyl). Линейная оболочка $\gamma(G)$ матричных элементов группы G (т. е. матричных элементов представлений $\varphi \in \hat{G}$) образует в этом случае подалгебру в $C^\infty(G)$ (алгебру сферич. функций), всюду плотную в $C(G)$ и в $C^\infty(G)$. Матричные элементы образуют базис в $C^\infty(G)$. Если матрицы всех представлений $\varphi \in \hat{G}$ определяются в базисе, по отношению к к-рому они унитарны, то соответствующие матричные элементы образуют ортогональный базис в $L^2(G)$ (теорема Петера — Вейля). Если группа G некомпактна, то ее неприводимые представления, как правило, бесконечномерны. Метод построения таких представлений, на примере классических матричных групп предложенный И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [1], явился началом интенсивного развития теории унитарных бесконечномерных представлений. Обобщением этого метода для произвольных групп Ли является теория индуцированных представлений Дж. Макки [5]. В 50-х гг. 20 в. начинает развиваться также общая теория неунитарных представлений в локально выпуклых векторных пространствах, основанная в значительной степени на теории топологических векторных пространств и теории обобщенных функций. Детальное описание $\tilde{G}(\hat{G})$ известно (к 1977) для отдельных классов групп Ли (полупростых комплексных, нильпотентных и некоторых разрешимых групп Ли, а также их полупрямых произведений).

Пусть G — полупростая группа Ли с конечным центром, φ есть $M(G)$-представление в пространстве E и K — компактная подгруппа в G. Вектор $\xi \in E$ наз. K-финитным, если его циклич. оболочка относительно K конечномерна. Подпространство V всех K-финитных векторов всюду плотно в E и является прямой (алгебраической) суммой подпространств V^λ, $\lambda \in \hat{K}$, где V^λ — максимальное подпространство в V, представление K в к-ром кратно λ. Представление φ наз. K-финитным, если $\dim V^\lambda < \infty$ для всех λ. Подгруппа K наз. массивной, если всякое вполне неприводимое представление группы G является K-финит-

ным. Принципиальное значение в теории представлений имеет следующий факт: если K — максимальная компактная подгруппа в G, то K массивна. Если векторы из V дифференцируемы, то V инвариантно относительно дифференциала $d\varphi$ представления φ. Представление φ наз. нормальным, если оно K-финитно и векторы из V слабо аналитичны. Если φ нормально, то существует взаимно однозначное отображение (определяемое сужением на V) замкнутых подмодулей G-модуля φ и подмодулей $\mathfrak{g}$-модуля $\varphi_0 = d\varphi|V$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G (см. [7]). Таким образом, изучение нормальных представлений удается алгебраизовать при помощи инфинитезимального метода. Примером нормального представления группы G является ее *элементарное представление* $e(\alpha)$. Представление $e(\alpha)$ вполне неприводимо для точек α общего положения. В общем случае $e(\alpha)$ допускает разложение в конечный композиционный ряд, факторы к-рого вполне неприводимы. Всякое квазипростое неприводимое представление группы G в банаховом пространстве инфинитезимально эквивалентно одному из факторов $e(\alpha)$, при нек-ром α. Это верно также для вполне неприводимых представлений группы G в квазиполных локально выпуклых пространствах. При этом, если G комплексна, то вместо факторов $e(\alpha)$ достаточно рассматривать подпредставления $e(\alpha)$ (см. [7]). В простейшем случае $G = SL(2, \mathbb{C})$ представление $e(\alpha)$ определяется парой комплексных чисел p, q с целочисленной разностью $p - q$ и действует по формуле правых сдвигов $\varphi(g)f(x) = f(xg)$, $x = (x_1, x_2)$, $g \in G$ в пространстве всех функций $f(x) \in C^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$, удовлетворяющих условию однородности: $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{p-1}\bar{\lambda}^{q-1} f(x_1, x_2)$. Если p и q — положительные целые числа, то $e(\alpha)$ содержит неприводимое конечномерное подпредставление $d(\alpha)$ (в классе полиномов от x_1, x_2), фактор по к-рому вполне неприводим. Если p и q — отрицательные целые числа, то $e(\alpha)$ имеет двойственную структуру. Во всех остальных случаях модуль $e(\alpha)$ вполне неприводим. Множество $\tilde{G}$ в этом случае находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар (p, q) ($p - q$ — целое), факторизованном по отношению $(p, q) \sim (-p, -q)$. Подмножество $\hat{G}$ состоит из представлений основной серии ($p + q$ — чисто мнимое) (см. *Серии представлений*), дополнительной серии ($0 \leqslant p = -q < 1$) и тривиального (единичного) представления δ_0, к-рое возникает при $p = q = 1$. Пусть G — полупростая связная комплексная группа Ли, B — ее максимальная разрешимая (борелевская) подгруппа, M — максимальный тор, $H = MA$ — картановская подгруппа, α — характер группы H (продолженный на B); множество $\tilde{G}$ находится [7] во взаимно однозначном соответствии с A/W, где A — множество всех характеров α, $W = W_1$ — *Вейля группа* комплексной алгебры $\mathfrak{G}$. Для характеров «общего положения» представление $e(\alpha)$ вполне неприводимо. Описание множества G сведено к исследованию положительной определенности нек-рых билинейных форм, но окончательное описание (к 1977) неизвестно. Для вещественных групп особый интерес представляет так наз. *дискретная серия* представлений (прямые слагаемые в $L^2(G)$). Все неприводимые представления дискретной серии классифицированы [3] путем описания характеров этих представлений.

Для нильпотентных связных групп Ли [8] множество $\hat{G}$ эквивалентно $\mathfrak{g}'/G$, где $\mathfrak{g}'$ — линейное пространство, дуальное к $\mathfrak{g}$, и действие G в $\mathfrak{g}'$ сопряжено присоединенному представлению в $\mathfrak{g}$ [9]. Соответствие устанавливается *орбит методом* [8]. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ наз. поляризацией элемента $f \in \mathfrak{g}'$, если f аннулирует $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ и

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \Omega,$$

где Ω — орбита f относительно G (всякая орбита четномерна). Если H — соответствующая аналитич. подгруппа в G и $\alpha=\exp f$ — характер группы H, то представление $u(\alpha)$, соответствующее f, индуцируется характером α подгруппы H. При этом $u(\alpha_1)$ эквивалентно $u(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда соответствующие функционалы f_1, f_2 лежат на одной орбите Ω. В простейшем случае группы $G=Z(3)$ всех унипотентных матриц по отношению к фиксированному базису в $\mathbb{C}^3$ орбиты общего положения в $\mathbb{C}^3=\{(\lambda, \mu, \nu)\}$ являются двумерными плоскостями $\lambda-\mathrm{const}\neq 0$ и точками (μ, ν) на плоскости $\lambda=0$. Каждой орбите общего положения соответствует неприводимое представление $u(\alpha)$ группы G, определяемое формулой вида

$$u(\alpha, g)f(t)=a(t, g)f(t, g), \quad -\infty<t<\infty,$$

в гильбертовом пространстве $E=L^2(-\infty, \infty)$. Инфинитезимальные операторы этого представления совпадают с операторами d/dt, $i\lambda t$, $i\lambda I$, где I — единичный оператор в пространстве E. Указанный результат равносилен теореме Стоуна — Неймана о самосопряженных операторах P, Q с коммутационным соотношением $[P, Q]-i\lambda I$. Каждой точке (μ, ν) соответствует одномерное представление (характер) $Z(3)$. Множество $\tilde{G}$ в этом случае описывается аналогично, с выходом в комплексную область по параметрам λ, μ, ν. Указанный метод орбит естественно обобщается на разрешимые связные группы Ли и даже на произвольные группы Ли, причем в общем случае приходится рассматривать орбиты в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, где $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}'$ — комплексификация $\mathfrak{G}'$, удовлетворяющие нек-рым условиям целочисленности [8].

Исследование о б щ е г о с л у ч а я сводится в известной степени к двум рассмотренным случаям посредством теории индуцированных представлений [5], позволяющей описывать неприводимые унитарные представления полупрямого произведения $G=HN$ с нормальным делителем N в терминах неприводимых представлений N и нек-рых подгрупп группы H (в силу теоремы Леви — Мальцева). Практически этот метод эффективен лишь в том случае, когда радикал коммутативен. Другим методом изучения $\tilde{G}$ (и также $\hat{G}$) является описание характеров неприводимых унитарных представлений группы G; множество таких характеров находится в естественном взаимно однозначном соответствии с $\hat{G}$. Справедливость общей формулы для характеров, предложенной А. А. Кирилловым [8], проверена (к 1977) лишь для отдельных классов групп Ли.

Г а р м о н и ч е с к и й а н а л и з ф у н к ц и й н а G. Для компактной группы Ли гармонич. анализ сводится к разложению функций $f(x)$, $x\in G$ в обобщенные ряды Фурье по матричным элементам группы G (теорема Петера — Вейля для $L^2(G)$ и ее аналоги для других классов функций). Для некомпактных групп Ли основы гармонич. анализа были заложены в [1] введением обобщенного преобразования Фурье

$$F(\alpha)=\int f(x)\,e(\alpha, x)\,dx,$$

где $e(\alpha, x)$ — оператор элементарного представления $e(\alpha)$, dx — мера Хаара на G, и формулой обращения (аналог *Планшереля формулы*) для $L^2(G)$, в случае классических матричных групп над полем G. Этот результат был обобщен на локально компактные унимодулярные группы (абстрактная *Планшереля теорема*). Преобразование Фурье переводит свертку функций на группе в умножение их (операторных) образов Фурье $F(\alpha)$ и потому является важнейшим инструментом изучения групповых алгебр. Если G — полупростая группа Ли, то операторы $F(\alpha)$ удовлетворяют структурным соотношениям вида

$$A_s(\alpha)F(\alpha)=F(s\alpha)A_s(\alpha),$$

$s \in W_i$, $i=1,2$, где $A_s(\alpha)$ — сплетающие операторы, W_1 — группа Вейля симметрического пространства G/K (K — максимальная компактная подгруппа в G), W_2 — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}_C$ ($\mathfrak{g}_C$ — комплексификация алгебры Ли группы G). Если функции $f(x)$ финитны, то операторные функции $F(\alpha)$ являются целыми функциями комплексных параметров α. Для групповых алгебр $C_0^\infty(G)$, $D(G)$, где G — *полупростая* связная комплексная группа Ли, известны аналоги классических *Пэли — Винера теорем* [7], т. е. дано описание образов этих алгебр относительно преобразования Фурье. Эти результаты позволяют изучить структуру групповой алгебры, ее идеалов и представлений; в частности, они используются при классификации неприводимых представлений группы G. Аналоги теорем Пэли—Винера известны также для нек-рых нильпотентных (метабелевых) групп Ли и для групп движений евклидова пространства.

Проблемы спектрального анализа. Для унитарных представлений групп Ли известна общая процедура разложения представления в прямой интеграл неприводимых представлений [5]. Проблема состоит в отыскании аналитич. методов, осуществляющих это разложение для конкретных классов групп и их представлений, а также в установлении критериев однозначности такого разложения. Для нильпотентных групп Ли известен способ сужения неприводимого представления φ группы G на подгруппу G_0 (см. *Орбит метод*). Для неунитарных представлений сама постановка задачи требует уточнения, поскольку в классе таких представлений отсутствует свойство полной приводимости. В ряде случаев рассмотрение группы G заменяется рассмотрением одной из ее групповых алгебр A, и задача *спектрального анализа* трактуется как задача изучения двусторонних идеалов алгебры A. Задача спектрального анализа (и *спектрального синтеза*) тесно связана также с задачей аппроксимации функций на группе G или однородном пространстве G/H (H - подгруппа) линейными комбинациями матричных элементов группы G.

Приложения к математической физике. Связь теории представлений групп Ли со специальными функциями математич. физики была отмечена еще Э. Картаном. В дальнейшем было установлено, что основные классы этих функций тесно связаны с представлениями классических матричных групп [10]. Наличие этой связи позволяет с единой точки зрения осветить важнейшие вопросы теории специальных функций: свойства полноты и ортогональности, дифференциальные, рекуррентные соотношения, теоремы сложения и т. д., а также обнаружить новые соотношения и новые классы функций. Все эти функции являются матричными элементами классич. групп или их модификациями (характеры, сферич. функции). Теория разложения по этим функциям - часть общего гармонич. анализа на однородном пространстве G/H. Принципиальная роль теории групп Ли в математич. физике, в частности в квантовой механике и квантовой теории поля, объясняется наличием групповой симметрии (хотя бы аппроксимативной) в основных уравнениях этой теории. Классич. примерами такой симметрии являются принцип относительности Эйнштейна (относительно группы Лоренца), связь таблицы Менделеева с представлениями группы вращений, теория изотопич. спина, унитарная симметрия элементарных частиц и т. д. Связь с теоретич. физикой оказала стимулирующее влияние на развитие общей теории представлений групп Ли.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 36; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свёртка и представления, пер. с франц., М., 1970; [3] Borel A., Representations de groupes localement compacts, B., 1972; [4] Нелсон Э., Аналитические векторы, «Математика», 1962,

т. 6, в. 3, с. 89—131; [5] Макки Г., Бесконечномерные представления групп, там же, с. 57—103; [6] Наймарк М. А., Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы, в кн.: Итоги науки. Сер. матем., [в. 2], М., 1964, с. 38—82; [7] Желобенко Д. П., Гармонический анализ функций на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [8] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [9] Warner G., Harmonic analisis on semi-simple Lie groups, v. 1, B., 1972; [10] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.

Д. П. Желобенко, М. А. Наймарк.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормальное T_1-пространство X (см. *Нормальное пространство*) такое, что ни для какого $n=-1,0,1,\ldots$ не выполняется неравенство $\dim X\leqslant n$, т. е. $X\neq\varnothing$, и для любого $n=0,1,2,\ldots$ найдется такое конечное открытое покрытие ω_n пространства X, что любое вписанное в ω_n конечное открытое покрытие этого пространства будет иметь кратность $>n+1$. Примерами Б.п. могут служить *гильбертов кирпич* I^∞ и *тихоновский куб* I^τ. Большинство встречающихся в функциональном анализе пространств также бесконечномерно.

Нормальное T_1-пространство X наз. бесконечномерным в смысле большой (соответственно, малой) индуктивной размерности, если неравенство $\operatorname{Ind} X\leqslant n$ (соответственно $\operatorname{ind} X\leqslant n$) не выполняется ни для какого $n=-1,0,1,\ldots$. Если X есть Б.п., то оно бесконечномерно в смысле большой индуктивной размерности. Если, кроме того, X есть бикомпакт, то он бесконечномерен также и в смысле малой индуктивной размерности. Бесконечномерность метрич. пространства равносильна его бесконечномерности в смысле большой индуктивной размерности. Существуют конечномерные бикомпакты, бесконечномерные в смысле малой (следовательно и большой) индуктивной размерности. Существует ли конечномерный в смысле малой индуктивной размерности и бесконечномерный в смысле большой индуктивной размерности бикомпакт (так же как и метрич. пространство),— неизвестно (1977).

Одним из наиболее естественных подходов к изучению Б.п. является введение малой трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ и большой трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} X$. Этот подход заключается в распространении определений малой и большой индуктивных размерностей на бесконечные порядковые числа. Не для всякого Б.п. X определены трансфинитные размерности $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$. Напр., обе эти размерности не определены для гильбертова кирпича. Для пространства $\bigcup I^n$, распадающегося в дискретную сумму n-мерных кубов I^n, $n=0,1,2,\ldots$, малая трансфинитная размерность не определена.

Если для нормального пространства X определена трансфинитная размерность $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} X$), то она равна порядковому числу, мощность к-рого не превосходит веса wX (соответственно большого веса WX) пространства X. В частности, если пространство X обладает счетной базой, то $\operatorname{ind} X<\omega_1$, а если X — компакт, то и $\operatorname{Ind} X<\omega_1$. Для метрич. пространств также $\operatorname{Ind} X<\omega_1$. Если $\alpha<\omega_1$, то существуют компакты S_α и L_α, для к-рых $\operatorname{Ind} S_\alpha=\alpha$, $\operatorname{ind} L_\alpha=\alpha$.

Если трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} X$ определена, то определена трансфинитная размерность $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{ind} X\leqslant\operatorname{Ind} X$. Построены компакты, для к-рых трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} X$ определена и $\omega_0<\operatorname{ind} X<\operatorname{Ind} X$.

Из определенности трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} X$) пространства X вытекает определенность трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} A$) для любого (соответственно любого замкнутого) множества $A\subseteq X$ и выполняется неравенство $\operatorname{ind} A\leqslant\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} A\leqslant\operatorname{Ind} X$).

Для максимального бикомпактного расширения βX нормального пространства X выполняется равенство

Ind $\beta X - \mathrm{Ind}\ X$. Нормальное пространство X веса τ и трансфинитной размерности $\mathrm{Ind}\ X \leqslant \alpha$ обладает бикомпактным расширением bX веса τ и размерности $\mathrm{Ind}\ bX \leqslant \alpha$. Существует пространство L со счетной базой и размерности $\mathrm{ind}\ L - \omega_0$, у к-рого никакое бикомпактное со счетной базой расширение bX не имеет размерности $\mathrm{ind}\ bX - \omega_0$. Метризуемое пространство R трансфинитной размерности $\mathrm{Ind}\ R\ \alpha$ обладает метрикой, пополнение cR по которой имеет размерность $\mathrm{Ind}\ cR = \alpha$. Метризуемое со счетной базой пространство R трансфинитной размерности $\mathrm{ind}\ R = \alpha$ обладает метрикой, пополнение cR по которой имеет размерность $\mathrm{ind}\ cR = \alpha$.

Класс пространств, для к-рых определена большая или малая трансфинитная размерность, тесно связан с классом *счетномерных пространств*: если полное метрич. пространство счетномерно, то для него определена малая трансфинитная размерность; если для пространства со счетной базой определена малая трансфинитная размерность, то оно счетномерно; если для метрич. пространства определена большая трансфинитная размерность (в частности, если оно конечномерно), то оно счетномерно; для счетномерного компакта определена большая трансфинитная размерность. Пространство $\bigcup I^n$ счетномерно и бесконечномерно. Гильбертов кирпич не счетномерен.

Счетномерность метрич. пространства R эквивалентна любому из следующих свойств: а) существует конечнократное (но, вообще говоря, не k-кратное ни для какого $k = 1, 2, \ldots$) непрерывное замкнутое отображение нульмерного метрич. пространства на пространство R; б) существует счетнократное непрерывное замкнутое отображение нульмерного метрич. пространства на пространство R.

Теоремы о представимости n-мерного метрич. пространства в виде суммы $n+1$ нульмерных слагаемых и в виде образа нульмерного метрич. пространства при непрерывном замкнутом и $(n+1)$-кратном отображении указывают на естественность рассмотрения класса счетномерных (метрических) пространств и на его близость к классу конечномерных пространств. Как и в конечномерном случае, в классе счетномерных метрич. пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное в смысле гомеоморфного вложения пространство.

Если нормальное пространство представлено в виде конечной или счетной суммы своих счетномерных подпространств, то оно счетномерно. Подпространство счетномерного совершенно нормального пространства счетномерно.

Взаимоотношения между счетномерными и не счетномерными пространствами описывает следующее утверждение: если отображение $f: R \to S$ метрич. пространств R и S непрерывно и замкнуто, пространство R счетномерно, а пространство S не счетномерно, то множество $\{y \in S : |f^{-1}y| \geqslant c\}$ также не счетномерно.

Помимо счетномерных пространств, естественным расширением класса конечномерных пространств является класс слабо счетномерных пространств. Если рассматривать только метризуемые пространства, то слабо счетномерные пространства занимают промежуточное положение между конечномерными и счетномерными пространствами. При этом существуют счетномерные не слабо счетномерные компакты, а пространство $\bigcup I^n$ слабо счетномерно и бесконечномерно. Замкнутое подпространство слабо счетномерного пространства слабо счетномерно. Нормальное пространство слабо счетномерно, если оно представимо в виде конечной или счетной суммы своих слабо счетномерных замкнутых подмножеств.

В классах нормальных слабо счетномерных и метрических слабо счетномерных пространств существуют универсальные в смысле гомеоморфного вложения и о-

странства. В случае пространств со счетной базой таким пространством будет подпространство I^ω гильбертова кирпича, состоящее из всех тех точек, лишь конечное число координат к-рых отлично от нуля. Пространство I^ω не имеет слабо счетномерных бикомпактных расширений.

Все рассмотренные выше классы Б.п. «не очень бесконечномерны», если их сравнивать, напр., с гильбертовым кирпичом. Задача отделения «не очень бесконечномерных» пространств от «очень бесконечномерных» была решена П. С. Александровым и Ю. М. Смирновым посредством введения классов A- и S-слабо бесконечномерных и A- и S-сильно бесконечномерных нормальных пространств. Любое конечномерное пространство S-слабо бесконечномерно, а любое S-слабо Б. п. также A-слабо бесконечномерно. Пространство $\bigcup I^n$ является A-слабо бесконечномерным, но S-сильно бесконечномерным.

В случае бикомпактов определения A- и S-слабой (сильной) бесконечномерности эквивалентны, поэтому A-слабо (сильно) бесконечномерные бикомпакты наз. просто слабо (сильно) бесконечномерными. Гильбертов кирпич сильно бесконечномерен. Существуют бесконечномерные и слабо бесконечномерные компакты.

Замкнутое подпространство A-(S-) слабо Б. п. является A-(S-) слабо бесконечномерным. Нормальное пространство, являющееся суммой конечного числа своих замкнутых S-слабо бесконечномерных множеств, само S-слабо бесконечномерно. Паракомпакт, являющийся суммой конечной или счетной системы своих замкнутых A-слабо бесконечномерных множеств, сам A-слабо бесконечномерен. Наследственно нормальное пространство, являющееся суммой конечной или счетной системы своих A-слабо бесконечномерных множеств, само A-слабо бесконечномерно.

Слабо счетномерный паракомпакт является A-слабо бесконечномерным. Наследственно нормальное счетномерное пространство является A-слабо бесконечномерным. Любой ли слабо бесконечномерный компакт счетномерен неизвестно (1977).

Изучение любых S-слабо бесконечномерных метризуемых пространств следующим образом сводится к компактному случаю: тогда и только тогда метризуемое пространство R является S-слабо бесконечномерным, когда его можно так представить в виде суммы слабо бесконечномерного компакта и конечномерных открытых множеств O_n, $n=1,2,\ldots$, что для любой дискретной последовательности точек

$$x_i \in R,\ i=1,2,\ldots,$$

существует (зависящее от последовательности) множество O_n, содержащее все точки x_i, начиная с нек-рой.

Другую возможность изучать бесконечномерные бикомпакты вместо любых S-слабо Б.п. дают следующие утверждения: максимальное бикомпактное расширение S-слабо Б.п.— слабо бесконечномерно; любое нормальное S-слабо бесконечномерное пространство веса τ обладает слабо бесконечномерным бикомпактным расширением веса τ. Все бикомпактные расширения A-слабо Б.п. I_ω сильно бесконечномерны.

Бикомпакт сильно бесконечномерен тогда и только тогда, когда имеется такое непрерывное отображение $f: X \to I^\infty$, что для любого множества

$$I^n \cdot \{y=(y_i) \in I^\infty;\ \ y_i=0,\ \ i>n\}$$

(гомеоморфного n-мерному кубу) ограничение отображения f на прообраз $f^{-1}I^n$ является *существенным отображением*.

Существует бесконечномерный компакт, любое непустое замкнутое подпространство к-рого или нульмерно, или бесконечноме но. Более того, любой сильно

бесконечномерный компакт содержит подкомпакт, любое непустое замкнутое подпространство к-рого или нульмерно, или сильно бесконечномерно. В любом сильно бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное канторово многообразие (в смысле П. С. Александрова).

Все сепарабельные банаховы пространства гомеоморфны между собой, A-сильно бесконечномерны и гомеоморфны произведению счетной системы прямых.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *Б. А. Пасынков.*

БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ, область бесконечной связности,— область, у к-рой *фундаментальная группа* не является конечнопорожденной. Понятие Б.о. обычно применяется к областям в расширенной комплексной плоскости, и в этом случае данное определение равносильно тому, что граница области состоит из бесконечного числа граничных компонент. Топологические свойства Б. о. изучались П. С. Урысоном [1]. Основы теории аналитических и однолистных функций в Б. о. созданы в основном П. Кёбе и Х. Грётшем (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.—Л., 1951; [2] Koebe P., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1909, S. 324—361; 1918, S. 60—71; [3] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1931, Bd 83, № 3, S. 185—200; N 4, S. 238—253; № 5, S. 283—97; 1932, Bd 84, № 1, S. 3—14. *П. М. Тамразов.*

БЕСКОНЕЧНОСТИ АКСИОМА — аксиома формальной или содержательной теории, обеспечивающая наличие бесконечного количества объектов в рассматриваемой теории. Так, Б.а. в нек-рой системе *аксиоматической теории множеств* обеспечивает существование бесконечного множества. Напр., в языке аксиоматич. системы Цермело — Френкеля Б.а. обычно записывают в виде:

$$\exists X\,(\varnothing \in X \,\&\, \forall Z\,(Z \in X \supset Z \cup \{Z\} \in X))$$

(«существует множество X такое, что $\varnothing \in X$ и для всякого Z, принадлежащего X, множество $Z \cup \{Z\}$ также принадлежит X»).

В простой *типов теории*, ввиду специфич. ограничений на язык теории, принята другая формулировка Б. а.: существует отношение, к-рое задает на множестве индивидов линейный порядок без последнего элемента. Во многих теориях удобно применять так наз. аксиому бесконечности Дедекинда: существует множество, взаимно однозначно отобразимое в свою собственную часть. С помощью *выбора аксиомы* нетрудно показать эквивалентность аксиомы бесконечности Дедекинда другим упомянутым формам Б. а. Известно, однако, что без аксиомы выбора эту эквивалентность обычными теоретико-множественными методами доказать нельзя.

В теории множеств употребляются также так наз. высшие аксиомы бесконечности, утверждающие существование множеств весьма высокой мощности: аксиома существования недостижимого кардинала, аксиома существования измеримого кардинала и т. п.

В логике предикатов Б.а. наз. формулы, выполнимые лишь на бесконечном множестве. С точки зрения *доказательств теории* такие формулы утверждают, вообще говоря, меньше, чем Б.а. в аксиоматич. теории множеств: они обеспечивают бесконечность совокупности объектов исследования, но могут и не обеспечивать существования бесконечного объекта исследования. Показано, что существует бесконечное количество попарно неэквивалентных Б. а. логики предикатов.

А. Г. Драгалин.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ — понятие, возникающее в различных разделах математики в основном как противопоставление понятию конечного. Понятие Б. исполь-

зуется в аналитич. и геометрич. теориях для обозначения «несобственных» или «бесконечно удаленных» элементов, в теории множеств и математич. логике при изучении «бесконечных множеств» и в др. разделах математики.

1) Представление о бесконечно малых и бесконечно больших переменных величинах является одним из основных в математич. анализе. Предшествовавшая современному подходу к понятию бесконечно малой концепция, по к-рой конечные величины составлялись из бесконечно большого числа бесконечно малых «неделимых» (см. «*Неделимых» метод*), трактовавшихся не как переменные, а как постоянные и меньшие любой конечной величины, может служить одним из примеров незаконного отрыва бесконечного от конечного: реальный смысл имеет только разложение конечных величин на неограниченно возрастающее число неограниченно убывающих слагаемых.

2) Совсем в другой логич. обстановке Б. появляется в математике в виде «несобственных» бесконечно удаленных геометрич. образов (см. *Бесконечно удаленные элементы*). Здесь, напр., бесконечно удаленная точка на прямой a рассматривается как особый постоянный объект, «присоединенный» к обычным конечным точкам. Однако неразрывная связь бесконечного с конечным обнаруживается и здесь, хотя бы при проектировании из центра, лежащего вне прямой, при к-ром бесконечно удаленной точке оказывается соответствующей прямая, проходящая через центр проектирования и параллельная основной прямой a.

Аналогичный характер имеет пополнение системы действительных чисел двумя «несобственными» числами $+\infty$ и $-\infty$, соответствующее многим запросам анализа и теории функций действительного переменного. Можно подойти с такой же точки зрения и к пополнению ряда натуральных чисел 1, 2, 3, . . ., *трансфинитными числами* ω, $\omega+1$, . . . , 2ω, $2\omega+1$, ... В связи с различием между переменными бесконечно малыми и бесконечно большими величинами, с одной стороны, и «несобственными» бесконечно большими числами, рассматриваемыми как постоянные, — с другой, возникли термины «потенциальная» Б. (для первых) и «актуальная» Б. (для вторых). В этом первоначальном понимании (о другом, современном понимании, см. ниже) спор между сторонниками потенциальной и актуальной Б. можно считать законченным. Бесконечно малые и бесконечно большие, лежащие в основе определения производной (как отношения бесконечно малых) и интеграла (как суммы бесконечно большого числа бесконечно малых) и примыкающих сюда концепций математич. анализа, должны восприниматься как «потенциальные». Наряду с этим в надлежащей логич. обстановке в математику вполне закономерно входят и «актуальные» бесконечно большие «несобственные» числа (и даже во многих различных аспектах: как количественные и порядковые трансфинитные числа в теории множеств, как несобственные элементы $+\infty$ и $-\infty$ системы действительных чисел и т. д.).

В математике приходится иметь дело с двумя способами присоединения к числовой системе бесконечных «несобственных» элементов.

а) С проективной точки зрения на прямой находится одна «бесконечно удаленная точка». В обычной метрич. системе координат этой точке естественно приписать абсциссу ∞. Такое же присоединение к числовой системе одной Б. без знака употребляется в теории функций комплексного переменного. В элементарном анализе при изучении рациональных функций $f(x)=P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, в тех точках, где $Q(x)$ имеет нуль более высокого порядка, чем $P(x)$, естественно положить $f(x)=\infty$.

Для несобственного элемента ∞ устанавливаются такие правила действий:

$\infty + a = \infty$,	если a конечно;
$\infty + \infty$	не имеет смысла;
$\infty \cdot a = \infty$,	если $a \neq 0$;
$\infty \cdot 0$	не имеет смысла.

Неравенства с участием ∞ не рассматриваются: бессмысленно спрашивать, больше или меньше ∞, чем конечное a.

б) При изучении действительных функций действительного переменного систему действительных чисел дополняют двумя несобственными элементами $+\infty$ и $-\infty$. Тогда можно положить, что $-\infty < a < +\infty$ для любого конечного a, и сохранить основные свойства неравенств в расширенной числовой системе. Для $+\infty$ и $-\infty$ устанавливаются такие правила действий:

$(+\infty) + a = +\infty$,	если $a \neq -\infty$;
$(-\infty) + a = -\infty$,	если $a \neq +\infty$;
$(+\infty) + (-\infty)$	лишено смысла;
$(+\infty) \cdot a = +\infty$,	если $a > 0$;
$(+\infty) \cdot a = -\infty$,	если $a < 0$;
$(-\infty) \cdot a = -\infty$,	если $a > 0$;
$(-\infty) \cdot a = +\infty$,	если $a < 0$;
$(+\infty) \cdot 0$ и $(-\infty) \cdot 0$	лишены смысла.

3) Основной интерес, но и основные трудности математич. учения о Б. сосредоточиваются на вопросе о природе б е с к о н е ч н ы х м н о ж е с т в математич. объектов. Следует, в частности, иметь в виду, что достигнутая ныне полная отвлеченность и законченность теории бесконечно больших и бесконечно малых переменных величин заключается лишь в сведении всех трудностей этой теории к вопросу обоснования учения о числе, в к-рое существенно входит представление о Б. системы чисел. Утверждение о том, что y бесконечно мало, имеет смысл только при указании характера изменения y в зависимости от к.-л. другого переменного x; напр., говорят, что y бесконечно мало при $x \to a$, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|x - a| < \delta$ вытекает $|y| < \varepsilon$. В самое это определение уже входит предположение, что функция $y = f(x)$ определена для б е с к о н е ч н о г о м н о ж е с т в а значений x (напр., для всех действительных x, достаточно близких к a).

В теории множеств терминам «актуальная» и «потенциальная» Б. придают обычно глубокий смысл, не имеющий ничего общего с наименованием каждой бесконечной мощности «актуально бесконечным числом». Дело в том, что бесконечные системы математич. объектов (напр., натуральных или действительных чисел) никогда не задаются простым перечислением, как это возможно для конечных систем объектов. Было бы очевидным абсурдом предполагать, что кто-либо «образовал» множество натуральных чисел, перечислив их фактически «все» одно за другим. На самом деле множество натуральных чисел изучают, исходя из процесса образования его элементов переходом от n к $n+1$. В случае *континуума* действительных чисел уже рассмотрение одного его элемента — действительного числа — приводит к изучению процесса образования его последовательных приближенных значений, а рассмотрение всего множества действительных чисел приводит к изучению общих свойств такого рода процессов образования его элементов. В этом именно смысле сама Б. натурального ряда, или системы всех действительных чисел (континуума), может характеризоваться как Б. лишь «потенциальная». Точке зрения потенциальной Б. противополагается взгляд на бесконечные множества как «актуально» заданные, независимо от процесса их образования. Выяснение вопроса о том, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно такое абстрагирование от процесса их образо-

вания, еще нельзя считать законченным. См. также *Абстракция актуальной бесконечности*, *Абстракция потенциальной осуществимости*. *А. Н. Колмогоров.*

БЕССЕЛЕВ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал вида

$$P_\alpha(x) = \int_{E^n} G_\alpha(x-y)\, d\mu(y), \quad \alpha > 0,$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - точки евклидова пространства E^n, $n \geqslant 2$, $d\mu$ — борелевская мера на E^n,

$$G_\alpha(x) = 2^{\frac{2-n-\alpha}{2}} \pi^{-\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)\, |x|^{\frac{\alpha-n}{2}},$$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2},$$

$K_\nu(z)$ — модифицированная *цилиндрическая функция* (или бесселева функция) 2-го рода порядка ν, или функция Макдональда порядка ν; $G_\alpha(x)$ наз. бесселевым ядром.

Основные свойства бесселевых ядер $G_\alpha(x)$ те же, что ядер Рисса (см. *Рисса потенциал*): положительность, непрерывность при $x \neq 0$, свойство композиции

$$\int_{E^n} G_\alpha(x-y)\, G_\beta(y)\, dy = G_{\alpha+\beta}(x),$$

но, в отличие от потенциалов Рисса, Б.п. применимы при всех $\alpha > 0$, поскольку

$$G_\alpha(x) \sim 2^{\frac{1-n-\alpha}{2}} \pi^{\frac{1-n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} |x|^{\frac{\alpha-n-1}{2}} e^{-|x|}$$

при $|x| \to \infty$.

Если $\alpha > 2m$, где m — натуральное число, мера $d\mu$ абсолютно непрерывна с интегрируемой в квадрате плотностью $f(y) \in L^2(E^{2m})$, то для Б. п. выполняются тождества

$$(1-\Delta)^m P_\alpha(x) = P_{\alpha-2m}(x),$$

и

$$(1-\Delta)^m P_{2m}(x) = f(x),$$

где Δ — *Лапласа оператор* в E^{2m}. Иначе говоря, функция $G_{2m}(x)$ есть фундаментальное решение оператора $(1-\Delta)^m$.

Лит.: [1] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969, гл. 8; [2] Aronszajn N., Smith K. T., «Ann. Inst. Fourier», 1961, v. 11, p. 385-475. *Е. Д. Соломенцев.*

БЕССЕЛЕВА СИСТЕМА — понятие теории ортогональных систем. Пусть $\{\psi_n\}$ и $\{g_n\}$ — две полные системы функций из $L^2(a, b) = L^2$ (т. е. измеримых функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$), образующие *биортогональную систему* функций. Система ψ_n наз. бесселевой, если для любой функции $f \in L^2$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty c_n^2,$$

где $c_n = (f, g_n)$ — коэффициенты разложения:

$$f \sim \sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n$$

функции f по системе $\{\psi_n\}$. Для того чтобы система $\{\psi_n\}$ была Б. с., необходимо и достаточно, чтобы в пространстве L^2 можно было определить такой ограниченный линейный оператор A, что система $\{\varphi_n\}$, определенная равенством $A\psi_n = \varphi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, является полной ортонормированной системой. Если система ψ_n бесселева, то существует константа M такая, что для любой $f \in L^2$

$$\sum_{n=1}^\infty (f, g_n)^2 \leqslant M \|f\|_{L^2}^2.$$

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 430—40.

П. И. Лизоркин.

БЕССЕЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, определяемая как полусумма формулы Гаусса (см. *Гаусса интерполяционная формула*) для интерполирования вперед по узлам $x_0,\ x_0-h,\ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+nh,\ x_0-nh,\ x_0+(n+1)h$ в точке $x=x_0+th$:

$$G_{2n+2}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}\,t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+ +f^{2n+1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}, \qquad (1)$$

и формулы Гаусса того же порядка для интерполирования назад по отношению к узлу $x_1=x_0+h$, т. е. по совокупности узлов $x_0+h,\ x_0,\ x_0+2h,\ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+(n+1)h,\ x_0-nh$:

$$G_{2n+2}(x_0+th)=f_1+f^1_{1/2}(t-1)+f^2_1\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+ +f^{2n+1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-n-1)}{(2n+1)!}. \qquad (2)$$

С использованием обозначения

$$f^{2k}_{1/2}=\frac{1}{2}\left(f^{2k}_0+f^{2k}_1\right)$$

Б. и. ф. имеет следующий вид (см. [1], [2]):

$$B_{2n+2}(x_0+th)= =f_{1/2}+f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+f^2_{1/2}\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+ +f^{2n}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}+ +f^{2n+1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!}. \qquad (3)$$

Б. и. ф. имеет определенные преимущества по сравнению с формулами Гаусса (1), (2); в частности, при интерполировании на середину отрезка, то есть при $t=1/2$, все коэффициенты при разностях нечетного порядка обращаются в нуль. Если в правой части (3) отбросить последнее слагаемое, то полученный многочлен $B_{2n+1}(x_0+th)$, не являясь собственно интерполяционным многочленом (он совпадает с $f(x)$ лишь в $2n$ узлах $x_0-(n-1)h,\ \ldots,\ x_0+nh$), обладает лучшей оценкой остаточного члена (см. *Интерполяционная формула*), чем интерполяционный многочлен той же степени. Напр., если $x=x_0+th\in(x_0,\ x_1)$, то оценка остаточного члена для наиболее часто используемого многочлена

$$B_3(x_0+th)=f_{1/2}+f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+f^2_{1/2}\frac{t(t-1)}{2},$$

написанного по узлам $x_0-h,\ x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$, почти в 8 раз лучше, чем для интерполяционного многочлена, написанного по узлам $x_0-h,\ x_0,\ x_0+h$ или по узлам $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$ (см. [2]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973.

М. К. Самарин.

БЕССЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО — неравенство

$$\|f\|^2=(f,\ f)\geqslant\sum_{\alpha\in A}\frac{|(f,\ \varphi_\alpha)|^2}{(\varphi_\alpha,\ \varphi_\alpha)}= =\sum_{\alpha\in A}\left|\left(f,\ \frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right)\right|^2,$$

где f — элемент (пред)гильбертова пространства H со скалярным произведением $(f,\ \varphi)$, а $\{\varphi_\alpha,\ \alpha\in A\}$ — ортогональная система ненулевых элементов из H. Правая часть Б. н. при любой мощности множества индексов A содержит не более счетного числа слагаемых, отличных от нуля. Б. н. вытекает из тождества Бесселя

$$\left\|f-\sum_{i=1}^n x^{\alpha_i}\varphi_{\alpha_i}\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^n\lambda_{\alpha_i}\left|x^{\alpha_i}\right|^2,$$

справедливого для любой конечной системы элементов $\{\varphi_{\alpha_i}\}$ $i=1,\ 2,\ \ldots\ n$. В этой формуле x^{α_i} — коэффи-

циенты Фурье вектора f по ортогональной системе $\{\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots, \varphi_{\alpha_m}\}$, т. е. числа

$$x^{\alpha_i} = \frac{1}{\lambda_{\alpha_i}} (f, \varphi_{\alpha_i}), \quad \lambda_{\alpha_i} = (\varphi_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i}).$$

Геометрически Б. н. означает, что ортогональная проекция элемента f на линейную оболочку элементов φ_α, $\alpha \in A$, имеет норму, не превосходящую нормы f (т. е. гипотенуза не короче катета). Для того чтобы вектор f принадлежал замкнутой линейной оболочке векторов φ_α, $\alpha \in A$, необходимо и достаточно, чтобы Б. н. обращалось в равенство. Если это имеет место при любом $f \in H$, то говорят, что для системы $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$ в H выполняется *Парсеваля равенство*.

Для системы $\{\varphi_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots\}$ линейно независимых (не обязательно ортогональных) элементов из H тождество Бесселя и Б. н. принимают вид

$$\left\| f - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\beta) \varphi_\alpha \right\|^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\alpha) (f, \varphi_\beta),$$

$$\| f \|^2 \geqslant \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\alpha) (f, \varphi_\beta),$$

где $b_n^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной к матрице Грама (см. *Грама определитель*) первых n векторов исходной системы.

Б. н. предложено Ф. Бесселем (F. Bessel) в 1828 для тригонометрич. системы.

Лит.: [1] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 2, М., 1973.

Л. П. Купцов.

БЕССЕЛЯ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu = \text{const}, \tag{1}$$

или в самосопряженной форме:

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0.$$

Число ν наз. индексом Б. у.; величины x, y, ν в общем случае могут принимать комплексные значения. После подстановки $y = ux^{-1/2}$ получается приведенная форма уравнения (1):

$$u'' + \left[1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} \right] u = 0. \tag{2}$$

Б. у. представляет собой частный случай *вырожденного гипергеометрического уравнения;* уравнение (2) подстановкой $x = z/2i$ приводится к *Уиттекера уравнению*. Точка $x = 0$ является для уравнения (1) слабо особой, а точка $x = \infty$ — сильно особой, и поэтому Б. у. не принадлежит классу *Фукса уравнений*. Первым систематическое изучение решений уравнения (1) предпринял Ф. Бессель [1], но еще раньше они встречались в работах Д. Бернулли (D. Bernoulli), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange).

Б. у. возникает при разделении переменных во многих задачах математич. физики (см. [2]), в частности в краевых задачах теории потенциала для цилиндрич. области.

Решения Б. у. наз. *цилиндрическими функциями* (или бесселевыми функциями). Среди них выделяют цилиндрич. функции 1-го рода (*Бесселя функции*) $J_\nu(x)$, цилиндрич. функции 2-го рода (*Вебера функции*, или *Неймана функции*) $Y_\nu(x)$, цилиндрич. функции 3-го рода (*Ганкеля функции*) $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$. Если индекс ν фиксирован, то все эти функции — аналитич. функции комплексного аргумента x; для всех этих функций, за исключением функций $J_n(x)$ целого индекса, точка $x = 0$ является *ветвления точкой*. Если же фиксирован аргумент x, то все эти функции

являются однозначными целыми функциями комплексного индекса ν (см. [3]).

Если индекс ν не равен целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При произвольном индексе любые две из функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ линейно независимы и могут служить фундаментальной системой решений уравнения (1). Поэтому общее решение уравнения (1) представляется, в частности, в следующих формах:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad y = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x).$$

С уравнением (1) тесно связаны: уравнение

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2) y = 0,$$

переходящее в (1) при подстановке $z = ix$ и имеющее своей фундаментальной системой решений *модифицированные цилиндрические функции* (*бесселевы функции мнимого аргумента*), и уравнение

$$z^2 y'' + zy' - (iz^2 + \nu^2) y = 0,$$

переходящее в (1) при подстановке $z = \sqrt{i}\, x$ и имеющее своей фундаментальной системой решений *Кельвина функции*. Многие другие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка (напр., *Эйри уравнение*) преобразованием неизвестной функции и независимой переменной также приводятся к уравнению (1); решение ряда линейных уравнений высших порядков удается записать через бесселевы функции (см. [4]).

Подстановка $y = x^\nu w$ приводит уравнение (1) к *Лапласа уравнению*:

$$xw'' + (2\nu + 1)w' + xw = 0;$$

это позволяет представлять решения уравнения (1) через контурные интегралы на комплексной плоскости.

В приложениях часто возникают задачи на собственные значения для уравнения

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0, \qquad (3)$$

где ν фиксировано, а λ — параметр. Уравнение (3) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$ с краевыми условиями:

$$y(x) \text{ ограничена при } x \to 0, \quad y(a) = 0$$

дает пример задачи с дискретным спектром (собственные значения определяются из условия $J_\nu(a\sqrt{\lambda}) = 0$ через нули функции Бесселя). Уравнение (3) с краевым условием:

$$y(x) \text{ ограничена на полуоси } 0 \leqslant x < \infty$$

представляет собой задачу с непрерывным спектром (собственные значения $\lambda \geqslant 0$).

Неоднородное уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = f(x) \qquad (4)$$

имеет частное решение

$$y = \frac{\pi}{2} Y_\nu(x) \int x J_\nu(x) f(x)\, dx - \frac{\pi}{2} J_\nu(x) \int x Y_\nu(x) f(x)\, dx.$$

Для правой части специальных видов решения уравнения (4) изучены более детально. Напр., при $f(x) = x^\rho$ уравнению (4) удовлетворяет *Ломмеля функция*, при

$$f(x) = \frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}$$

— *Струве функция*, при

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(x - \nu)\sin\nu\pi$$

— *Ангера функция*, при

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}[(x+\nu)+(x-\nu)\cos\nu\pi]$$

— *Вебера функция*.

Имеются линейные уравнения высших порядков, свойства решений к-рых аналогичны свойствам бесселевых функций. Общее уравнение типа Бесселя n-го порядка имеет вид

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx}+c_i\right)y+x^n y=0,$$

$$c_i=\text{const},\quad \sum_{i=1}^{n}c_i=0,$$

а его решение зависит от $n-1$ индексов. В частности, уравнение типа Бесселя 3-го порядка (имеющее решение с двумя индексами α, β) можно представить в форме:

$$x^3y'''+3x^2y''+[1+9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)^2]xy'+$$
$$+[x^3-9\alpha\beta(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)^3]y=0,$$
$$\alpha,\ \beta-\text{const}.$$

Лит.: [1] Bessel F., «Abhandl. der Königlichen Akad. Wiss. Berlin», 1824, S. 1–52; [2] Грей Э., Мэтьюз Г., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [3] Ватсон Г., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1949; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

БЕССЕЛЯ ФУНКЦИИ — *цилиндрические функции* 1-го рода. Б. ф. индекса p может быть определена рядом

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}=$$
$$=\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\qquad(*)$$

сходящемся на всей плоскости. Б. ф. индекса p является решением соответствующего *Бесселя уравнения*.

Графики функций $y=J_0(x)$ и $y=J_1(x)$.

При действительных положительных значениях аргумента и индекса ($p=\nu$ — действительное число) Б. ф. действительна, график ее имеет вид затухающего колебания (см. рис.); при четном индексе Б. ф. четна, при нечетном — нечетна. Поведение Б. ф. в окрестности нуля дается первыми слагаемыми ряда (*); при больших x справедливо асимптотич. представление

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right).$$

Нули Б. ф. [корни уравнения $J_\nu(x)=0$] — простые, при этом нули $J_\nu(x)$ лежат между нулями $J_{\nu+1}(x)$. Б. ф. «полуцелого» порядка $\nu=n+{}^1/_2$ выражаются через тригонометрич. функции; в частности,

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Б. ф. $J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right)$ (μ_n^ν — положительные нули $J_\nu(x)$, $\nu>-{}^1/_2$) образуют ортогональную с весом x в промежутке $(0,\ l)$ систему. При определенных условиях имеет место разложение

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right),$$

$$c_n=\frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\mu_n^\nu)}\int_0^l f(x)\,J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right)x\,dx,\quad 0<x<l.$$

В бесконечном промежутке его заменяет интеграл Фурье—Бесселя

$$f(x)=\int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda x)\,d\lambda,\quad c_\lambda=\int_0^\infty f(x)\,J_\nu(\lambda x)\,x\,dx,$$
$$0<x<\infty.$$

Важную роль в теории Б. ф. и их применений играют:

1) интегральное представление

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi,$$

2) производящая функция

$$e^{\frac{z}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,\xi^n,$$

3) теорема сложения для Б. ф. нулевого индекса

$$J_0\left(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\right)=$$
$$=J_0(a)\,J_0(b)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)\,J_k(b)\cos k\varphi,$$

4) рекуррентные формулы

$$J_{p-1}(z)+J_{p+1}(z)=\frac{2p}{z}J_p(z),$$

$$[J_p(z)]'=\frac{1}{2}[J_{p-1}(z)-J_{p+1}(z)].$$

Лит. см. при статье *Цилиндрические функции*.

П. И. Лизоркин.

БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное сосредоточенное на (0, 1) распределение вероятностей с плотностью

$$\beta_{m,n}(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1},\qquad(1)$$

где параметры m, n неотрицательны и нормирующий множитель $\mathrm{B}(m,n)$ есть бета-функция Эйлера

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

($\Gamma(n)$—*гамма-функция*). Функция распределения выражается через неполную бета-функцию

$$\mathrm{B}_{m,n}(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\int_0^x y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy,\quad 0<x<1$$

(эта функция табулирована, см. [1], [2]). Моменты Б.-р. выражаются формулой

$$m_k=\frac{\mathrm{B}(m+k,n)}{\mathrm{B}(m,n)},\quad k=1,2,\ldots;$$

в частности, математич. ожидание и дисперсия равны $m/(m+n)$ и $mn/(m+n)^2(m+n+1)$, соответственно. Если $m>1$ и $n>1$, то кривая плотности $\beta_{m,n}(x)$ имеет единственную точку максимума $x=(m-1)/(m+n-2)$ и обращается в нуль на концах интервала. Если $m<1$ или $n<1$, то одна из крайних ординат графика бесконечна, а если и $m<1$, и $n<1$, то обе ординаты на концах интервала бесконечны и кривая имеет U-образную форму. При $m=1$ и $n=1$ Б.-р. превращается в *равномерное распределение* в интервале (0,1). Другим частным случаем Б.-р. является так наз. *арксинуса распределение*

$$\beta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

При замене в (1) x на $1/(1+t)$ получается распределение с плотностью

$$\beta'_{m,n}(t)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\cdot\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}},\quad 0<t<\infty.\qquad(2)$$

Это распределение наз. Б.-р. второго рода, в отличие от Б.-р. (1). Распределения (1) и (2) соответствуют распределениям «типа I» и «типа VI» в системе *Пирсона кривых*. Один из важных случаев возникновения Б.-р. таков: если X_1 и X_2 независимы и имеют

гамма-распределения с параметрами m и n соответственно, то случайная величина $X_1/(X_1+X_2)$ имеет Б.-р. с плотностью $\beta_{m,n}(x)$. Этот факт в большой степени объясняет ту роль, к-рую Б.-р. играет в приложениях, в частности в математич. статистике: распределения многих важнейших статистик сводятся к Б.-р. Напр., функция распределения F-отношения

$$F_{m,\,n}=\frac{n\chi_m^2}{m\chi_n^2}$$

(случайная величина χ_k^2 имеет χ^2-распределение с k степенями свободы) выражается формулой

$$\mathsf{P}(F_{m,\,n}<x)=\mathrm{B}_{\frac{m}{2},\,\frac{n}{2}}\left(\frac{mx}{n+mx}\right)$$

(обычно значения F-распределения вычисляются с помощью таблиц Б.-р.). Функция Б.-р. позволяет также вычислять значения функций *биномиального распределения*, ввиду соотношения

$$\mathrm{B}_{n-m,\,m+1}(1-p)=\sum_{k=0}^{m}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Б.-р. находит применение не только в математич. статистике, так, напр., плотность Б.-р. является весовой функцией для системы ортогональных *Якоби многочленов*.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Пирсон К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974.

А. В. Прохоров.

БЕТА-ФУНКЦИЯ, В-функция, В-функция Эйлера, эйлеров интеграл 1-го рода,— функция двух переменных p и q, определяемая при $p>0$, $q>0$ равенством

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (*)$$

Значения Б.-ф. при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\mathrm{B}(q,\,p),$$

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p,\,q-1),\quad q>1.$$

Справедлива формула

$$\mathrm{B}(p,\,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1.$$

В случае комплексных p и q интеграл (*) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$ и $\mathrm{Re}\,q>0$. Б.-ф. выражается через *гамма-функцию:*

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В. И. Битюцков.

БЕТТИ ГРУППА — в широком смысле то же, что и *гомологии группа*; в узком смысле Б. г. является свободной частью группы гомологий с областью коэффициентов — группой $\mathbb{Z}$ целых чисел в случае, если эта группа конечно порождена. Названа по имени Э. Бетти (E. Betti).

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М. - Л., 1938; [2] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

М. И. Войцеховский.

БЕТТИ ЧИСЛО, r-мерное число Бетти p^r комплекса K,— ранг r-мерной *Бетти группы* с целыми коэффициентами. Для каждого r Б. ч. p^r — топологич. инвариант полиэдра, реализующего комплекс K, указывающий число попарно негомологичных (над рациональными числами) циклов в нем. Например, для сферы S^n:

$$p^0=1,\ p^1=\ldots=p^{n-1}=0,\ p^n=1;$$

для проективной плоскости $P^2(\mathbb{R})$:

$$p^0=1,\ p^1=p^2=0;$$

для тора T^2:

$$p^0=p^2=1,\ p^1=1.$$

Для n-мерного комплекса K^n сумма

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k$$

равна его *эйлеровой характеристике*. Б. ч. введены Э. Бетти [1].

Лит.: [1] Betti E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1871, v. 4(2), p. 140—58.

М. И. Войцеховский.

БИАНКИ КОНГРУЭНЦИЯ, конгруэнция B, конгруэнция прямых, у к-рой кривизны фокальных поверхностей в точках, лежащих на одной прямой конгруэнции, равны и отрицательны. Главные поверхности конгруэнции B высекают на ее фокальных поверхностях сопряженные системы линий. Асимптотич. сетям фокальных поверхностей в сферич. отображении Б. к. соответствует ортогональная сеть. Кривизна фокальной поверхности Б. к. в параметрах асимптотич. линий u и v выражается формулой:

$$K=-\frac{1}{(\varphi(u)+\psi(v))^2}.$$

Поверхности, кривизны к-рых удовлетворяют этому условию, наз. *Бианки поверхностями* (поверхности B).

Б. к. рассмотрены Л. Бианки [1].

Лит.: [1] Bianchi L., «Ann. mat. pura ed appl.», 1890, v. 18, S. 301—58; [2] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [3] его же, Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.— Л., 1937; [4] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

БИАНКИ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность отрицательной гауссовой кривизны K, к-рая в асимптотич. параметрах (u, v) имеет вид:

$$K=-\frac{1}{[U(u)+V(v)]^2},$$

где $U(u)$, $V(v)$ — произвольные функции; таким образом, инвариантный признак Б. п. состоит в том, что функция $(-K)^{-1/2}$ диагональна относительно ее асимптотич. сети, т. е.

$$\frac{\partial^2(-K)^{1/2}}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Напр., линейчатая Б. п. есть *коноид* — поверхность, присоединенная к *Петерсона поверхности*. Знание Б. п. позволяет определить классы поверхностей, допускающих *изгибание на главном основании*, и классифицировать их. Так, если главное основание содержит два семейства геодезич. линий, то функции U, V постоянны и изгибаемая поверхность есть *Фосса поверхность* (класс B_0).

Класс B_1 характеризуется тем, что только одно семейство линий главного основания состоит из геодезических (одна из функций U, V постоянна), таковы, напр., коноиды. Класс B_2 соответствует функциям U, V, существенно зависящим от своих аргументов. См. также *Бианки конгруэнция*.

И. Х. Сабитов.

БИАНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — переход от одной фокальной поверхности S конгруэнции Бианки к другой фокальной поверхности S' той же конгруэнции (см. *Бианки конгруэнция*). Если S — псевдосфера, то и все поверхности S' — псевдосферы. Точки псевдосфер S', соответствующие точке $x\in S$, лежат на окружности с центром в точке x и с радиусом, равным радиусу псевдосферы S. Псевдосферы S' секут ортогонально полученную таким образом циклич. систему окружностей.

В. Т. Базылев.

БИАНКИ ТОЖДЕСТВО — соотношение, связывающее компоненты ковариантных производных *кривизны*

тензора R^h_{ijk} риманова пространства:

$$R^h_{ijk,\ l} + R^h_{ikl,\ j} + R^h_{ilj,\ k} = 0,$$

где $h,\ i,\ j,\ k,\ l = 1, \ldots, n$. Впервые установлено в 1902 Л. Бианки (см. [1]).

Лит.: [1] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, 3 ed., v. 1—2, Bologna, 1923—1927. *М. И. Войцеховский.*

БИБЕРБАХА ГИПОТЕЗА — предположение, высказанное в 1916 Л. Бибербахом [1]: для всех функций $f(z)$ к л а с с а S, т. е. для функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ и имеющих в нем разложение

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

справедлива оценка $|c_n| \leqslant n,\ n \geqslant 2$, причем $|c_n| = n$ только для ф у н к ц и й К ё б е

$$f_\theta(z) = z\left(1 - e^{i\theta} z\right)^{-2},$$

где θ — действительное число. Л. Бибербах доказал справедливость гипотезы только для $n=2$. Задача нахождения точной оценки коэффициентов в классе S — частный случай *коэффициентов проблемы*.

Б. г. простой формулировкой и глубиной привлекла внимание многих математиков и способствовала развитию различных методов геометрич. теории функций комплексного переменного. К настоящему времени (1977) справедливость Б. г. установлена для $n \leqslant 6$. Для $n=3$ она была впервые доказана К. Лёвнером (K. Löwner) в 1923 параметрич. методом (см. *Параметрических представлений метод*); в дальнейшем появились и другие доказательства оценки $|c_3| \leqslant 3$, при к-рых использовались вариационный метод, параметрич. метод, метод экстремальных метрик. Для $n=4$ справедливость Б. г. была установлена впервые в 1955 посредством одновременного использования вариационного и параметрич. методов. В 1960 с помощью условий однолистности Грунского оценка $|c_3| \leqslant 4$ была получена значительно проще. Эта оценка была получена также методом вариаций и геометрич. рассуждениями; в другом случае — с использованием неравенств Грунского в матричной форме. Для $n=6$ справедливость Б. г. доказана в 1968 с помощью неравенств Грунского, для $n = 5$ в 1972 вариационным методом.

Среди других результатов, направленных на доказательства справедливости Б. г., интересны следующие. У. Хейман [4] получил ряд результатов по асимптотич. поведению коэффициентов при $n \to \infty$ функций, p-листных в среднем в $|z|<1$, в частности для класса S. Он доказал, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{n} = \alpha_f,$$

и что $\alpha_f \leqslant 1$ со знаком равенства только для функций Кёбе.

Ряд работ посвящен л о к а л ь н о й г и п о т е з е Б и б е р б а х а, т. е. доказательству того, что функция Кёбе дает $\max |c_n|$, по крайней мере для тех функций класса S, к-рые близки к ней в соответствующей топологии (см. *Однолистная функция*). Установлено, что для каждого $n=3,4, \ldots$ существует достаточно малое $\varepsilon_n > 0$ такое, что для функции $f(z) \in S$, удовлетворяющей условию $|c_2 - 2| < \varepsilon_n$, справедлива оценка $\operatorname{Re} c_n \leqslant n$, причем $\operatorname{Re} c_n = n$ только для $f_\theta(z)$. Оценка коэффициентов для всех n, точная относительно порядка зависимости от n, была впервые получена в 1925 Дж. Литлвудом (J. Littlewood) сведением оценки коэффициентов к оценке среднеинтегрального модуля. Более точные оценки были получены И. Е. Базилевичем ($|c_n| < \frac{e}{2} n + \text{const}$; 1951), И. М. Милиным ($|c_n| < 1{,}243\ n,\ n \geqslant 2$; 1965).

Лучшая к настоящему времени (1977) оценка получена в 1972 (см. [7]):

$$|c_n| < \sqrt{\frac{7}{6}}\, n < 1{,}081n, \quad n \geqslant 2.$$

Обзор работ по Б. г. см. в [2], с. 50, 187—90, 571—79, [3], с. 67—121; [9].

Лит.: [1] Bieberbach L., «Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.», 1916, S. 940—55; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [4] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, № 159, p. 385—406; [5] Ozawa M., «Kōdai Math. Semin. Repts», 1969, v. 21, № 1—2, p. 97—132; [6] Pederson R. N., Schiffer M. M., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1972, v. 45, № 3, p. 161—93; [7] Fitzgerald C. H., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1972, v. 46, № 5, p. 356—68; [8] Широков Н. А., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР», 1972, т. 24, с. 182—200; [9] Базилевич И. Е., в кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 444—72.

Е. Г. Голузина.

БИБЕРБАХА МНОГОЧЛЕНЫ — экстремальные многочлены, приближающие функцию, к-рая отображает конформно данную односвязную область на круг. Впервые были рассмотрены Л. Бибербахом [1] в связи с задачей о приближенном вычислении конформно отображающей функции.

Пусть односвязная область G расположена в конечной части плоскости и ограничена кривой Γ, а функция $w=\varphi(z)$ отображает эту область конформно и однолистно на круг $|w|<r_0$ при условиях $\varphi(z_0)=0$ и $\varphi'(z_0)=1$, где z_0 — произвольная фиксированная точка области G и r_0 зависит от z_0. Многочлен $\pi_n(z)$, минимизирующий интеграл

$$J(F_n) = \iint_G |F_n'(z)|^2\, dx\, dy$$

в классе всех многочленов $F_n(z)$ степени n при условиях $F_n(z_0)=0$ и $F_n'(z_0)=1$, наз. многочленом Бибербаха. В классе всех функций, аналитических в области G и удовлетворяющих тем же условиям, этот интеграл минимизируется отображающей функцией $w=\varphi(z)$. Если контур Γ жорданова кривая, то последовательность $\{\pi_n(z)\}$ сходится к функции $\varphi(z)$ равномерно внутри области G. В замкнутой области $\overline{G}$ сходимости может и не быть (см. [2]). Если же контур Γ удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям гладкости, то последовательность $\{\pi_n(z)\}$ сходится равномерно в замкнутой области, причем скорость сходимости зависит от степени гладкости кривой Γ.

Лит.: [1] Bieberbach L., Circolo mat. Palermo», v. 38, 1914, p. 98—112; [2] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1939, т. 5(47), в. 2, с. 391—401; [3] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, М., 1951; [4] Суетин П. К., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 100.

П. К. Суетин.

БИБЕРБАХА — ЭЙЛЕНБЕРГА ФУНКЦИИ в круге $|z|<1$ — класс R функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, имеющих в нем разложение вида

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (1)$$

и удовлетворяющих условию

$$f(z_1)\, f(z_2) \neq 1, \quad |z_1|<1, \quad |z_2|<1.$$

Этот класс функций является естественным расширением класса B функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, имеющих разложение (1) и таких, что $|f(z)|<1$ в круге $|z|<1$. Класс *однолистных функций* из R обозначают $\tilde{R}$. Функции класса R были названы по имени Л. Бибербаха [1], показавшего, что для $f(z)\in\tilde{R}$ имеет место неравенство

$$|c_1| \leqslant 1, \qquad (2)$$

причем равенство в (2) достигается только для функции $f(z)=e^{i\theta}z$, где θ действительное, и С. Эйленберга [2], установившего справедливость неравенства (2) во всем классе R. В. Рогозинский [3] показал, что каждая функция класса R подчинена (см. *Подчинения принцип*)

нек-рой функции из класса $\tilde{R}$. Из (2) для $f(z)\in R$ получается точное неравенство

$$|f'(z)|\leqslant\frac{|1-f^2(z)|}{1-|z|^2},\quad |z|<1. \tag{3}$$

В классе R получена следующая оценка модуля функции: если $f(z)\in R$, то

$$|f(z)|\leqslant r(1-r^2)^{-1/2},\quad |z|=r,\quad 0<r<1, \tag{4}$$

и равенство в (4) реализуется только функциями $\pm f(ze^{i\theta};\ r)$, где θ действительное, а

$$f(z;\ r)=\frac{(1-r^2)^{1/2}z}{1+irz}.$$

Экстремальных метрик методом была решена задача о максимуме и минимуме $|f(z)|$ в классе $\tilde{R}(c)$ функций из $\tilde{R}$ с фиксированным значением $|c_1|=c$, $0<c\leqslant 1$, в разложении (1): для $f(z)\in\tilde{R}(c)$, $0<c<1$, справедливы точные неравенства

$$\operatorname{Im}H(ir;\ r,\ c)\leqslant|f(re^{i\theta})|\leqslant\operatorname{Im}F(ir;\ r,\ c), \tag{5}$$

где функции $w=H(z;\ r,\ c)$ и $w=F(z;\ r,\ c)$ отображают круг $|z|<1$ на области, симметричные относительно мнимой оси плоскости w, границы к-рых принадлежат объединению замыканий нек-рых траекторий или ортогональных траекторий *квадратичного дифференциала* на плоскости w, в расположении нулей и полюсов к-рого имеется определенная симметрия (см. [4], [5]). Нек-рые окончательные результаты для функций класса $\tilde{R}(c)$ были получены одновременным использованием метода экстремальных метрик и метода симметризации (см. [4]).

Большое число результатов для функций классов $\tilde{R}$ и R является следствием соответствующих результатов для систем функций, отображающих круг $|z|<1$ на взаимно неналегающие области (см. [6]). Аналогом класса R для конечно связной области G, не имеющей изолированных граничных точек и не содержащей точки $z=\infty$, является класс $R_a(G)$, $a\in G$, функций $f(z)$, регулярных в G и удовлетворяющих условиям $f(a)=0$, $f(z_1)f(z_2)\neq 1$, где z_1, z_2 — любые точки области G. Класс $R_a(G)$ расширяет класс $B_a(G)$ функций $f(z)$, регулярных в G и таких, что $f(a)=0$, $|f(z)|<1$ в области G. Распространением результата Бибербаха — Эйленберга и неравенства (3) на функции класса $R_a(G)$ является следующая точная оценка: если $f(z)\in R_a(G)$, то

$$|f'(z)|\leqslant|1-f^2(z)|\,|F'(z,\ z)|,\ z\in G,$$

где $F(z,\ b)$, $b\in G$, — та из функций класса $B_b(G)$, для к-рой $|F'(b,\ b)=\max|f'(b)|$ в этом классе.

Лит.: [1] Bieberbach L., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 153—72; [2] Eilenberg S., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 267—72; [3] Rogosinski W., «J. London Math. Soc.», 1939, v. 14, № 1, p. 4—11; [4] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [5] Jenkins J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 119, № 2, p. 195—215; [6] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

Г. В. Кузьмина.

БИВЕКТОР — упорядоченная пара $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ векторов аффинного пространства A, отложенных от общего начала. Б. полагается равным нулю, если составляющие его векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны. Ненулевой Б. определяет в A несущую его двумерную плоскость. Два Б. наз. параллельными, если параллельны несущие их плоскости. Если пространство имеет конечную размерность n и $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ — контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{u}$, $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ — контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{v}$, вычисленные в нек-ром базисе $e=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства A, то величины

$$a^{ij}=\begin{vmatrix} u^i & v^i \\ u^j & v^j \end{vmatrix}=2!\,u^{[i}v^{j]},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n,$$

наз. координатами бивектора $[u, v]$ в базисе e. Эти координаты кососимметричны по своим индексам; среди них C_n^2 существенных координат. При переходе в A к другому базису координаты Б. ведут себя как координаты дважды контравариантного тензора. Два Б. наз. равными, если в к.-л. базисе равны их координаты (они будут равны и в любом другом базисе). Класс равных Б. наз. свободным бивектором. При наличии в A скалярного произведения на Б. распространяется ряд метрич. понятий векторной алгебры. Мерой Б. наз. площадь параллелограмма, образованного векторами u, v, $-u$, $-v$, начало каждого из к-рых помещено в конец предыдущего. Равные Б. имеют равную меру. Скалярным произведением двух Б. наз. число, равное произведению мер сомножителей на косинус угла между несущими их плоскостями. Скалярное произведение является билинейной формой от координат сомножителей, коэффициенты к-рой определяются только метрич. тензором пространства A.

Если размерность A равна 3, то Б. $[u,v]$ может быть отождествлен с вектором пространства A, наз. *векторным произведением* векторов u, v.

В тензорном исчислении Б. наз. любой контравариантный кососимметрический тензор валентности 2 [т. е. тензор типа (2,0)]. Каждый такой тензор может быть представлен в виде суммы тензоров, к-рым соответствуют ненулевые Б. с различными несущими плоскостями. Они определяют листы бивектора. Ранг кососимметрической матрицы размера $n\times n$, составленной из координат Б., есть четное число 2ρ, где ρ – число листов Б. В пространстве A над полем действительных чисел эта матрица подобна матрице

$$\left\| \begin{array}{cccccc} J_1 & & & & & 0 \\ & J_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_\rho & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right\|$$

с блоками

$$J_j = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|, \quad 1 \leqslant j \leqslant \rho.$$

См. также *Внешнее произведение*, *Поливектор*, *Плюккеровы координаты*.

Лит.: [1] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.

Л. П. Купцов.

БИВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО – *центроаффинное пространство* E_N (где $N=n(n-1)/2$), к-рое может быть отнесено каждой точке пространства аффинной связности A_n (в частности, риманова пространства V_n). Пусть в точке пространства A_n (или V_n) рассматриваются все тензоры, у к-рых ковариантная и контравариантная валентности четные; ковариантные и контравариантные индексы разбиваются на отдельные пары, для каждой из к-рых тензор кососимметричен. Тензоры, обладающие этими двумя свойствами, наз. битензорами. Если принять каждую кососимметрическую пару индексов за один собирательный индекс, то число новых индексов будет равно $N=n(n-1)/2$. Простейшим битензором является *бивектор*

$$v_{\alpha\beta} = -v_{\beta\alpha} \longrightarrow v_a, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n; \; a = 1, \ldots, N.$$

Если в точке P пространства A_n

$$A_{\beta}^{\alpha'} \overset{\text{def}}{=\!=} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \right)_P, \quad A_b^{a'} \longrightarrow A_{[\beta}^{[\alpha'} A_{\delta]}^{\gamma']}, \quad v^a \longrightarrow v^{\alpha\beta},$$

то $v^{a'} = A_b^{a'} v^b$, и совокупность бивекторов из A_n (или из V_n) в данной точке определяет совокупность векторов с

N компонентами, удовлетворяющими условиям

$$v^{a'} = A^{a'}_{a} v^{a}, \quad v^{a} = A^{a}_{a'} v^{a'},$$
$$|A^{a'}_{a}| \neq 0, \quad A^{a}_{b'} A^{b'}_{c} = \delta^{a}_{c},$$

т. е. эта совокупность определяет центроаффинное пространство E_N, наз. бивекторным пространством. В V_n Б. п. может быть метризовано при помощи метрич. тензора

$$g_{ab} \longrightarrow g_{\alpha\beta\gamma\delta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma},$$

после чего E_N становится метрич. пространством R_N.

Б.п. имеют применение в римановой геометрии и общей теории относительности. В данной точке пространства V_n строится Б. п. R_N, а тензору кривизны с компонентами $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ сопоставляется тензор второй валентности с компонентами R_{ab}, $R^{a}{}_{b}$, $R^{b}{}_{a}$, соответственно. Тогда задача изучения алгебраич. структуры тензора кривизны пространства V_n может быть сведена к изучению пучка квадратичных форм $R_{ab} - \lambda g_{ab}$, вторая из к-рых невырожденная ($|g_{ab}| \neq 0$). Исследование элементарных делителей этой пары приводит к классификации пространств V_n. При $n = 4$ ($N = 6$) и сигнатуре ($+ - - - +$) формы $g_{\alpha\beta}$ доказывается, что существует всего три различных типа пространств Эйнштейна.

Каждому вращению в V_n может быть отнесен бивектор; значит, в R_N ему соответствует вектор, что оказывается удобным при исследовании бесконечно малых преобразований. Б. п. по существу совпадают с *бипланарными пространствами* [2].

Лит.: [1] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [2] Иордан П., «Уч. зап. Каз. ун-та», 1954, в. 114, кн. 8.

А. З. Петров.

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяющая в D уравнению

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Это уравнение наз. бигармоническим уравнением. Класс Б. ф. включает класс *гармонических функций* и является подклассом класса *полигармонических функций*. Каждая Б. ф. есть аналитич. функция от координат x_i.

Наибольшее значение с точки зрения приложений имеют Б. ф. $u(x_1, x_2)$ двух переменных. Такие Б. ф. представимы при помощи гармонич. функций u_1, u_2 или v_1, v_2 в виде

$$u(x_1, x_2) = x_1 u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)$$

или

$$u(x_1, x_2) = (r^2 - r_0^2) v_1(x_1, x_2) + v_2(x_1, x_2),$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, а r_0^2 — постоянная. Основная краевая задача для Б.ф. состоит в следующем: найти Б. ф. в области D, непрерывную вместе с производными 1-го порядка в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям

$$u\Big|_C = f_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f_2(s), \qquad (*)$$

где $\partial u/\partial n$ — производная по нормали к C, а $f_1(s)$, $f_2(s)$ — заданные непрерывные функции дуги s на контуре C. Указанные выше представления Б. ф. позволяют получить решение задачи (*) в явном виде в случае круга D, исходя из интеграла Пуассона для гармонич. функций (см. [1]).

Б.ф. двух переменных допускают также представление

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\left\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\bar{z}\,\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}\right\}, \quad \bar{z} = x_1 - i x_2,$$

при помощи двух аналитич. функций $\varphi(z)$, $\chi(z)$ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$. Это представление позволяет свести краевую задачу (*) для произвольной области D к системе краевых задач для аналитич. функций, метод решения к-рой подробно разработан Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили. Эта методика получила развитие при решении различных *плоских задач теории упругости*, в к-рых основной Б. ф. является функция напряжений, или *Эйри функция* (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966, гл. 4; [2] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966, гл. 2; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.

Е. Д. Соломенцев.

БИГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, голоморфный изоморфизм, голоморфизм, псевдоконформное отображение,— обобщение однолистного *конформного отображения* на случай нескольких комплексных переменных. *Голоморфное отображение* области $D\subset\mathbb{C}^n$ на область $D'\subset\mathbb{C}^n$ наз. биголоморфным отображением, если оно взаимно однозначно. Б. о. всегда невырождено в D; обратное к нему отображение тоже является Б.о.

Голоморфности область при Б. о. переходит в область голоморфности; голоморфные, плюригармонич. и плюрисубгармонич. функции также инвариантны относительно Б. о. При $n>1$ Б. о. не являются конформными (за исключением нек-рых линейных отображений), *Римана теорема* для Б. о. неверна (напр., шар и бикруг в $\mathbb{C}^2$ нельзя биголоморфно отобразить друг на друга). Б. о. области D на себя наз. (голоморфным) автоморфизмом; при $n>1$ существуют односвязные области, у к-рых нет автоморфизмов, отличных от тождественного отображения.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

БИЕКЦИЯ, биективное отображение, множества A в множество B — отображение $f:A\to B$, при к-ром различные элементы из A имеют различные образы и $f(A)=B$. Другими словами, f— взаимно однозначное отображение A на B, или отображение, являющееся одновременно *инъекцией* и *сюръекцией*. Б. устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств A и B. Б. множества A на A наз. также перестановкой множества A.

О. А. Иванова.

БИКАТЕГОРИЯ — категория $\mathfrak{K}$, в к-рой выделены подкатегория эпиморфизмов $\mathfrak{E}$ и подкатегория мономорфизмов $\mathfrak{M}$ таким образом, что выполняются следующие условия:

1) всякий морфизм α из категории $\mathfrak{K}$ разлагается в произведение $\alpha=\nu\mu$, где $\nu\in\mathfrak{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$;

2) если $\nu\mu=\rho\tau$, где ν, $\rho\in\mathfrak{E}$, μ, $\tau\in\mathfrak{M}$, то существует такой изоморфизм θ, что $\rho=\nu\theta$, и $\tau=\theta^{-1}\mu$;

3) $\mathfrak{E}\cap\mathfrak{M}$ совпадает с классом изоморфизмов категории $\mathfrak{K}$.

Эпиморфизмы из $\mathfrak{E}$ (мономорфизмы из $\mathfrak{M}$) наз. допустимыми эпиморфизмами (мономорфизмами) бикатегории.

Понятие Б. аксиоматизирует возможность разложения произвольного отображения в произведение сюръективного и инъективного отображений. Категория множеств, категория множеств с отмеченной точкой, категория групп являются бикатегориями с единственной бикатегорной структурой. В категории всех топологич. пространств, а также в категории всех ассоциативных колец имеется целый класс различных бикатегорных структур.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$ax^4+bx^2+c\quad 0,$$

где a, b, c — заданные комплексные числа, причем $a \neq 0$. Подстановкой $y = x^2$ сводится к *квадратному уравнению*.

БИКОМПАКТ — бикомпактное хаусдорфово пространство. См. *Бикомпактное пространство*.

БИКОМПАКТИФИКАЦИЯ — то же, что и *бикомпактное расширение*.

БИКОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий на множестве отображений одного топологич. пространства в другое. Если F — некоторое множество отображений топологич. пространства X в топологич. пространство Y, то каждый конечный набор пар $(X_1, U_1), \ldots, (X_n, U_n)$, где X_i — бикомпактное подмножество пространства X и U_i — открытое подмножество пространства Y, $i = 1, \ldots, n$, определяет подмножество тех отображений $f \in F$, для к-рых одновременно $f(X_i) \subset U_i$; совокупность всех таких подмножеств объявляется базой Б.о.т. на множестве F. Важность Б.о.т. следует из того, что она входит существенным элементом в принадлежащую Л. С. Понтрягину теорию двойственности локально бикомпактных коммутативных групп и участвует в построении косых произведений. Если Y — хаусдорфово пространство, то и Б.о.т. также удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Если все отображения $f \in F$ непрерывны, а Y вполне регулярное пространство, то и множество F, наделенное Б.о.т., вполне регулярно. В предположении, что все отображения f непрерывны, а пространство X локально бикомпактно, Б.о.т. на F является допустимой или совместно непрерывной, т. е. отображение $\varphi: F \times X \to Y$, определяемое формулой $\varphi(f, x) = f(x)$, непрерывно и при этом Б.о.т. является наименьшей (самой слабой) из всех топологий на F, для которых отображение φ непрерывно. В этом преимущество Б.о.т. перед топологией поточечной сходимости, к-рая обычно слабее Б.о.т. и тогда она не является допустимой. Фундаментальное значение имеет и тот факт, что группа гомеоморфизмов бикомпакта X на себя, наделенная Б.о.т., является топологич. группой, непрерывно действующей (в смысле сказанного выше) на X. Группа гомеоморфизмов произвольного локально бикомпактного пространства на себя уже может не быть топологич. группой относительно Б.о.т. (переход к обратному элементу может оказаться разрывным отображением относительно этой топологии), но если локально бикомпактное пространство X локально связно, то снова Б.о.т. превращает группу всех гомеоморфизмов X на себя в топологич. группу, непрерывно действующую на X. Этот результат важен, ибо все многообразия локально бикомпактны и локально связны.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 2 изд., М., 1954; [3] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [4] Arens R., «Amer. J. Math.», 1946, v. 68, № 4, p. 593—610.

А. В. Архангельский, С. И. Сирота.

БИКОМПАКТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного пространства в другое, при к-ром прообраз каждой точки есть бикомпакт (см. *Бикомпактное пространство*). Требование бикомпактности отображения особенно полезно в соединении с другими ограничениями на отображение. Прежде всего выделяются открытые Б.о. (см. *Открытое отображение*), *совершенное отображение* и факторные Б. о. (см. *Факторное отображение*). Важный частный случай Б.о. *конечнократное отображение*. Топологич. свойства более всего устойчивы по отношению к совершенным отображениям, к-рые служат наиболее естественным аналогом непрерывных отображений бикомпактов в классе всех хаусдорфовых пространств. Произведение Б.о. есть Б.о.

Лит.: [1] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 6(120), с. 3—46; [2] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4(130), с. 133—84.

А. В. Архангельский.

БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в каждом открытом покрытии к-рого содержится конечное подпокрытие того же пространства. Следующие утверждения равносильны: 1) пространство X бикомпактно; 2) пересечение любой центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто; 3) пересечение любой максимальной центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто; 4) пересечение произвольной убывающей вполне упорядоченной последовательности любой мощности непустых замкнутых в X множеств не пусто; 5) каждая центрированная система подмножеств множества X имеет точку прикосновения в X; 6) каждый ультрафильтр на X сходится в X; 7) для каждого бесконечного подмножества M множества X в X существует точка полного накопления. Подпространство n-мерного евклидова пространства бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Понятие бикомпактного топологического пространства занимает фундаментальное положение в топологии и современном функциональном анализе; при этом нек-рые принципиальные свойства Б.п. (с многочисленными приложениями) рассматриваются уже в математическом анализе, например всякая непрерывная функция, определенная на Б.п., ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Термин «Б.п.» принадлежит П. С. Александрову, внесшему огромный вклад в создание и развитие теории Б.п., начало к-рой положено «Мемуаром о компактных топологических пространствах» П. С. Александрова и П. С. Урысона.

Понятие бикомпактного пространства явилось первоначально усилением введенного М. Фреше (M. Frechet) понятия к о м п а к т н о г о п р о с т р а н с т в а: топологич. пространство к о м п а к т н о — в первоначальном смысле слова, или с ч е т н о к о м п а к т н о, как говорят теперь) если в нем имеет место к.-л. из следующих эквивалентных между собою предложений: 1) в каждом счетном открытом покрытии этого пространства содержится его конечное подпокрытие; 2) пересечение любой счетной центрированной системы непустых замкнутых его подмножеств не пусто; 3) пересечение любой счетной убывающей последовательности непустых замкнутых множеств не пусто; 4) каждая счетная централизованная подмножеств множества система его подмножеств имеет точку прикосновения; 5) для каждого счетного подмножества в нем существует точка полного накопления.

Однако дальнейшее развитие математики и ее приложений показало, что понятие б и к о м п а к т н о с т и настолько важнее первоначального понятия компактности, что сейчас часто под компактностью понимают именно бикомпактность, а компактные в старом смысле пространства называют счетно компактными. Оба понятия равносильны в применении к метрическим пространствам.

Замкнутое подпространство Б.п. бикомпактно. Топологич. произведение любого множества Б.п. бикомпактно (т е о р е м а Т и х о н о в а, см. *Тихоновское произведение*). Топологич. пространство, являющееся образом Б.п. при непрерывном отображении, бикомпактно. Эти свойства Б.п. показывают устойчивость класса Б.п. по отношению к основным для общей топологии операциям, и на них в первую очередь базируются приложения понятия бикомпактности. Особое значение имеют Б. п., удовлетворяющие аксиоме отделимости Хаусдорфа и наз. б и к о м п а к т а м и. При этом топологич. произведение любого множества бикомпактов есть бикомпакт; замкнутое подпространство бикомпакта является бикомпактом; образ бикомпакта при непрерывном отображении в хаусдорфово пространство есть бикомпакт. Далее перечисляются свойства бикомпактов,

не имеющие места для произвольных Б. п. Каждый бикомпакт является нормальным и, тем более, вполне регулярным пространством. Пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных в бикомпакте множеств всюду плотно в нем. Равносильное утверждение: никакой бикомпакт нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств. Бикомпакты характеризуются как регулярные пространства, замкнутые в любом объемлющем их хаусдорфовом пространстве. На этом основана теорема о том, что каждое непрерывное отображение Б.п. в хаусдорфово пространство замкнуто. Эта теорема имеет важное следствие: любое взаимно однозначное непрерывное отображение Б. п. на хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм.

Класс Б. п., равно как и класс бикомпактов, устойчив относительно перехода к пространству замкнутых подмножеств (взятому с топологией Вьеториса); при этом вес пространства не повышается. Пространство непустых замкнутых подмножеств канторова совершенного множества C гомеоморфно C. Особую роль в теории Б. п. играют тихоновские кубы I^τ и обобщенные канторовы дисконтинуумы D^τ, определяемые соответственно как топологич. произведения отрезков $[0,1]$ и как произведения простых двоеточий, где τ - произвольное кардинальное число. При $\tau=\aleph_0$ получаем гильбертов кирпич. Все I^τ являются бикомпактами и каждый бикомпакт веса, не превосходящего τ, гомеоморфен нек-рому замкнутому подпространству куба I^τ. Таким образом, каждый бикомпакт может быть получен из отрезков применением всего лишь двух операций: топологического произведения и перехода к замкнутому подпространству. Класс всех подпространств бикомпактов также допускает теперь точное описание — как класс всех подпространств кубов I^τ. С другой стороны, это в точности класс всех вполне регулярных пространств.

Вес пространства — один из самых общих топологич. инвариантов — в случае бикомпактов становится особенно существенной характеристикой. Бикомпакт метризуем в том и только в том случае, если он обладает счетной базой. В то же время, если бикомпакт Y является образом пространства X при непрерывном отображении, то вес Y не превышает веса X, т. е. среди непрерывных образов пространств со счетной базой нет неметризуемых бикомпактов. Вес бикомпакта $Y=Y_1 \cup Y_2$ не превосходит наибольшего из весов Y_1 и Y_2, т. е. никакой неметризуемый бикомпакт нельзя представить в виде суммы двух пространств со счетной базой. В основе последних двух фактов лежит понятие с е т и. Если бикомпакт обладает сетью мощности $\leqslant\tau$, то он имеет и базу мощности $\leqslant\tau$. В частности, всякий счетный бикомпакт имеет счетную базу, метризуем и даже гомеоморфен замкнутому подмножеству отрезка. Обычно метризуемые бикомпакты наз. к о м п а к т а м и. Всякая метрика на компакте полна и вполне ограничена, и каждое метризуемое пространство с этим свойством есть компакт (Ф. Хаусдорф, F. Hausdorff).

Топологич. произведение счетного семейства компактов и замкнутые подмножества компактов суть компакты. Каждый нульмерный компакт гомеоморфен нек-рому компакту, лежащему в канторовом совершенном множестве (в качестве замкнутого подмножества). Всякий компакт есть непрерывный образ канторова совершенного множества (П.С. Александров). Каждый бикомпакт есть непрерывный образ нек-рого нульмерного бикомпакта.

В связи с важной ролью кубов I^τ в топологии был изучен класс бикомпактов, разлагающихся в произведение компактов, а также класс их непрерывных образов. Бикомпакты, являющиеся непрерывными образами

дисконтинуумов D^τ, наз. диадическими. Класс диадич. бикомпактов достаточно широк: все компакты, все кубы I^τ, пространства всех бикомпактных топологич. групп суть диадич. бикомпакты. Класс диадич. бикомпактов есть наименьший класс топологич. пространств, замкнутый относительно топологич. произведений и непрерывных отображений и содержащий все бикомпакты, состоящие из конечного числа точек.

Простейшим примером недиадич. бикомпакта является несчетный бикомпакт с единственной неизолированной точкой. Диадич. бикомпакты обладают рядом замечательных свойств, напр.: всякая дизъюнктная система непустых открытых множеств диадич. бикомпакта конечна или счетна (свойство Суслина); всякий диадич. бикомпакт с первой аксиомой счетности метризуем, т. е. имеет счетную базу; произведение диадич. бикомпактов есть диадич. бикомпакт; бикомпакт, являющийся непрерывным образом диадич. бикомпакта, диадичен.

Специфич. свойствами обладают и упорядоченные бикомпакты. Связный сепарабельный упорядоченный бикомпакт обладает счетной базой. Примером связного сепарабельного (диадического) бикомпакта без счетной базы служит куб I^τ при $\tau = \mathfrak{c}$ (мощность континуума). Каждый бикомпакт, являющийся непрерывным образом упорядоченного бикомпакта, имеет базу, границы элементов к-рой компакты. Пересечение класса диадич. бикомпактов с классом всех бикомпактов, являющихся непрерывными образами упорядоченных бикомпактов, состоит в точности из всех компактов.

Среди Б.п. важное место занимают совершенно нормальные бикомпакты. Нормальное пространство наз. совершенно нормальным, если каждое замкнутое в нем множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств. Каждый совершенно нормальный бикомпакт обладает свойством Суслина. Любое пространство со счетной сетью, лежащее в совершенно нормальном бикомпакте, обладает счетной базой. Произведение даже двух совершенно нормальных бикомпактов может не быть совершенно нормальным бикомпактом: пространство $X \times X$ будет совершенно нормальным бикомпактом в том и только в том случае, если X — компакт. Но образ совершенно нормального бикомпакта и произведение совершенно нормального бикомпакта на компакт совершенно нормальны. Бикомпакт совершенно нормален в том и только в том случае, если каждое его подпространство финально компактно. Проблема существования несепарабельного упорядоченного совершенно нормального бикомпакта эквивалентна *Суслина проблеме*.

Многие исследования посвящены выяснению связи между кардинальнозначными топологич. инвариантами для случая бикомпактов. Если база бикомпакта точечно счетна, то она счетна. Мощность любого несчетного бикомпакта с первой аксиомой счетности равна мощности континуума. Если бикомпакт секвенциален и удовлетворяет условию Суслина, то его мощность не превышает мощности континуума. Если однородный бикомпакт X секвенциален, то $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. В специальном предположении построен наследственно сепарабельный бикомпакт мощности, большей, чем $\mathfrak{c}$.

Имеется цикл теорем о бикомпактах, связанный с понятием универсальности (см. *Универсальное пространство*). Для каждого кардинального числа τ существует такой бикомпакт веса τ, что каждый бикомпакт веса, не большего, чем τ, вкладывается в него посредством гомеоморфизма. Этим свойством обладает, напр., I^τ. Аналогичный результат имеет место для случая, когда фиксированы вес и размерность dim или Ind:

каковы бы ни были кардинальное число τ и натуральное число n, существуют такие бикомпакты, $\Pi^{n\tau}$ и $\Psi^{n\tau}$ веса τ и размерности n ($\dim \Pi^{n\tau}$ и $\operatorname{Ind} \Psi^{n\tau}$), что каждый бикомпакт, вес к-рого не превосходит τ, а размерность не превосходит n, вкладывается в $\Pi^{n\tau}$ (соответственно $\Psi^{n\tau}$) посредством гомеоморфизма. В качестве $\Pi^{o\tau}$ и $\Psi^{o\tau}$ можно взять D^{τ}. В предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы получен двойственный результат: для каждого кардинального числа τ существует нульмерный бикомпакт X веса τ, к-рый можно непрерывно отобразить на произвольный бикомпакт веса, не большего, чем τ.

Раздел общей топологии, посвященный непрерывным отображениям бикомпактов, является одним из самых разработанных и богатых результатами. Так, если X и Y бикомпакты, а φ: $X \to Y$ непрерывное отображение и $\varphi(X) = Y$, то существует замкнутое в X подпространство X_1, для к-рого $\varphi(X_1) = Y$ и сужение $\varphi|_{X_1}: X_1 \to Y$ является неприводимым отображением. Это выясняет фундаментальную роль неприводимых отображений. Для произвольного фиксированного бикомпакта X во множестве $N(X)$ всех бикомпактов Z, допускающих неприводимое отображение на X, существует бикомпакт $\dot{X}$, к-рый можно неприводимо отобразить на любой бикомпакт из $N(X)$. Этот бикомпакт $\dot{X}$ наз. абсолютом бикомпакта X (см. *Абсолют* регулярного топологического пространства); он определен с точностью до гомеоморфизма. Бикомпакт тогда и только тогда гомеоморфен своему абсолюту, когда он экстремально несвязен (см. *Экстремально несвязное пространство*). Экстремально несвязных бикомпактов очень много: по каждому бикомпакту определяется его абсолют, являющийся экстремально несвязным бикомпактом. При этом неприводимые отображения бикомпактов определяются гомеоморфизмами их абсолютов. Они имеют весьма своеобразную структуру, в частности бесконечный экстремально несвязный бикомпакт всегда неоднороден. Два бикомпакта называются соабсолютными, если их абсолюты гомеоморфны. Одной из общих задач здесь является отыскание эффективных внутренних критериев соабсолютности топологических пространств. Следует отметить, что естественная область действия теории абсолютов гораздо шире класса бикомпактов.

Неприводимые отображения важны не только в связи с понятием абсолюта. Известно (А.Н. Колмогоров), что каждое неприводимое отображение компакта на компакт имеет всюду плотное множество точек взаимной однозначности. Если диадич. бикомпакт X неприводимо отображается на бикомпакт Y веса τ, то вес X равен τ.

Важны также открытые отображения бикомпактов. Если два бесконечных бикомпакта связаны открытым конечнократным отображением, то их веса равны. Но существует открытое счетнократное отображение неметризуемого совершенно нормального бикомпакта на компакт. При этом каждое открытое счетнократное отображение бикомпакта на бикомпакт имеет всюду плотное множество точек локальной топологичности.

Бикомпакты много изучались в рамках теории размерности. Для любого бикомпакта X имеет место $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ (П.С. Александров). Существует бикомпакт X с первой аксиомой счетности (а, следовательно, мощности, не превосходящей мощность континуума), для к-рого $\dim X \neq \operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$, но $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для всех совершенно нормальных бикомпактов. Представляет интерес сопоставление теоремы о том, что открытые счетнократные отображения не повышают размерности бикомпактов, с теоремой о представлении: каждый бикомпакт положительной размерности есть образ нек-рого одномерного бикомпакта при открыто-

замкнутом непрерывном отображении, в к-ром прообраз каждой точки нульмерен. Важное значение имеет факторизационная теорема: пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, X и Y — бикомпакты, $f(X)=Y$, $\dim X \leqslant n$ и вес Y меньше или равен τ; тогда существуют бикомпакт Z и непрерывные отображения φ: $X \to Z$ и $\psi: Z \to Y$, для к-рых $f=\psi\varphi$, $\dim Z \leqslant n$, вес Z меньше или равен τ.

Соотношениями между Б. п. и произвольными топологич. пространствами занимается теория *бикомпактных расширений*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [3] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968; [4] Александров П. С., Урысон П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 31, с. 1—96; [5] Александров П. С., «Матем. сб.», 1939, т. 5, в. 2, с. 403—24; [6] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41; [7] его же, «Труды Моск. матем. об-ва», 1965, т. 13, с. 3—55; [8] его же, «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 4, с. 767—71; [9] Мищенко А. С., там же, 1962, т. 144, № 5, с. 985—8; [10] Gleason A. M., «Illinois Math. J.», 1958, v. 2, № 4A, p. 482—9; [11] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 5, с. 967—70; [12] Mardešić S., «Pacific J. Math.», 1967, v. 23, № 3, p. 557—568; [13] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 6, с. 477—79; [14] Архангельский А. В., там же, 1967, т. 174, № 6, с. 1243—46; [15] Hanf W., «Math. Scand.», 1957, v. 5, № 2, p. 205—17.

А. В. Архангельский.

БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ, (б и)компактификация, - *расширение* топологического пространства, являющееся *бикомпактным пространством*. Б. р. существуют у любого топологич. пространства, у любого T_1-пространства есть Б. р., являющиеся T_1-пространствами, но наибольший интерес представляют хаусдорфовы Б. р., имеющиеся лишь у *вполне регулярных пространств*. Обычно под Б. р. понимают хаусдорфово Б. р., но иногда полезно рассматривать и произвольные Б. р. П. С. Александров [1] доказал, что всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство одной точкой можно дополнить до бикомпакта (см. *Александрова бикомпактное расширение*). П. С. Урысон [2], доказав, что всякое нормальное пространство со счетной базой вкладывается в гильбертов кирпич, установил тем самым, что оно обладает Б. р. счетного веса [2]. Термин «Б. р.» впервые ввел А. Н. Тихонов [3], к-рый определил класс вполне регулярных пространств и доказал, что вполне регулярные пространства и только они обладают хаусдорфовыми Б. р., при этом вполне регулярное пространство веса τ имеет хаусдорфово Б. р. веса τ.

Два Б. р. b_1X и b_2X пространства X наз. эквивалентными ($b_1X = b_2X$), если существует гомеоморфизм $f: b_1X \to b_2X$, тождественный на X. Часто Б. р. наз. само отображение вложения: $i: X \to bX$. При таком определении два расширения $i_1: X \to b_1X$ и $i_2: X \to b_2X$ будут эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм $f: b_1X \to b_2X$, что $f_0 i_1 = i_2$. Обычно не различают эквивалентные Б. р. и наз. Б. р. пространства X класс эквивалентных между собой Б. р. этого пространства. В таком случае можно говорить о множестве $B(X)$ хаусдорфовых Б.р. данного (вполне регулярного) пространства X, поскольку мощность любого хаусдорфова расширения пространства X не больше, чем $2^{2^{|X|}}$, а топологии на данном множестве Y также образуют множество мощности $\leqslant 2^{2^{|Y|}}$.

Б. р. b_2X следует за Б. р. b_1X ($b_1X \leqslant b_2X$), если существует непрерывное отображение $f: b_2X \to b_1X$, тождественное на X. Отношение следования превращает $B(X)$ в частично упорядоченное множество. Э. Чех [4] и М. Стоун [5] доказали, что во множестве $B(X)$ существует наибольший элемент βX — *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение* (или максимальное Б. р.).

Задача внутреннего описания всех хаусдорфовых Б.р. данного вполне регулярного пространства X решена [6] построением Б.р. произвольного *близости пространства*, тем самым показано, что всякой близости δ на X, совместимой с топологией, соответствует единственное Б. р. $b_\delta X$, к-рое индуцирует на X исходную близость δ, т. е.

$$A\bar{\delta}B \iff [A]_{b_\delta X} \cap [B]_{b_\delta X} = \varnothing.$$

Максимальное Б. р. βX порождается следующей близостью δ:

$A\bar{\delta}B \iff$ множества A и B функционально отделимы. Б. р. Александрова αX локально бикомпактного хаусдорфова пространства X порождается близостью δ: $A\bar{\delta}B \iff$ множества A и B имеют непересекающиеся замыкания, по крайней мере одно из к-рых бикомпактно.

Соответствие $\delta \to b_\delta$ является изоморфизмом между частично упорядоченным множеством близостей на X, совместимых с топологией, и множеством $B(X)$. При этом соответствие $\delta \to b_\delta$ продолжается до функтора из категории пространств близости, совместимых с топологическими, и близостно непрерывных отображений в категорию бикомпактов и непрерывных отображений.

Значительная часть теории Б. р. посвящена методам построения Б.р. А. Н. Тихонов доказал, что во всяком вполне регулярном пространстве X веса τ существует такое семейство функций $f_\alpha : X \to I_\alpha$ мощности τ, что их диагональное произведение осуществляет вложение пространства X в куб $I^\tau = \Pi_\alpha I_\alpha$ (см. *Тихоновский куб*), после чего Б. р. в X веса τ получается как замыкание fX в I^τ. Э. Чех посредством диагонального произведения всех непрерывных функций $f_\alpha : X \to [0,1]$ построил максимальное Б.р. пространства X. М. Стоун построил максимальное Б. р. с применением булевых алгебр и колец непрерывных функций..

Одним из основных методов в теории Б.р. является созданный П. С. Александровым метод центрированных систем открытых множеств [7], вначале использованный для построения максимального Б. р. и впоследствии широко применявшийся многими математиками. Так, было установлено, что всякое хаусдорфово расширение произвольного хаусдорфова пространства X можно реализовать как пространство центрированных систем открытых в X множеств. Метод центрированных систем был применен при построении изоморфизма между множеством близостей на вполне регулярном пространстве и множеством всех его хаусдорфовых Б. р. Этот метод был применен для построения хаусдорфова Б. р. пространств X по заданному на нем подчинению.

Г. Уолмен [9] построил максимальное Б.р. нормального пространства X как пространство максимальных центрированных систем замкнутых множеств этого пространства. Пространство ωX максимальных центрированных систем замкнутых множеств T_1-пространства X является его бикомпактным T_1-расширением и наз. *Уолмена бикомпактным расширением*. Это расширение, как и расширение Стоуна — Чеха, выделяется среди прочих сходством комбинаторного строения с расширяемым пространством, максимальностью (в определенном смысле), возможностью продолжения непрерывных отображений.

Метод центрированных систем замкнутых множеств позволяет дать обобщение расширения Уолмена. Пусть во вполне регулярном пространстве X дана база замкнутых множеств $\mathfrak{B}$, являющаяся кольцом множеств, т. е. вместе с любыми двумя элементами содержащая их пересечение и объединение. База $\mathfrak{B}$ наз. нормальной, если: 1) для любой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее элемента $B \in \mathfrak{B}$ существуют такие элементы базы B_1 и B_2, что $B_1 \cup B_2 = X$, $x \in X \setminus B_1$,

$B \subset X \setminus B_2$; 2) для любых двух элементов B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$ существуют такие элементы $B_1' \in \mathfrak{B}$, $B_2' \in \mathfrak{B}$, что $X = B_1' \cup B_2'$, $B_1 \subset X \setminus B_1'$, $B_2 \subset X \setminus B_2'$. Пространство максимальных центрированных систем нормальной базы-кольца со стандартным заданием на нем базы замкнутых множеств будет хаусдорфовым Б. р. пространства X, наз. расширением уолменовского типа; неизвестно (1977), всякое ли хаусдорфово Б. р. является расширением уолменовского типа.

Другие способы построения Б.р.: метод максимальных идеалов колец непрерывных функций (см. [11]); метод пополнения предкомпактных равномерных структур (см. [12] и *Пополнение равномерного пространства*); метод *проекционных спектров* (см. [10]); при этом было доказано, что верхним пределом максимального конечного спектра любого T_1-пространства X является его уолменовское расширение ωX и этот предел совпадает с максимальным Б. р. βX тогда и только тогда, когда X—*квазинормальное пространство*.

Важность теории Б. р. объясняется фундаментальным положением бикомпактных пространств в топологии и функциональном анализе. Возможность вложить топологич. пространство в бикомпакт позволяет описать многие свойства вполне регулярных пространств посредством (как правило, более простых) свойств бикомпактов. Так, нормальные пространства с первой аксиомой счетности гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их максимальные Б. р. Это позволяет в принципе свести изучение нормальных пространств с первой аксиомой счетности к изучению бикомпактов. Довольно часто топологич. инварианты расширяемого пространства удается просто выразить в терминах расположения пространства в его Б.р. (см. *Перистое пространство*, *Полнота*, *Нормально расположенное подпространство*). Так, напр., для того чтобы пространство X было пространством счетного типа, т. е. пространством, в к-ром всякий бикомпакт содержится в бикомпакте счетного характера, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого (и, следовательно, для всякого) Б. р. bX нарост $bX \setminus X$ был финально компактен. Пространство X счетного типа интересно также тем, что оно нормально прилегает к наросту всякого своего Б. р. bX, т. е. тем, что любые два непересекающиеся замкнутые в наросте множества имеют непересекающиеся в bX окрестности. С точки зрения расположенности в Б.р. двойственными к пространствам счетного типа являются финально компактные пространства. Пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда нек-рое, а значит и всякое, его Б. р. bX обладает следующим свойством: для всякого бикомпакта $\Phi \subset bX \setminus X$ в наросте существует содержащий его бикомпакт F, имеющий счетный характер в bX.

Особенно важна роль Б. р. в теории размерности. Это, в частности, объясняется равенствами

$$\dim \beta X = \dim X, \quad \operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$$

для произвольного нормального пространства X и равенством

$$\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{ind} X$$

для совершенно нормального пространства X. Одним из первых утверждений о размерностных свойствах Б. р. явилась теорема о существовании у всякого n-мерного нормального пространства со счетной базой хаусдорфова Б. р. того же (счетного) веса и той же размерности (см. [16]). Доказано [20], что среди нормальных пространств X со счетной базой *периферически бикомпактное пространство* и только оно имеет Б.р. bX с нульмерным (в смысле размерности ind) наростом $bX \setminus X$ (см. *Фрейденталя бикомпактное расширение*). При этом среди таких Б.р. данного пространства суще-

ствует наибольшее. Эти два результата явились отправной точкой для целого ряда исследований. Так, доказано [8], что для всякого вполне регулярного пространства X веса τ с $\dim\beta X\leqslant n$, в частности для всякого нормального пространства X веса τ с $\dim X\leqslant n$, существует Б.р. bX веса τ и размерности $\dim bX\leqslant n$. С другой стороны, вполне регулярное пространство X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда X имеет Б. р. с нульмерно лежащим в нем наростом [8]. При этом нарост $bX\setminus X$ нульмерно расположен в расширении bX, если существует такая база $\mathfrak{B}=\{\Gamma\}$ бикомпакта bX, что

$$(bX\setminus X)\cap\Gamma p_{bX}\Gamma=\varnothing$$

для всех $\Gamma\in\mathfrak{B}$.

Видную роль в теории Б. р. играют *совершенно бикомпактные расширения* (см. [15]). Всякое совершенное Б.р. bX пространства X является монотонным образом максимального Б. р. βX (в частности, совершенно и само βX), как и βX, близко к X по комбинаторному строению, но, в отличие от βX, не всегда $\dim X=\dim bX$ даже для метрич. пространства X. В то время, как βX есть наибольшее совершенное Б.р., минимальное совершенное Б.р. существует лишь тогда, когда пространство X имеет Б.р. с пунктиформным наростом (в частности, когда пространство X периферически бикомпактно). При этом минимальное совершенное Б.р. единственно, обладает пунктиформным наростом и является наибольшим среди всех расширений с пунктиформным наростом.

Понятие совершенного Б. р. оказывается полезным при изучении размерности нароста. Если метрич. пространство X со счетной базой вкладывается в компакт bX с нарастом $bX\setminus X$ размерности $\leqslant n$, то в X существует такая (открытая) база, что пересечение границ любых ее $n+1$ элементов компактно [15]. Это условие не является достаточным для существования у пространства X Б.р. bX с $\dim bX=\dim X$ и $\dim(bX\setminus X)\leqslant n$. Более того, если bX совершенное Б.р. пространства X, $\dim bX=n$, $\dim\Phi\leqslant n-1$ для всякого бикомпакта $\Phi\subset bX\setminus X$, то $\dim vX\geqslant n$ для всякого Б. р. vX с пунктиформным наростом [15]. Совершенное Б. р., как и максимальное, интересно возможностью продолжения отображений. Так, в частности, если пространства X и Y обладают минимальными совершенными расширениями μX и μY, то всякое совершенное отображение $f\colon X\to Y$ продолжается в отображение $\overline{f}\colon\mu X\to\mu Y$.

Топологич. пространство X веса τ индуктивно нульмерно (т. е. $\operatorname{ind}X=0$) тогда и только тогда (см. [16]), когда оно имеет индуктивно нульмерное Б.р. bX веса τ, так что пространство X веса τ с $\operatorname{Ind}X=0$ имеет Б.р. того же веса и той же размерности. У вполне регулярного пространства X с $\operatorname{Ind}\beta X\leqslant n$ существует Б. р. bX с $nbX=wX$ и $\operatorname{Ind}bX\leqslant n$, причем это верно и для трансфинитных значений $\operatorname{Ind}\beta X$. Поэтому у сильно паракомпактного метрич. пространства X существует такое Б. р. bX, что $wbX=wX$, $\dim bX=\operatorname{ind}bX=\operatorname{ind}bX=\dim X$, в то же время существует такое пространство X, что $\operatorname{ind}bX>\operatorname{ind}X$ для всякого его Б. р. в X (см. [21]).

Имеется ряд утверждений о Б.р. бесконечномерных пространств. Так, максимальное Б.р. βX нормального S-слабо бесконечномерного пространства X слабо бесконечномерно [16]. Далее, любое вполне регулярное пространство X веса τ, максимальное Б. р. к-рого слабо бесконечномерно (в частности, любое нормальное S-слабо бесконечномерное пространство X веса $\leqslant\tau$), обладает слабо бесконечномерным Б. р. веса $\leqslant\tau$. В этих утверждениях S-слабую бесконечномерность нельзя заменить на A-слабую бесконечномерность (см. *Слабо бесконечномерное пространство*): так, все Б. р. растущей суммы кубов Q^ω (подмножества *гильбертова кир-*

пича Q^∞, состоящего из точек, у к-рых лишь конечное число координат отлично от нуля) суть сильно бесконечномерные пространства [15].

Исследованы [17] вопросы, касающиеся размерности dim наростов Б. р. пространств близости и вполне регулярных пространств. Если пространство близости нормально прилегает к $cP \setminus P$, где cP (единственное) Б. р. пространства P, то $\dim(cP \setminus P)$ равна наименьшему из тех чисел k, что в каждое продолжаемое окаймление можно вписать окаймление кратности $\leqslant k+1$ (см. *Окаймление пространства* в расширении). Пространство X счетного типа обладает Б.р. bX с наростом размерности $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда в X существует структура окаймлений кратности $\leqslant n+1$, обладающая базисным свойством. Кроме того, из существования у данного пространства X Б.р. с наростом размерности $\leqslant n$ вытекает существование Б.р. bX веса $wbX = wX$ с наростом размерности $\leqslant n$.

Частично упорядоченное множество $B(X)$ всех хаусдорфовых Б.р. пространства X является полной *полурешеткой* (относительно операции взятия верхней грани). Множество $B(X)$ есть (полная) решетка тогда и только тогда, когда пространство X локально бикомпактно. Если пространства X и Y локально бикомпактны, то решетки $B(X)$ и $B(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны наросты $\beta X \setminus X$ и $\beta Y \setminus Y$ (см. [18]). Неизвестны условия, к-рым должно удовлетворять (совершенное) отображение $f: X \to Y$, чтобы полурешетки $B(X)$ и $B(Y)$ были изоморфны. В то же время Б. р. совершенных неприводимых прообразов пространства X описываются θ-*близостями* на пространстве X и образуют полную полурешетку относительно естественно определяемого порядка [19]. Б. р. совершенных неприводимых прообразов пространства X связаны также с H-замкнутыми расширениями пространства X.

Лит.: [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971; [2] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.— Л., 1951; [3] Тихонов А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 102, S. 544—61; [4] Čech E., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 823—44; [5] Stone M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 41, p. 375—481; [6] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1952, т. 31, с. 543—74; [7] Александров П. С., «Матем. сб.», 1939, т. 5 [47], с. 403—23; [8] его же, «Успехи матем. науки», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95; [9] Wallman H., «Ann. Math.», 1941, v. 42 [2], p. 687—97; [10] Зайцев В. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93; [11] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 2, с. 48—146; [12] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 100—32; [13] Архангельский А. В., «Матем. сб.», 1973, т. 91, № 1, с. 78—87; [14] Малыхин В., «Докл. АН СССР», 1972; т. 206, № 6, с. 1293—1296; [15] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19 : 6, с. 3—46; 1965, т. 20, в. 1, с. 253—4; [16] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [17] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1966, т. 69, № 1, с. 141—60; 1966, т. 71 : 4, с. 454—82; [18] Magill K. D., «Proc. London Math. Soc.», 1968. Ser. 3, v. 18, pt 2, p. 231—44; [19] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1968, т. 76 : 4, с. 513—36; [20] Freudenthal H., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 261—79; [21] Смирнов Ю. М., «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, № 6, с. 939—42.

В. В. Федорчук.

БИКОМПАКТНОСТЬ — свойство, характеризующее широкий класс топологич. пространств и состоящее в том, что из любого покрытия пространства открытыми множествами можно выделить конечное покрытие. Наряду с термином «Б.» употребляется термин «компактность». Топологич. пространства, обладающие свойством Б., наз. *бикомпактными пространствами.*

А. В. Архангельский.

БИКОМПЛЕКС, двойной комплекс,— дважды градуированный модуль, т. е. представимый как прямая сумма $\Sigma A^{m,n}$ своих подмодулей $A^{m,n}$, рассматриваемый вместе с парой дифференциальных операторов

$$d_1: \quad A^{m,n} \longrightarrow A^{m+1,n},$$
$$d_2: \quad A^{m,n} \longrightarrow A^{m,n+1},$$

удовлетворяющих условиям

$$d_1 \cdot d_2 = 0,\ d_2 \cdot d_2 = 0,\ d_2 d_1 + d_1 d_2 = 0.$$

Иногда вместо прямой суммы рассматривается просто множество $\{A^{m,n}\}$, а также дифференциалы

$$d_1\colon\ A^{m,n} \to A^{m-1,n},$$
$$d_2\colon\ A^{m,n} \to A^{m,n-1},$$

удовлетворяющие тем же условиям. *В. Е. Говоров.*

БИЛИНЕЙНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА — двойной интеграл

$$J(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\psi}(s)\, dx\, ds,$$

где $K(x, s)$ — заданная (вообще говоря, комплекснозначная) функция действительных переменных, интегрируемая с квадратом, $\varphi(x)$, $\psi(s)$ — произвольные (тоже комплекснозначные) функции, интегрируемые с квадратом, а $\overline{\psi}(s)$ - комплексно сопряженная функция с $\psi(s)$. Если $\psi(s) = \varphi(s)$, то $J(\varphi, \varphi)$ наз. квадратичной интегральной формой.

Б. В. Хведелидзе.

БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА на произведении модулей $V \times W$ — *билинейное отображение* $f\colon V \times W \to A$, где V — левый унитарный A-модуль, W — правый унитарный A-модуль, A — кольцо с единицей, рассматриваемое также как (A, A)-бимодуль. Если $V = W$, то говорят, что f есть Б. ф. на модуле V, а также, что V наделен метрич. структурой с помощью f. Определения, касающиеся билинейных отображений, имеют смысл, в частности, для Б. ф. Так, говорят о матрице Б. ф. относительно выбранных базисов в V и W, об ортогональности элементов и подмодулей относительно Б. ф., об ортогональных прямых суммах, невырожденности и т. д. Напр., если A — поле и $V = W$ - конечномерное векторное пространство над A с базисом $e_1, \ldots, e_n$, то для векторов

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$$

и

$$w = w_1 e_1 + \ldots + w_n e_n$$

значение формы

$$f(v, w) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i w_j,$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Иногда полином $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i w_j$ от переменных $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ отождествляют с f и называют билинейной формой на V. Если кольцо A коммутативно, то Б. ф. есть частный случай *полуторалинейной формы* (с тождественным антиавтоморфизмом).

Пусть кольцо A коммутативно. Б. ф. f на A-модуле V наз. симметрической (соответственно антисимметрической, или кососимметрической), если для всех $v_1, v_2 \in V$ будет $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$ (соответственно $f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$) и наз. знакопеременной, если $f(v, v) = 0$. Знакопеременная Б. ф. антисимметрична, обратное верно только, если для любого $a \in A$ из $2a = 0$ следует $a = 0$. Если V имеет конечный базис, то симметрические (соответственно антисимметрические, знакопеременные) формы на V и только они имеют в этом базисе симметрическую (соответственно антисимметрическую, знакопеременную) матрицу. Отношение ортогональности относительно симметрич. или антисимметрич. формы на V симметрично.

Б. ф. f на V наз. изометричной Б. ф. g на W, если существует такой изоморфизм A-модулей $\varphi\colon V \to W$, что

$$g(\varphi(v), \varphi(w)) = f(v, w)$$

для любых $v \in V$. Этот изоморфизм наз. изометрией форм, а если $V = W$ и $f = g$ — метрическим автоморфизмом модуля V (или авто-

морфизмом формы f). Метрич. автоморфизмы модуля образуют группу (группу автоморфизмов формы f), примеры таких групп — ортогональная группа, симплектич. группа.

Пусть A — тело, f — Б. ф. на $V\times W$, пространства $V/W^\perp$ и $W/V^\perp$ конечномерны над A, тогда

$$\dim V/W^\perp = \dim W/V^\perp,$$

и это число наз. рангом f. Если V конечномерно, а f невырождена, то

$$\dim V=\dim W$$

и для каждого базиса $v_1, \ldots, v_n$ в V существует дуальный относительно f базис $w_1, \ldots, w_n$ в W, определяемый условиями $f(v_i, w_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера). Пусть, кроме того, $V=W$, тогда подмодули $V^\perp$ и $W^\perp$ наз. соответственно правым и левым ядрами f; для симметрич. и антисимметрич. форм правое и левое ядра совпадают и наз. просто ядром формы.

Пусть f симметрич. или антисимметрич. Б. ф. на V. Элемент $v\in V$, для к-рого $f(v, v)=0$, наз. изотропным; подмодуль $M\subset V$ наз. изотропным, если $M\cap M^\perp\neq\{0\}$, и вполне изотропным, если $M\subset M^\perp$. Вполне изотропные подмодули играют важную роль в изучении структуры Б. ф. (см. *Витта разложение*, *Витта теорема*, *Витта кольцо*). О строении Б. ф. см. также *Квадратичная форма*.

Пусть A коммутативно и пусть $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ есть A-модуль всех A-линейных отображений V в W, а $L^2(V, W, A)$ — A-модуль всех Б. ф. на $V\times W$. Для всякой Б. ф. f на $V\times W$ и всякого $v_0\in V$ формула

$$l_{f, v_0}(w)=f(v_0, w), \quad w\in W,$$

определяет A-линейную форму на W. Соответственно, для $w_0\in W$ формула

$$r_{f, w_0}(v)=f(v, w_0), \quad v\in V,$$

определяет A-линейную форму на V. Отображение l_f: $v_0\mapsto l_{f, v_0}$ есть элемент из

$$\mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Аналогично определяется отображение r_f из

$$\mathrm{Hom}_A(W, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Отображения $f\mapsto l_f$ и $f\mapsto r_f$ осуществляют изоморфизмы A-модулей

$$L^2(V, W, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(W, A))$$

и

$$L^2(V, W, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(W, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Б. ф. f наз. неособой слева (справа), если l_f (r_f) — изоморфизм; если f неособая и слева и справа, то она наз. неособой, в противном случае f наз. особой. Невырожденная Б. ф. может быть особой. Для свободных модулей V и W одинаковой конечной размерности Б. ф. f на $V\times W$ является неособой тогда и только тогда, когда определитель матрицы f относительно любых базисов в V и W — обратимый элемент кольца A. Следующие изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_A(V, V)\xrightarrow{l} L^2(V, W, A)$$

и

$$\mathrm{Hom}_A(W, W)\xrightarrow{r} L^2(V, W, A),$$

задаваемые неособой Б. ф. f, определяются формулами

$$l(\varphi)(v, w)=f(\varphi(v), w)$$

и

$$r(\psi)(v, w)=f(v, \psi(w)).$$

Эндоморфизмы $\varphi\in\mathrm{Hom}_A(V, V)$ и $\psi\in\mathrm{Hom}_A(W, W)$ наз. сопряженными относительно f, если $\psi=(r^{-1}\circ l)(\varphi)$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969. *В. Л. Попов.*

БИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, билинейная функция,— отображение f произведения $V\times W$ левого унитарного A-модуля V и правого унитарного B-модуля W в (A, B)-*бимодуль* H, удовлетворяющее следующим условиям:

$$f(v+v', w)=f(v, w)+f(v', w);$$
$$f(v, w+w')=f(v, w)+f(v, w');$$
$$f(av, w)=af(v, w);$$
$$f(v, wb)=f(v, w)b;$$

здесь $v, v'\in V$, $w, w'\in W$, $a\in A$, $b\in B$ — произвольно выбранные элементы, A и B — кольца с единицей. Тензорное произведение $V\otimes W$ над $\mathbb{Z}$ имеет естественную структуру (A, B)-бимодуля. Пусть φ: $V\times W\to V\otimes W$ — канонич. отображение, тогда любое Б. о. f индуцирует гомоморфизм (A, B)-бимодулей $\tilde{f}$: $V\otimes W\to H$, для к-рого $f=\tilde{f}\circ\varphi$. Если $A=B$ и коммутативно, то множество $L^2(V, W, H)$ всех Б. о. $V\times W\to H$ является A-модулем относительно обычным образом определяемых операций сложения и умножения на элементы из A, а соответствие $f\to\tilde{f}$ устанавливает канонич. изоморфизм A-модуля $L^2(V, W, H)$ и A-модуля $L(V\otimes W, H)$ всех A-линейных отображений $V\otimes W$ в H.

Пусть V и W — свободные модули с базисами v_i, $i\in I$ и w_j, $j\in J$, соответственно. Б. о. f полностью определяется заданием $f(v_i, w_j)$, для всех $i\in I$, $j\in J$, поскольку для любых конечных подмножеств $I'\subset I$, $J'\subset J$ имеет место формула

$$f\left(\sum_{i\in I'}a_iv_i,\quad\sum_{j\in J'}b_jw_j\right)=$$
$$=\sum_{i\in I',\ j\in J'}a_if(v_i, w_j)b_j. \qquad (*)$$

И обратно, при произвольном выборе элементов $h_{ij}\in H$, $i\in I$, $j\in J$, формула (*), где $f(v_i, w_j)=h_{ij}$, определяет Б. о. $V\times W$ в H. Если I и J конечны, матрица $\|f(v_i, w_j)\|$ называется матрицей Б. о. f относительно данных базисов.

Пусть задано Б. о. f: $V\times W\to H$. Элементы $v\in V$, $w\in W$ наз. ортогональными относительно f, если $f(v, w)=0$. Подмножества $X\subset V$ и $Y\subset W$ наз. ортогональными относительно f, если всякий $x\in X$ ортогонален всякому $y\in Y$. Если X — подмодуль в V, то

$$X^{\perp}=\{w\in W\mid f(x, w)=0 \text{ для всех } x\in X\}$$

— подмодуль в W, наз. ортогональным подмодулем, или ортогональным дополнением, к X. Аналогично определяется ортогональное дополнение $Y^{\perp}$ к подмодулю Y в W. Отображение f наз. вырожденным справа (соответственно слева), если $V^{\perp}\neq\{0\}$ (соответственно $W^{\perp}\neq\{0\}$). Подмодули $V^{\perp}$ и $W^{\perp}$ наз. соответственно левым и правым ядром Б. о. f. Если $V^{\perp}=\{0\}$ и $W^{\perp}=\{0\}$, то f наз. невырожденным, а в противном случае — вырожденным. Отображение f наз. нулевым, если $V^{\perp}=W$ и $W^{\perp}=V$.

Пусть V_i, $i\in I$,— семейство левых A-модулей, W_i, $i\in I$,— семейство правых B-модулей, f_i — Б. о. $V_i\times W_i$ в H, V — прямая сумма A-модулей V_i, а W — прямая сумма B-модулей W_i. Отображение f: $V\times W\to H$, определяемое правилом

$$f\left(\sum_{i\in I}v_i,\ \sum_{i\in I}w_i\right)=\sum_{i\in I}f(v_i, w_i),$$

является Б. о. и наз. прямой суммой отображений f_i. Эта сумма ортогональна, т. е. подмодуль V_i ортогонален подмодулю W_j относительно f при $i\neq j$.

Б. о. f невырождено тогда и только тогда, когда f_i невырождено для всех $i \in I$; при этом

$$V^{\perp} = \sum_{j \neq i} W_j, \quad W_i^{\perp} = \sum_{j \neq i} V_j.$$

В случае $A = B = H$ Б. о. наз. *билинейной формой*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. Л. Попов.

БИЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — аналитический *дифференциал на римановой поверхности*, зависящий от двух точек P и Q и имеющий вид

$$f(z, \zeta) dz d\zeta,$$

где z и ζ — локальные униформизирующие параметры в окрестностях P и Q соответственно, $f(z, \zeta)$ — аналитич. функция от z и ζ. При помощи Б. д. выражаются многие функционалы *конечных римановых поверхностей*.

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

БИЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — *билинейное отображение* модуля над коммутативным кольцом K (K-модуля) в само это кольцо (рассматриваемое как K-модуль).

М. И. Войцеховский.

БИМАТРИЧНАЯ ИГРА — конечная *бескоалиционная игра* двух лиц. Б. и. задается двумя матрицами $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ одинакового размера $m \times n$, являющимися матрицами выигрышей соответственно игроков I и II. Стратегией игрока I является выбор строки матриц, стратегией игрока II — выбор столбца. Если игрок I выбирает i ($1 \leqslant i \leqslant m$), а игрок II выбирает j ($1 \leqslant j \leqslant n$), то они получают соответственно выигрыши a_{ij} и b_{ij}. Если $a_{ij} + b_{ij} = 0$ для всех i, j, то Б. и. является *матричной игрой*. Теория Б. и.— наиболее простой раздел общей теории бескоалиционных игр, однако и Б. и. не всегда разрешимы по Нэшу или строго разрешимы. Для Б. и. имеются различные алгоритмы, посредством к-рых находят ситуации равновесия: метод описания подматриц A, B, доставляющих все крайние точки множества ситуаций равновесия [1], [2]; методы, сводящие задачу отыскания ситуаций равновесия в Б. и. к задачам *квадратичного программирования* (см. [3], [4], [5]).

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Теория вероятностей и её применения», 1958, т. 3, в. 3, с. 318—31; [2] Kuhn H. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1961, v. 47, № 10, p. 1657—62; [3] Mills H., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1960, v. 8, № 2, p. 397—402; [4] Mangasarian O. L., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1964, v. 12, № 4, p. 778—80; [5] Lemke C. E., Howson J. T., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1964, v. 12, № 2, p. 413—23.

Е. Б. Яновская.

БИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, двувершинное распределение,— распределение вероятностей, характеризуемое существованием у кривой плотности двух максимумов, к-рые определяются двумя значениями *моды*. Б. р. часто возникает как «смесь» двух *нормальных распределений*. См. также *Мультимодальное распределение*, *Унимодальное распределение*.

А. В. Прохоров.

БИМОДУЛЬ, двойной модуль,— абелева группа B, являющаяся левым модулем над кольцом R и правым модулем над кольцом S, причем $(rb)s = r(bs)$ для любых $r \in R$, $b \in B$ и $s \in S$. В этом случае говорят, что имеет место ситуация ${}_R B_S$ или что B является (R, S)-бимодулем. Б. B можно рассматривать как левый $R \otimes S^*$-модуль, где S^* — кольцо, дуально изоморфное (антиизоморфное) S, а $\otimes$ означает тензорное произведение над кольцом целых чисел, причем $(r \otimes s)b = rbs$. Для всякого левого R-модуля M имеет место ситуация ${}_R M_E$, где E — кольцо эндоморфизмов модуля M. Всякое кольцо A может быть наделено естественной структурой (A, A)-бимодуля.

Л. А. Скорняков.

БИМОРФИЗМ, биективный морфизм в категории,— одно из теоретико-категорных обобщений понятия биективного отображения множеств.

Морфизм u в категории C наз. Б., если он одновременно является *мономорфизмом* и *эпиморфизмом* в C. Произведение Б. есть Б., то есть Б. образуют подкатегорию, содержащую все изоморфизмы. В категориях множеств, групп всякий Б. является изоморфизмом. Однако уже в категориях колец, топологических пространств или абелевых групп без кручения существуют Б., не являющиеся изоморфизмами.

И. В. Долгачев, М. Ш. Цаленко.

БИНАРНАЯ p-АДИЧЕСКАЯ ГРУППА — бесконечная группа G квадратных матриц 2-го порядка

$$\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|,$$

где a, b, c, d — элементы кольца целых *p-адических чисел*, подчиненные следующим условиям:

$$ad - bc = 1, \quad c \equiv 0 \pmod{p}, \quad d \equiv 1 \pmod{p}.$$

Факторгруппы таких групп вида G/N, где N — n-й член нижнего центрального ряда группы G или n-й член производного ряда (ряда высших коммутантов группы G),— примеры конечных p-групп, обладающих заданными экстремальными свойствами.

А. И. Кострикин.

БИНАРНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА — квадратичная форма от двух переменных, т. е. форма вида

$$f = f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2; \qquad (*)$$

если a, b, c - целые числа, Б. к. ф. наз. целочисленной. Выражение $d = ac - b^2/4$ наз. определителем, или дискриминантом, Б. к. ф. Иногда под дискриминантом понимается также величина $b^2 - 4ac$. Арифметич. теория Б. к. ф. начата П. Ферма (P. Fermat), утверждавшим, что всякое простое число вида $4k+1$ представимо суммой двух квадратов целых чисел. Законченная теория Б. к. ф. построена Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss). Теория Б. к. ф.— частный случай теории *квадратичных форм* от n переменных; арифметич. теория Б. к. ф. равносильна теории идеалов *квадратичных полей*. Теория Б. к. ф. является одним из истоков теории алгебраических чисел.

Число родов Б. к. ф. с определителем d равно 2^{s-1}, где s — число различных простых делителей числителя d, кроме случаев $d \equiv 1 \pmod 4$, $d \equiv 0 \pmod 8$, когда s увеличивается на 1; при этом, если $-d$ есть квадрат, число родов удваивается. Количество $r(d, m)$ существенно различных примитивных представлений числа m полной системой Б. к. ф. определителя d равно числу решений сравнения

$$x^2 \equiv d \pmod{m}.$$

Как и в общем случае, имеется алгоритм, сводящий вопрос о решении данного диофантова уравнения 2-й степени с двумя неизвестными (в частности, уравнения $f(x, y) = m$) к проблеме арифметич. эквивалентности двух Б. к. ф.

Все целочисленные автоморфизмы примитивной формы f с $a \neq 0$ представимы в виде

$$\left\| \begin{matrix} t - bu/2 & -cu \\ au & t + bu/2 \end{matrix} \right\|,$$

где $t^2 + du^2 = 1$, причем $2t$ и u — целые числа (см. *Пелля уравнение*). Поэтому проблема эквивалентности двух форм решается теорией приведения Б. к. ф. Теория приведения положительных Б. к. ф. есть частный случай теории приведения положительных квадратичных форм по Минковскому. Теория приведения целочисленных неопределенных Б. к. ф. сводится к теории приведения квадратичных иррациональностей (см. [2], с. 97—103, [3], с. 170—80).

Важную роль в теории чисел играет арифметич. функция $h(d)$ – число классов целочисленных примитивных Б. к. ф. определителя d. Известно, что $h(d)<+\infty$. Нек-рое представление о характере роста функции $h(d)$ дает теорема Зигеля: для $d>0$ по $\varepsilon>0$ найдутся постоянные c_ε и $c'_\varepsilon>0$, для к-рых

$$c'_\varepsilon d^{1/2-\varepsilon} < h(d) < c_\varepsilon d^{1/2+\varepsilon}$$

(подобная формула имеет место и для $d<0$).

Пусть Δ – целое число, $\Delta\equiv 1$ или $0 \pmod 4$, причем если $s^2 \mid \Delta$, то $s=1$ или $s=2$, и пусть $F=Q(\sqrt{\Delta})$ есть квадратичное поле, получающееся присоединением $\sqrt{\Delta}$ к полю рациональных чисел. Целым идеалам $[\alpha_1, \alpha_2]$ поля F ставятся в соответствие целочисленные квадратичные формы

$$f(x, y)=\frac{N(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}{N[\alpha_1, \alpha_2]}$$

с определителем $-\Delta/4$. Это приводит к взаимно однозначному соответствию (с точностью до перехода к сопряженным классам идеалов) между классами идеалов поля F и классами Б. к. ф. При этом соответствии умножение классов идеалов определяет композицию классов Б. к. ф.

Как и для формы от n переменных, теория Б. к. ф. может быть обобщена на формы вида (*) с коэффициентами a, b, c из заданного алгебраич. числового поля.

Имеются разночтения в определении целочисленной формы, определителя (дискриминанта) формы, эквивалентности форм, класса и рода форм. Приведенное выше определение целочисленной формы принадлежит Л. Кронекеру (L. Kronecker). К. Гаусс требовал (см. [1]), чтобы b было четным. При определении эквивалентности (и класса форм) иногда рассматривают только подстановки определителя $+1$; иногда же ± 1. В [6] дается более широкое, чем по Гауссу, определение рода.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, [пер. с нем. и латин.], М., 1959; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Jones B. W., The arithmetic theory of quadratic forms, N. Y., 1950; [4] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [5] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd 1, Lpz., 1927; [6] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [7] О'Мира О. Т., Introduction to quadratic forms, B., 1963. *А. В. Малышев.*

БИНАРНАЯ ФОРМА — форма от двух переменных, т. е. однородный *многочлен*

$$f=f(x, y)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k,$$

где коэффициенты a_k, $k=0, 1, \ldots, n$, принадлежат заданному *коммутативному кольцу* с единицей. В качестве такого кольца часто выбирается кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, кольцо целых элементов нек-рого алгебраического числового поля, поле $\mathbb{R}$ действительных чисел или поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Число n наз. степенью формы. Если $n=2$, то f наз. *бинарной квадратичной формой*.

В теории форм можно выделить алгебраическое (теория инвариантов), арифметическое (представление чисел формами) и геометрическое (теория арифметич. минимумов форм) направления. Задачей алгебраич. теории Б. ф. (в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является построение полной системы инвариантов таких форм при линейных преобразованиях переменных с коэффициентами из того же поля (см. *Инвариантов теория*, а также [2], гл. 5). В арифметической теории Б. ф. изучаются диофантовы уравнения вида

$$f(x, y)=b,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b\in\mathbb{Z}$ – их разрешимость и решения в кольце $\mathbb{Z}$. Важнейший результат здесь – теорема Туэ, а также ее обобщения и уточнения (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*). О разрешимости таких уравнений в поле $\mathbb{Q}$ и возможном числе решений см. [5],

гл. 9 - 17, а также *Морделла гипотеза*. Теория арифметич. минимумов Б. ф. изучается в *геометрии чисел*. Арифметическим минимумом формы f наз. величина

$$m(f)=\inf_{(x,\ y)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,\ 0)}|f(x,\ y)|.$$

В случае $n=3$ доказано, что

$$m(f)\leqslant\begin{cases}|D/49|^{1/4}, & \text{если } D>0,\\ |D/23|^{1/4}, & \text{если } D<0.\end{cases}$$

Здесь D — дискриминант формы f, в данном случае равный

$$18a_0a_1a_2a_3+a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3-4a_3a_1^3-27a_0^2a_3^2.$$

Эти оценки неулучшаемы.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., 1948; [3] Landau E., Walfisz A., Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen, B., 1959; [4] Lekkerkerker C. G., Geometry of numbers, Groningen [a.o.], 1969; [5] Mordell L. J., Diophantine equations, L.— N. Y., 1969. *А. В. Малышев.*

БИНАРНО ЛИЕВА АЛГЕБРА, BL-алгебра,— линейная алгебра A над полем F, любые два элемента к-рой порождают подалгебру Ли. Класс всех Б. л. а. над данным полем F порождает многообразие, к-рое в случае характеристики поля F, отличной от 2, задается системой тождеств

$$x^2=J(xy,\ x,\ y)=0, \qquad (*)$$

где

$$J(x,\ y,\ z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y.$$

Если характеристика поля F равна 2, а кардинальное число его не меньше 4, то класс Б. л. а., кроме системы тождеств (*), задается еще тождеством

$$J([(xy)y]x,\ x,\ y)=0.$$

Касательная алгебра аналитической локальной альтернативной *лупы* является Б. л. а., и обратно.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36 (78), с. 569—75; [2] Гайнов А. Т., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 5, с. 505—22. *А. Т. Гайнов.*

БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ — двуместный *предикат* на заданном множестве. Под Б. о. иногда понимают подмножество множества $A\times A$ упорядоченных пар $(a,\ b)$ элементов заданного множества A. Б. о.— частный случай *отношения*. Пусть $R\subseteq A\times A$. Если $(a,\ b)\in R$, то говорят, что элемент a находится в бинарном отношении R к элементу b. Вместо $(a,\ b)\in R$ пишут также aRb.

Пустое подмножество $\varnothing$ в $A\times A$ и само множество $A\times A$ наз., соответственно, нуль-отношением и универсальным отношением в множестве A. Диагональ множества $A\times A$, т. е. множество $\Delta=\{(a,\ a)/a\in A\}$, есть отношение равенства, или единичное бинарное отношение в A.

Пусть R, R_1, R_2 — Б. о. в множестве A. Наряду с теоретико-множественными операциями объединения $R_1\cup R_2$, пересечения $R_1\cap R_2$ и дополнения $R'=(A\times A)\setminus R$ для Б. о. рассматривают также операцию обращения:

$$R^{-1}=\{(a,\ b)\mid(b,\ a)\in R\}$$

и операцию умножения:

$$R_1\circ R_2=\{(a,\ b)\mid(\exists c\in A)\,(aR_1c \text{ и } cR_2b)\}.$$

Б. о. R^{-1} наз. обратным для R. Умножение Б. о. ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно.

Б. о. R в A называется: а) рефлексивным, если $\Delta\subseteq R$; б) транзитивным, если $R\circ R\subseteq R$; в) симметричным, если $R^{-1}\subseteq R$; г) антисимметричным, если $R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$. Если Б. о. R обладает нек-рым из свойств а), б), в), г), то обратное

отношение R^{-1} обладает этим же свойством. Б. о. $R \subseteq A \times A$ наз. функциональным, если $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta$.

Наиболее важными типами Б. о. являются *эквивалентности*, *порядки* (линейные и частичные) и *функциональные отношения*. *Д. М. Смирнов.*

БИНОМ — двучлен, сумма или разность двух алгебраич. выражений, называемых членами Б., напр. $a+b$, $5x-\frac{y^2}{1+x^2}$ и т. д. О степенях Б., то есть выражениях вида $(x+y)^n$, см. *Ньютона бином*.

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, распределение Бернулли, — распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целочисленные значения $x=0, 1, \ldots, n$ с вероятностями соответственно

$$\mathsf{P}\{X=x\}=b_x(n, p)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

(C_n^x — биномиальный коэффициент; p — параметр Б. р., наз. вероятностью положительного исхода, принимающей значения на отрезке $0 \leqslant p \leqslant 1$). Б. р.— одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из к-рых может принимать лишь два значения 1 или 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно (т. е. каждая из Y_i подчиняется Б. р. при $n=1$). Величины Y_i можно трактовать как результаты независимых испытаний, причем $Y_i=1$ в случае «положительного исхода» и $Y_i=0$ в случае «отрицательного исхода» испытания с номером i. Если общее количество независимых испытаний n фиксированно, то такая схема наз. *Бернулли испытаниями*, причем суммарное количество положительных исходов

$$X=Y_1+\ldots+Y_n, \quad n \geqslant 1,$$

в этом случае подчиняется Б. р. с параметром p.

Математич. ожидание $\mathsf{E}z^X$ (*производящая функция* Б. р.) при любом значении z есть многочлен $[pz+(1-p)]^n$, представление к-рого по формуле бинома Ньютона имеет вид

$$b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n$$

(отсюда и произошло само назв. «Б. р.»). *Моменты* Б. р. выражаются формулами

$$\mathsf{E}X=np,$$
$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}(X-np)^2=np(1-p),$$
$$\mathsf{E}(X-np)^3=np(1-p)(1-2p).$$

Функция Б. р. определяется при любом действительном значении $0 < y < n$ формулой

$$F(y)=\mathsf{P}\{X \leqslant y\}=\sum_{x=0}^{[y]} C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$$

где $[y]$ — целая часть y, причем

$$F(y)=\frac{1}{\mathrm{B}([y]+1, n-[y])}\int_p^1 t^{[y]}(1-t)^{n-[y]-1}\,dt$$

($\mathrm{B}(a, b)$ — *бета-функция* Эйлера, интеграл в правой части наз. неполной бета-функцией).

При $n \to \infty$ функция Б. р. выражается в терминах функции Ф стандартного нормального распределения асимптотич. формулой (теорема Муавра — Лапласа)

$$F(y)=\Phi\left[\frac{y-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right]+R_n(y, p),$$

где

$$R_n(y, p)=O(n^{-1/2})$$

равномерно для всех действительных y. Существуют и другие нормальные приближения Б. р. с остатками более высокого порядка малости.

Если количество независимых испытаний n велико, а вероятность p мала, то индивидуальные вероятности

$b_x(n, p)$ приближенно выражаются в терминах *Пуассона распределения*:

$$b_x(n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{(np)^x}{x!} e^{-np}.$$

При этом, если $n \to \infty$ и $0 < c \leqslant y \leqslant C$ (c и C — постоянные), то равномерно относительно всех p из интервала $0 < p < 1$ имеет место асимптотич. формула

$$F(y) = \sum_{x=0}^{[y]} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} + O(n^{-2}),$$

где $\lambda = \frac{(2n-[y])p}{2-p}$.

Многомерным обобщением Б. р. является *полиномиальное распределение*.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1967; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] Прохоров Ю. В., «Успехи математических наук», 1953, т. 8, № 3, с. 135—42; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

Л. Н. Большев.

БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ — коэффициенты при степенях z в разложении *Ньютона бинома* $(1+z)^N$. Б. к. обозначается $\binom{N}{n}$ или C_N^n и равен

$$\binom{N}{n} = C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} =$$

$$= \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N. \qquad (1)$$

Обозначение $\binom{N}{n}$ восходит к Л. Эйлеру (L. Euler); второе обозначение C_N^n появилось в 19 в. и связано, по-видимому, с интерпретацией Б. к. C_N^n как числа различимых неупорядоченных *сочетаний* из N различных объектов по n в каждом сочетании. Б. к. наиболее удобно выписываются в виде арифметического треугольника, или *Паскаля треугольника*, построение к-рого основано на свойстве Б. к.

$$C_N^n + C_N^{n+1} = C_{N+1}^{n+1}. \qquad (2)$$

Как понятие Б. к., так и арифметич. треугольник в более или менее развитой форме были известны еще математикам древности, Б. Паскаль (B. Pascal) составил подробное исследование (1665) свойств Б. к. Кроме соотношения (2), имеется много других полезных соотношений между Б. к., напр.:

$$\left.\begin{gathered} C_N^n = C_N^{N-n}; \\ C_N^n = \sum_{k=0}^{n} C_m^k C_{N-m}^{n-k}, \quad n \leqslant m \leqslant N-n; \\ \sum_{k=0}^{N} (-1)^k k^m C_N^k = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N-1; \\ \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n; \\ \sum_{k=0}^{N} C_N^k k(k-1)\ldots(k-r+1) = \\ = N(N-1)\ldots(N-r+1)\cdot 2^{N-r}; \\ \sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k k(k-1)\ldots(k-r+1) = 0. \end{gathered}\right\} \qquad (3)$$

В частности, отсюда получается

$$\left.\begin{gathered} \sum_{k=0}^{N} C_N^k = 2^N; \\ \sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = 0. \end{gathered}\right\} \qquad (4)$$

Использование *Стирлинга формулы* позволяет получать приближенные выражения для Б. к. Напр., если N много больше n:

$$C_N^n \sim \frac{N^n}{n!}.$$

На случай любого комплексного числа α Б. к. обобщаются по формуле

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!},\ n>0;\ \binom{\alpha}{0}=1.$$

При этом нек-рые из соотношений (2) — (4) сохраняются, но, вообще говоря, в измененном виде. Напр.,

$$\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}=2^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha>-1;$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Таблицы Б. к. см. [2], [3].

Лит.: [1] Корн Г., Корн Т., Справочник по математике, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [3] Table of binomial coefficients, Cambridge, 1954.

Е. Д. Соломенцев.

БИНОМИАЛЬНЫЙ РЯД — степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n=1+\binom{\alpha}{1}z+\binom{\alpha}{2}z^2+\dots,$$

где n — целое, а α — произвольное фиксированное число (вообще говоря, комплексное), $z=x+iy$ — комплексное переменное, $\binom{\alpha}{n}$ — *биномиальные коэффициенты*. Для целых $\alpha=m\geqslant 0$ Б. р. сводится к конечной сумме $m+1$ слагаемых

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\dots+z^m,$$

называемой *Ньютона биномом*. Для остальных значений α Б. р. абсолютно сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$. В граничных точках единичной окружности $|z|=1$ Б. р. ведет себя следующим образом: 1) если $\operatorname{Re}\alpha>0$, то он абсолютно сходится во всех точках окружности $|z|=1$; 2) если $\operatorname{Re}\alpha\leqslant -1$, то он расходится во всех точках окружности $|z|=1$; 3) если $-1<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, то Б. р. расходится в точке $z=-1$ и условно сходится во всех остальных точках окружности $|z|=1$. Во всех точках, в к-рых Б. р. сходится, он представляет главное значение функции $(1+z)^{\alpha}$, равное 1 при $z=0$. Б. р. является частным случаем *гипергеометрического ряда*.

Если $z=x$ и α — действительные числа, причем α не есть целое неотрицательное число, то Б. р. ведет себя следующим образом: 1) если $\alpha>0$, то он абсолютно сходится при $-1\leqslant x\leqslant 1$; 2) если $\alpha\leqslant -1$, то Б. р. абсолютно сходится при $-1<x<1$ и расходится при всех иных значениях x; 3) если $-1<\alpha\leqslant 0$, то Б. р. абсолютно сходится при $-1<x<1$, условно сходится при $x=-1$ и расходится при $x=-1$; при $|x|>1$ Б. р. всегда расходится.

Б. р. появляется впервые, по-видимому, у И. Ньютона (I. Newton) в 1664—65. Исчерпывающее исследование Б. р. было проделано Н. Абелем [1]. Оно послужило началом теории степенных рядов в комплексной области.

Лит.: [1] Abel N., «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, № 4, S. 311—39; [2] Knopp K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 5 Aufl., B., 1947; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М. 1967.

Е. Д. Соломенцев

БИНОРМАЛЬ — прямая, проходящая через точку M_0 кривой L перпендикулярно соприкасающейся плоскости к L в точке M_0. Если $r=r(t)$ — параметрич. уравнение кривой L, то векторное уравнение Б. в точке M_0, отвечающей значению t_0 параметра t, имеет вид

$$r(\lambda)=r(t_0)+\lambda[r'(t_0),\ r''(t_0)].$$

Е. В. Шикин.

БИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — пара множеств $\{a_t\}$ и $\{\xi_t\}$, $t\in T$, элементов (топологического) векторного пространства X и (топологического) сопряженного

пространства X^* соответственно, удовлетворяющая условиям:

$$\xi^t(a_s) = \langle \xi^t, a_s \rangle = 0,$$

если $t \neq s$, и отлично от нуля при $t=s$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — каноническая билинейная форма, спаривающая X и X^*). Напр., Б. с. является базис Шаудера и множество, образованное коэффициентами разложения x по нему. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и базисом $\{a_t\}$ множество $\{b_s\}$, удовлетворяющее условиям:

$$\langle a_t, b_s \rangle = \delta_{st},$$

где $\delta_{st}=1$ при $t=s$ и $\delta_{st}=0$ при $t \neq s$, также является базисом; он наз. базисом, дуальным к $\{a_t\}$, и, поскольку $H=H^*$, множества $\{a_t\}$ и $\{b_t\}$ образуют Б. с. В частности, базис в H наз. ортонормированным, если он дуален самому себе.

Существуют, однако, Б. с., не образующие даже слабого базиса,— таково, напр., множество функций e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in R$, в пространстве непрерывных периодич. функций, наделенном нормой $\|f\| = \sup |f(x)|$.

М. И. Войцеховский.

БИПЛАНАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — действительное $(2n+1)$-мерное проективное пространство, в к-ром выделены две непересекающиеся n-мерные плоскости, действительные (Б. п. гиперболич. типа) или комплексно сопряженные (Б. п. эллиптич. типа), а фундаментальная группа состоит из проективных преобразований, переводящих каждую из этих плоскостей в себя. Указанные две n-мерные плоскости наз. абсолютными плоскостями. Линейная конгруэнция действительных прямых, пересекающих каждую из абсолютных плоскостей, наз. абсолютной конгруэнцией. Эта конгруэнция служит действительной моделью n-мерного проективного пространства над алгеброй двойных или комплексных чисел. При $n=1$ Б. п. наз. биаксиальным пространством. Совокупность свойств геометрич. образов Б. п., сохраняющихся при преобразованиях фундаментальной группы, составляет содержание бипланарной геометрии. Наиболее подробно изучена биаксиальная геометрия ($n=1$), в к-рой развита теория кривых, поверхностей и комплексов прямых.

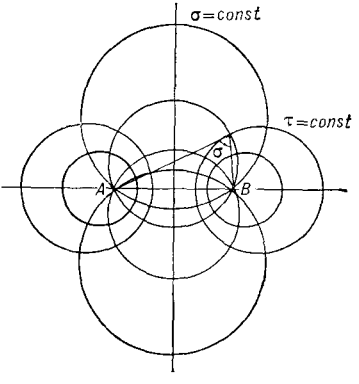
А. П. Широков.

БИПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа τ и σ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

$$y = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

где $0 \leqslant \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$. Координатные линии: два семейства окружностей ($\tau = \text{const}$) с полюсами A и B и семейство окружностей, ортогональных к ним ($\sigma = \text{const}$).



Коэффициенты Ламе:

$$L_\tau = L_\sigma = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right).$$

Б. к. в пространстве (бисферические координаты) наз. числа σ, τ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = \frac{a \sin \sigma \cos \varphi}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma \sin \varphi}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

где $-\infty<\sigma<\infty$, $0\leqslant\tau<\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Координатные поверхности: сферы ($\sigma=$const), поверхности, полученные при вращении дуг окружностей ($\tau=$const), и полуплоскости, проходящие через ось Oz. Система Б. к. в пространстве образуется при вращении системы Б. к. на плоскости Ozy вокруг оси Oz.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2},$$

$$L_\varphi = \frac{a^2\sin^2\sigma}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}\sigma)^3}{a^2\sin\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{\sin\sigma\,(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Д. Д. Соколов.

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел алгебраич. геометрии, основной задачей к-рого является классификация алгебраич. многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности (см. *Бирациональное отображение*). Над фиксированным полем констант k каждый класс бирационально эквивалентных многообразий определяет конечно порожденное над k поле, изоморфное полю рациональных функций любого многообразия из этого класса. Обратно, каждому такому полю соответствует класс бирационально эквивалентных многообразий — моделей этого поля. Таким образом, бирациональная классификация алгебраич. многообразий эквивалентна классификации с точностью до k-изоморфизма конечно порожденных полей над k.

Наиболее общим б и р а ц и о н а л ь н ы м и н в а р и а н т о м является размерность алгебраич. многообразий. Для одномерных алгебраич. многообразий — неприводимых алгебраич. кривых — в каждом классе бирациональной эквивалентности существует единственная с точностью до k-изоморфизма гладкая проективная кривая — неособая модель. Тем самым бирациональная классификация алгебраич. кривых сводится к классификации с точностью до k-изоморфизма гладких проективных кривых, что приводит к *модулей проблеме*. В размерности $\geqslant 2$ задача сильно усложняется. Уже существование гладкой модели есть проблема *разрешения особенностей* алгебраич. многообразий, решенная положительно (к 1977) только для поверхностей и для многообразий произвольной размерности над полем характеристики нуль. В том случае, когда такие модели существуют, в классе бирационально эквивалентных многообразий их бесконечно много. Особое место среди них занимают *минимальные модели*. Их бирациональная классификация во многих случаях совпадает с классификацией с точностью до k-изоморфизма, как и для кривых. Однако даже для поверхностей (а именно, рациональных и линейчатых) это, вообще говоря, не так.

Основные результаты в классификации алгебраических поверхностей были получены геометрами итальянской школы (см. [1]). Для многообразий размерности $\geqslant 3$ имеются (к 1977) лишь отдельные результаты (см. [3]).

Основными дискретными бирациональными инвариантами гладких полных алгебраич. многообразий над полем k характеристики нуль являются следующие: арифметич. род, геометрич. род, кратный род, размерность пространства регулярных дифференциальных форм, кручения Севери, фундаментальная группа, группа Брауэра.

Одна из важнейших задач Б. г.— проблема рациональности алгебраич. многообразий, т. е. проблема описания *рациональных многообразий* — многообразий, бирационально эквивалентных проективному пространству.

Если поле констант не является алгебраически замкнутым, то задачи Б. г. тесно связаны с *алгебраических многообразий арифметикой*. В этом случае важной является проблема описания бирациональных k-форм данного многообразия V над полем k, в частности, напр., когда $V=P_k^n$ — проективное пространство над k (см. [2]). Существенным в заданной задаче является описание группы бирациональных преобразований многообразия V.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965; [2] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [3] Roth L., Algebraic threefolds, B., [u.a.], 1955; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [5] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, бирациональный изоморфизм,— рациональное отображение алгебраич. многообразий, индуцирующее изоморфизм их полей рациональных функций. В более общем смысле, рациональное отображение схем $f\colon X\to Y$ наз. бирациональным отображением, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий: а) существуют такие плотные открытые множества $U\subset X$ и $V\subset Y$, что f определено на U и осуществляет изоморфизм подсхем $f|U\colon U\xrightarrow{\sim}V$; б) если $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ — множества общих точек неприводимых компонент соответственно схем X и Y, то f индуцирует биективное соответствие множеств $\alpha\colon I\to J$ и изоморфизм локальных колец $O_{X,\,x_i}\xrightarrow{\sim}O_{Y,\,y\alpha(i)}$ для каждого $i\in I$.

Если схемы X и Y неприводимы и приведены, то локальные кольца их общих точек отождествляются с полями рациональных функций соответственно на X и Y. В этом случае Б. о. $f\colon X\to Y$ индуцирует, согласно условию б), изоморфизм полей рациональных функций: $R(Y)\simeq R(X)$.

Схемы X и Y наз. бирационально эквивалентными, или бирационально изоморфными, если существует Б. о. $f\colon X\to Y$. Частный случай Б. о.— *бирациональный морфизм*.

Простейшим Б. о. является *моноидальное преобразование* с неособым центром. Для гладких полных многообразий размерности $\leqslant 2$ всякое Б. о. может быть представлено в виде композиции таких преобразований и обратных к ним. В общем случае вопрос остается (к 1977) открытым.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — *бирациональное отображение* алгебраич. многообразия (или схемы) в себя. Б. п. иногда наз. также бирациональными автоморфизмами. Группа всех Б. п. алгебраич. многообразия канонически изоморфна группе автоморфизмов его поля рациональных функций над полем констант. Примерами Б. п. могут служить *кремоновы преобразования*, в частности стандартное квадратичное преобразование проективной плоскости, задаваемое формулой

$$(x_0,\ x_1,\ x_2)\to(x_1x_2,\ x_0x_2,\ x_0x_1),$$

где $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ — однородные координаты проективной плоскости. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНЫЙ МОРФИЗМ — морфизм схем, являющийся бирациональным отображением. К наиболее важным примерам Б. м. относятся: нормализация, раздутие, моноидальное преобразование. Любой собственный Б. м. регулярных двумерных схем разлагается в композицию *моноидальных преобразований* с неособыми центрами (см. [2]). Для размерности, большей двух, это уже не так.

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, ch. 2, № 8, P., 1961; [2] Šafarevič I. R., Lec-

tures on minimal models, Bombay, 1966; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских.

БИРКГОФА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — одна из важнейших теорем *эргодической теории*. Для эндоморфизма T пространства X с σ-конечной мерой μ Б. э. т. утверждает, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ почти всюду (при почти всех $x \in X$) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \overline{f}(x)$$

(временно́е среднее, или среднее вдоль траектории), причем $\overline{f} \in L^1(X, \mu)$, а если $\mu(X) < \infty$, то

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \overline{f}\, d\mu.$$

Для *измеримого потока* $\{T_t\}$ пространства X с инвариантной σ-конечной мерой μ Б. э. т. утверждает, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ почти всюду существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x)\, dt = \overline{f}(x)$$

с теми же свойствами $\overline{f}$.

Б. э. т. была высказана и доказана Дж. Биркгофом [1]. Она подверглась модификациям и обобщениям в различных направлениях (имеются теоремы, к-рые, помимо Б. э. т., охватывают также многие из утверждений несколько иного рода, известные в теории вероятностей как *эргодические теоремы*; имеются также эргодические теоремы для более общих полугрупп преобразований, см. [2]). Б. э. т. и ее обобщения наз. индивидуальными эргодическими теоремами, т. к. в них речь идет о существовании средних вдоль (почти каждой) отдельной траектории, в отличие от статистических эргодических теорем — эргодической *Неймана теоремы* и ее обобщений. (В зарубежной литературе сходимость средних почти всюду часто подчеркивают термином pointwise ergodic theorem.)

Лит.: [1] Birkhoff G. D., «Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.», 1931, v. 17; [2] Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975.

Д. В. Аносов.

БИРКГОФА — ВИТТА ТЕОРЕМА, Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема,— теорема о представимости алгебр Ли в ассоциативных алгебрах. Пусть G — алгебра Ли над полем k, $U(G)$ — ее *универсальная обертывающая алгебра*, $B = \{b_i,\ i \in I\}$ — базис алгебры G, линейно упорядоченный нек-рым образом. Тогда всевозможные конечные произведения $b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_r}$, где $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_r$, образуют базис алгебры $U(G)$ и, таким образом, канонич. гомоморфизм: $G \to U(G)$ является мономорфизмом.

Из всякой ассоциативной алгебры R может быть построена алгебра Ли $L(R)$ заменой операции умножения в R на операцию коммутирования

$$[xy] = xy - yx.$$

Б. - В. т. иногда формулируют следующим образом: для всякой алгебры Ли G над любым полем k существует такая ассоциативная алгебра R над этим же полем, что G изоморфно вкладывается в $L(R)$.

Первый вариант этой теоремы был получен А. Пуанкаре [1]. Более полное доказательство позднее дано Э. Виттом [2] и Г. Биркгофом [3]. Утверждение теоремы остается верным, если k — область главных идеалов [4], в частности для колец Ли без операторов, но в общем случае — для алгебр Ли с произвольной областью операторов — утверждение теоремы не верно [5].

Лит.: [1] Poincaré H., «Cambrige Phil. Trans.», 1900, v. 18, p. 220—5; [2] Witt E., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, № 3, S. 152—60; [3] Birkhoff G., «Ann. Math.», 1937, v. 38, № 2, p. 526—32; [4] Lazard M., «Compt. rend. Acad. Sci.», 1952, v. 234, № 8, p. 788—91; [5] Ширшов

А. И., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 5, с. 173—5; [6] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [7] К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [8] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [9] К а р т а н А., Э й л е н б е р г С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *Т. С. Фофанова.*

БИСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, не допускающее никакого разложения в сумму двух связных непересекающихся собственных подмножеств, содержащих более одной точки. *А. А. Мальцев.*

БИССЕКТОРНАЯ ПЛОСКОСТЬ двугранного угла, биссектор, — плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и делящая этот угол пополам.

БИССЕКТРИСА угла — полупрямая (луч), исходящая из вершины угла и делящая его пополам. Иначе говоря, Б. угла — множество точек, расположенных внутри угла и равноудаленных от его сторон. Б. треугольника - отрезок (а также его длина) Б. внутреннего угла треугольника от вершины угла до пересечения с противоположной стороной. Б. треугольника делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Б. треугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной в треугольник окружности. Четверка точек (A, B, K, L), две из к-рых A, B — вершины треугольника ABC, K — точка пересечения Б. угла C с отрезком AB, L — точка пересечения Б. внешнего угла C с прямой AB, образует *гармоническую четверку* точек. *А. Б. Иванов.*

БИТ — двоичная единица информации, численно равная количеству информации в испытании с двумя взаимно исключающими равновероятными альтернативами ($p_1 = p_2 = 1/2$):

$$I(p_1, p_2) = -p_1\log_2 p_1 - p_2\log_2 p_2 = \log_2 2 = 1 \text{ «бит»}$$

в случае, если логарифмы берутся по основанию 2. Б. является самой распространенной единицей, но приняты и другие единицы информации — «хартли» или «нит», в определении к-рых используются, соответственно, десятичные или натуральные логарифмы. *А. В. Прохоров.*

БИФАКТОРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f топологич. пространства X в топологич. пространство Y, при к-ром из любого покрытия открытыми в X множествами прообраза $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in f(X)$ можно выбрать конечное число множеств так, чтобы y лежала внутри образа их объединения. Особенно важно, что произведение любого множества Б. о. является бифакторным отображением. Б. о. составляют обширный класс *факторных отображений* и тем не менее сохраняют тонкие топологич. свойства пространств. Так, непрерывные бифакторные s-отображения сохраняют точечно счетную базу, факторное s-отображение пространства с точечно счетной базой на пространство точечно счетного типа является бифакторным. *В. В. Филиппов.*

БИФУНКТОР — отображение T: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, определенное на декартовом произведении категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ со значениями в $\mathfrak{C}$, сопоставляющее каждой паре объектов $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ нек-рый объект $C \in \mathfrak{C}$ и каждой паре морфизмов

$$\alpha\colon A \to A', \quad \beta\colon B \to B'$$

морфизм

$$T(\alpha, \beta)\colon \quad T(A', B) \to T(A, B').$$

Как правило, требуется также выполнение условий

$$T(1_A, 1_B) = 1_{T(A, B)},$$

$$T(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta) = T(\alpha, \beta') \circ T(\alpha', \beta).$$

В этом случае говорят, что Б. T контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. *В. Е. Говоров.*

БИФУРКАЦИЯ — термин, употребляемый в нек-рых разделах математики применительно к ситуации, когда

нек-рый объект $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}(\lambda)$ зависит от параметра λ (не обязательно скалярного) и в любой окрестности нек-рого значения λ_0 последнего (*бифуркационное значение*, или *точка Б.*) исследуемые качественные свойства объекта $\mathfrak{O}(\lambda)$ не являются одинаковыми для всех λ. Соответствующие точные определения различны в различных случаях, но в общем они следуют (с теми или иными модификациями) двум вариантам:

а) Изучаемые качественные свойства объекта $\mathfrak{O}$ состоят в существовании других объектов O, определенным образом связанных с ним. Б. состоит в том, что при изменении λ объекты O возникают или исчезают (в частности, они могут сливаться друг с другом, или из одного объекта может «рождаться» несколько). См. ниже — п. 1).

б) Сначала для объектов $\mathfrak{O}(\lambda)$ определяется, когда два таких объекта считаются эквивалентными. (Определение должно быть таким, чтобы у эквивалентных объектов все интересующие нас качественные свойства были одинаковыми.) Изменение качественных свойств $\mathfrak{O}(\lambda)$ в окрестности точки Б. λ_0, по определению, понимается в том смысле, что там имеются значения λ с неэквивалентными $\mathfrak{O}(\lambda)$. См. ниже — п. 2).

1) В теории операторов исходный объект $\mathfrak{O}(\lambda)$ — это нелинейный оператор $\Phi(x, \lambda)$ в действительном банаховом пространстве, с действительным параметром λ, определенный в окрестности точки $x=0$ и такой, что $\Phi(0, \lambda)\equiv 0$. Ему при каждом фиксированном λ сопоставляются другие объекты O — решения x нелинейного операторного уравнения $\Phi(x, \lambda)=0$. Точка Б. — это точка, в к-рой происходит рождение нового, нетривиального решения этого уравнения. Именно, это такая точка λ_0, что для любого $\varepsilon>0$ существует λ, $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, при к-ром уравнение $x=\Phi(x, \lambda)$ имеет решение $x(\lambda)$, удовлетворяющее условиям $0<\|x(\lambda)\|<\varepsilon$. Если $\Phi(x, \lambda)\equiv \equiv \lambda A x$, где A — линейный *вполне непрерывный оператор*, то понятие точки Б. совпадает с понятием характеристич. значения оператора A.

Если $\Phi(x, \lambda)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор, непрерывно дифференцируемый в смысле Фреше и такой, что $\Phi_x(0, \lambda)\equiv \lambda A$, то точками Б. оператора Φ могут служить лишь характеристич. значения оператора A. Топологич. методом (см. [1], [2]) установлено, что каждое нечетнократное (в частности, простое) характеристич. значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Аналогичное достаточное условие для случая четнократных характеристических значений формулируется с помощью понятия вращения векторного поля.

Если $x=0$ — неизолированное решение уравнения $x=\Phi(x, \lambda)$, то λ_0 есть точка Б. оператора Φ. Вариационным методом доказано (см. [1], [2]), что если $\Phi(x)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала, а $A=\Phi'(0)$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор, то каждое характеристич. значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Понятие точки Б. видоизменяется также на случай больших решений $x(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\lambda_0$. Важное значение этих понятий и результатов состоит в том, что при сравнительно слабых ограничениях удается установить ветвление решения $x=0$, в частности доказать неединственность решения нелинейной задачи. В ряде случаев более точную информацию дают аналитич. методы теории *ветвления решений* нелинейных уравнений (см. [5]).

2) В теории гладких динамич. систем рассматриваются однопараметрические (и отчасти двупараметрические [6]) семейства потоков (и каскадов; здесь рассматриваются лишь первые), причем выясняется, когда Б. «типичная», т. е. сохраняет свой характер при малом изменении рассматриваемого семейства [9]; употребительны оба

варианта а) и б). При втором два потока считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм фазового пространства, переводящий траектории одного из них в траектории другого с сохранением направления движения. Имеется вполне удовлетворительная теория Б. однопараметрич. семейств потоков с двумерным фазовым многообразием [7], [9], а также локальный вариант, относящийся к окрестности положения равновесия или периодич. решения в n-мерном случае [6].

В варианте а) изучаемые объекты O, к-рые сопоставляются данной динамич. системе,— это положения равновесия и периодич. решения, а иногда также нек-рые инвариантные многообразия (преимущественно торы) и гиперболич. инвариантные множества. Рассматривается «рождение» этих объектов, происходящее как «локально», возле нек-рого положения равновесия или периодич. решения, так и «полулокально», в окрестности «замкнутого контура», образованного несколькими траекториями, к-рые при $t \to \pm\infty$ стремятся к положению равновесия или к периодич. решениям. Возможен случай Б., к-рая в определенном смысле связана с подобным контуром, но к-рая происходит (с изменением параметра λ) еще до его возникновения [8]. Часто рождение периодич. решений бывает удобно рассматривать, переписывая дифференциальное уравнение и условие периодичности в виде интегрального уравнения и применяя к нему соответствующие методы [5].

3) В теории особенностей отображений встречаются разнообразные Б. различных объектов (как исходных, так и сопоставленных им), в связи с чем имеются различные случаи использования этого термина (вернее, производных от него) (см. [10], [6], [11]), но еще чаще соответствующие понятия получают самостоятельные названия. Таковы, напр., версальные семейства (или деформации) (см. [6], [11], [12]), к-рые (в нек-ром смысле) описывают все возможные Б., могущие произойти при малой деформации рассматриваемого объекта, в частности сюда относятся семь элементарных катастроф [12], к-рые представляют собой «типичные» k-параметрические ($k \leqslant 4$) семейства функций, включающие функцию с вырожденной критической точкой и определенные в окрестности последней; тем самым они описывают соответствующую Б. (Вообще, в иностранной литературе по теории особенностей вместо Б. часто говорят о «катастрофах».)

Лит.: [1] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [2] Функциональный анализ, М., 1964; [3] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [4] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [5] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [6] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, 119—84; [7] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [8] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 4, 475—92; 1973, т. 90, № 1, 139—56; [9] Peixoto M. M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver, 1974, v. 2, p. 315—19; [10] Том Р., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, 51—7; [11] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, 3—65; [12] Bröcker P., Lander L., Differentiable germs and catastrophes, Cambrige, 1975.

Д. В. Аносов, В. А. Треногин.

БИХАРАКТЕРИСТИКА, луч, дифференциального оператора — линия, по к-рой происходит касание любых двух *характеристик*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

этого дифференциального оператора. Если на Б. ввести параметр s, то ее уравнения $x_i = x_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, определяются из решения системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(s) = Q_{\xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = -Q_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $Q(\xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_n)$ — характеристич. форма

дифференциального оператора, точка означает дифференцирование по параметру s, а уравнение $Q=0$ при $\xi_i=\varphi_{x_i}$ — характеристич. уравнение дифференциального оператора. Таким образом, решение $x_i=x_i(s)$; $\xi_i=\xi_i(s)$, $i=1, \ldots, n$, системы (*) задает характеристич. полосу уравнения $Q=0$. Эта характеристич. полоса принадлежит характеристике $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$, то есть $\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s))\equiv 0$, если хотя бы при одном значении s справедливы равенства

$$\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s))=0$$

и

$$\xi_i(s)=\varphi_{x_i}(x_1(s), \ldots, x_n(s)), \quad i=1, \ldots, n;$$

тогда эти равенства выполнены при всех значениях s.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *Б. Л. Рождественский.*

БИЦАДЗЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, к-рое в комплексной записи имеет вид

$$4w_{z\bar{z}}=w_{xx}+2iw_{xy}-w_{yy}=0,$$

где $w(z)=u+iv$, $z=x+iy$, и к-рое сводится к эллиптич. системе

$$u_{xx}-u_{yy}-2v_{xy}=0,$$
$$v_{xx}-v_{yy}+2u_{xy}=0$$

с действительными независимыми переменными x и y. Для Б. у. (и сопряженного с ним уравнения) однородная задача Дирихле в круге C: $|z-z_0|<\varepsilon$, любого, пусть даже сколь угодно малого, радиуса ε имеет бесконечное множество линейно независимых регулярных решений (см. [1]). Задача Дирихле для неоднородного уравнения $w_{z\bar{z}}=f$ в круге C, не будучи ни фредгольмовой, ни нётеровой — нормально разрешима по Хаусдорфу; эта же задача в области с границей, содержащей отрезок прямой $y=0$, не является даже хаусдорфовой, хотя однородная задача имеет только нулевое решение (см. [2]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6 (28), с. 211—12; [2] его же, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966. *А. М. Нахушев.*

БИЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа с единицей и с двумя образующими a, b, заданная определяющим соотношением $ab=1$. Одна из реализаций Б. п. — декартов квадрат $N\times N$, где N — множество неотрицательных целых чисел относительно операции $(k, l)*(m, n)=(k+m-\min(l, m), l+n-\min(l, m))$. Б. п. является *инверсной полугруппой* и как инверсная полугруппа моногенна, т. е. порождена одним элементом. *Идемпотенты* Б. п. образуют цепь, упорядоченную по типу неотрицательных чисел. Б. п. бипроста (см. *Простая полугруппа*).

Б. п. нередко возникают в теоретико-полугрупповых исследованиях, не только как один из представителей нек-рых важных классов полугрупп, но и в качестве «блоков», определяющих строение тех или иных полугрупп. Напр., для всякого идемпотента e 0-простой, но не вполне 0-простой полугруппы S существует бициклическая подполугруппа в S, содержащая e в качестве единицы (см. [1], § 2. 7). Указанные в определении элементы a и b Б. п. B будут соответственно ее левым и правым увеличительными элементами (т. е. существуют такие собственные подмножества X и Y в B, что $aX\subset B$, $Yb\subset B$). Более того, в полугруппе S с единицей e элемент c будет левым увеличительным тогда и только тогда, когда S содержит бициклическую полугруппу, единица к-рой совпадает с e, а роль элемента a играет c; аналогичное утверждение верно для правых увеличительных элементов, так что S обладает левыми увеличительными элементами тогда

и только тогда, когда она обладает правыми увеличительными элементами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

БИЦИЛИНДР — см. *Бицилиндрическая область.*

БИЦИЛИНДРИКА — две замкнутые линии, получающиеся в пересечении двух цилиндров, оси к-рых пересекаются под прямым углом. Параметрич. уравнения Б.

$$x = a\cos t, \quad y = \pm\sqrt{b^2 - a^2\sin^2 t}, \quad z = a\sin t, \quad b \geqslant a,$$

где a и b — радиусы цилиндров, t — параметр. При $a = b$ Б. представляет собой пару равных эллипсов. *Е. В. Шикин.*

БИЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — область D в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$, представимая в виде декартова произведения двух плоских областей D_1 и D_2, то есть

$$D = [(z_1, z_2): z_1 \in D_1, \ z_2 \in D_2].$$

Частным случаем Б. о. является бикруг (бицилиндр) $B(a, r) = \{(z_1, z_2) : |z_1 - a_1| < r_1, |z_2 - a_2| < r_2\}$ радиуса $r = (r_1, r_2)$ с центром в точке $a = (a_1, a_2)$. Декартово произведение n (для $n \geqslant 3$) плоских областей наз. полицилиндрической областью. Аналогично определяется и поликруг (полицилиндр). *М. Ширинбеков.*

БИЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа τ, σ и z, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma}, \quad z = z,$$

где $0 \leqslant \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$. Координатные поверхности: семейство пар круговых цилиндров с параллельными осями ($\tau = \mathrm{const}$), семейство круговых цилиндров, ортогональных к ним ($\sigma = \mathrm{const}$), и плоскости ($z = \mathrm{const}$). Система Б. к. образуется в результате параллельного переноса вдоль оси Oz системы биполярных координат на плоскости Oxy.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2}, \quad L_z = 1.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Д. Д. Соколов.

БЛИЗНЕЦЫ, простые близнецы,— два простых числа с разностью, равной 2. Обобщенные близнецы — пары соседних простых чисел с разностью $2m$, где m — фиксированное натуральное число. Пользуясь таблицей простых чисел, легко указать примеры Б. Это 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19. Обобщенными Б. будут для $m = 2$, напр., 13 и 17, 19 и 23, 43 и 47. До сих пор (1977) неизвестно, бесконечно ли множество Б. и даже обобщенных Б. для к.-л. фиксированного m. В этом заключается проблема близнецов.

Лит.: [1] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [2] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959. *Н. И. Климов.*

БЛИЗОСТИ ПРОСТРАНСТВО — множество P с бинарным отношением δ на множестве всех его подмножеств, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $A\,\delta B$ равносильно $B\,\delta A$ (симметричность);

2) $A\,\delta(B \cup C)$ равносильно $A\,\delta B$ или $A\,\delta C$ (аддитивность);

3) $A\,\delta A$ равносильно $A \neq \varnothing$ (рефлексивность). Отношение δ определяет близостную структуру, или просто близость, на P; при этом, если $A\,\delta B$, то A и B наз. близкими множествами, а если $A\,\overline{\delta}\,B$ ($\overline{\delta}$ означает отрицание δ),— то далекими. Б. п. введены в 1936 (опубликовано в 1951, см [1]). Свойства Б. п. являются обобщением равномерных свойств метрич. пространства

аналогично тому, как в топологич. пространстве обобщаются его непрерывные свойства. Попытка введения структуры, до нек-рой степени аналогичной близостной, была предпринята в [3], когда еще не вполне оформилось понятие топологич. пространства, и вместо замыкания рассматривалось производное множество: введенное там отношение между множествами соответствовало у них общей (быть может, «идеальной») точки прикосновения.

Более содержательны понятия близости, удовлетворяющие, кроме 1) — 3), дополнительным аксиомам, аналогичным аксиомам отделимости; такова, напр., хаусдорфова близость, к-рая удовлетворяет аксиоме: $\{x\}\delta\{y\}$ равносильно $x=y$ (при этом вместо 3) достаточно принять ее следствие: $\varnothing\overline{\delta}\varnothing$); нормальная близость, характеризующаяся аксиомой: если $A\overline{\delta}B$, то существуют непересекающиеся подмножества U и V такие, что $A\overline{\delta}(P\setminus U)$ и $B\overline{\delta}(P\setminus V)$.

Появление аксиом Б. п., естественно симметризующих аксиомы топологич. пространства, сформулированные в терминах замыкания (т. е. близости множества и точки), стало возможным после того, как было установлено, что свойство отображений $f\colon M_1\to M_2$ метрич. пространств, состоящее в том, что любые множества, лежащие в M_1 на нулевом расстоянии, имеют в M_2 образы, также расположенные бесконечно близко, в точности эквивалентно равномерной непрерывности. (Аналогичное топологич. свойство $f[K]\subset[fK]$, где $[K]$ — замыкание K, иногда принимается за определение непрерывности.) Таким образом, всякая метрика dist на множестве P порождает близость на нем: $A\delta B$ эквивалентно $\operatorname{dist}(A,B)=0$, причем δ-непрерывность в смысле последней эквивалентна равномерной непрерывности [2]; Б. п., для к-рых такая метрика возможна, наз. метризуемыми. Близостная структура порождает топологич. структуру: замыкание множества K определяется следующим образом: $x\in[K]$ тогда и только тогда, когда $\{x\}\delta K$; при этом из δ-непрерывности отображения вытекает его непрерывность в этой топологии. Б. п., порождающие одну и ту же топологию, не обязательно δ-изоморфны: так, плоскости Евклида и Лобачевского не δ-изоморфны, хотя и гомеоморфны [2]. Топология хаусдорфовых близостей хаусдорфова; напротив, из близостной нормальности следует лишь полная регулярность: замкнутые непересекающиеся множества не обязательно далеки. Более того, всякая вполне регулярная топология порождается нормальной близостью, причем бикомпактная — единственной. Поскольку произвольные далекие множества в Б. п. можно отделить δ-непрерывной функцией [2], они функционально отделимы в смысле его топологии; те Б. п., для к-рых верно обратное, наз. пространствами близости Стоуна — Чеха.

С наличием топологии в Б. п. связаны нек-рые обобщения близостной структуры, к-рые обычно сводятся к замене аксиомы нормальности какой-либо более слабой. Таковы, напр., близость Лодато: если $A\overline{\delta}B$, то $A\overline{\delta}[B]$; близость Федорчука (θ-близость): $A\overline{\delta}B$ равносильно существованию открытого $C\supset A$, для к-рого внутренность замыкания $\operatorname{Int}[C]$ совпадает с A и притом $A\overline{\delta}(X\setminus[C])$; и т. д.

Естественность понятия Б. п. проявляется еще и в том, что всякое Б. п. имеет *бикомпактное расширение* и притом единственное; таким образом, гомеоморфные Б. п. взаимно однозначно соответствуют бикомпактным расширениям порождаемого ими топологич. пространства. δ-непрерывное отображение, т. е. такое отображение $f\colon P\to Q$, что для любых A, $B\subset P$ из $A\delta B$ следует $fA\delta fB$, и только оно продолжается в непрерывное отображение $\overline{P}\to\overline{Q}$ бикомпактных расширений. Высказанные утверждения, впервые сформулированные

в терминах Б. п. в [4], были доказаны, по существу, еще в 1948 П. Самюэлем (P. Samuel). При изучении компактификаций равномерных пространств им было установлено [10], что не всякие, а только нек-рые равномерные пространства (так наз. п р е к о м п а к т н ы е — пространства с бикомпактными пополнениями) можно равномерно непрерывно вложить в бикомпакт, однако для каждого равномерного пространства существует единственное бикомпактное расширение (S-рефлексия) $r : P \to SP$ (обратное отображение r^{-1} лишь непрерывно, но не равномерно непрерывно), причем на это расширение можно продолжить все окружения нек-рого типа, напр., все окружения вида $P \times P \setminus A \times B$. Таким образом, равномерные структуры разбиваются на классы эквивалентности, — две равномерности эквивалентны, если они имеют одну и ту же S-рефлексию. Близость в равномерном пространстве вводится условием: $A \delta B$, если для любого окружения Ω имеет место $(A \times B) \cap \Omega \neq \varnothing$; построенное вложение, равно как и указанная эквивалентность, есть δ - и з о м о р ф и з м, т. е. взаимно однозначное и δ-непрерывное отображение.

Взаимно однозначное соответствие между близостями и компактификациями привело к тому, что в течение довольно длительного времени после обнаружения факта старались исследовать главным образом те свойства этих пространств, к-рые формулируются непосредственно в терминах бикомпактных расширений. Таковы, напр., размерности δd (но не Δd) [6], близостный вес, близостная связность и т. п. На простое свойство близостной связности, т. е. свойство: из $A \lessdot (P \setminus A) \neq \varnothing$ следует $A \delta P \setminus A$, обратил внимание еще Г. Кантор (G. Cantor), к-рый определил континуум (не путать с введенным позже канторовым континуумом!) как близостно связное полное подпространство в E^n. Хотя, в принципе, все свойства Б. п. P заключены в свойствах инъекции $P \to \overline{P}$, все они, во-первых, отнюдь не обязательно заключены в свойствах самого $\overline{P}$, во-вторых, не известно, каким именно особенностям инъекции $P \to \overline{P}$ соответствуют такие свойства P, как, напр., метризуемость, полнота, правильность. Б. п. ценны именно тем, что с их помощью можно изучать компактификации, но не наоборот. Свойства Б. п., не описываемые непосредственно в топологич. терминах, наз. р а в н о м е р н ы м и. Первым систематически изученным равномерным свойством Б. п. явилась полнота: попытки ввести фильтры Коши или фундаментальные последовательности в терминах бикомпактных расширений не увенчались успехом.

Покрытие ω наз. р а в н о м е р н ы м п о к р ы т и е м Б. п. P, если с него начинается измельчающаяся последовательность $\omega \gg \omega_1 \gg \omega_2 \gg \ldots$ звездно вписанных покрытий (т. е. $\mathrm{St}(x, \omega_{n+1}) \subset U \in \omega_n$), причем ни одно из них не разрывает близких множеств, т. е. всегда $L \delta \overline{P} \setminus \mathrm{St}(L, \omega_n)$.

Множество равномерных покрытий Б. п. совпадает с объединением всех равномерных структур, совместимых с этим пространством [4]. Можно также определить равномерные покрытия как прообразы при всевозможных δ-непрерывных отображениях в метрич. пространства покрытий, имеющих положительное лебегово число.

Полнота, определенная с помощью ф и л ь т р о в К о ш и — таких фильтров Φ, что $\Phi \cap \omega \neq \varnothing$ для любого равномерного покрытия ω, — соответствует интуитивным представлениям и совпадает с метрической для метризуемых пространств. Для полноты Б. п. достаточно, чтобы какое-либо из совместимых с ним равномерных пространств было полным. Неизвестно (1977), необходимо ли это условие; во всяком случае, контрпримеры могут доставляться только неправильными (см. ниже) Б. п. Построены [5] пополнения Б. п. как наименьшие (уже не единственные) полные расширения;

одновременно пополнения суть наибольшие расширения, на к-рые продолжаются все равномерные покрытия в виде равномерных же покрытий, а также все δ-непрерывные отображения в полные Б. п. (другими словами, подкатегория полных Б. п.— наряду с подкатегорией бикомпактных пространств — рефлексивная категория). Пространства с бикомпактными пополнениями (т. е. прекомпактные пространства) характеризуются тем, что из каждого их равномерного покрытия можно выбрать конечное равномерное подпокрытие.

Произведение Б. п. P и Q первоначально вводили, индуцируя на теоретико-множественное произведение близость из топологич. произведения $\overline{P}\times\overline{Q}$ их бикомпактных расширений. Такое произведение, несмотря на то, что оно идентично с произведением в смысле категории Б. п., все же неудовлетворительно геометрически и пригодно главным образом для построения экзотических примеров: так, это произведение (обозначаемое обычно $P\cdot Q$) двух бесконечных дискретных пространств недискретно и даже неметризуемо, двух прямых линий — неметризуемо и анизотропно: поворот получившейся «плоскости» на острый угол не будет δ-изоморфизмом, и т. п.

Близостным произведением двух (и аналогично любого числа) Б. п. P и Q наз. произведение, наделенное грубейшей близостью [7], в к-рой равномерны все декартовы произведения равномерных покрытий факторов, т. е. все покрытия вида $\omega(\times)\psi=\{U\times V,\ U\in\omega,\ V\in\psi\}$. Требование δ-непрерывности обеих проекций $P\times Q\to P$ и $P\times Q\to Q$ эквивалентно аналогичному условию лишь для конечных равномерных покрытий. Для равномерных пространств, в отличие от Б. п., оба определения эквивалентны, так как подкатегория метрич. пространств не замкнута относительно декартова произведения в категории Б. п., хотя замкнута в категориях топологических и равномерных пространств. Близостное произведение можно понимать как естественное распространение функтора произведения с подкатегории метризуемых Б. п. на все Б. п., т. е. близость произведения $Q_1\times Q_2$ представляет собой грубейшую близость, в к-рой δ-непрерывны любого отображения $f_1\times f_2$: $Q_1\times Q_2\to M_1\times M_2$, где M_i — метрич. пространства, следует из δ-непрерывности обоих отображений f_i: $Q_i\to M_i$, если под $M_1\times M_2$ понимать обычное произведение метрич. пространств [7].

Незамкнутость подкатегории метрич. пространств приводит к непривычному, но неизбежному следствию: «вектор-функция» $P\to A\times B$, у к-рой обе «координатные» функции $P\to A$ и $P\to B$ δ-непрерывны, не обязательно δ-непрерывна (причем безразлично, что понимается под A и B: произвольные Б. п. или только метризуемые), лишь бы произведение метрич. пространств понималось в обычном смысле. Те Б. п., для к-рых указанного явления не происходит, наз. правильными. Правильные Б. п. можно определять также, как такие, у к-рых проекция диагонали в $P\times P$ является δ-изоморфизмом. В правильных Б. п. и только в них пересечение $\omega(\cap)\psi=\{U\cap V,\ U\in\omega,\ V\in\psi\}$ двух равномерных покрытий снова есть равномерное покрытие, и совокупность всех таких пересечений является равномерностью [7].

Для произвольного Б. п. P имеется грубейшее правильное пространство $P!$, мажорирующее P,— так наз. поправление. Поправление $P!$ является в то же время тончайшим Б. п., на к-рое продолжаются любые отображения вида $M\to P$, где M — метризуемо (т. е. отображение $M\to P!$ δ-непрерывно, если отображение $M\to P$ δ-непрерывно). Утверждение остается верным, если M заменить на произвольное правильное Б. п. Q; таким образом, множества δ-непрерывных отображений $Q\to P$ и $Q\to P!$ находятся в естественном взаимно одно-

значном соответствии, т. е. подкатегория правильных Б. п. корефлективна, а функтор «!» является корефлектором. Метризуемые Б. п. правильны (и проекция $P! \to P$ — гомеоморфизм), подкатегория метрич. пространств замкнута относительно декартова произведения в категории правильных пространств. Кроме метрических, правильны прекомпактные пространства, более того, утверждение: если для всех Q из $Q! = P$ следует $Q = P$,— эквивалентно прекомпактности P.

Поправления произведений «$\cdot$» и «$\times$» совпадают: $(P \cdot Q)! = (P \times Q)! = (P! \times Q!)!$. Таким образом, произведение $P \cdot Q$ почти всегда неправильно, поскольку совпадение $P \cdot Q = P \times Q$ имеет место тогда и только тогда, когда один из факторов прекомпактен; неизвестно (1977), правильно ли произведение правильных Б. п.

Теория размерности Б. п. имеет нек-рые особенности. Прежде всего, для Б. п. рассматриваются две размерности «по покрытиям» δd и Δd (определенные аналогично топологич. размерности dim, но с использованием конечных или, соответственно, произвольных равномерных покрытий), и только одна индуктивная размерность δ Ind, аналогичная размерности Ind, с заменой непересекающихся множеств на далекие [11]. Однако близостный аналог перегородки нетривиален: множество H «освобождает» далекие множества A и B, если $H \overline{\delta} A \cup B$ и из $H \overline{\delta} U \supset A \cup B$ следует $U = V \times W$, причем $A \subset V \overline{\delta} W \supset B$. Нет примера (1977) несовпадения хотя бы каких-нибудь двух из этих трех размерностей. Размерность δd конечно аддитивна, и $\delta dP = \dim P$; если P плотно в Q, то $\delta dP = \delta dQ$. Размерность δInd не меньше размерности δd и тоже не может уменьшаться при переходе к плотному подпространству, хотя неизвестно (1977), может ли она при этом увеличиваться; при переходе к пополнению она сохраняется. Для метризуемых пространств $\delta\text{Ind } M \leqslant \Delta dM$, в произвольном пространстве выполнено либо $\Delta dP = \delta dP$, либо $\Delta dP = \infty$. Построено несколько примеров равномерных пространств с несовпадающими размерностями, но ни одна из этих конструкций не верна для Б. п. В близостном произведении $N \times N$, где N дискретно и счетно, совпадение размерностей Δd и δd происходит в том и только в том случае, когда это Б. п. правильно [8]. Одновременно из неправильности $N \times N$ следует нарушение монотонности для Δd (так как $\Delta d\,(V \times N) = 0$).

Лит.: [1] Ефремович В. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, с. 341—3; [2] его же, «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 1, с. 189—200; [3] Riesz F., «Atti del IV Congresso Intern. dei Matem. Roma, 1908», v. 2, Roma, 1909, p. 18—24; [4] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 543—74; [5] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1954, т. 3, с. 271—306; 1955, т. 4, с. 421—438; [6] его же, «Матем. сб.», 1956, т. 38, № 3, с. 283—302; [7] Поляков В. З., «Матем. сб.», 1965, т. 67, № 3, с. 428—39; [8] его же, там же, 1965, т. 68, № 2, с. 242—50; [9] его же, там же, 1968, т. 76, № 4, с. 593—604; [10] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.» 1948, v. 64, p. 100—32; [11] Isbell J., «Pacif. J. Math.», 1959, v. 9, p. 107—21.

В. З. Поляков.

БЛИЗОСТЬ — см. *Близости пространство.*

БЛОК-СХЕМА — система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая нек-рым условиям, связанным с частотой появления пар элементов множества в подмножествах системы. Понятие Б.-с. возникло в теории планирования эксперимента в 20—30-х гг. 20 в., однако под названием тактических конфигураций Б.-с. изучались уже в сер. 19 в. Понятие Б.-с. является вариантом понятий гиперграфа, сети, комплекса. Обычно в Б.-с. на семейства подмножеств накладывается целый ряд дополнительных ограничений. Б.-с. можно задать парой множеств (V, B), где

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}, \quad B = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\},$$
$$B_i \subseteq V, \; i = 1, \ldots, b.$$

Элементы множества V наз. элементами Б.-с., а элементы множества B — ее блоками. Элемент a_i и блок B_j инцидентны, если $a_i \in B_j$. Число $|B_j|$

элементов, инцидентных блоку B_j, обозначается обычно через k_j, а число блоков, инцидентных элементу a_i, — через r_i. Через λ_{il} обозначается число

$$|\{B_j : a_i \in B_j,\ a_l \in B_j\}|.$$

Числа v, b, r_i, k_j, λ_{il} ($i, l = 1, \ldots, v$, $j = 1, \ldots, b$) наз. параметрами Б.-с. Если $r_i = r$ для всех $i = 1, \ldots, v$, $k_j = k$ для всех $j = 1, \ldots, b$, а $\lambda_{il} = \lambda$, то (V, B) есть уравновешенная неполная Б.-с., или BIB-схема (от английского balanced incomplete block design) с параметрами v, b, r, k, λ. Слово «уравновешенный» характеризует одинаковую частоту появлений элементов и пар элементов в блоках, а слово «неполный» служит для указания того, что, вообще говоря, не все k-элементные подмножества входят в B.

Пусть среди чисел λ_{il}, $i, l = 1, \ldots, v$, встречается ровно m различных: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, и пусть на элементах множества V введено m симметричных отношений связанности так, что выполнены следующие условия:

а) множество V^2 всех пар элементов множества V разбивается на m непересекающихся подмножеств $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_m^2$, причем если $(a, a') \in V_j^2$, то говорят, что элементы a и a' j-связаны;

б) $|\{B_j : a \in B_j,\ a' \in B_j,\ (a, a') \in V_i^2\}| = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, b$;

в) $|\{a : \exists a'\,(a, a') \in V_i^2\}| = n_i$, $i = 1, \ldots, m$;

г) $|\{a'' : (a'', a) \in V_j^2,\ (a'', a') \in V_k^2,\ (a, a') \in V_l^2\}| = p_{jk}^i$,

причем в силу симметричности $p_{jk}^i = p_{kj}^i$, $i, j, k = 1, \ldots, m$. Б.-с. со свойствами а) — г) наз. частично уравновешенной Б.-с. с m типами связей, или PBIB(m)-схемой (от английского partially balanced incomplete block design). Правило, задающее отношение связанности, наз. схемой связанности. BIB-схема является PBIB(1)-схемой. Примером PBIB(2)-схемы является Б.-с., к-рую можно представить в виде таблицы

1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	9	7	8	8	9	7
10	11	12	11	12	10	12	10	11

,

где любые два числа из одного столбца 1-связаны, а любые два числа, не принадлежащие одному столбцу, — 2-связаны. Здесь $v = 12$, $b = 9$, $r = 3$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 9$, $n_2 = 2$,

$$P^1 = \|p_{jk}^1\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix}, \quad P^2 = \|p_{jk}^2\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Всякой Б.-с. с v элементами и b блоками соответствует матрица инцидентности $A = \|c_{ij}\|$, где $c_{ij} = 1$, если $a_i \in B_j$, и $c_{ij} = 0$ в противном случае, $i = 1, \ldots, v$, $j = 1, \ldots, b$. В теории Б.-с. рассматриваются вопросы существования, классификации и вопросы, связанные с построением Б.-с. с заданными параметрами. Параметры Б.-с. связаны определенными соотношениями. Для BIB-схем справедливы равенства:

$$\begin{aligned} vr &= kb, \\ \lambda(v-1) &= r(k-1). \end{aligned} \tag{1}$$

Для параметров PBIB(m)-схем справедливо равенство (1) и следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^m n_i = v - 1,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i n_i = r\,(k-1),$$

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = \begin{cases} n_j, & \text{если } i \neq j, \\ n_j - 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

Матрица инцидентности BIB-схемы удовлетворяет основному матричному соотношению

$$AA^T-(r-\lambda)E+\lambda J, \qquad (2)$$

где E — единичная матрица порядка v, а J — матрица порядка v, составленная сплошь из единиц. Существование (0,1)-матрицы, удовлетворяющей условию (2), является достаточным условием существования BIB-схемы с заданными параметрами. Из (2) вытекает неравенство $b\geqslant v$. BIB-схема, для к-рой $b=v$ (и значит $r=k$), наз. симметричной Б.-с., или (v, k, λ)-конфигурацией. Для симметричных BIB-схем справедлива теорема: если существует симметричная BIB-схема с параметрами v, k, λ, то: а) при v четном $k-\lambda$ есть квадрат, б) при v нечетном уравнение

$$z^2=(k-\lambda)x^2+(-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$$

имеет решение в целых числах x, y, z, не равных одновременно нулю. Условия этой теоремы достаточны для существования рациональной матрицы A, удовлетворяющей (2).

Специальный круг вопросов, относящихся к существованию BIB-схем, возникает в связи с задачей: даны b блоков; каковы условия того, чтобы эти блоки можно было дополнить до BIB-схемы? В наиболее общем виде эти условия выражаются как требования положительной определенности нек-рой квадратичной формы Q, а также возможности представить Q в виде суммы квадратов линейных форм с неотрицательными коэффициентами.

Среди BIB-схем различают как наиболее изученные следующие подклассы: системы Штейнера (BIB-схемы с $\lambda=1$), в частности системы троек Штейнера ($k=3$); адамаровы конфигурации ($v=b=4t-1$, $r=k=2t-1$, $\lambda=t-1$, $t\geqslant 2$), матрица инцидентности к-рых получается из *Адамара матрицы*; аффинные конечные геометрии и проективные конечные геометрии (см. [1]). В классе PBIB-схем наиболее изучены PBIB(2)-схемы, среди к-рых по виду схемы связанности выделяют так наз. Б.-с. с делимостью на группы, треугольные Б.-с., Б.-с. типа латинского квадрата, циклические Б.-с. и т. д. (см. [3]).

Методы построения Б.-с. принято разделять на прямые и рекурсивные. Рекурсивные методы позволяют строить с помощью схем с меньшими значениями параметров схемы с большими значениями параметров. В прямых методах обычно используются свойства конечных полей или какие-либо геометрические свойства.

Помимо планирования экспериментов, Б.-с. применяются также в теории игр, теории графов и при построении кодов, исправляющих ошибки.

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Широкова С. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 5, с. 51—98.
В. Е. Тараканов.

БЛОТТО ИГРЫ — класс *антагонистических игр* в нормальной форме, в к-рых чистыми *стратегиями* игроков являются распределения ограниченных ресурсов (неделимых или делимых) по нескольким объектам, а выигрыш равен сумме выигрышей на отдельных объектах. Название получили по имени вымышленного лица — полковника Блотто — участника одной из первых игр такого типа.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964.
И. Н. Врублевская.

БЛОХА КОНСТАНТА — абсолютная константа, существование к-рой устанавливается следующей теоремой Блоха. Пусть H — класс всех голоморфных функций $f(z)$ в круге $|z|<1$ таких, что $f'(0)=1$.

Римановa поверхность функции $f(z)$ содержит на одном из своих листов наибольший открытый круг радиуса $B_f>0$. А. Блох доказал [1], что

$$\inf\{B_f;\ f\in H\}=B>0.$$

Более точной является оценка [2]: $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant 0{,}472$. Для целых функций из теоремы Блоха вытекает, что их римановы поверхности содержат однолистные круги сколь угодно большого радиуса, а это утверждение равносильно *Пикара теореме*.

Лит.: [1] Bloch A., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. sci. math. et sci. phys.», p. 3, 1925, t. 17, p. 1—22; [2] Ahlfors L. V., Grunsky H., «Math. Z.», 1937, Bd 42, № 5, S. 671—3; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

БЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА — точка q фазового пространства R *динамической системы* $f(p, t)$, обладающая окрестностью $U(q)$, для к-рой существует такой момент времени T, что $f(U(q),t)$ не имеет общих точек с $U(q)$ при всяких $t\geqslant T$ (все точки из $U(q)$, начиная с нек-рого момента, покидают навсегда окрестность $U(q)$). Точка q, не обладающая такой окрестностью, наз. неблуждающей. Свойство точки быть блуждающей или неблуждающей является двусторонним: если $f(U(q), t)$ не имеет общих точек с $U(q)$, то $U(q)$ не имеет общих точек с $f(U(q), t)$. Б. т. может стать неблуждающей при расширении пространства R. Так, напр., если R — окружность с одной точкой покоя r, то все точки $R\setminus r$ блуждающие. Они становятся неблуждающими, если к R присоединить точки нек-рой спирали без точек покоя, навивающейся на эту окружность изнутри или снаружи.

К. С. Сибирский.

БЛУЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО — множество W всех *блуждающих точек* нек-рой динамич. системы $f(p, t)$. Так как вместе с каждой точкой q множество W содержит все точки окрестности $U(q)$, оно открыто в пространстве R. В связи с этим множество $M=R\setminus W$ всех неблуждающих точек замкнуто. Множества W и M инвариантны, т. е. вместе с каждой своей точкой q они содержат точку $f(q, t)$ при любом t. В компактном пространстве R всякая блуждающая точка $f(q, t)$ стремится к M, как при $t\to+\infty$, так и при $t\to-\infty$.

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.— Л., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [3] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970.

К. С. Сибирский.

БЛУЖДАЮЩЕЙ ТРУБКИ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции. В Б. т. м. исходная задача оптимального управления в результате дискретизации (по времени T и фазовому вектору x) и при помощи операции, исключающей управление, сводится к минимизации функции вида

$$I(x_0,\ \ldots,\ x_N)=\sum_{i=0}^{N-1}\varphi_i(x_i, x_{i+1}),$$

где x_i — значение вектора x в узловых точках гиперплоскостей, заданных в пространстве (t, x) уравнениями $t=t_i$. Дискретизация по t и x производится с заданными шагами Δt и Δx. Каждой совокупности векторов $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ соответствует ломаная, проходящая через узлы и приближенно представляющая траекторию $x(t)$ исходной задачи оптимального управления. Длина $I(x_0, \ldots, x_N)$ этой ломаной складывается из длин $\varphi_i(x_i, x_{i+1})$ отдельных звеньев. Ломаная наименьшей длины находится с помощью рекуррентного соотношения

$$l_s(i+1)=\min_k(l_k(i)+l_{ks}(i))$$

(см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

Поиск глобального минимума на всем полученном графе требует большой оперативной памяти и значи-

тельных затрат машинного времени ЭВМ (особенно при дроблении Δx и Δt для получения заданной точности решения).

В Б. т. м. ценой отказа от решения задачи отыскания глобального минимума удается резко сократить требуемую память и число операций. В этом алгоритме (имеющем характер последовательных приближений) поиск наилучшей траектории производится не на всем графе, а на подграфе, задаваемом «трубкой», содержащей исходную ломаную — начальное приближение. В каждом сечении трубки содержится заданное количество узлов. Найденная ломаная выбирается за очередное приближение, после чего процесс вычислений повторяется на новом подграфе.

Оценки показывают, что в Б. т. м. число операций растет линейно с увеличением числа узлов сетки по x (с уменьшением шага Δx), тогда как в методе глобального перебора этот рост квадратичен.

Частным случаем Б.т.м. является *локальных вариаций метод*, в к-ром число узлов в каждом сечении трубки минимально и равно двум.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

БЛЯШКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, Бляшке функция,— регулярная аналитич. функция комплексного переменного z, определенная в единичном круге $K=\{z;\ |z|<1\}$ в виде конечного или бесконечного произведения

$$B(z)=z^n\prod_k \frac{|a_k|}{a_k}\,\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}, \qquad (*)$$

где n - целое неотрицательное число, $\{a_k\}$, $k=1,2,\ldots$, — последовательность точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ такая, что произведение в правой части (*) сходится (условие сходимости необходимо лишь в случае бесконечного произведения). Б. п. было введено В. Бляшке [1], установившим следующее утверждение: последовательность $\{a_k\}$ точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ определяет функцию вида (*) тогда и только тогда, когда сходится ряд $\Sigma_k(1-|a_k|)$. Каждый множитель вида

$$b_k(z)=\frac{|a_k|}{a_k}\,\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z},$$

наз. множителем Бляшке для a_k, осуществляет однолистное конформное отображение круга K на себя, переводящее точку $z=a_k$ в нуль, с нормировкой $b_k(-a_k/|a_k|)=1$. Множители вида $b_0(z)=z$ можно интерпретировать как множители Бляшке, соответствующие нулю $z=0$ и нормировке $b_0(1)=1$. Определение множителей Бляшке и Б.п. легко переносится на круг произвольного радиуса, а также на любую односвязную область, конформно эквивалентную кругу.

Последовательность $0,\ \ldots,\ 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ (здесь n нулей), обычно выписываемая в порядке неубывания $|a_k|$, является последовательностью всех нулей Б. п. (*) (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность). Таким образом, сформулированное выше утверждение Бляшке описывает те последовательности, к-рые являются последовательностями нулей всевозможных Б. п. Произведение (*) можно рассматривать как простейшую ограниченную голоморфную в круге K функцию, имеющую заданную последовательность нулей. Оно сходится абсолютно и равномерно внутри K, представляет в круге K ограниченную голоморфную функцию, $|B(z)|<1$, а на ∂K почти всюду имеет угловые граничные значения, по модулю равные 1. Для того чтобы ограниченная голоморфная функция $f(z)$ в K, $|f(z)|<1$, была Б. п., необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta=0.$$

С помощью Б.п. удается дать факторизационное описание важных классов голоморфных функций в единичном круге K. Так, доказана следующая теорема Бляшке: последовательность $\{a_k\}$ точек круга K является последовательностью всех нулей некоторой ограниченной голоморфной в K функции $f(z)$, $|f(z)|<1$, тогда и только тогда, когда ряд $\Sigma_k (1-|a_k|)$ сходится. При этом $f(z)$ представима в виде произведения

$$f(z)=B_f(z)\,g(z),$$

где $B_f(z)$ — Б.п., построенное по нулям $\{a_k\}$ функции $f(z)$, а $g(z)$ — отличная от нуля голоморфная в K функция, $|g(z)|<1$, допускающая сравнительно простое интегральное представление. Кроме ограниченных функций, аналогичное факторизационное описание строится для *ограниченного вида функций*, *Харди классов* (см. [2] -[4]).

Изложенная теория получила существенное обобщение в работах М. М. Джрбашяна (см. [5], [6]), построившего бесконечные произведения более общей природы, пригодные для факторизации гораздо более широких классов мероморфных функций. Решена также задача построения аналогов Б. п. и теоремы Бляшке для двусвязных [7] и, вообще, конечносвязных [8] областей. Решение проблемы построения удобных аналогов Б.п. для голоморфных функций многих комплексных переменных чрезвычайно затруднено тем обстоятельством, что нули таких функций не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Blaschke W., «Ber. Verhandl Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl». 1915, Bd 67, S. 194—200; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [4] Коллингвуд Э., Ловатер Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4 (172), с. 3—14; [7] Касьянюк С. А., «Матем. сб.», 1957, т. 42 (84), № 3, с. 301—26; [8] Тамразов П. М., «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 2, с. 308—11.

П. М. Тамразов.

БЛЯШКЕ ТЕОРЕМА ВЫБОРА, принцип компактности Бляшке: метрическое пространство выпуклых тел является локально компактным, т. е. из бесконечного множества выпуклых тел, принадлежащих фиксированному кубу, можно выбрать последовательность, сходящуюся к нек-рому выпуклому телу, принадлежащему этому кубу.

Теорема доказана В. Бляшке (W. Blaschke, 1916) (см. [1]).

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967.

А. Б. Иванов.

БЛЯШКЕ — ВЕЙЛЯ ФОРМУЛА — вариант *Грина формулы* для поля вращений $\boldsymbol{y}$ *бесконечно малого изгибания* поверхности с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$:

$$2\iint_G \left(\boldsymbol{x}\,\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u}\,\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial v}\right) du\,dv = \oint_{\partial G} (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{y}).$$

Вывод и идея применения Б.—В.ф. для доказательства жесткости овалоидов принадлежит В. Бляшке [1] и Г. Вейлю [2], о дальнейших приложениях см. [3]; аналогом Б.—В.ф. является *Герглотца формула*. Б.—В.ф. обобщается на случай бесконечно малых изгибаний поверхностей в пространствах постоянной кривизны.

Лит.: [1] Blaschke W., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen», 1912, S. 44—55; [2] Weyl H., «Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin», 1917, S. 250—66; [3] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158; [4] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957.

М. И. Войцеховский.

БОГОЛЮБОВА НЕРАВЕНСТВО в статистической механике,— 1) Б. н. для функционала свободной энергии — неравенство, реализующее вариационный принцип статистич.

механики. Для любых эрмитовых операторов U_1 и U_2 справедливо неравенство:

$$\frac{1}{N}\langle U_1-U_2\rangle U_1 \leqslant f[U_1]-f[U_2] \leqslant \frac{1}{N}\langle U_1-U_2\rangle U_2, \quad (*)$$

где

$$f[U] = -\frac{\Theta}{N}\ln \mathrm{Tr}\, e^{-U/\Theta}$$

и имеет смысл плотности свободной энергии для системы с гамильтонианом U, аддитивный параметр N — число частиц или объем в зависимости от системы, Θ — абсолютная температура в энергетич. единицах, а

$$\langle\ldots\rangle U \equiv \frac{\mathrm{Tr}\,(\ldots e^{-U\Theta})}{\mathrm{Tr}\, e^{-U\Theta}}$$

и обозначает термодинамические средние по гамильтониану U.

Б. н. (*) находит применение при получении точных в термодинамич. пределе решений для модельных задач квантовой статистич. физики [1], [2], в исследованиях методом молекулярного поля [3], при доказательстве существования термодинамич. предела, а также для получения физически важных оценок для свободной энергии различных многочастичных систем [4]. Существуют обобщения Б. н. (*) на случай алгебры Неймана со «следом» [5] и общей алгебры Неймана [6].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., «J. Phisica», 1966, v. 32, p. 933—944; [2] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [3] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975; [4] Кудрин Л. П., Статистическая физика плазмы, М., 1974; [5] Ruskai M. B., «Commun. Math. Phys.», 1972, v. 26, p. 280—289; [6] Araki H., «Commun. Math. Phys.», 1973, v. 34, p. 167—178.

2) Б.н. для функций Грина и корреляционных функций. Для двумерных временных температурных коммутаторных функций Грина в энергетич. представлении справедливо неравенство

$$|\langle\langle A;\ B\rangle\rangle_{E=0}|^2 \leqslant |\langle\langle A;\ A^+\rangle\rangle_{E=0}|\cdot|\langle\langle B^+;\ B\rangle\rangle_{E=0}|, \quad (1)$$

где $\langle\langle\ldots\rangle\rangle_E$ обозначает фурье-образ функции Грина (в энергетич. представлении) от соответствующих операторов в представлении Гейзенберга. Через спектральные представления функции Грина (полагая $A = iQ \equiv [Q,\ H]$) Б. н. (1) можно представить в виде:

$$|\langle\langle B^+;\ B\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{|\langle [Q,\ B]_-\rangle_H|^2}{2\pi\,|\langle\langle [Q;\ [Q^+,\ H]_-]_-\rangle\rangle_H|}, \quad (2)$$

где $\langle\ldots\rangle_H$ обозначает термодинамич. средние по гамильтониану системы H, $[,]$ — знак коммутатора; а также можно получить неравенство, мажорирующее (2):

$$\langle BB^+ + B^+B\rangle \geqslant 2Q\,\frac{|\langle [Q;\ B]_-\rangle|^2}{|\langle\langle [Q;\ [Q^+;\ H]_-]_-\rangle\rangle|}. \quad (3)$$

Общность неравенств (2) и (3) определяет их широкое применение при изучении различных физич. систем.

Улучшение оценок для корреляционной функции

$$\langle B_k B_k^+ + B_k^+ B_k\rangle_H$$

достигается в (3) выбором в качестве оператора $Q_k = -Q(k)$ нек-рого «квазиинтеграла» движения, коммутирующего при $k=0$ с гамильтонианом системы H. При этом коммутатор в числителе правой части в (3) отражает трансформационные свойства операторов B_k при инфинитезимальных преобразованиях непрерывной группы симметрии, генератором к-рой является оператор $Q_{k=0}$. Неравенства (2), (3) эффективно используются при рассмотрении систем со спонтанным нарушением симметрии: термодинамич. средние тогда следует рассматривать в рамках *квазисредних метода*.

Для функций Грина в классической статистич. механике справедливы аналогичные неравенства, причем соответствующие коммутаторы «переходят» в *Пуассона скобки*.

Б. н. позволили установить ряд соотношений для модельных систем статистич. физики, исследовать проблему упорядочения в конечных системах и др.

Лит. см. при статье *Боголюбова теорема. А. М. Курбатов.*

БОГОЛЮБОВА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. «острие клина»—обобщение принципа *аналитического продолжения*, особенно для случая многих комплексных переменных; получена Н. Н. Боголюбовым в 1956 при обосновании дисперсионных соотношений в квантовой теории поля (см. [1], Дополнение А). Современная формулировка: пусть функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)=x+iy$, голоморфна в открытом множестве $T^C_\eta=[z:|z|<\eta,\ y\in C]$, где C — такой открытый конус в R^n с вершиной в нуле, что $C\cap(-C)\neq\varnothing$, открытое множество $\mathcal{O}\subset R^n$ содержится в шаре $|x|<\eta$ и для любой основной функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ существует

$$\lim \int f(x+iy)\,\varphi(x)\,dx, \quad y\to 0, \quad y\in C,$$

не зависящий от способа стремления $y\to 0$, $y\in C$; тогда $f(z)$ допускает аналитич. продолжение в область $T^C_\eta\cup\tilde{\mathcal{O}}$:

$$\tilde{\mathcal{O}}=U_{\xi\in\mathcal{O}}[z:|z-\xi|<\theta\Delta_{\mathcal{O}}(\xi)],$$

где $\tilde{\mathcal{O}}$ — комплексная окрестность множества $\mathcal{O}$, причем $0<\theta<1$ — постоянная, зависящая только от конуса C, а $\Delta_{\mathcal{O}}(\xi)$ — расстояние от точки ξ до границы множества $\mathcal{O}$. Б. т. «острие клина» остается верной и при $\eta=\infty$. В этом случае и при нек-рых предположениях о росте функции $f(z)$ получается первоначальная формулировка Н. Н. Боголюбова (см. [1]; роль конуса играл световой конус в R^4). Существуют различные доказательства и обобщения этой теоремы (см. [2]). Особо следует отметить обобщения на гиперфункции (см. [4]) и голоморфные коциклы (см. [3]).

Б. т. «острие клина» находит широкие применения в аксиоматич. квантовой теории поля, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории граничных значений голоморфных функций (особенно функций многих комплексных переменных). При этом полезным дополнением к теореме является т е о р е м а о C-в ы п у к л о й о б о л о ч к е [2]; пусть, в условиях Б. т. «острие клина», $C=C^+\cup C^-$, $C^-=-C^+$, где C^+ — выпуклый острый конус; тогда

$$B_C(\mathcal{O})\subset \mathrm{Re}\,H(T^C_\eta\cup\tilde{\mathcal{O}}),$$

где $H(\mathcal{D})$ — *голоморфности оболочка* области $\mathcal{D}$, $\mathrm{Re}\,\mathcal{D}$ — действительное сечение области $\mathcal{D}$, $B_C(\mathcal{O})$ есть C-выпуклая оболочка множества $\mathcal{O}$, т. е. наименьшее открытое множество, содержащее $\mathcal{O}$ и обладающее тем свойством, что если точки x' и x'' из $B_C(\mathcal{O})$ могут быть соединены C-подобной кривой, целиком лежащей в $B_C(\mathcal{O})$, то и все гомотонные ей кривые лежат в $B_C(\mathcal{O})$.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Martineau A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes — «Théory of Distributions. Proc. of an intern. Summer Institute Held», Lisboa, 1964, p. 193—326; [4] Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics, 287, B.—Hdlb.—N. Y., 1973. *В. С. Владимиров.*

2) Б. т. о б о с о б е н н о с т я х т и п а $1/q^2$: теорема статистич. механики об асимптотич. поведении *Грина функций* в пределе малых импульсов ($q\to 0$) для бозе- и ферми-систем с градиентно-инвариантным потенциалом взаимодействия. Установлена Н. Н. Боголюбовым в 1961 (см. [1]).

Для систем многих взаимодействующих частиц в случае вырождения состояния статистич. равновесия для двувременных температурных коммутаторных функций Грина в энергетич. представлении справедливо неравенство:

$$|\langle\langle a_q,\ a_q^+\rangle\rangle_{E=0}|\geqslant \mathrm{const}\cdot q^{-2}, \qquad (1)$$

где a_q, a_q^+ — операторы уничтожения и рождения частицы с импульсом $\vec{q}$.

Возникающие (при $q \to 0$), в соответствии с Б. т., у функций Грина особенности отвечают элементарным возбуждениям в исследуемой физич. системе. Б. т. предсказывает также асимптотич. поведение при малых импульсах макроскопич. характеристик системы, связанных с функциями Грина известными формулами.

Согласно (1), напр., для сверхтекучих бозе- (или ферми-) систем плотность непрерывного распределения частиц по импульсам $\omega(q)$ при $q \to 0$ стремится к бесконечности не медленнее, чем $1/q^2$. В этом случае вырождение состояния статистич. равновесия связано с законом сохранения полного числа частиц, т. е. с инвариантностью гамильтониана системы относительно градиентных преобразований. Но аналогичные особенности появляются у соответствующих функций Грина и, следовательно, у корреляционных функций, характеризующих системы с другими видами вырождения, обусловленными наличием нек-рых аддитивных законов сохранения, т. е. инвариантностью гамильтониана системы относительно нек-рых групп преобразований. Б. т. приводит к целому ряду нетривиальных физич. следствий, связанных, напр., с вопросами специфич. упорядочения в системах многих взаимодействующих частиц, спонтанное нарушение симметрии в к-рых проявляется совершенно различным образом: модель Гейзенберга с ферро-, антиферро- и ферримагнитным упорядочиванием, системы сверхтекучего и сверхпроводящего типа, системы с кристаллич. упорядочением.

Возникновение у функций Грина особенностей при $q \to 0$ связывается с наличием в энергетич. спектре системы ветви коллективных возбуждений «бесщелевого» типа, что отвечает при определенном ограничении на потенциал взаимодействия спонтанному нарушению симметрии.

Характер энергетич. спектра элементарных возбуждений может быть исследован с помощью неравенства для построенного на функциях Грина типа (1) *массового оператора*. Для бозе-систем при конечной температуре ($\theta \equiv k_B T > 0$) это неравенство имеет вид:

$$|\Sigma_{11}(0, q) - \Sigma_{12}(0, q)| \leqslant \text{const} \cdot q^2. \qquad (2)$$

При $q = 0$ формула (2) дает обобщение (на конечные температуры) так наз. формулы Гугенгольца — Пайнса. В предположении регулярности массового оператора в окрестности точки ($E = 0$, $\vec{q} = 0$) из (2) можно получить «бесщелевой» характер (акустич. типа) энергетич. спектра возбужденных состояний.

В случае же нулевых температур ($\theta = 0$) неравенство (1) позволяет установить связь между плотностью непрерывного распределения частиц по импульсам и минимальной энергией возбужденного состояния.

Соотношения типа (1) должны быть справедливы и в квантовой теории поля, где в случае спонтанного нарушения симметрии (при переходе от одного основного состояния к другому) возникает [4], [5] бесконечное число частиц нулевой массы (Голдстоуна теорема), интерпретируемых как особенности при малых импульсах в квантово-полевых функциях Грина. Б. т. перенесена на релятивистскую квантово-полевую модель со спонтанным нарушением симметрии в [6].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, Киев, 1971; [2] Садовников Б. И., Федянин В. К., «Теор. и матем. физ.», 1973, т. 16, в. 3, с. 368–93; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [4] Goldstone J., «Nuovo Cim.», 1961, v. 19, p. 154–64; [5] Goldstone J., Salam A., Weinberg S., «Phis. Rev.», 1962, v. 127, p. 965–70; [6] Казанский А. К., «Теор. и матем. физ.», 1975, т. 22, в. 3, с. 418–21.

А. М. Курбатов.

БОГОЛЮБОВА ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ (ББГКИ-уравнения — Н. Н. Боголюбов, М. Борн (М.

Born), Дж. Грин (G. Green), Дж. Кирквуд (J. G. Kirkwood), Дж. Ивон (J. Yvon) — цепочка уравнений (иерархия) для одночастичных, двухчастичных и т. д. функций распределения классической статистич. системы. Эти функции определяются как

$$F_s(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = \\ = V^s \int w_N \, d\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots d\boldsymbol{r}_N \, d\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots d\boldsymbol{p}_N, \qquad (1)$$

где $s = 1, 2, \ldots, V$ — объем системы, а w_N есть N-частичная нормированная на единицу функция распределения, удовлетворяющая *Лиувилля уравнению*

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}, \qquad (2)$$

где фигурные скобки — *Пуассона скобки*, а H есть гамильтониан системы. Б. ц. у. в предельном статистич. случае $V \to \infty$, $V/N = v = \text{const}$ имеет вид уравнения для F_s со специфич. «зацеплением» с функцией F_{s+1} более высокого ранга:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} - \{H_s, F_s\} = \\ \frac{1}{v} \int \left\{ \sum\nolimits_{1 \leqslant i \leqslant s} \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|), F_{s+1} \right\} d\boldsymbol{r}_{s+1} d\boldsymbol{p}_{s+1}, \qquad (3)$$

где $\Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|)$ — потенциал взаимодействия i-й и $(s+1)$-й частиц, а H_s — гамильтониан s частиц системы.

В термодинамически равновесном случае, когда распределение по импульсам каждой частицы является *Максвелла распределением*, рассматриваются s-частичные функции распределения по координатам частиц, к-рые определяются соотношениями типа (1) через N-частичную функцию

$$w_N(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \frac{1}{Q} \exp\left(-\frac{H_1}{\theta}\right), \qquad (4)$$

где $H_1 = H - H_0$, причем H_0 есть сумма кинетич. энергий частиц системы, а конфигурационный интеграл Q определяется из условия нормировки (4). Б. ц. у. для этих функций имеет вид:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial U_s}{\partial x_1} F_s + \\ + \frac{1}{\theta} \frac{1}{v} \int \frac{\partial \Phi(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{s+1}|)}{\partial x_1} F_{s+1} \, d\boldsymbol{r}_{s+1} = 0, \qquad (5)$$

где U_s — потенциальная энергия взаимодействия s частиц системы.

При помощи функций распределения, гл. обр. F_1 и F_2, могут быть выражены все специфические характеристики статистич. систем. Основные трудности исследования Б. ц. у. (3) или (5) связаны с проблемами замыкания системы (расцепление Б. ц. у.) и решения замкнутой системы со специальными предельными условиями для функций F_s. Это исследование специфично для физич. систем различного типа и наиболее разработано для случаев короткодействия, когда $r_0^3/v \ll 1$, где r_0 — эффективный радиус взаимодействия частиц друг с другом, и для случаев дальнодействия, когда $r_0^3/v \gg 1$, в частности для системы с кулоновским взаимодействием. Во временной теории это приводит непосредственно к кинетич. *Больцмана уравнению* для одночастичной функции F_1 или к *Власова кинетическому уравнению*, а в равновесной теории — к *вириальному разложению* для термодинамич. потенциала или к специфическим кулоновским поправкам.

При рассмотрении квантовых статистич. систем Б. ц. у. составляется для s-частичных статистич. квантовых операторов $\langle x_1, \ldots, x_s | F_s | x_1', \ldots, x_s' \rangle$, являющихся следами по переменным $s+1, \ldots, N$ частиц общего N-частичного оператора — матрицы плотности. Эти уравнения имеют вид, аналогичный уравнениям

(3), в к-рых классич. скобки Пуассона заменены квантовыми скобками.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. тр., т. 2, К., 1970, с. 99—196; [2] его же, там же, с. 227—493; [3] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965. *И. А. Квасников.*

БОЗЕ — ЭЙНШТЕЙНА СТАТИСТИКА, Бозе статистика,— квантовая статистика, применяемая к системам тождественных частиц с целым спином (0,1, 2, . . . в единицах $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*). Предложена Ш. Бозе (S. Bose) и А. Эйнштейном (A. Einstein) в 1924. Согласно этой статистике, в каждом квантовом состоянии может находиться произвольное число частиц. В. Паули (W. Pauli) доказал, что тип квантовой статистики однозначно связан со спином частиц, так как совокупности частиц с целым спином подчиняются Б. — Э. с., а с полуцелым спином — *Ферми — Дирака статистике*.

Состояние системы многих частиц в квантовой механике определяется волновой функцией, к-рая в случае тождественных частиц может быть либо симметричной по отношению к перестановкам любой пары частиц (для частиц с целым спином), либо антисимметричной (для частиц с полуцелым спином). Для системы частиц, подчиняющихся Б. - Э. с., состояния описываются симметричными волновыми функциями, что является другой, эквивалентной формулировкой Б.—Э. с. Системы из большого числа частиц, подчиняющихся Б. Э. с., наз. системами Бозе, например газом Бозе.

Для идеального квантового газа, т. е. для системы тождественных частиц с массой m без взаимодействия, находящихся в кубе объема $V = L^3$, квантовые одночастичные уровни энергии равны

$$\varepsilon_p = p^2/2m,$$

где p — собственные значения импульса отдельной частицы: $p = 2\pi\hbar n/L$, n — вектор с целочисленными (положительными, отрицательными или равными нулю) компонентами.

Квантовое состояние идеального газа определяется заданием совокупности чисел заполнения уровней $\{n_p\}$, где каждое n_p указывает число частиц в одночастичном состоянии p. Для систем Бозе $n_p = 0,1,2,\ldots$.

Для больших систем уровни энергии расположены очень плотно и стремятся к непрерывному спектру при $V \to \infty$. Пусть уровни сгруппированы по малым ячейкам, содержащим G_i уровней в ячейке. Каждой ячейке соответствует средняя энергия ε_i, число G_i предполагается очень большим. Состояние системы определяется набором $\{N_i\}$, где N_i есть сумма n_p по уровням ячейки. Статистический вес, т. е. число различных распределений частиц по ячейкам, равен

$$W\{N_i\} = \prod_i \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!\,(G_i - 1)!} \qquad (1)$$

и определяет вероятность распределения частиц по ячейкам, характеризуемым числами заполнения n_1, n_2.

Наиболее вероятное распределение, соответствующее заданной энергии E и числу частиц N:

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i, \quad N = \sum_i N_i, \qquad (2)$$

находится из экстремума (1) при дополнительных условиях (2). Соответствующие средние числа заполнения равны

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}}{G_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}, \qquad (3)$$

где μ — химич. потенциал $\beta = 1/kT$, k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура. Величины β и μ находятся из условий (2).

Энтропия системы определяется логарифмом статистич. веса (1) для наиболее вероятного распределения (3):

$$S = k \ln W \{\bar{n}_i\} =$$

$$= k \sum_i g_i \left\{ n_i \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{n}_i}\right) + \ln \left(1 + \bar{n}_i\right) \right\}. \quad (4)$$

По энтропии и средней энергии можно найти и другие термодинамич. функции.

Общий подход к Б.—Э.с. состоит в применении большого канонич. *Гиббса распределения* для вероятности w_n заполнения квантового уровня n всей системы

$$w_n = Q^{-1} \exp \left\{ -\frac{E_n - \mu N}{kT} \right\}, \quad (5)$$

где

$$Q = \sum_n \exp \left\{ -\frac{E_n - \mu N}{kT} \right\} \quad (6)$$

— статистич. сумма, E_n — уровни энергии всей системы. Напр., для идеального газа Бозе

$$E_n = \Sigma_p \frac{p^2}{2m} n_p, \quad n = \{n_p\}, \quad n_p = 0, 1, 2, \ldots,$$

и из (5), (6) может быть получена для чисел заполнения формула (3), а для энтропии — формула (4) без использования комбинаторики. Такой подход особенно важен для неидеальных систем Бозе, когда применение Б.—Э. с. не сводится к простой комбинаторной задаче. В этом случае требования Б.—Э.с. могут быть удовлетворены, если для оператора Гамильтона H использовать представление вторичного квантования, в к-ром его действие определено в пространстве симметрических волновых функций, или в пространстве чисел заполнения. Тогда статистич. сумма равна

$$Q = \mathrm{Sp} \exp \left\{ -\frac{H - \mu N}{kT} \right\},$$

где N — оператор числа частиц, и с ее помощью можно найти все термодинамич. функции системы Бозе.

Лит.: [1] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Кубо Р., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1967; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [4] Шредингер Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1948; [5] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избр. тр., т. 2, К., 1970. *Д. Н. Зубарев.*

БОКСА ИНТЕГРАЛ — одно из обобщений интеграла Лебега, предложенных А. Данжуа (A. Denjoy, 1919), подробно изученное Т. Дж. Боксом (T. J. Boks, 1921). Действительная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ периодически (с периодом $b-a$) продолжается на всю прямую. Для произвольного разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, произвольного набора точек $\xi = \{\xi_i\}_1^n$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и произвольного t строится сумма

$$I(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i + t)\,[x_i - x_{i-1}].$$

Если $I(t)$ при $\rho = \max\limits_i (x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$ сходится по мере к определенному пределу I, то число I наз. интегралом Бокса (B-интегралом) от $f(x)$ по $[a, b]$. Таким образом, Б. и. есть интеграл римановa типа и является также обобщением интеграла Римана.

Б.и. существенно расширяет интеграл Лебега: всякая суммируемая функция B-интегрируема и эти интегралы совпадают, в то время как существуют несуммируемые B-интегрируемые функции; в частности, если g — сопряженная функция к суммируемой функции f, то она B-интегрируема и коэффициенты ряда, сопряженного к ряду Фурье от f, есть коэффициенты соответствующего ряда Фурье (в смысле B-интегрирования) от g (А. Н. Колмогоров). Дальнейшего развития теория Б. и. не получила, т. к. для интегрирования функций, сопряженных к суммируемым, более удобным оказался *A-интеграл*.

Лит.: [1] Boks T. J., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1921, v. 45, p. 211—264; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *И. А. Виноградова.*

БОЛЬЦА ЗАДАЧА — одна из основных задач классического вариационного исчисления на условный экстремум при наличии ограничений типа равенств; сформулирована О. Больца (O. Bolza) в 1913. Б. з. состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f: R \times R^n \times R^n \longrightarrow R, \quad g: R \times R^n \times R \times R^n \longrightarrow R,$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенства:

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varphi: R \times R^n \times R^n \longrightarrow R^m, \quad m < n,$$

и граничных условий:

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \quad \psi: R \times R^n \times R \times R^n \longrightarrow R^p, \quad p \leqslant 2n + 2.$$

При $g \equiv 0$ Б.з. наз. *Лагранжа задачей*, при $f \equiv 0$ и $p < 2n+2$ — *Майера задачей*. Особенностью Б.з. является смешанный характер функционала, к-рый представляет собой сумму интегрального функционала и функции от концов. С принципиальной точки зрения Б.з. равносильна задаче Лагранжа и приводится к ней, если положить

$$J_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} (f(t, x, \dot{x}) + x_{n+1})\, dt,$$

$$\dot{x}_{n+1} = 0, \quad x_{n+1}(t_1) = g(t_2 - t_1),$$

а также — задаче Майера, если положить

$$J_2 = x_0(t_2) + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

где $\dot{x}_0 = f(t, x, \dot{x}), \quad x_0(t_1) = 0.$

Выбор той или иной формы задачи, а также той топологии, в к-рой затем рассматривается эта задача, диктуется соображениями удобства или конкретной целесообразности. В теории оптимального управления чаще рассматриваются задачи в форме Майера, в классическом вариационном исчислении — в форме Лагранжа. Наиболее употребительна топология пространства C^1 непрерывно дифференцируемых функций. Для получения необходимых или достаточных условий экстремума надо накладывать требования гладкости на входящие в определения задачи функции f и g и отображения φ и ψ, а также требования о регулярности отображений φ и ψ, заключающиеся в том, что матрицы $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial t_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)$ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\right)$ должны иметь максимальный ранг p и m соответственно. Для того чтобы вектор-функция $x(t)$ доставляла экстремум в Б.з. (аналогично в задачах Лагранжа и Майера), необходимо, чтобы вдоль нее удовлетворялись *Эйлера уравнения* и *Вейерштрасса условие* относительно *Лагранжа функции*, составленной по входящим в задачу данным с *Лагранжа множителями*, а также *Якоби условие* и *трансверсальности условия*.

В приведенной формулировке Б. з. использованы обозначения, характерные для теории оптимального управления. В классическом вариационном исчислении Б. з. формулируют, используя другие обозначения:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx + g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)),$$

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \psi(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0.$$

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

БОЛЬЦАНО — ВЕЙЕРШТРАССА ПРИНЦИП ВЫБОРА — метод доказательства, часто применяемый в математич. анализе и основанный на последовательном

делении отрезка пополам и выборе из двух получившихся отрезков отрезка, обладающего нек-рым свойством. Этот метод может быть применен, если свойство отрезков таково, что из наличия свойства у нек-рого отрезка вытекает его наличие по крайней мере у одного из отрезков, получающихся делением пополам исходного. Напр., если на отрезке находится бесконечно много точек к.-л. множества, или если нек-рая функция неограничена на отрезке, или если не обращающаяся в нуль функция принимает на концах отрезка значения разного знака, то все это — свойства указанного типа. Применяя Б.— В. п. в., можно доказать *Больцано — Вейерштрасса теорему* и ряд других теорем анализа.

В зависимости от признака, по к-рому производится выбор отрезков при применении Б.—В. п. в., получается либо эффективный процесс, либо неэффективный. Примером первого случая является применение Б.—В.п. в. к доказательству существования у непрерывной действительной функции, принимающей на концах нек-рого отрезка значения разного знака, точки на этом отрезке, в к-рой она обращается в нуль (см. *Коши теорема* о промежуточных значениях непрерывной функции). В этом случае признаком, по к-рому производится последовательный выбор отрезков, является наличие у функции значений разных знаков на концах выбираемых отрезков. Если имеется способ вычисления функции в каждой точке, то в результате достаточно большого числа шагов можно получить координату точки, в к-рой функция на рассматриваемом отрезке обращается в нуль, с любой наперед заданной точностью. Таким образом, в этом случае одновременно с доказательством существования корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке, на концах к-рого функция f принимает значения разных знаков, дается и метод приближенного решения этого уравнения. Примером второго случая является доказательство с помощью Б.—В. п. в. теоремы о достижимости действительной непрерывной на отрезке функцией ее верхней грани. Здесь при последовательном делении отрезков пополам выбирается тот отрезок, на к-ром верхняя грань значений функции не меньше, чем на втором. Если, как и в первом случае, известен способ вычисления функции в каждой точке, то этого недостаточно для эффективного выбора нужного отрезка. Поэтому в этом случае с помощью Б.— В. п. в. можно лишь доказать теорему существования, утверждающую, что рассматриваемая функция принимает в нек-рой точке свое наибольшее значение, а не получить метод для приближенного отыскания с наперед заданной точностью этой точки.

Имеются различные обобщения Б.—В.п.в., напр. на случай n-мерного евклидова пространства ($n=2,3,\ldots$) применительно к n-мерным кубам при последовательном их делении на конгруэнтные кубы с ребрами, вдвое меньшими ребер исходного куба. *Л. Д. Кудрявцев.*

БОЛЬЦАНО — ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА: каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Теорема справедлива как для действительных, так и для комплексных чисел. Она обобщается на более общие объекты, напр.: всякое ограниченное бесконечное множество n-мерного евклидова пространства имеет в этом пространстве хотя бы одну предельную точку. Аналоги этого утверждения имеются и для еще более общих пространств.

Эта теорема доказана Б. Больцано [1]; позже она была независимо получена К. Вейерштрассом (K. Weierstrass).

Лит.: [1] Bolzano B., «Abhandl. Bochemische Ges. Wiss.», 1817. *Л. Д. Кудрявцев.*

БОЛЬЦМАНА ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ в кинетической теории газов — линейное интегро-дифференциальное уравнение, прибли-

женно описывающее эволюцию одночастичной функции распределения достаточно разреженного газа без внутренних степеней свободы при малых отклонениях от равновесия.

Это уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle c,\ \nabla_x \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} L_0(\varphi)$$

получается из *Больцмана уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \langle c,\ \nabla_x f \rangle = \frac{1}{\varepsilon} L(f, f)$$

с помощью замены

$$f = \pi^{-3/2} \exp(-c^2) + \mu \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \varphi$$

и приравнивания членов, содержащих 1-ю степень параметра μ. Оператор L_0 наз. линеаризованным оператором столкновений. Б. л. у. хорошо описывает эволюцию функции распределения только в том случае, если

$$\sup_{x,\ c,\ t} f(x, c, t) - \pi^{-3/2} \exp(-c^2) \ll 1.$$

При весьма общих предположениях оператор L_0 неположителен: $\langle \varphi, L_0 \varphi \rangle \leqslant 0$, и его можно записать в виде

$$L_0(\varphi) = -\nu(c)\,\varphi + G\varphi,$$

где $\nu(c)$ — оператор умножения на нек-рую функцию φ (к-рую иногда наз. частотой столкновений), а G — вполне непрерывный интегральный оператор. Для модели твердых шариков [1] функция $\nu(c)$ и ядро оператора G имеют следующий вид

$$\nu(c) = 4\pi^2 \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} c^2\right) + \left(|c| + \frac{1}{2|c|}\right) \int_0^{|c|} \exp(-\alpha^2)\ d\alpha \right],$$

$$G(c, c') = 4\pi\, |c - c'|^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{4} |c - c'|^2 - \frac{(|c|^2 - |c'|^2)}{4|c - c'|^2} \right\} - 2\pi |c - c'| \exp\left(-\frac{c^2 + c'^2}{2}\right).$$

Для Б. л. у. доказана теорема существования решения задачи Коши при $t \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, исследовано дисперсионное уравнение. Основная область приложений Б. л. у. — молекулярная акустика идеальных газов. Б. л. у. позволяет получить правильные значения коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, скорости звука) и закон Стокса — Кирхгофа поглощения ультразвука.

Лит.: [1] Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов, пер. с франц., 1960; [2] Арсеньев А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 5, с. 864—82.

А. А. Арсеньев.

БОЛЬЦМАНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — статистически равновесная функция $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ распределения по импульсам $\boldsymbol{p}$ и координатам $\boldsymbol{r}$ частиц идеального газа, молекулы к-рого подчиняются классич. механике, во внешнем потенциальном поле:

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = A \exp\left\{ -\frac{\frac{p^2}{2m} + U(r)}{kT} \right\}. \qquad (1)$$

Здесь k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура, $p^2/2m$ — кинетич. энергия частицы, $U(r)$ — потенциальная энергия частицы в поле, константа A определяется из условия нормировки по безразмерному фазовому объему:

$$\iint f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})\, \frac{d^3p\, d^3r}{h^3} = N,$$

где N — полное число частиц, h — постоянная Планка (универсальная постоянная $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*),

$$d^3\boldsymbol{p} = dp_x\, dp_y\, dp_z, \quad d^3\boldsymbol{r} = dx\, dy\, dz,$$

или из более обычного в кинетич. теории газов условия нормировки в пространстве скоростей и координат:

$$\int\int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{v}\, d^3\boldsymbol{r} = N,$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m, \quad d^3\boldsymbol{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z.$$

Б.р. есть следствие *Больцмана статистики* идеального газа; представляет собой частный случай *Гиббса распределения*

$$\rho(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{r}_N) = \frac{1}{z} e^{-\frac{H(p_1, r_1, \ldots, p_N, r_N)}{kT}}$$

для идеального газа, когда

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i u(\boldsymbol{r}_i)$$

и канонич. распределение Гиббса распадается на произведение Б. р. для отдельных частиц. Б. р. - предельный случай квантовых статистик идеального газа при достаточно высоких температурах, когда можно пренебречь квантовыми эффектами. При этом среднее число заполнения i-го квантового состояния частицы равно

$$\overline{n_i} = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}, \qquad (2)$$

где ε_i — энергия, соответствующая i-му квантовому состоянию частицы, μ — химич. потенциал, определяемый из условия $\sum_i \overline{n_i} = N$. Формула (2) справедлива при таких температурах и плотностях, когда среднее расстояние между частицами больше отношения постоянной Планка h к модулю средней тепловой скорости

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{\sqrt{mkT}}.$$

Частным случаем Б.р. (1) при $U=0$ является *Максвелла распределение*

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{p^2}{2mkT}\right\}. \qquad (3)$$

Функцию распределения (1) иногда наз. р а с п р е д е л е н и е м М а к с в е л л а — Б о л ь ц м а н а, а р а с п р е д е л е н и е м Б о л ь ц м а н а наз. функцию распределения (1), проинтегрированную по всем импульсам частиц, представляющую плотность числа частиц в точке $\boldsymbol{r}$:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp\left\{-\frac{U(r)}{kT}\right\}, \qquad (4)$$

n_0 — плотность числа частиц, соответствующая точке, где $U=0$. Отношение плотностей числа частиц в различных точках зависит от разности потенциальных энергий, соответствующей этим точкам:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}},$$

где $\Delta U = U(r_1) - U(r_2)$. В частном случае из (4) следует б а р о м е т р и ч е с к а я ф о р м у л а, определяющая распределение плотности числа частиц в поле тяжести над земной поверхностью

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \qquad (5)$$

где g — ускорение силы тяжести, m — масса частицы, h — высота над земной поверхностью, n_0 — плотность при $z=0$.

Для смеси газов с различной массой Б. р. показывает, что распределение парциональных плотностей частиц для каждой из компонент независимо от других компонент. Для газа во вращающемся сосуде $U(r)$ есть поле центробежных сил:

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения.

Лит. см. при ст. *Больцмана статистика*. *Д. Н. Зубарев.*

БОЛЬЦМАНА СТАТИСТИКА — статистика, применяемая к системе невзаимодействующих частиц, подчиняющихся классич. механике (классический идеальный газ). Распределение частиц идеального газа (поскольку они не взаимодействуют между собой) рассматривается не в фазовом пространстве всех частиц (Г-пространстве) как в статистич. механике Гиббса (см. *Гиббса распределение*), а в фазовом пространстве — пространстве координат и импульсов одной частицы (μ-пространстве). Это связано с тем, что для идеального газа фазовый объем в μ-пространстве сохраняется (частный случай *Лиувилля теоремы*).

Согласно Б. с., это фазовое пространство разбивается на большое число малых ячеек с таким фазовым объемом, чтобы в каждой из них содержалось еще большое число частиц N_i, и рассматриваются все возможные распределения частиц по этим ячейкам. Фазовый объем *i-й ячейки* G_i — ее объем в μ-пространстве в единицах h, где h — постоянная Планка (универсальная постоянная $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*). Такое безразмерное G_i имеет смысл максимально возможного числа микросостояний в ячейке i, так как наименьшая величина произведения каждой пары координат и импульсов, согласно квантовой механике, равна h, а частица имеет три степени свободы.

В основу статистич. механики положено предположение, что все микроскопич. состояния, соответствующие заданной полной энергии и заданному числу частиц, равновероятны. Число различных способов, к-рыми можно распределить N частиц по M ячейкам размера G_i по N_i частиц в каждой, равно

$$W_{\text{Б}}(\ldots N \ldots) = N! \prod_{1 \leqslant i \leqslant M} \frac{G_i^{N_i}}{N_i!}, \quad N = \sum_i N_i,$$

где учитывается, что частицы полностью независимы, различимы и перестановки частиц в пределах каждой ячейки не меняют состояния. В Б. с. эта величина определяет статистич. вес или термодинамич. вероятность состояния (в отличие от обычной вероятности она не нормированна на единицу). При подсчете статистич. веса учитывается, что перестановка тождественных частиц не меняет состояния, и поэтому фазовый объем $W_{\text{Б}}$ следует уменьшить в $N!$ раз:

$$W(\ldots N \ldots) = \frac{W_{\text{Б}}}{N!}.$$

Фазы с таким уменьшенным объемом наз. р о д о в ы м и ф а з а м и (в отличие от исходных в и д о в ы х ф а з).

Все микроскопич. состояния с различными распределениями частиц по фазовым ячейкам при заданном числе частиц

$$N = \sum_{i=1}^{M} N_i$$

и полной энергии

$$E = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i N_i$$

(ε_i — энергия частиц в i-й ячейке) соответствуют одному и тому же макроскопич. состоянию.

Предполагается, что распределение частиц в состоянии статистич. равновесия соответствует наиболее вероятному распределению, т. е. максимуму $W(\ldots N_i \ldots)$ при заданном числе частиц N и энергии E. Задача на условный экстремум $W(\ldots N_i \ldots)$ при фиксированных N и E дает для среднего числа частиц в ячейке *Больцмана распределение*

$$\overline{n_i} = \overline{\frac{N_i}{G_i}} = e^{(\mu - \varepsilon_i)/kT},$$

где k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная k $1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура, μ — химич. потенциал, определяемый

из условия $N=\Sigma_i N_i$. В частном случае потенциального поля $U(\boldsymbol{r})$:

$$\varepsilon_i=\frac{p_i^2}{2m}+U(\boldsymbol{r}_i).$$

Б. с. есть частный случай статистики Гиббса — канонич. ансамбля для газа из невзаимодействующих частиц. Б. с.— предельный случай квантовых *Ферми — Дирака статистики* и *Бозе — Эйнштейна статистики* при достаточно высоких температурах, когда можно пренебречь квантовыми эффектами.

Б. с. предложена Л. Больцманом (L. Boltzmann) в 1868–71.

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1952; [2] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955; [3] Шредингер Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1948; [4] Фаулер Р., Гуггенгейм Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1949.

Д. Н. Зубарев.

БОЛЬЦМАНА *H*-ТЕОРЕМА — одно из следствий кинетического *Больцмана уравнения*, согласно к-рому величина

$$H(t)\equiv\int h(t,\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=\int f\ln f\,d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{r},$$

где $f=f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ безразмерная удовлетворяющая уравнению Больцмана классическая одночастичная функция распределения в пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и импульсов $\boldsymbol{p}$, является невозрастающей функцией времени t. Временно́е поведение плотности $h(t,\boldsymbol{r})$ определяется релаксационным характером эволюции функции f к локальному *Максвелла распределению*, предельное же значение H-функции при $t\to\infty$ равно вычисленной по методу Гиббса энтропии идеального газа с обратным знаком. Если рассматриваемые приращения t значительно больше времени установления локального распределения Максвелла, то величину $(-h(t,\boldsymbol{r}))$ можно отождествить с плотностью энтропии, а $(-H(t))$ — с энтропией неравновесного идеального газа.

Принципиальное значение Б. H-т. с точки зрения статистич. механики состоит в математическом выражении основных положений макроскопич. термодинамики, согласно к-рым, напр., изолированная система самопроизвольно стремится к состоянию термодинамич. равновесия, причем этот процесс сопровождается увеличением энтропии.

H-теоремой наз. утверждения, аналогичные первоначальной Б.*H*-т., но сформулированные для статистич. систем иного или более общего типа, включая случай неидеальных и квантовых систем.

Б. *H*-т. получена Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1872).

Лит.: [1] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

И. А. Квасников.

БОЛЬЦМАНА УРАВНЕНИЕ — уравнение кинетич. теории газов, предложенное Л. Больцманом (L. Boltzmann) для определения одночастичной функции распределения идеального одноатомного газа (см. [1]). В безразмерных переменных Б. у. имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,\nabla_x f)+(F,\nabla_v f)=\frac{1}{\varepsilon}L(f,f). \qquad (*)$$

Здесь $f(x,v,t)$ — плотность функции распределения числа частиц в фазовом пространстве $x\otimes v$, x — трехмерная пространственная координата, v — скорость, t — время, F — плотность внешних массовых сил, ε — безразмерный параметр (пропорциональный отношению среднего расстояния, к-рое частицы пролетают без столкновений, к характерному масштабу рассматриваемых явлений). Оператор столкновений L в простейшем случае имеет следующий вид:

$$L(f,f)=\int\left[f(v')\,f(v_1')-f(v)\,f(v_1)\right]|\,v-v_1\,|\,d\omega\,dv_1,$$

где v_1 и v — скорости молекул до столкновения, v_1' и v' — скорости молекул после столкновения, $d\omega$ — элемент площади в плоскости, перпендикулярной вектору $v_1 - v$.

При выводе Б.у. предполагается, что эволюция функции $f(x, v, t)$ определяется ее значением в данный момент времени t и парными столкновениями между молекулами газа, причем время взаимодействия двух молекул газа при столкновении много меньше того времени, в течение к-рого они двигаются как свободные частицы. С математич. точки зрения вывод Б. у. заключается в определенном алгоритме построения оператора L на основе известного закона движения двух сталкивающихся друг с другом молекул газа.

В уравнении (*) область изменения переменной t — полупрямая $t \geqslant 0$, область изменения v — все пространство R^3, область изменения x — подобласть Ω в R^3 (Ω может и совпадать с R^3). По физич. смыслу функция $f(x, v, t)$ должна быть неотрицательной и такой, что

$$\int f(x, v, t)\, v^2\, dv < \infty.$$

Простейшее граничное условие на $d\Omega$ имеет следующий вид:

$$f(v - 2n(n, v); x; t) = f(v, x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad v \in R^3,$$

где n — нормаль к $d\Omega$. Имеется несколько различных точных постановок задачи Коши для уравнения (*), однако ни для одной из них не доказано существование в целом решения уравнения (*) при естественных с физич. точки зрения предположениях об операторе L.

Лит.: [1] Больцман Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1956; [2] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970; [3] Чепмен С. и Каулинг Т. Д., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960.

А. А. Арсеньев.

БОЛЬШАЯ СИСТЕМА — см. *Сложная система.*

БОЛЬШИХ ОТКЛОНЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности вида

$$\mathsf{P}(S_n - b_n > a_n),\ \mathsf{P}(S_n - b_n < -a_n) \text{ и } \mathsf{P}(|S_n - b_n| > a_n),$$

где

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$\{X_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, а $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности чисел такие, что $a_n > 0$, $\dfrac{S_n - b_n}{a_n} \to 0$ по вероятности.

Если случайные величины $X_1, X_2 \ldots$ имеют одинаковое распределение с математич. ожиданием, равным нулю, и конечной дисперсией σ^2, то можно положить $b_n = 0$ и $a_n = x_n \sigma \sqrt{n}$, где $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Особенно большое значение имеют *Крамера теорема* и ее усиления.

В случаях, когда необходимо иметь гарантированные оценки для Б. о. в., пользуются неравенствами типа *Чебышева неравенств* — это так наз. показательные оценки для Б. о. в. Напр., если случайные величины X_j независимы, $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{E}X_j^2 = \sigma_j^2$, $|X_j| \leqslant L$ с вероятностью 1, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$, и $a = -xL/B_n$, то при всех $x \geqslant 0$ верна оценка

$$\mathsf{P}\{|S_n| > xB_n\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{a}{3}\right)^{-1}\right\},$$

правая часть к-рой экспоненциально убывает с ростом x.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972, с. 5—24; [5] Юринский В. В., «Теория вероятностей и её применения», 1974, т. 19, в. 1, с. 152—153.

В. В. Петров, В. В. Юринский.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН — общий принцип, в силу к-рого совместное действие случайных факторов

приводит при нек-рых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Сближение частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний (подмеченное сначала, по-видимому, на азартных играх) может служить первым примером действия этого принципа.

На рубеже 17 и 18 вв. Я. Бернулли [1] доказал теорему, утверждающую, что в последовательности независимых испытаний, в каждом из к-рых вероятность наступления нек-рого события A имеет одно и то же значение p, $0<p<1$, верно соотношение:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (1)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$; здесь μ_n — число появлений события в первых n испытаниях, μ_n/n — частота появлений. Эта *Бернулли теорема* была распространена С. Пуассоном [2] на случай последовательности независимых испытаний, где вероятность появления события A может зависеть от номера испытания. Пусть эта вероятность для k-го испытания равна p_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, и пусть

$$\overline{p}=\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}.$$

Тогда *Пуассона теорема* утверждает, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\overline{p}\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (2)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$. Первое строгое доказательство этой теоремы было дано П. Л. Чебышевым (1846), метод к-рого полностью отличен от метода Пуассона и основан на нек-рых экстремальных соображениях; С. Пуассон выводил (2) из приближенной формулы для указанной вероятности, основанной на использовании закона Гаусса и в то время еще строго не обоснованной. У С. Пуассона впервые встречается и термин «закон больших чисел», к-рым он назвал свое обобщение теоремы Бернулли.

Естественное дальнейшее обобщение теорем Бернулли и Пуассона возникает, если заметить, что случайные величины μ_n можно представить в виде суммы

$$\mu_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

независимых случайных величин, где $X_k=1$, если A появляется в k-м испытании, и $X_k=0$ — в противном случае. При этом математич. ожидание $\mathsf{E}(\mu_n/n)$ (совпадающее со средним арифметическим математич. ожиданий $\mathsf{E}X_k$) равно p для случая Бернулли и $\overline{p}$ для случая Пуассона. Другими словами, в обоих случаях рассматривается отклонение среднего арифметического величин X_k от среднего арифметического их математич. ожиданий.

В работе П. Л. Чебышева «О средних величинах» (1867) было установлено, что для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\frac{\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (3)$$

(при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$) верно при весьма общих предположениях. П. Л. Чебышев предполагал, что математич. ожидания $\mathsf{E}X_k^2$ все ограничены одной и той же постоянной, хотя из его доказательства видно, что достаточно требования ограниченности дисперсий X_k, $\mathsf{D}X_k=\mathsf{E}X_k^2-(\mathsf{E}X_k)^2$, или даже требования

$$B_n^2=\mathsf{D}X_1+\ldots+\mathsf{D}X_n=o(n^2) \text{ при } n\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, П. Л. Чебышев показал возможность широкого обобщения теоремы Бернулли. А. А. Марков отметил возможность дальнейших обобщений и предложил применять название Б. ч. з. ко всей совокупности обобщений теоремы Бернулли [и в частности,

к (3)]. Метод Чебышева основан на точном установлении общих свойств математич. ожиданий и на использовании так наз. *Чебышева неравенства* [для вероятности (3) оно дает оценку вида

$$n^{-2}\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}X_k;$$

эту границу можно заменить более точной, разумеется при более значительных ограничениях, см. *Бернштейна неравенство*]. Последующие доказательства различных форм Б. ч. з. в той или иной степени являются развитием метода Чебышева. Применяя надлежащее «урезание» случайных величин X_k (замену их вспомогательными величинами $X'_{n,k}$; именно: $X'_{n,k}=X_k$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|\leqslant L_n$, и $X'_{n,k}=0$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|>L_n$, где L_n — нек-рые постоянные), А. А. Марков распространил Б. ч. з. на случаи, когда дисперсии слагаемых не существуют. Напр., он показал, что (3) имеет место, если при нек-рых постоянных $\delta>0$ и $L>0$ и всех n

$$\mathsf{E}\,|X_n-\mathsf{E}X_n|^{1+\delta}<L.$$

Аналогично доказывается теорема Хинчина (1929): если X_n имеют одинаковые законы распределения и $\mathsf{E}X_n$ существует, то Б. ч. з. (3) выполняется.

Для сумм независимых случайных величин можно сформулировать более или менее окончательный вариант Б. ч. з. Для этого целесообразно перейти на более общую точку зрения, связанную с понятием предельного постоянства последовательности случайных величин. Случайные величины последовательности $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ наз. предельно постоянными, если существует такая последовательность постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, что при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{|Y_n-C_n|>\varepsilon\}\longrightarrow 0 \qquad (4)$$

(т. е. Y_n-C_n сходится к нулю «по вероятности»; если (4) выполняется с к.-л. C_n, то оно выполняется и с $C'_n=mY_n$, где mY — *медиана* случайной величины Y). Далее, вместо последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин можно взять так наз. схему серий (см. *Серий схема*):

$$\begin{array}{c} X_{1,1},\ \ldots,\ X_{1,k_1},\\ X_{2,1},\ \ldots,\ X_{2,k_2},\\ \cdots\cdots\cdots\\ X_{n,1},\ \ldots,\ X_{n,k_n},\\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

случайных величин (первый индекс — номер серии, второй — номер величины внутри серии). Случайные величины каждой отдельной серии предполагаются взаимно независимыми. Схему последовательности легко свести к схеме серий, полагая $k_1=1$, $k_2=2$, ..., $X_{n,k}=X_{k!n}$.

Пусть

$$Y_n=X_{n,1}+\ldots+X_{n,k_n}.$$

Тогда общая форма вопроса о применимости Б.ч.з. для сумм независимых случайных величин такова: при каких условиях суммы Y_n предельно постоянны?

Ответ на этот вопрос дал А. Н. Колмогоров (1928). Допустим, не ограничивая общности, что медианы величин $X_{n,k}$ равны нулю. Пусть $\tilde{X}_{n,k}=X_{n,k}$ при $|X_{n,k}|\leqslant 1$ и $\tilde{X}_{n,k}=0$ при $|X_{n,k}|>1$. Тогда одновременное выполнение двух условий:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{P}\{|X_{n,k}|>1\}\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{E}\tilde{X}^2_{n,k}\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty,$$

необходимо и достаточно для предельного постоянства сумм Y_n. В качестве C_n можно взять $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\tilde{X}_{n,k}$. Достаточность этих условий легко доказывается методом Чебышева. Если математич. ожидания $\mathsf{E}X_{n,k}$ существуют, то легко указать дополнительные условия, при к-рых можно выбрать $C_n = \mathsf{E}Y_n$, что приводит к необходимым и достаточным условиям Б.ч.з. в классич. формулировке (3). Для последовательности независимых одинаково распределенных величин $\{X_n\}$ эти условия сводятся, в соответствии с указанной теоремой Хинчина, к существованию математич. ожидания. В то же время для предельного постоянства средних арифметических Y_n в этом случае необходимо и достаточно условие

$$n\mathsf{P}\{|X_1| > n\} \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty. \qquad (5)$$

Легко привести примеры, когда условие (5) не выполняется. Так, оно не выполняется, если все X_n имеют распределение Коши с плотностью $1/\pi(1+x^2)$ (к-рой соответствует характеристич. функция $e^{-|t|}$). Здесь средние арифметические $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ имеют характеристич. функцию $e^{-n|t/n|} = e^{-|t|}$, и следовательно, имеют при любом n то же самое распределение, что и отдельные слагаемые.

В числе наиболее важных примеров, где Б. ч. з. не имеет места, следует отметить примеры, связанные с временами возвращения в случайных блужданиях. Напр., в симметричном *Бернулли блуждании* время T_n до n-го возвращения в исходную точку есть сумма n независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, где X_1— время до 1-го возвращения, X_2— время между 1-м и 2-м возвращениями и т. д. Распределение величины $2T_n/\pi n^2$ сходится при $n \to \infty$ к невырожденному предельному закону с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x} x^{-3/2} \text{ при } x > 0$$

и равной нулю при $x \leqslant 0$. Таким образом, в этом случае распределение среднего арифметического величин X_i, т.е. T_n n, размещается, грубо говоря, на отрезке длины порядка n (в то время как в случае применимости Б. ч. з. оно сосредоточивается на отрезках длины $o(1)$).

Применимость Б. ч. з. к суммам зависимых величин (и в его классич. формулировке, и в более общих) связана в первую очередь с неограниченным убыванием зависимости между случайными величинами X_i и X_j при увеличении разности их номеров, т. е. $|i-j|$. Впервые соответствующие теоремы были доказаны А. А. Марковым для величин, связанных в цепь Маркова (1907). Именно, пусть X_1, X_2, ..., X_n, ... принимают конечное число значений и связаны в однородную цепь Маркова, причем все вероятности перехода за один шаг положительны. Здесь неограниченное убывание зависимости между X_j и X_i при $j-i \to \infty$ проявляется в том, что условное распределение X_j при фиксированном значении X_i стремится при $n \to \infty$ к пределу, не зависящему от выбранного значения X_i (эргодическая теорема Маркова). Как следствие этого утверждения выводится Б. ч. з.: сначала устанавливается, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - a\right)^2 \longrightarrow 0,$$

где $a = \lim\limits_{k \to \infty} \mathsf{E}X_k$; отсюда же вытекает, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0.$$

Более общий случай охватывается условиями С. Н. Бернштейна: если $\mathsf{D}X_j < L$, $R(X_i, X_j) \leqslant \varphi(|i-j|)$, где L — нек-рая постоянная, R — коэффициент корреляции, $\varphi(n)$ — функция, стремящаяся к нулю при

$n \to \infty$, то к величинам $\{X_n\}$ применим Б. ч. з. (3). Для стационарных в широком смысле последовательностей $\{X_n\}$ условие на корреляцию можно несколько ослабить, заменив его условием

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R(j) = 0,$$

где $R_j = R(X_i, X_{i+j})$.

Предыдущие результаты можно обобщить в различных направлениях. Во-первых, всюду выше рассматривалась сходимость «по вероятности». Рассматривают и другие типы сходимости: с вероятностью единица, в среднем квадратичном и т. п. (в действительности многие из указанных выше условий обеспечивают сходимость в среднем квадратичном, из к-рой вытекает сходимость по вероятности). Случай сходимости с вероятностью единица, ввиду его важности, выделяется особым названием «усиленного закона больших чисел» (см. *Больших чисел усиленный закон*).

Далее, многие теоремы переносятся с соответствующими изменениями на случайные векторы со значениями из евклидовых пространств любой размерности, из гильбертова пространства, из нек-рых банаховых пространств. Так, напр., если $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями из сепарабельного банахова пространства и если $\mathsf{E}\|X_n\|$ ($\|x\|$ — норма x) существует, то

$$\mathsf{P}\left\{\left\|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - \mathsf{E}X_1\right\| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$.

Рассматриваемый в наиболее общей форме Б. ч. з. оказывается тесно связанным с *эргодическими теоремами*. Разумеется, многие теоремы переносятся и на случай средних $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$, где $X(t)$ — случайный процесс, зависящий от непрерывного параметра (см., например, [10]).

Наконец, вместо сумм случайных величин можно рассмотреть другие симметрические функции от них. Это было сделано А. Я. Хинчиным (1951—55) в связи с обоснованием нек-рых выводов статистич. механики [9]. Результат А. Я. Хинчина можно пояснить следующим частным примером. Пусть $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ — координаты точки, равномерно распределенной на поверхности сферы

$$X_{n,1}^2 + \ldots + X_{n,n}^2 = n\mu, \ \mu > 0.$$

Тогда для широкого класса симметрических функций $f(X_{n,1}, \ldots, X_{n,n})$ имеет место Б.ч.з. в том смысле, что их значения при $n \to \infty$ оказываются предельно постоянными [это близко к замечанию П. Леви (P. Lévy, 1925) о том, что достаточно регулярные функции очень большого числа переменных почти постоянны в большей части области определения].

В большинстве старых руководств приводились обширные статистич. данные, иллюстрирующие Б.ч.з. (см., напр. [4], [11]).

Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер.— Часть четвертая сочинения Я. Бернулли..., СПБ, 1913); [2] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précedées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [3] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [4] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [9] Хинчин А. Я., Симметрические функции на многомерных поверхностях, в кн.: Памяти А. А. Андронова, М., 1955, с. 541—74; [10] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [11] Uspensky J. V., Introduction to mathematical probability, N. Y. — L., 1937.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН — одна из форм *больших чисел закона* (в его общем понимании), утверждающая, что при определенных условиях с вероятностью единица происходит неограниченное сближение средних арифметических последовательности случайных величин с нек-рыми постоянными величинами. Точнее, пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots \qquad (1)$$

— последовательность случайных величин и $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Говорят, что последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., если существует такая последовательность постоянных A_n, что вероятность соотношения

$$\frac{S_n}{n} - A_n \to 0 \qquad (2)$$

(при $n \to \infty$) равна 1. Другая формулировка, равносильная предыдущей, такова: последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., если при любом $\varepsilon > 0$ вероятность одновременного выполнения всех неравенств

$$\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon,\quad \left|\frac{S_{n+1}}{n+1} - A_{n+1}\right| \leqslant \varepsilon,\quad \ldots \qquad (3)$$

стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, здесь рассматривается поведение всей последовательности сумм в целом, в то время как в обычном законе больших чисел речь идет лишь об отдельных суммах. Если последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., то она удовлетворяет и обычному закону больших чисел с теми же самыми A_n, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon\right\} \to 1 \qquad (4)$$

(при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$). Обратное может быть неверно. Напр., если случайные величины (1) независимы и принимают при $n \geqslant 16$ два значения $\pm \sqrt{n/\ln \ln \ln n}$ с вероятностью 1/2 каждое, то для них выполняется закон больших чисел (4) с $A_n = 0$, но ни при каких A_n не выполняется Б.ч.у.з. (2). Заранее существование таких примеров совсем не очевидно, т. к. хотя вообще сходимость по вероятности слабее сходимости с вероятностью 1, тем не менее, напр., для рядов из независимых случайных величин оба вида сходимости равносильны.

Б.ч.у.з. был впервые сформулирован и доказан Э. Борелем [1] для схемы Бернулли (в теоретико-числовой интерпретации; см. *Бореля усиленный закон больших чисел*). Частные случаи схемы Бернулли возникают при разложении взятого наудачу (с равномерным распределением) действительного числа ω из отрезка (0,1) в бесконечную дробь по к.-л. основанию (см. *Бернулли испытания*). Так, в двоичном разложении

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{2^n}$$

последовательные знаки $X_n(\omega)$ принимают два значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое и являются независимыми случайными величинами. Сумма $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ равна числу единиц среди первых n знаков двоичного разложения, а $S_n(\omega)/n$ — их доле. В то же время S_n может рассматриваться как число «успехов» в схеме Бернулли с вероятностью «успеха» (появление 1), равной 1/2. Э. Борель доказал, что доля единиц $S_n(\omega)/n$ стремится к 1/2 для почти всех ω из отрезка (0,1). Аналогично, при разложении ω по основанию 10 можно назвать «успехом» появление к.-л. одной из цифр 0, 1, 2, . . ., 9 (напр., цифры 3). При этом получается схема Бернулли с вероятностью успеха 1/10, и частота появления выбранной цифры среди первых n знаков десятичного разложения стремится к 1/10 для почти всех ω из отрезка (0,1). Э. Борель отметил также, что частота

появления любой фиксированной группы r цифр стремится для почти всех ω к $1/10^r$ (см. *Нормальное число*).

Ф. Кантелли [2] дал достаточные условия Б.ч.у.з. для независимых случайных величин X_n в терминах вторых и четвертых центральных моментов слагаемых (схема Бернулли охватывается этими условиями). Вводя обозначение

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E} \mid X_j - \mathsf{E}X_j \mid^k,$$

условию Кантелли можно придать вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n,4} + B_{n,2}^2}{n^2} < \infty.$$

Доказательства Э. Бореля и Ф. Кантелли основаны на следующем соображении. Пусть для нек-рой последовательности положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ (при $n \to \infty$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| > \varepsilon_n \right\} < \infty. \qquad (5)$$

Тогда по *Бореля — Кантелли лемме* с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий, стоящих под знаком вероятности в (5). Поэтому с вероятностью 1 для всех достаточно больших n

$$\left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| \leqslant \varepsilon_n,$$

т. е. имеет место (3). Э. Борель оценивал члены ряда (5) по теореме Муавра — Лапласа, а Ф. Кантелли — по неравенству Чебышева с четвертыми моментами.

Дальнейшее расширение условий приложимости Б.ч. у.з. было осуществлено А. Я. Хинчиным и А. Н. Колмогоровым. А. Я. Хинчин [3], [4] ввел самый термин «усиленный закон больших чисел» и дал достаточное условие Б.ч.у.з. с $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$ (применимое и к зависимым величинам). Обозначая через $r_{i,k}$ коэффициент корреляции между X_i и X_k и полагая

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |r_{i,k}|, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

можно записать условие Хинчина в форме: $B_{n,2} C_n = O(n^{2-\delta})$ для нек-рого $\delta > 0$. В действительности из доказательства А. Я. Хинчина вытекает значительно более сильное утверждение.

В случае независимых слагаемых наиболее известными являются условия приложимости Б.ч.у.з., установленные А. Н. Колмогоровым: достаточное (1930) — для величин с конечными дисперсиями и необходимое и достаточное (1933) — для одинаково распределенных величин (заключающееся в существовании математич. ожидания величин X_i). Теорема Колмогорова для случайных величин (1) с конечными дисперсиями утверждает, что из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}X_n}{n^2} < \infty \qquad (6)$$

вытекает приложимость к последовательности (1) Б. ч. у. з. с $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$. В терминах дисперсий условие (6) оказывается наилучшим в том смысле, что для любой последовательности положительных чисел b_n с расходящимся рядом $\sum b_n n^2$ можно построить последовательность независимых случайных величин X_n с $\mathsf{D}X_n = b_n$, не удовлетворяющую Б. ч. у. з. Область применения условия (6) (как, впрочем, и ряда других условий Б. ч. у. з. для независимых величин) может быть расширена на основе следующего замечания. Пусть m_n - медиана X_n. Сходимость ряда

$$\sum \mathsf{P}\{ \mid X_n - m_n \mid > n \}$$

необходима для Б. ч. у. з. Из леммы Бореля — Кантелли вытекает, что с вероятностью 1, начиная с нек-рого номера, $|X_n - m_n| < n$. Поэтому при изучении условий приложимости Б. ч. у. з. можно сразу ограничиться случайными величинами, удовлетворяющими последнему условию.

В доказательствах А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова вместо сходимости ряда (5) устанавливается сходимость ряда

$$\sum_k \mathsf{P}\left\{\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} \left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\},$$

где $n_k = 2^k$. При этом А. Я. Хинчин привлекал, по существу, нек-рые идеи из теории рядов по ортогональным системам функций, а А. Н. Колмогоров использовал носящее его имя неравенство для максимумов сумм случайных величин.

Для независимых случайных величин можно дать необходимое и достаточное условие Б. ч. у. з. Полагая

$$Z_k = 2^{-k}\sum_{(k)} X_n,$$

где сумма $\sum_{(k)}$ распространена на те n, для к-рых $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, это условие можно записать в виде: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \mathsf{P}\{|Z_k - mZ_k| > \varepsilon\} < \infty, \qquad (7)$$

где mZ_k — медиана Z_k (см. [6]). Из (7) при дополнительных ограничениях можно получить условия, выраженные через характеристики отдельных слагаемых. Если, напр., $X_n = O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)$ или если все X_n распределены по нормальному закону, то условие (7) равносильно следующему: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\mathsf{D}Z_k}\right\} < \infty. \qquad (8)$$

Здесь, в силу независимости X_i,

$$\mathsf{D}Z_k = 2^{-2k}\sum_{(k)} \mathsf{D}X_n.$$

Известны условия применимости Б. ч. у. з. к марковским цепям и процессам и стационарным процессам (см. [7]). Напр., метод Хинчина, примененный к стационарным в широком смысле последовательностям X_n с корреляционной функцией $R(n)$, приводит к следующему утверждению: если ряд $\sum \frac{\ln^2 n}{n}|R(n)|$ сходится, то $\frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1} \to \mathsf{E}X_0$ с вероятностью 1. Для стационарных в узком смысле процессов Б. ч. у. з. иногда толкуют, понимая под этим утверждение, что с вероятностью 1 существует предел

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1}$$

(случайная величина Y равна условному математич. ожиданию X_0 по отношению к σ-алгебре множеств, инвариантных относительно сдвига; с вероятностью 1 величина Y постоянна и равна $\mathsf{E}X_0$ только для метрически транзитивных процессов). В указанной форме Б. ч. у. з. есть не что иное, как *Биркгофа эргодическая теорема*.

Существуют варианты Б. ч. у. з. для случайных векторов в нормированных линейных пространствах [9]. В качестве исторически первого примера можно привести теорему Гливенко — Кантелли о сходимости эмпирической функции распределения к теоретической.

Представление об отклонениях S_n/n от A_n дает *повторного логарифма закон*.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39—45; [3] Хинчин А. Я., Основные законы теории вероятностей, М., 1927; [4] его же, «C. r. Acad. sci.», 1928, t. 186, p. 285–7; [5] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1930, t. 191, p. 910—2; [6] Прохоров Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, с. 523—36; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШОЕ РЕШЕТО — метод, разработанный Ю. В. Линником в 1941 и позволяющий высеивать последовательности с возрастающим числом выбрасываемых вычетов. Сущность Б. р. заключается в следующем. Пусть задана последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_z$, не превосходящих N, простое число $p \leqslant \sqrt{N}$ и вычет l, $0 \leqslant l \leqslant p-1$. Пусть

$$Q(p, l) = \sum_{n_i \equiv l \pmod p,\ n_i \leqslant N} 1.$$

Из статистич. соображений, к-рые могут быть строго обоснованы с помощью основной идеи *кругового метода*, следует, что $Q(p, l) > 0$ для почти всех p и, соответственно, для почти всех l. Пусть A — количество таких p, а $B = B(p)$ — количество соответствующих l.

Ю. В. Линник доказал, что

$$A \geqslant \pi(\sqrt{N}) - \frac{CN}{\tau^2 Z}$$

и

$$B(p) \geqslant (1-\tau)\, p,$$

где $C > 0$ — константа, а $\tau \in (0, 1)$, и вывел теорему о том, что количество простых чисел из сегмента $[N^{\varepsilon}, N]$, для к-рых нарушается гипотеза И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете (см. *Виноградова гипотезы*), может быть только конечным (зависящим от ε).

Имеются усовершенствования метода Б. р., при этом рассматриваются оценки величины $Q(p, l)$ в среднем. Лучший результат принадлежит Э. Бомбьери (E. Bombieri, 1965):

$$\sum_{p \leqslant \sqrt{N}} p \sum_{l=0}^{p-1} \left[Q(p, l) - \frac{Z}{p} \right]^2 \leqslant CNZ.$$

Наиболее значительный вклад в современную аналитич. теорию чисел метод Б. р. дал в сочетании с *плотностным методом*, что привело к доказательству теоремы Виноградова — Бомбьери (1965) — усредненного асимптотич. закона простых чисел в прогрессиях. Эта и другие аналогичные теоремы о среднем нашли широкое применение при решении ряда известных задач теории чисел, заменяя во многих случаях *Римана обобщенную гипотезу*.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974.

Б. М. Бредихин.

БОЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс функций, определяемый тем свойством, что они могут быть равномерно приближены на всей действительной оси посредством обобщенных тригонометрич. полиномов вида:

$$\sum a_{n_1 n_2 \ldots n_k} e^{i(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k)x},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — любые целые, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — заданные действительные числа. Этот класс функций был впервые рассмотрен и подробно исследован П. Болем [1]. Класс Б. п. п. ф. содержит в себе класс непрерывных 2π-периодических функций, и содержится в классе *Бора почти периодических функций*. П. Боль указал ряд необходимых и достаточных условий почти периодичности функции. В частности, всякая функция вида:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

где каждая из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ непрерывна и периодична (периоды их могут быть различны), является Б. п. п. ф.

Лит.: [1] Bohl P., Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten, Dorpat, 1893; [2] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1906, Bd 131, S. 268 - 321; [3] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БОННЕ СЕТЬ — *изотермическая сеть*, линии к-рой имеют постоянную геодезич. кривизну. Квадрат линейного элемента в параметрах этой сети:

$$ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{(U+V)^2},$$

где $U=U(u)$, $V=V(v)$. Б. с. рассмотрена О. Бонне (O. Bonnet) в 1848. *А. Б. Иванов.*

БОННЕ ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о существовании и единственности поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами [1]: пусть заданы две квадратичные формы:

$$E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2,$$
$$L\,du^2+2\,M\,dudv+N\,dv^2,$$

первая из к-рых положительно определенная и коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям Гаусса (см. *Гаусса теорема*) и *Петерсона — Кодацци уравнениям*; тогда существует, и притом единственная с точностью до положения в пространстве поверхность, для к-рой эти формы являются соответственно первой и второй квадратичными формами.

2) Б. т. о диаметре овальной поверхности: если кривизна овальной поверхности во всех ее точках больше или равна $1/A^2$, то внешний диаметр этой поверхности меньше πA; эта оценка не может быть улучшена. Установлена О. Бонне (O. Bonnet, 1855). *А. Б. Иванов.*

3) Б. т. о среднем значении, вторая теорема о среднем значении [2]: пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемые функции на отрезке $[a, b]$ и пусть $\varphi(x)$ — положительная убывающая функция от x; тогда найдется такое число ξ на отрезке $[a,b]$, для к-рого имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Если от $\varphi(x)$ требовать только монотонности, то Б. т. утверждает, что на $[a, b]$ найдется такая точка ξ, что выполняется

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Bonnet O., «J. École polyt.», 1865, t. 24, p. 204—230; 1867, t. 25, p. 1—151; [2] его же, «J. math.», 1849, t. 14, p. 249—56. *Т. Ю. Попова.*

БОННЕЗЕНА НЕРАВЕНСТВО — одно из уточнений *изопериметрического неравенства* для выпуклых областей на плоскости. Пусть K — выпуклая область на плоскости, r — радиус наибольшего круга, к-рый можно поместить в K, R — радиус наименьшего круга, содержащего K, L — периметр, а F — площадь области K. Тогда справедливо неравенство Боннезена [1]:

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \geqslant \pi^2(R-r)^2.$$

Равенство $\Delta=0$ достигается только при $R=r$, т. е. в том случае, когда K есть круг. Обобщения Б. н. см. [2].

Лит.: [1] Bonnesen T., «Math. Ann.», 1921, Bd 84, S. 216; [2] Дискант В. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 519—21. *А. Б. Иванов.*

БОРА КОМПАКТ — пространство X максимальных идеалов алгебры почти периодических по Бору функций (см. *Банахова алгебра*, *Бора почти периодические функции*). Почти периодические по Бору функции на действительной оси R образуют коммутативную C^*-алгебру A. Алгебра A изометрически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. Действительная ось R естественно вкладывается в X в качестве всюду плотного подмножества (это вложение, однако, не есть гомеоморфизм). Компакт X обладает структурой связной компактной группы, к-рая отождествляется с группой характеров действительной оси, если последнюю рассмотреть в дискретной топологии. Наличие указанного изоморфизма между алгеброй поч-

ти периодич. функций и алгеброй всех непрерывных функций на Б. к. позволяет упростить доказательства целого ряда классич. теорем. Понятие Б. к. имеет смысл и для алгебр почти периодич. функций на других группах. Для множества условно-периодич. функций с n независимыми фиксированными периодами роль Б. к. играет n-мерный тор с этими периодами.

Лит.: Л ю м и с Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956. *Е. А. Горин.*

БОРА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, равномерные почти периодические функции, - класс (U-п. п.) почти периодических функций. Первое определение, данное Х. Бором [1], основано на обобщении понятия периода: функция $f(x)$, непрерывная в интервале $(-\infty, \infty)$, наз. Б. п. п. ф., если для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество ε-почти периодов этой функции (см. *Почти период*). Иначе: $f(x)\in U$-п. п., если для каждого $\varepsilon>0$ существует $L=L(\varepsilon)$ такое, что в каждом интервале длины L найдется хотя бы одно число τ, для к-рого

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon, \quad -\infty<x<\infty.$$

В случае ограниченности $L(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, Б. п. п. ф. $f(x)$ оказывается непрерывной периодич. функцией. В теории почти периодич. функций применяется также определение Бохнера (см. *Бохнера почти периодические функции*), эквивалентное определению Бора. Функции класса U-п. п. ограничены, равномерно непрерывны на всей действительной оси. Предел $f(x)$ равномерно сходящейся последовательности Б. п. п. ф. $\{f_n(x)\}$ принадлежит классу U-п. п.; этот класс инвариантен по отношению к арифметич. операциям (частное Б. п. п. ф. $f(x)/g(x)\in U$-п. п. при условии $\inf\limits_{-\infty<x<\infty}|g(x)|>\gamma>0$).

Если $f(x)\in U$-п. п. и $f'(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то $f'(x)\in U$-п. п.; неопределенный интеграл $F(x)=\int_0^x f(t)dt\in U$-п. п., если $F(x)$ ограниченная функция.

Лит.: [1] B o h r H., «Acta math.», 1925, t. 45, p. 29—127; [2] Л е в и т а н Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953. *Е. А. Бредихина.*

БОРА — ФАВАРА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, возникшее в связи с задачей Х. Бора [1] об ограниченности на всей действительной оси первообразной почти периодич. функции. Окончательный вид этому неравенству дал Ж. Фавар [2], существенно дополнивший исследования Х. Бора и рассмотревший для фиксированных натуральных чисел r и n произвольную периодич. функцию

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

с непрерывной производной $f^{(r)}(x)$. Б.— Ф. н. принято наз. неравенство

$$\|f\|_C\leqslant K\|f^{(r)}\|_C,$$

$$\|f\|_C=\max_{x=[0,\,2\pi]}|f(x)|,$$

с наилучшей константой $K=K(n, r)$:

$$K=\sup_{\|f^{(r)}\|_C\leqslant 1}\|f\|_C.$$

Б.— Ф. н. тесно связано с неравенством для наилучших приближений функции и ее r-й производной тригонометрич. полиномами порядка не выше n и с *поперечниками* Колмогорова класса дифференцируемых функций.

Лит.: [1] B o h r H., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, № 15, p. 1276—7; [2] F a v a r d J., «Bull. sci. math.», 1937, t. 61, p. 243—56; [3] А х и е з е р Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965. *Л. В. Тайков.*

БОРДИЗМ, б о р д а н т н о с т ь,— термин, употребляющийся самостоятельно или в составе стандартных

словосочетаний в нескольких родственных смыслах (почти во всех из них вместо Б. раньше говорили о кобордизмах; старая терминология тоже сохранилась).

Простейший вариант: два гладких замкнутых n-мерных многообразия M_0 и M бордантны (соограничивают, или внутренне гомологичны), если существует гладкое компактное $(n+1)$-мерное многообразие W («пленка»), край к-рого состоит из двух многообразий N_0 и N, диффеоморфных, соответственно, M_0 и M посредством нек-рых *диффеоморфизмов*

$$g_0: N_0 \to M_0 \text{ и } g: N \to M.$$

Совокупность многообразий, бордантных друг другу, наз. классами бордизмов, а тройку (W, M_0, M) иногда наз. бордизмом [точнее было бы говорить о пятерке (W, M_0, M, g_0, g)]. Множество классов Б. n-мерных многообразий образует абелеву группу $\mathfrak{N}_n$ относительно несвязного объединения. Нулем в ней служит класс Б., состоящих из многообразий M, к-рые являются границей нек-рого многообразия W [формально говорят о тройке (W, M_0, M) с пустым M_0; другие названия: M — ограничивающее многообразие, M — внутренне гомологично, или бордантно нулю]. Элементом $\mathfrak{N}_n$, обратным данному классу Б., является сам этот класс (т. к. $M \bigcup M$ диффеоморфно границе прямого произведения $M \times [0,1]$). Прямая сумма $\mathfrak{N}_*$ групп $\mathfrak{N}_n$ является коммутативным градуированным кольцом, умножение в к-ром индуцировано прямым произведением многообразий, с единицей, заданной классом Б. точки.

Более сложные варианты — Б. гладких замкнутых многообразий с дополнительной структурой. Напр., два ориентированных многообразия M_0 и M ориентированно бордантны, если они бордантны в прежнем смысле, причем «пленка» W ориентирована, и (в прежних обозначениях) ориентация, индуцированная ориентацией W на N_0 и N (как на частях края), переходит при диффеоморфизмах g_0 и g, соответственно, в исходную ориентацию M и в ориентацию, противоположную исходной ориентации M_0. В этом случае говорят об ориентированных бордизмах, а если надо подчеркнуть отличие от них Б. в предыдущем смысле, последние наз. неориентированными. Аналогично Ω_n и Ω_* вводятся группы ориентированных Б. Ω_n и кольцо $\Omega_* = \Sigma \Omega_n$.

Исторически первый пример — Б. оснащенных многообразий, введенный в 1938 Л. С. Понтрягиным, к-рый показал, что классификация этих Б. эквивалентна вычислению гомотопич. групп сфер $\pi_i(S^n)$, и таким путем смог найти $\pi_{n+1}(S^n)$ и $\pi_{n+2}(S^n)$ (подробное изложение его исследований см. в более поздней публикации [2], элементарное введение — в [4]). Неориентированные и ориентированные Б. были введены в 1951—53 В. А. Рохлиным (см. [3]), вычислившим $\mathfrak{N}_n$ и Ω_n для $n \leqslant 4$. Ранее Л. С. Понтрягин [1] доказал, что если два многообразия бордантны, то у них совпадают характеристич. числа (числа Штифеля — Уитни в неориентируемом случае, числа Штифеля — Уитни и числа Понтрягина в ориентируемом). (Впоследствии оказалось, что обратное тоже верно.)

Использование в теории Б. современных методов алгебраич. топологии началось с вышедшей в 1954 работы Р. Тома (см. [5], [6]), переоткрывшего применительно к неориентированным и ориентированным Б. связь между Б. и нек-рыми гомотопич. задачами. Так, группа $\mathfrak{N}_n$ изоморфна группе $\pi_{n+r}(\boldsymbol{TBO}(r))$ с достаточно большим r; здесь $\boldsymbol{TBO}(r)$ — *Тома пространство* универсального векторного расслоения со структурной группой $O(r)$. Эта связь позволила Р. Тому полностью вычислить кольцо $\mathfrak{N}_*$ и существенно продвинуть

изучение Ω_*, впоследствии завершенное другими учеными. Напр., $\mathfrak{N}_*$ оказалось кольцом многочленов над полем вычетов mod 2 от образующих x_i размерности i, где i пробегает все положительные числа, не равные 2^s-1, $s\geqslant 1$; известна геометрич. реализация этих образующих (т. е. указаны конкретные многообразия, классы Б. к-рых суть x_i (см. [7]).

Другие варианты Б. многообразия с дополнительной структурой — очень важные Б. квазикомплексных многообразий (наз. также унитарными Б.) (см. [8], [9]), Б. многообразий, на к-рых действует группа преобразований (см. [10]); имеются также варианты несколько иного рода (для кусочно линейных или топологич. многообразий, для комплексов Пуанкаре) и т. д. (см. [11]). Особое положение занимают бордизмы слоений и h-бордизмы (ранее наз. J-эквивалентностями); последние служат для связи дифференциальной и гомотопич. топологии [12].

Дальнейшее развитие теории Б. связано с группами бордизмов топологич. пространства X (короче, Б. пространства X, см. [13]). Они определяются для различных вариантов Б. (ниже приводится простейший случай). Сингулярным n-мерным (под)многообразием пространства X наз. пара (M^n, f), где M^n — замкнутое гладкое многообразие, $f: M^n\to X$ — непрерывное отображение. Две такие пары (M_0, f_0), (M^n, f) бордантны, если M_0 и M бордантны в обычном смысле и (в прежних обозначениях) существует такое непрерывное отображение $h: W\to X$, что $hg_0^{-1}=f_0$, $hg^{-1}=f_0$. (Если отождествить M_0 и M с N_0 и N, то можно просто сказать, что отображение h индуцирует заданные отображения M_0 и M в X). Классы Б. сингулярных многообразий пространства X образуют n-мерную группу Б. $\mathfrak{N}_n(X)$ этого пространства (групповая операция порождена объединением многообразий).

Если X — многообразие размерности $>2n$, то элементы $\mathfrak{N}_n(X)$ наглядно представляются подмногообразиями, как и соответствующие «пленки», в этом отношении Б. пространства X близки к первоначальным попыткам введения гомологий. Если X — точка, то $\mathfrak{N}_n(X)$ сводится к прежнему $\mathfrak{N}_n$. Отображению $\varphi: X\to Y$ соответствуют гомоморфизмы $\varphi_n: \mathfrak{N}_n(X)\to \mathfrak{N}_n(Y)$, порожденные переходом от сингулярных многообразий (M, f) к $(M, \varphi f)$. Функтор, сопоставляющий каждому пространству X группы $\mathfrak{N}_n(X)$ и отображению φ — отображения φ_n, является обобщенной теорией гомологий. В данном случае она сводится к обычным гомологиям, а именно, для любого клеточного полиэдра X

$$\sum \mathfrak{N}_n(X)\cong H_*(X, \mathbb{Z}_2)\otimes \mathfrak{N}_*$$

(справа стоит тензорное произведение градуированных модулей над $\mathbb{Z}_2$), но для других Б. (ориентированных и т. д.) это, вообще говоря, не так. Многие обобщенные теории гомологий могут быть получены посредством так наз. Б. с особенностями (см. [14]).

Наряду с Б. пространства X существуют двойственные им обобщенные когомологии. Введение этих функторов обобщенных гомологий и когомологий сделало желательным то изменение терминологии, о к-ром говорилось в начале статьи: термин «кобордизм» резервируется для обобщенных когомологий, двойственных Б.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, № 2, с. 233–84; [2] его же, Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [3] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, № 4, с. 3—20; [4] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [5] Том Р., в кн.: «Расслоенные пространства и их приложения» (сб. переводов), М., 1958, с. 293—351; [6] Милнор Дж., «Математика», 1964, т. 9, № 4, с. 3—40; [7] Dold A., «Math. Z.», 1956, Bd 65, S. 25—35; [8] Milnor J., «Amer. J. math.», 1960, v. 82, p. 505—21; [9] Новиков С. П., «Матем. сб.», 1962, т. 57 [99], с. 406—42; [10] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические

отображения, пер. с англ., М., 1969; [11] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [12] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [13] Atiyah M., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1961, v. 57, pt 2, p. 200—8; [14] Baas N., «Math. Scand.», 1973, v. 33, № 2, p. 279—302, 302—13. *Д. В. Аносов, М. И. Войцеховский.*

БОРЕЛЕВСКАЯ СИСТЕМА МНОЖЕСТВ (*B - система*), порожденная системой множеств M,— наименьшая (σ,δ)-система множеств $B(M)$, содержащая M. Множества Б. с. м. $B(M)$ наз. *борелевскими множествами* (или *B-множествами*), порожденными системой M. Для каждого порядкового числа $\alpha<\omega_1$ (ω_1 — начальное порядковое число мощности $\aleph_1$) следующим образом определяются борелевские классы M_α: $M_0=M$, M_α при нечетном α состоит из объединений, а при четном α – из пересечений последовательностей множеств, принадлежащих M_β, $\beta<\alpha$. Тогда $B(M)=\bigcup_{\alpha<\omega_1}M_\alpha$. Видоизмененное построение Б. с. м. $B(M)$ получится, если поменять ролями операции пересечения и объединения. Борелевское множество принадлежит в точности классу M_α, если оно принадлежит M_α, но не принадлежит M_β при $\beta<\alpha$ (иногда считают классы непересекающимися, т. е. наз. классом систему $M_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}M_\beta$). *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКАЯ ФУНКЦИЯ, *B-функция*,— функция, для к-рой все подмножества вида $E(x;\ f(x)\geqslant a)$ из области ее определения являются *борелевскими множествами*. Другие назв. Б. ф.: функции, измеримые по Борелю, *B-измеримые функции*. Операции сложения, умножения и предельного перехода, как и в общем случае измеримых функций, не выводят из класса Б. ф., но из класса Б. ф., в отличие от общего случая, не выводит и взятие суперпозиции двух Б. ф. Более того (см. [1]), если $f(x)$ — измеримая функция на любом пространстве Ω, а g есть Б. ф. на пространстве действительных чисел, то функция $h(x)=g[f(x)]$ измерима на пространстве Ω. Всякая Б. ф. измерима по Лебегу (см. *Измеримая функция*). Обратное неверно. Однако для любой измеримой по Лебегу функции f найдется такая Б. ф. g, что $f(x)=g(x)$ почти всюду (см. [1]). Б. ф. наз. также иногда бэровскими функциями, ибо множество всех Б. ф. совпадает с множеством функций, принадлежащих *Бэра классам* (теорема Лебега, см. [2]). Б. ф. могут быть классифицированы по порядкам борелевских множеств $E(x;\ f(x)\geqslant a)$; полученные классы будут соответствовать классам Бэра.

Понятие Б. ф. обобщается на функции со значениями в любом метрич. пространстве (см. [3]). В этом случае говорят также о *B-измеримых отображениях*. Б. ф., помимо теории множеств и теории функций, находят применение в теории вероятностей (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [4] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *В. А. Скворцов.*

БОРЕЛЕВСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ, *B-изоморфизм*, — взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство Y такое, что f и f^{-1} переводят *борелевские множества* в борелевские. В классе борелевских подмножеств полных сепарабельных метрич. пространств равномощные множества борелевски изоморфны. *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ КРИТЕРИЙ — необходимое и достаточное условие того, чтобы *A-множество* в полном сепарабельном метрич. пространстве было борелевским, заключается в том, что: 1) его дополнение также является *A*-множеством (критерий Суслина), 2) оно представляется в виде объединения непересекающихся слагаемых (критерий Лузина). *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО, *B* - множество,— множество, к-рое может быть получено в результате не более чем счетной совокупности операций объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств топологич. пространства. Более точно, борелевским множеством наз. элемент наименьшего замкнутого относительно дополнений счетно аддитивного класса множеств, содержащего замкнутые множества. Другие названия Б. м.: множества, измеримые по Борелю, *B*-измеримые множества. Открытые и замкнутые множества наз. Б. м. нулевого порядка. Б. м. первого порядка наз. множества типа F_σ и G_δ, являющиеся, соответственно, счетными суммами замкнутых и счетными пересечениями открытых множеств. Б. м. второго порядка наз. множества типа $F_{\sigma\delta}$ (пересечение счетного числа множеств типа F_σ) и множества типа $G_{\delta\sigma}$ (сумма счетного числа множеств типа G_δ). Так, по индукции, определяются Б. м. любого конечного порядка. Эта классификация может быть продолжена при помощи *трансфинитных чисел* второго класса, и ею исчерпываются все Б. м. Если α — какое-нибудь трансфинитное число второго класса, то Б. м. класса α наз. все Б. м. порядка α, не являющиеся Б. м. порядка α' ни при каком $\alpha'<\alpha$. Непустота классов Б. м. зависит от основного пространства, в к-ром ведется рассмотрение. В евклидовом, гильбертовом и бэровском пространствах существуют Б. м. любого класса.

Б. м. представляет собой частный случай *A-множеств*. Для того чтобы *A*-множество *E* было Б. м., необходимо и достаточно, чтобы дополнение к *E* также было *A*-множеством (М. Я. Суслин). В пространствах, где введена *Лебега мера*, всякое Б. м. является измеримым по Лебегу. Обратное неверно. В любом сепарабельном пространстве мощности континуум существуют множества, не являющиеся Б. м.

Б. м. введены Э. Борелем [1]; они играют важную роль при изучении *борелевских функций*.

В более общем понимании Б. м. - множество любой *борелевской системы множеств*, порожденной нек-рой системой множеств. Б. м. топологич. пространства порождаются системой замкнутых подмножеств этого пространства.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les fonctions discontinues, P., 1898; [2] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948. *В. А. Скворцов.*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПОЛЕ МНОЖЕСТВ, борелевское тело множеств, порожденное системой множеств M,— наименьшая система множеств, содержащая M и замкнутая относительно операций счетного объединения и перехода к дополнению. *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПОЛЕ СОБЫТИЙ, σ-поле, борелевская алгебра, σ-алгебра событий,— нек-рый фиксированный класс A подмножеств (событий) непустого множества Ω (пространства элементарных событий), образующий *борелевское поле множеств*. *В. В. Сазонов.*

БОРЕЛЯ МЕРА множеств — неотрицательная функция μ подмножеств топологич. пространства X, обладающая следующими свойствами: 1) область ее определения есть σ-алгебра $\mathcal{B}$ *борелевских множеств* из X, т. е. наименьший класс подмножеств из X, содержащий открытые множества и замкнутый относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе; 2) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$, если $E_i \cap E_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то есть μ счетно аддитивна. Б. м. μ наз. регулярной, если

$$\mu(E)=\sup_{E\supset F}\mu(F),$$

где F принадлежит классу $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств

из X. Нередко изучение Б. м. связывают с изучением мер Бэра, к-рые отличаются от Б. м. лишь областью их определения: они определены на наименьшей σ-алгебре $\mathscr{B}_0$, относительно к-рой измеримы все непрерывные функции на X. Б. м. μ (соответственно мера Бэра ν) наз. τ-гладкой, если $\mu(F_\alpha)\downarrow 0$ для любой сети $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств, удовлетворяющей условию $F_\alpha\downarrow\varnothing$ (соответственно $\nu(Z_\alpha),0$ для любой сети $\{Z_\alpha\}$ множеств, являющихся нулями непрерывных функций, при условии, что $Z_\alpha\downarrow\varnothing$. Б. м. μ (соответственно мера Бэра ν) наз. плотной, если $\mu(E)=\sup\limits_{E\supseteq K\in\mathscr{K}}\mu(K)$, где $\mathscr{K}$ — класс компактных подмножеств из X (соответственно $\nu(E)=\sup\limits_{E\supseteq K\in\mathscr{K}}\nu^*(K)$, где $\nu^*(K)=\inf\limits_{K\subset E_0\in\mathscr{B}_0}\nu(E_0)$). Плотность и τ-гладкость являются ограничениями, обеспечивающими дополнительную гладкость мер, и часто выполняются в конкретных ситуациях. При определенных условиях меры Бэра могут быть продолжены до Б. м. Напр., если X вполне регулярно и хаусдорфово, то всякая τ-гладкая (плотная) конечная мера Бэра может быть продолжена до регулярной τ-гладкой (плотной) конечной Б. м. При изучении мер на локально компактных пространствах Б. м. (соответственно мерами Бэра) наз. иногда меры, определенные на σ-кольце множеств, порожденном компактными (соответственно компактными G_δ) множествами, и конечные на компактных множествах. Мерой Бореля на прямой часто наз. меру, определенную на борелевских множествах и такую, что ее значение на произвольном отрезке равно длине этого отрезка.

Лит.: [1] Варадарайн В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 1, с. 35–100; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

БОРЕЛЯ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования функциональных рядов, предложенный Э. Борелем [1]. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad (*)$$

S_n — его частные суммы и S — действительное число. Ряд (*) суммируется методом Бореля (B-методом) к числу S, если

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}S_k=S.$$

Существует интегральный метод суммирования Бореля, B'-метод: если

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k u^k}{k!}\,du=S,$$

то говорят, что ряд (*) суммируется B'-методом к числу s. Условия, при к-рых B-метод и B'-метод равносильны, см. [2], с. 229. B-метод возник в связи с аналитич. продолжением функции, регулярной в точке. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

регулярна в точке O и C — совокупность всех ее особых точек. Через каждую точку $P\in C$ проведем отрезок OP и прямую L_P, проходящую через точку P перпендикулярно к OP. Совокупность точек, лежащих по одну сторону с O от каждой из прямых L_P, обозначим П. Тогда граница Г области П наз. многоугольником Бореля функции $f(z)$, а область П — его внутренней областью. Имеет место теорема: ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

суммируется B'-методом в области П и не суммируется в области П* — дополнении к П (см. [2]).

Лит.: [1] Borel E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1899, ser. 3, t. 16, p. 9–136; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *А. А. Захаров.*

БОРЕЛЯ ПОДГРУППА, борелевская подгруппа,— максимальная связная разрешимая алгебраич. подгруппа *линейной алгебраической группы* G. Напр., подгруппа всех невырожденных верхних треугольных матриц является Б. п. в полной линейной группе $GL(n)$. Систематич. исследование максимальных связных разрешимых подгрупп алгебраич. групп впервые проведено А. Борелем [1]. Б. п. может быть эквивалентным образом определена как минимальный элемент множества параболических подгрупп, т. е. таких алгебраич. подгрупп H группы G, для к-рых факторногообразие G/H проективно. Все Б. п. группы G сопряжены, причем, если Б. п. B_1, B_2 и группа G определены над полем k, то B_1 и B_2 сопряжены посредством элемента из G_k. Пересечение любых двух Б. п. группы G содержит максимальный тор группы G; если это пересечение есть в точности максимальный тор, то такие Б. п. наз. противоположными. Противоположные Б. п. существуют в G тогда и только тогда, когда G *редуктивная группа*. Если G связна, то объединение всех ее Б. п. совпадает с ней самой и всякая параболич. подгруппа совпадает со своим нормализатором в G. В этом случае Б. п. является максимальной среди всех (а не только алгебраических и связных) разрешимых подгрупп группы G. Однако, вообще говоря, могут существовать максимальные разрешимые подгруппы в G, не являющиеся Б. п. Коммутант Б. п. B совпадает с ее унипотентной частью B_u, а нормализатор B_u в G совпадает с B. Если характеристика основного поля равна 0, а $\mathfrak{G}$ есть алгебра Ли группы G, то подалгебра $\mathfrak{F}$ алгебры $\mathfrak{G}$, являющаяся алгеброй Ли Б. п. B группы G часто наз. Бореля подалгеброй (или борелевской подалгеброй) в $\mathfrak{G}$. Подалгебры Бореля в алгебре $\mathfrak{G}$— это в точности ее максимальные разрешимые подалгебры. Для k-определенной алгебраич. группы G над произвольным полем k обобщением Б. п. над k являются минимальные параболич. k-определенные подгруппы, к-рые сопряжены посредством элементов из G_k (см. [2]).

Лит.: [1] Borel A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111.

В. П. Платонов.

БОРЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$\gamma(t)=\int_0^\infty f(z)\,e^{-zt}\,dz,$$

где $f(z)$— целая функция экспоненциального типа. Б. п. есть частный случай *Лапласа преобразования*. Функция $\gamma(t)$ наз. ассоциированной функцией (по Борелю) с $f(z)$. Если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,z^n,$$

то

$$\gamma(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu t^{-(\nu+1)};$$

ряд сходится при $|t|>\sigma$, где σ — тип функции $f(z)$. Пусть $\overline{D}$— наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$,

$$K(\varphi)=\max_{z\in\overline{D}}\operatorname{Re}\left(ze^{-i\varphi}\right)$$

— опорная функция множества $\overline{D}$ и $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $f(z)$. Тогда $K(\varphi)-h(-\varphi)$. Если интегрирование в Б. п. происходит по лучу $\arg z=\varphi$, то соответствующий интеграл сходится в полуплоскости $x\cos\varphi+y\sin\varphi>K(-\varphi)$. Пусть C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\gamma(t)\,e^{zt}\,dt.$$

При дополнительных условиях из этой формулы могут быть выведены и другие представления. Так, пусть

имеется класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Этот класс совпадает с классом функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt}\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t) \in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les séries divergentes, 2 éd., P., 1928; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

А. Ф. Леонтьев.

БОРЕЛЯ ТЕОРЕМА о неподвижной точке: связная разрешимая алгебраич. группа G, действующая регулярно (см. *Алгебраическая группа преобразований*) на непустом полном алгебраич. многообразии V над алгебраически замкнутым полем k имеет в V неподвижную точку. Из Б. т. следует сопряженность *Бореля подгрупп* алгебраич. групп (теорема Бореля — Морозова). Б. т. доказана А. Борелем [1]. Б. т. обобщается на случай произвольного (не обязательно алгебраически замкнутого) поля k: пусть V — полное многообразие, определенное над полем k, на к-ром k-регулярно действует связная разрешимая *k-разложимая группа* G, тогда множество рациональных k-точек $V(k)$ либо пусто, либо содержит точку, неподвижную относительно группы G. Отсюда получается обобщение теоремы о сопряженности подгрупп Бореля: если поле k совершенно, то максимальные связные разрешимые k-разложимые подгруппы связной k-определенной алгебраич. группы H сопряжены друг с другом при помощи элементов группы k-точек группы H (см. [2]).

Лит.: [1] Borel A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Морозов В. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 3, с. 91—4.

В. П. Платонов.

БОРЕЛЯ УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ — исторически первый вариант *больших чисел усиленного закона*, сформулированный и доказанный Э. Борелем [1] применительно к схеме Бернулли (см. *Бернулли испытания*). Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ одинаково распределены и принимают два значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое, тогда $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ есть число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха 1/2. Э. Борель [1] доказал, что с вероятностью 1

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

при $n\to\infty$. Впоследствии (1914) Г. Харди и Дж. Литлвуд (G. Hardy, J. Littlewood) показали, что почти наверное

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln n}} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а затем А. Я. Хинчин (1922) доказал более сильный результат:

$$\mathrm{P}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln\ln n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=1.$$

См. также *Повторного логарифма закон.*

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

БОРЕЛЯ — КАНТЕЛЛИ ЛЕММА — одно из часто используемых утверждений о бесконечных последовательностях случайных событий. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность нек-рых событий и A — событие, состоящее в наступлении конечного числа из

событий A_n, $n=1, 2, \ldots$ Б.— К. л. утверждает, что при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) < \infty \qquad (*)$$

справедливо равенство

$$p(A)=1.$$

Если события A_n взаимно независимы, то $p(A)=1$ или 0 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$, т. е. в этом случае для $p(A)=1$ условие (*) является необходимым и достаточным (так наз. критерий Бореля «нуль или единица», см. *Нуль-единица закон*). Известны распространения последнего критерия на нек-рые классы зависимых событий. Б.— К. л. используется, напр., при доказательстве *больших чисел усиленного закона*.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 242—43.

А. В. Прохоров.

БОРЕЛЯ — ЛЕБЕГА ТЕОРЕМА о покрытии: пусть A — ограниченное замкнутое множество в R^n и G его открытое покрытие, т. е. система открытых множеств, объединение к-рых включает A; тогда существует конечная подсистема множеств $\{G_i\}$, $i=1, 2, \ldots, N$, из G (подпокрытие), также являющаяся покрытием A, т. е.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_i.$$

Б.— Л. т. обратима: если $A \subset R^n$ и из любого открытого покрытия A можно выделить конечное подпокрытие, то A замкнуто и ограничено. Возможность выделения конечного подпокрытия из любого открытого покрытия множества A часто принимается за определение множества A как компакта. В такой терминологии Б.— Л. т. вместе с обратной принимает вид: чтобы множество $A \subset R^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы A было ограниченным и замкнутым. Б.— Л. т. была в 1898 доказана Э. Борелем (см. [1]) в случае, когда A есть отрезок $[a, b] \subset R^1$ и G есть система интервалов, окончательную форму получила в 1900—10 в работах А. Лебега (см. [2]). Б.— Л. т. называют иногда также леммой Бореля, леммой Гейне—Бореля, теоремой Гейне—Бореля.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur la théorie des fonctions, 3 éd., P., 1928; [2] Рудин У., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966.

И. А. Виноградова.

БОРСУКА ПРОБЛЕМА — одна из основных задач комбинаторной геометрии: существует ли для каждого ограниченного множества *разбиение* диаметра $d>0$ евклидова n-мерного пространства на не более чем $n+1$ подмножеств, диаметр каждого из к-рых меньше d? Б. п. была сформулирована К. Борсуком [1] в связи с невозможностью разбиения n-мерного симплекса и n-мерного шара из R^n на n частей меньшего диаметра. Б. п. положительно решается для случаев $n=2$, $n=3$; для случаев $n>3$ имеются частичные результаты. Напр., Б. п. положительно решается для каждого ограниченного гладкого выпуклого тела из R^n [2]. Доказано, что решение Б. п. сводится к случаю тел постоянной ширины. Если $a(F)$ — наименьшее число частей диаметра, меньшего d, на к-рое разбивается множество $F \subset R^n$, то для фигуры $F \subset R^2$ диаметра d равенство $a(F)=3$ верно в том и только том случае, когда в R существует единственная фигура постоянной ширины d, содержащая F (см. [3]). Для $n>2$ этот факт непосредственно не обобщается. Б. п. тесно примыкает к *освещения задачам* и к *Хадвигера гипотезе*, представляющей обобщение Б. п. на случай, когда R^n заменяется конечномерным нормированным пространством.

Лит.: [1] Borsuk K., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 177—90; [2] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [3] Болтянский В. Г., «Colloq. math.», 1970, v. 21, № 2, 253—63.

П. С. Солтан.

БОТТА ТЕОРЕМА ПЕРИОДИЧНОСТИ — основная теорема *K-теории*, в простейшем виде утверждающая, что для любого (компактного) пространства X существует изоморфизм между кольцами $K(X) \otimes K(S^2)$ и $K(X \times S^2)$. Более общо, если L — линейное комплексное расслоение над X, $P(L \oplus 1)$ — проективизация расслоения $L \oplus 1$, то кольцо $K(P(L \oplus 1))$ представляет собой $K(X)$-алгебру с одной образующей $[H]$ и единственным соотношением $([H]-[1])\,([L]\,[H]-[1])=0$; здесь $[E]$ — образ расслоения E в кольце $K(X)$, H^{-1} — расслоение Хопфа над $P(L \oplus 1)$. Этот факт равносилен существованию изоморфизма Тома в K-теории для комплексных векторных расслоений. В частности, $P(1 \oplus 1) = X \times S^2$. Б. т. п. впервые доказана Р. Боттом [1] с использованием теории Морса и получила переформулировку в терминах K-теории [6]; также доказано утверждение, аналогичное Б.т.п., для вещественных расслоений.

Б. т. п. устанавливает закономерность свойства стабильного гомотопич. типа унитарной группы U_n, состоящую в том, что $\Omega^2 U_n \sim U_n$, где ΩX — пространство петель на X, $\sim$ — слабая гомотопич. эквивалентность, в частности $\pi_i(U) \sim \pi_{i+2}(U)$ для $i=0, 1, \ldots$, π_i есть i-я гомотопич. группа; аналогично, для ортогональной группы O_n:

$$\Omega^8 O_n \sim O_n,\ \pi_i(O) = \pi_{i+8}(O).$$

Лит.: [1] Bott R., «Ann. math.», 1959, v. 70, p. 313—37; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [3] Атья М., Лекция по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Moore I. C., On the periodicity theorem for complex vector bundles, Seminaire H. Cartan, 1959—60; [6] Atiyah M., Bott R., «Acta math.», 1964, v. 112, p. 229—47.

А. Ф. Щекутьев.

БОХНЕРА ИНТЕГРАЛ — интеграл от функции со значениями в банаховом пространстве по скалярной мере. Б. и. принадлежит к так наз. *сильным интегралам*.

Пусть $F(X;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ — векторное пространство функций $x(t)$, $t \in E$, со значениями и банаховом пространстве X, заданных на пространстве $(E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ со счетно аддитивной скалярной мерой μ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств множества E. Функция $x_0(t) \in F$ наз. п р о с т о й, если

$$x_0(t) = \begin{cases} x_i,\ t \in B_i \in \mathfrak{B},\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, N, \\ 0,\ t \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i. \end{cases}$$

Функция $x(t) \in F$ наз. с и л ь н о и з м е р и м о й, если существует последовательность $\{x_n(t)\}$ простых функций и $\|x(t) - x_n(t)\| \to 0$ почти всюду относительно меры μ на E. В этом случае скалярная функция $\|x(t)\|$ является $\mathfrak{B}$-измеримой. Для простой функции $x_0(t)$

$$\int_E x_0(t)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(B_i).$$

Функция $x(t)$ наз. и н т е г р и р у е м о й п о Б о х н е р у, если она сильно измерима и если для любой аппроксимирующей последовательности $\{x_n(t)\}$ простых функций

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \| x(t) - x_n(t) \|\, d\mu = 0.$$

Для такой функции и н т е г р а л о м Б о х н е р а по множеству $B \in \mathfrak{B}$ наз.

$$\int_B x(t)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_E \chi_B(t)\, x_n(t)\, d\mu,$$

где $\chi_B(t)$ — характеристич. функция множества B, а предел понимается в смысле сильной сходимости в банаховом пространстве X. Этот предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций.

К р и т е р и й и н т е г р и р у е м о с т и п о Б о х н е р у: для того чтобы сильно измеримая функция $x(t) \in F$ была интегрируема по Бохнеру, необходи-

мо и достаточно, чтобы норма этой функции была интегрируема, т. е.

$$\int_B \|x(t)\|\, d\mu < \infty.$$

Множество функций, интегрируемых по Бохнеру, образует векторное подпространство $\mathscr{L}$ пространства F, а Б. и. есть аддитивный и однородный оператор на этом подпространстве.

Свойства Б. и.:

1) $$\left\| \int_B x(t)\, d\mu \right\| \leqslant \int_B \| x(t) \|\, d\mu;$$

2) Б. и. есть счетно аддитивная и абсолютно непрерывная функция множеств σ-алгебры $\mathfrak{B}$, т. е.

а) $$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} x(t)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} x(t)\, d\mu,$$

$$B_i \in \mathfrak{B},\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \mu(B_i) < \infty;$$

б) $$\left\| \int_B x(t)\, d\mu \right\| \longrightarrow 0 \text{ при } \mu(B) \longrightarrow 0 \text{ равномерно по } B \in \mathfrak{B};$$

3) если $x_n(t) \in F$, $x_n(t) - X(t)$ почти всюду относительно меры μ на $B \in \mathfrak{B}$ и $\|x_n(t)\| \leqslant f(t)$ почти всюду относительно μ на B, причем

$$\int_B f(t)\, d\mu < \infty, \text{ то } x(t) \in \mathscr{L}$$

и

$$\int_B x_n(t)\, d\mu \longrightarrow \int_B x(t)\, d\mu;$$

4) пространство $\mathscr{L}$ полно относительно *сходимости по норме*

$$\| x(t) - y(t) \| = \int_B \| x(t) - y(t) \|\, d\mu;$$

5) если T – замкнутый линейный оператор из банахова пространства x в банахово пространство y и

$$x(t) \in \mathscr{L}(x;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu), \quad Tx(t) \in \mathscr{L}(y;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu),$$

то

$$\int_B Tx(t)\, d\mu = T \int_B x(t)\, d\mu;$$

в случае ограниченности T условие

$$Tx(t) \in \mathscr{L}(y;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$$

выполняется автоматически ([3]–[5]).

Б.и. введен С. Бохнером [1]. Эквивалентные определения даны Т. Гильденбрандтом [2] и Н. Данфордом (интеграл D_0).

Лит.: [1] Bochner S., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 262—76; [2] Hildebrandt T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59; p. 111—39; [3] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., [2 изд.], М., 1962; [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1 — Общая теория, М., 1962.

В. И. Соболев.

БОХНЕРА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – функции, эквивалентные *Бора почти периодическим функциям*; определение дано С. Бохнером [1]. Непрерывная на интервале $(-\infty, \infty)$ функция $f(x)$ наз. Б. п. п. ф., если семейство функций $\{f(x+h)\}$, $-\infty < h < \infty$ компактно в смысле равномерной сходимости на $(-\infty, \infty)$, т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(x+h_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $(-\infty, \infty)$ к $f(x)$. Определение С. Бохнера широко применяется в теории почти периодич. функций; в частности, оно служит отправным пунктом в абстрактных обобщениях понятия почти периодичности.

Лит.: [1] Bochner S., «Math. Ann.», 1926, Bd 96, S. 119—47; S. 383—409; [2] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БОХНЕРА — МАРТИНЕЛЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, Мартинелли — Бохнера представ-

ление, Мартинелли — Бохнера формула, — интегральное представление голоморфных функций, определяемое следующим образом (см. [1], [2]). Пусть функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D и непрерывна в ее замыкании $\bar{D}$. Тогда выражение

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge[d\bar{\zeta}_j]\wedge d\zeta_j\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta_n=\begin{cases}f(z), & \text{если } z\in D,\\ 0, & \text{если } z\notin\bar{D}.\end{cases}\qquad(*)$$

где $[d\bar{\zeta}_j]$ означает, что член $d\bar{\zeta}_j$ следует опустить, наз. Б.—М. п. При $n=1$ Б.—М. п. совпадает с интегральной формулой Коши (см. *Коши интеграл*), однако при $n>1$ его ядро не является голоморфным по z, и этим объясняется ограниченность применения Б.—М. п. в теории функций многих комплексных переменных. Ядром Б.—М. п. является дифференциальная форма по ζ бистепени $(n,\ n-1)$:

$$\omega(\zeta,\ z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge\ldots[d\bar{\zeta}_j]\wedge d\zeta_j\wedge\ldots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta_n,$$

определенная в $\mathbb{C}^n$, с особенностью в точке $\zeta=z$, ∂-замкнутая (т. е. $\partial\omega=0$) вне особенности. При $n>1$ форма ω равна $\partial\omega'(\zeta,\ z)$, где

$$\omega'(\zeta,\ z)=-\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-2}}\sum_{j=1}^{n}(\Pi_{k\neq j}\,d\bar{\zeta}_k\wedge d\zeta_k)$$

— форма бистепени $(n-1,\ n-1)$, коэффициент к-рой является фундаментальным решением уравнения Лапласа; здесь

$$\partial\varphi=\sum dz_k\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\ \text{ и }\ \bar{\partial}\varphi=\sum d\bar{z}_k\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_k}.$$

Следующее интегральное представление, обобщающее формулу (*), является аналогом формулы Коши—Грина (см. *Коши интеграл*): если функция f непрерывно дифференцируема в замыкании области $D\subset\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D, то для всякой точки $z\in D$

$$f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\,\omega(\zeta,\ z)-\int_D\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\omega(\zeta,\ z).$$

Функция

$$\hat{f}(z)=\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta,\ z),$$

где Γ — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ и f — функция на Γ, интегрируемая по мере Лебега, наз. интегралом типа Бохнера — Мартинелли. Как и для интегралов типа Коши, для интегралов типа Бохнера — Мартинелли справедлива формула Сохоцкого при обычных ограничениях на Γ и f. Интеграл типа Бохнера — Мартинелли является комплексной функцией, гармонической всюду вне Γ; в общем случае эта функция голоморфна лишь при $n=1$. Если $\Gamma=\partial D$, то при $n\geqslant 1$ условие $\hat{f}(z)=0$ вне $\bar{D}$ эквивалентно голоморфности $\hat{f}$ в D.

Б.—М. п. используется для вывода других интегральных представлений (напр., *Бергмана — Вейля представления*), для голоморфного продолжения с границы, а также в теории граничных значений голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Б.—М. п. получено С. Бохнером и Э. Мартинелли (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Bochner S., «Ann. Math.», 1943, v. 44, №4, p. 652—673; [2] Martinelli E., «Rend. Accad. Italia», 1938, v. 9, p. 269—83; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

БОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально выпуклое линейное топологич. пространство, обладающее рядом свойств *банаховых пространств* и *Фреше пространств* без предположения о метризуемости; это один из наиболее широких классов пространств, в к-рых справедлива *Банаха — Штейнхауза теорема*. Б. п. были впервые введены Н. Бурбаки (см. [1]).

Множество A векторного пространства E наз. у р а в н о в е ш е н н ы м м н о ж е с т в о м, если $\alpha x \in A$ для всех $x \in A$ и α, для к-рого $|\alpha| \leqslant 1$. Множество $A \subset E$ наз. п о г л о щ а ю щ и м м н о ж е с т в о м, если оно поглощает каждую точку из E, т. е. если для каждого $x \in E$ существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha x \in A$.

Б о ч к о й в линейном топологич. пространстве наз. замкнутое, уравновешенное поглощающее выпуклое множество. Б о ч е ч н ы м п р о с т р а н с т в о м наз. линейное топологич. пространство, наделенное локально выпуклой топологией, в к-рой всякая бочка является окрестностью нуля. Пространства Фреше и, в частности, банаховы пространства служат примерами Б.п. Важный класс Б. п., наделенных особенно замечательными свойствами, составляют *Монтеля пространства*.

С в о й с т в а Б. п. Фактор пространство, прямая сумма и индуктивный предел Б. п. являются Б. п. Всякое поточечно ограниченное множество линейных непрерывных изображений Б. п. в локально выпуклое линейное топологич. пространство равностепенно непрерывно. В пространстве, сопряженном к Б. п., ограниченное множество в слабой топологии будет ограниченным в сильной топологии и компактным в слабой топологии. Замкнутая выпуклая оболочка компактного множества, лежащего в пространстве, сопряженном к Б. п., компактна.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Э д в а р д с Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969. *В. М. Тихомиров.*

БРАНДТА ПОЛУГРУППА — полугруппа S с нулем, в к-рой каждому ненулевому элементу a соответствуют такие однозначно определенные элементы e, f, $a' \in S$, что $ea = af = a$ и $a'a = f$, и для любых двух ненулевых идемпотентов g_1, $g_2 \in S$ имеет место $g_1 S g_2 \neq 0$. Элементы e и f, указанные в определении, на самом деле будут идемпотентами, причем $fa' = a'e = a'$ и $aa' = e$. Кроме того, в Б. п. каждое из условий $ac = bc \neq 0$, $ca = cb \neq 0$ влечет $a = b$, а условия $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$ влекут $abc \neq 0$.

Частичный группоид, получающийся выкидыванием нуля из Б. п., наз. г р у п п о и д о м Б р а н д т а. Это понятие было введено Г. Брандтом в [1], фактически там же было введено понятие Б. п. Понятие группоида Брандта является абстракцией системы нормальных идеалов полупростых линейных алгебр относительно так наз. собственного умножения (см. [2], гл. 6, а также [3], гл. 6). Роль Б. п. для теории полугрупп определяется тем, что Б. п. — это в точности вполне 0-простые *инверсные полугруппы* (см. *Вполне простая полугруппа*). Полугруппа будет Б. п. тогда и только тогда, когда она изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* с единичной сэндвич-матрицей над группой с присоединенным нулем.

Лит.: [1] B r a n d t H., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 360–66; [2] D e u r i n g M., Algebren, B., 1935; [3] Д ж е к о б с о н Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [4] С у ш к е в и ч А. К., Теория обобщенных групп, Хар.—К., 1937; [5] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

БРАУЭРА ГРУППА п о л я k — группа классов конечномерных *центральных простых алгебр* над полем k, относительно эквивалентности, определенной следующим образом. Две центральные простые k-алгебры A и B конечного ранга эквивалентны, если существуют такие целые положительные числа m и n, что тензорные произведения $A \otimes_k M_m(k)$ и $B \otimes_k M_n(k)$ являются изоморфными k-алгебрами (здесь $M_r(k)$ алгебра квадратных матриц порядка r над k). Тензорное умножение алгебр

индуцирует на множестве классов эквивалентных центральных простых конечномерных алгебр структуру абелевой группы, к-рая и наз. Б. г. поля k и обозначается $\mathrm{Br}k$. Нулевым элементом этой группы служит класс полных матричных алгебр, а обратным элементом к классу алгебры A — класс ее инверсной алгебры. Каждый ненулевой класс содержит ровно одну, с точностью до изоморфизма, k-алгебру с делением (т. е. тело над k).

Б. г. была определена и изучалась в серии работ Р. Брауэра (R. Brauer), Э. Нётер (E. Noether), А. Альберта (A. Albert), Х. Хассе (H. Hasse) и др. начиная с 20-х гг. 20 в. (см., напр., [6]). Наиболее законченные результаты, вплоть до полного вычисления Б. г., были получены для числовых полей в связи с развитием *полей классов теории*. В терминах Б. г. формулируется общая форма закона взаимности.

Б. г. равна 0 для любого сепарабельно замкнутого поля и любого конечного поля. Для поля действительных чисел Б. г. есть циклич. группа 2-го порядка и ее ненулевой элемент — класс алгебры кватернионов. Если k — поле p-адических чисел или любое полное дискретно нормированное локально компактное поле, то его Б. г. изоморфна $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (здесь $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел). Этот факт занимает важное место в локальной теории полей классов.

Пусть k — поле алгебраич. чисел конечной степени или поле алгебраич. функций от одной переменной с конечным полем констант. Тогда имеет место точная последовательность групп:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\, k \xrightarrow{\mathrm{inv}} \sum\nolimits_{\nu} \mathrm{Br}\, k_{\nu} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

где ν пробегает всевозможные нормирования поля k, k_ν — соответствующие пополнения поля k, гомоморфизм inv индуцируется естественными вложениями $k \to k_\nu$. Образ элемента из $\mathrm{Br}\, k$ в $\mathrm{Br}\, k_\nu$ наз. *локальным инвариантом*, гомоморфизм Σ является суммированием локальных инвариантов. Этот факт устанавливается в глобальной теории полей классов. Если k - поле алгебраич. функций от одной переменной над алгебраически замкнутым полем констант, то его Б. г. нулевая (*теорема Тзена*). Случай произвольного поля констант разобран в [4] и [7].

Б. г. функториально зависит от k, т. е. если K — расширение поля k, то определен гомоморфизм $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}K$. Его ядро, обозначаемое $\mathrm{Br}(K/k)$, состоит из классов алгебр, распадающихся над K.

Конструкции скрещенных произведений с помощью систем факторов (см. [5]) приводят к когомологич. интерпретации Б. г. Для любого нормального расширения K/k имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Br}\,(K/k) \simeq H^2(K,\ K^*),$$

где $H^2(K,\ K^*)$ - группа двумерных когомологий Галуа с коэффициентами в мультипликативной группе K^* поля K. Более того, группа $\mathrm{Br}k$ изоморфна $H^2(\bar{k},\ k^*)$, где $\bar{k}$ — сепарабельное замыкание поля k. Сопоставление центральной простой алгебре ее класса в Б. г. осуществляется при помощи кограничного оператора

$$\delta: H^1(K,\ \mathrm{PGL}(n,\ K)) \to H^2(K,\ K^*)$$

в когомологич. последовательности, соответствующей точной последовательности групп

$$1 \to K^* \to \mathrm{GL}(n,\ K) \to \mathrm{PGL}(n,\ K) \to 1,$$

где $\mathrm{GL}(n,\ K)$ и $\mathrm{PGL}(n,\ K)$ — линейная и проективная группы матриц порядка $n \times n$. Здесь группа $H^1(K,\ \mathrm{PGL}(n,\ K))$ интерпретируется как множество классов с точностью до k-изоморфизма центральных простых алгебр ранга n^2 над полем k, распадающихся над k, или как множество классов k-изоморфных *Брауэра* —

Севери многообразий размерности $n-1$, имеющих K-точку.

Б. г. всегда является периодической группой. Порядок любого ее элемента делит число n, где n^2 — ранг тела, представляющего этот элемент.

Когомологич. интерпретация Б. г. позволяет рассматривать ее как группу классов центральных расширений группы Галуа сепарабельного замыкания $\bar{k}/k$ при помощи группы $\bar{k}^*$.

Обобщением понятия Б. г. является г р у п п а Б р а у э р а — Г р о т е н д и к а, определяемая аналогично Б. г. с заменой центральных простых алгебр на алгебры Адзумая (см. [7]).

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Б у р б а к и Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] С е р р Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] Ф а д д е е в Д. К., «Вестник Ленингр. ун-та», 1957, № 7, в. 2, с. 45—51; [5] Ч е б о т а р е в Н. Г., Введение в теорию алгебр, М.— Л., 1949; [6] D e u r i n g M., «Algebren», 2 Aufl., B., 1968, Bd 4; [7] G r o t h e n d i e c k A., в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémax, Amst., 1968, p. 46—188.

В. А. Исковских.

БРАУЭРА РЕШЕТКА, Б р а у э р а с т р у к т у р а, Б р а у э р а а л г е б р а, — *дистрибутивная решетка*, в к-рой для каждой пары элементов a, b существует элемент, наз. п с е в д о р а з н о с т ь ю (часто обозначаемый через $a \overset{*}{-} b$), являющийся наименьшим среди элементов c со свойством $b+c \geqslant a$. Возможно эквивалентное описание Б. р. как многообразия *универсальных алгебр* с тремя бинарными операциями $\bigcup$, $\bigcap$ и $\overset{*}{-}$, удовлетворяющими нек-рым аксиомам. Термин «Брауэра алгебра» был введен ввиду наличия связи Б. р. с *интуиционистской логикой* Брауэра (L. E. J. Brouwer). Чаще вместо Б. р. используются так наз. п с е в д о б у л е в ы а л г е б р ы, теория к-рых двойственна теории Б. р. Любая Б. р. превращается в псевдобулеву алгебру при введении нового порядка $(a \leqslant' b) \rightleftarrows (b \leqslant a)$, новых объединений и пересечений по формулам

$$(a \cup' b) \rightleftarrows (a \cap b), \quad (a \cap' b) \rightleftarrows (a \cup b)$$

и о п е р а ц и и о т н о с и т е л ь н о г о п с е в д о д о п о л н е н и я $a \Rightarrow b$, совпадающей с псевдоразностью $a \overset{*}{-} b$. Обратно, любая псевдобулева алгебра может быть рассматриваема как Б. р. Иногда термин «Б. р.» используется для псевдобулевых алгебр (см., напр., [2]).

Лит.: [1] M a c K i n s e y J. C. C., T a r s k i A., «Ann. Math.», 1944, v. 45, p. 141—91; [2] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

В. А. Янков.

БРАУЭРА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. н е п о д в и ж н о й т о ч к е: при непрерывном отображении $f: S \to S$ n-мерного симплекса S в себя существует по крайней мере одна точка $x \in S$ такая, что $f(x)=x$; доказана Л. Брауэром [1]. Эквивалентное утверждение было несколько ранее доказано П. Г. Болем [2]. Б. т. распространяется на непрерывные отображения замкнутых выпуклых тел n-мерного топологического векторного пространства и имеет широкие применения в доказательствах теорем существования решений различных уравнений. Б. т. обобщается на бесконечномерные топологич. векторные пространства.

Лит.: [1] B r o u w e r L. E. J., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 176—80; [2] B o h l P. G., «J. reine u. angew. Math.», 1904, Bd 127, S. 88.

В. И. Соболев.

2) Б. т. о б и н в а р и а н т н о с т и о б л а с т и: при всяком гомеоморфном отображении подмножества A евклидова пространства E^n на подмножество B того же пространства любая внутренняя точка A (относительно E^n) переходит во внутреннюю точку B (относительно E^n), а любая невнутренняя точка переходит в невнутреннюю. Доказана Л. Брауэром [1].

Лит.: [1] B r o u w e r L. E. J., «Math. Ann.», 1912, Bd 71, S. 97—115.

М. И. Войцеховский.

БРАУЭРА — СЕВЕРИ МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраическое многообразие* над полем k, которое, если его

рассматривать над алгебраич. замыканием $\overline{k}$ поля k, изоморфно *проективному пространству*.

Арифметич. свойства таких многообразий изучал Ф. Севери (F. Severi, 1932), позднее Ф. Шатле [1] вскрыл связь Б.—С. м. с *центральными простыми алгебрами* над полем k и с *Брауэра группой*.

Простейшим нетривиальным примером одномерного Б.—С. м. является проективная коника Q:

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

на действительной проективной плоскости $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$. Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ это многообразие изоморфно проективной прямой $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$. Множество всех одномерных Б.— С. м. (рассматриваемых с точностью до изоморфизма) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством проективных невырожденных коник (рассматриваемых с точностью до проективной эквивалентности над k), к-рое, в свою очередь, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством (неизоморфных) алгебр обобщенных *кватернионов* над k. В приведенном выше примере конике Q соответствует алгебра обычных кватернионов.

В многомерном случае множество классов n-мерных Б.-С. м. (т. е. множество Б.—С. м., различаемых с точностью до k-изоморфизма) может быть отождествлено с множеством *Галуа когомологий* $H^1(k, \mathrm{PGL}(n+1, k))$, где $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ - проективная группа автоморфизмов проективного пространства P^n_k (см. [3], [4]). Этим же множеством когомологий описываются классы k-изоморфных центральных простых k-алгебр ранга $(n+1)^2$ (т. е. форм матричной алгебры $M_{n+1}(k)$). Более явно связь Б.— С. м. с центральными простыми алгебрами устанавливается следующим образом. k-алгебре A ранга r^2 сопоставляется многообразие X ее левых идеалов ранга r, к-рое задается как замкнутое подмногообразие в *Грассмана многообразии* всех k-линейных подпространств размерности r в A. В нек-рых случаях многообразие X можно задать с помощью нормированных уравнений, как, например, в случае алгебр кватернионов. Взаимосвязь Б.— С. м. и алгебр существенно используется при изучении как тех, так и других (см. [1], [4]).

Наиболее существенными свойствами Б.— С. м. являются следующие. Б.—С. м. X тогда и только тогда k-изоморфно проективному пространству P^n_k, когда оно имеет точку в поле k. Любое Б.— С. м. имеет точку в нек-ром конечном сепарабельном расширении K поля k (см. [1]).

Для Б.- С. м., определенных над полем алгебраич. чисел, справедлив *Хассе принцип*.

Поле рациональных функций $k(X)$ на Б.—С. м. X является полем разложения соответствующей алгебры A; более того, произвольное расширение K поля k тогда и только тогда является полем разложения для A, когда X имеет K-точку (см. [4]).

В связи с обобщением на схемы понятий центральной простой алгебры и группы Брауэра было введено понятие схем Брауэра—Севери, обобщающее понятие Б.— С. м. (см. [2]). Пусть $f: P\to X$ — морфизм схем. Схема P наз. с х е м о й Б р а у э р а — С е в е р и, если локально, в *этальной топологии* схемы X, схема P изоморфна проективному пространству P^n_X над X. Схема P над схемой X тогда и только тогда является схемой Брауэра — Севери, когда $f: P\to X$ — конечно представленный собственный плоский морфизм и все геометрич. слои его изоморфны проективным пространствам [2].

Лит.: [1] C h â t e l e t F., «Ann. École Normal supereur», 1944, t. 61, p. 249—300; [2] G r o t h e n d i e c k A., Le groupe de Brauer, в кн.: Seminaire Bourbaki, année 17, 1964/65, N. Y.— Amst., exposes 290, p. 1—21; [3] С е р р Ж.-П., Когомологии

Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] Рокетт П., «Математика», 1967, т. 11, в. 5, с. 88—116. *В. А. Исковских.*

БРАХИСТОХРОНА — кривая скорейшего спуска. Задача о ее нахождении, поставленная Г. Галилеем (G. Galilei) в [1], заключается в следующем: среди плоских кривых, соединяющих две данные точки A и B, лежащие в одной вертикальной плоскости (B ниже A), найти ту, двигаясь по к-рой под действием только силы тяжести материальная точка достигнет B за кратчайшее время. Задача сводится к нахождению функции $y(x)$, доставляющей минимум функционалу:

$$J(y)=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx,$$

где a и b — абсциссы точек A и B. Б. является *циклоидой* с горизонтальным основанием, точка возврата к-рой находится в точке A.

Лит.: [1] Галилей Г., Беседы и математические доказательства, пер. с лат., М.— Л., 1934; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *Л. П. Купцов.*

БРИАНШОНА ТЕОРЕМА: во всяком шестистороннике (см. рис.), описанном вокруг кривой 2-го порядка (шестистороннике Брианшона), прямые, соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку (точку Брианшона). Б. т. двойственна *Паскаля теореме*. Б. т. доказана Ш. Ж. Брианшоном (Ch. J. Brianchon) в 1806. *А. Б. Иванов.*

БРИО — БУКЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^m y' = f(x,\ y), \qquad (1)$$

где m — целое положительное число, функция f аналитична при $x=y=0$, $f'_y(0,0)\neq 0$, $f(0,\ 0)=0$. Ш. Брио и Т. Буке показали [1], что всякое уравнение вида

$$\alpha(z,\ w)\,w' = \beta(z,\ w),$$

где $\alpha(0,\ 0)=\beta(0,\ 0)=0$ и α и β аналитичны в начале, с помощью специальных локальных замен переменных может быть сведено к нек-рому числу уравнений вида (1). Уравнение (1) всегда (кроме случая $m=1$, $f'_y(0,\ 0)$ есть натуральное число) имеет единственное решение в виде формального степенного ряда

$$y=\xi(x)\equiv\xi_1 x+\xi_2 x^2+\ldots, \qquad (2)$$

к-рый сходится для достаточно малых $|x|$, если $m=1$, и может расходиться для всех $x\neq 0$, если $m>1$. Пусть в (1)

$$f\equiv f_0(x)+f_1(x)y,$$

тогда для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно выполнения $m-1$ условий на коэффициенты рядов Тейлора функций f_0 и f_1, причем в эти условия входят все коэффициенты, так что наличие или отсутствие аналитич. решения $y=\xi(x)$ уравнения (1) не может быть определено ни по какому конечному отрезку ряда Тейлора функции f. Поэтому иногда Б.—Б. у. наз. уравнение (1) с $m>1$.

Лит.: [1] Briot C., Bouquet T., «J. de l'Ecole polytechnique», 1856, v. 21, p. 85—132, 133—98; [2] Bieberbach L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, 2 Aufl., B., 1965; [3] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 120—138 (Введение). *А. Д. Брюно.*

БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОЦЕСС — процесс, описывающий хаотическое перемещение взвешенных в жидкости или газе мелких частиц, являющееся следствием соударений с молекулами среды. Существует несколько математич. моделей такого движения (см. [1]). Наиболее важная для теории случайных процессов - модель Б. д. п., известная под назв. *винеровского процесса* (более того, часто ставится знак равенства между этими понятиями).

Лит.: [1] Павлов В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 4.

БРУНА РЕШЕТО — один из *решета методов* в элементарной теории чисел, созданный В. Бруном [1]; является развитием *Эратосфена решета*. Метод Б. р. заключается в следующем: из последовательности натуральных чисел $a_n \leqslant x$ высеиваются (выбрасываются) числа с малыми простыми делителями, после этого остаются простые и *почти простые числа*, содержащие только большие простые делители. Пусть $P(x)$ их количество. Доказывается, что $P(x)$ заключено между двумя суммами со сравнительно небольшим числом слагаемых, к-рые можно оценить сверху и снизу. Так, напр., оценивается сверху число *близнецов* на заданном интервале. Б. р. применяется в аддитивной теории чисел. В. Брун доказал с помощью Б. р., что каждое большое четное число N представимо в виде $N=P_1+P_2$, где P_1 и P_2 содержат не более чем по 9 простых множителей.

Лит.: [1] Brun V., «C. r. Acad. sci.», 1919, t. 168, № 11, p. 544–46; [2] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959.

Н. И. Климов.

БРУНА ТЕОРЕМА о простых близнецах: ряд $\sum\frac{1}{p}$ сходится, если p пробегает все простые *близнецы*. Это означает, что если простых близнецов и бесконечно много, то они все же расположены в натуральном ряду довольно редко. Теорема доказана В. Бруном [1]. Впоследствии была доказана сходимость аналогичного ряда для обобщенных близнецов.

Лит.: [1] Brun V., «Bull. sci. math.», 1919, ser. 2, t. 43, p. 100–04, 124–28; [2] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959.

Н. И. Климов.

БРУННА—МИНКОВСКОГО ТЕОРЕМА: пусть K_0 и K_1 — выпуклые множества, n-мерного евклидова пространства, K_λ, $\lambda\in[0, 1]$ (линейная комбинация K_0 и K_1) — множество точек, делящих отрезки с концами в любых точках множеств K_0 и K_1 в отношении $\lambda/(1-\lambda)$, $V(\lambda)$ — корень n-й степени из объема множества K_λ; тогда $V(\lambda)$ — вогнутая функция от λ, т. е. для любых λ_1, λ_2, $\rho\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$V(\lambda_1(1-\rho)+\lambda_2\rho)\geqslant(1-\rho)V(\lambda_1)+\rho V(\lambda_2).$$

Функция $V(\lambda)$ линейна (и тогда неравенство обращается в равенство) в том и только в том случае, когда K_0 и K_1 гомотетичны. Б.— М. т. обобщается на линейные комбинации нескольких выпуклых множеств. Б.— М. т. используется для решения экстремальных задач и задач единственности. Б.— М. т. установлена Г. Брунном (H. Brunn) в 1887, уточнена и дополнена Г. Минковским (H. Minkowski) в 1897.

Лит.: [1] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966.

М. И. Войцеховский.

БРЮА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление связной алгебраич. редуктивной группы G в виде объединения двойных классов смежности по *Бореля подгруппе*, параметризуемых *Вейля группой* группы G. Точнее, пусть B, B^- — противоположные подгруппы Бореля редуктивной группы G, U, U^- — соответственно унипотентные части B, B^- (см. *Линейная алгебраическая группа*), W — группа Вейля группы G. Через w ниже обозначается как элемент группы W, так и его представитель в нормализаторе тора $B\bigcap B^-$, поскольку приводимая конструкция не зависит от выбора представителя. Для каждого $w\in W$ рассматривается группа $U_w^-=U\bigcap{}_wU^-w^{-1}$. Тогда группа G представима в виде объединения непересекающихся двойных смежных классов BwB ($w\in W$), причем морфизм $U_w^-\times B\to B_wB$ ($(x, y)\to xwy$) является изоморфизмом алгебраич. многообразий. Дальнейшее уточнение Б. р. позволяет получить клеточное разбиение проективного многообразия G/B, а именно: если x_0 — неподвижная относительно левых

сдвигов на элементы из B точка многообразия G/B (такая точка всегда существует, см. *Бореля теорема* о неподвижной точке), то G/B является объединением непересекающихся U-орбит вида $U(w(x_0))$, $w \in W$ (см. *Алгебраическая группа преобразований*), причем морфизм $U_{\bar{w}} \to U_{w(x_0)}$ $(u \to u(w(x_0)))$ есть изоморфизм алгебраич. многообразий. Каждая из групп $U_{\bar{w}}$, как многообразие, изоморфна аффинному пространству; в случае, когда основное поле есть поле комплексных чисел, каждая из указанных U-орбит является клеткой в смысле алгебраич. топологии и это позволяет вычислить гомологии G/B. Существование Б. р. для ряда классич. групп было установлено Ф. Брюа (F. Bruhat, 1956), в общем случае это доказал К. Шевалле [3]. А. Борель (A. Borel) и Ж. Титс (J. Tits) обобщили конструкцию Б. р. на группы G_k k-точек k-определенной алгебраич. группы [2]. При этом роль борелевских подгрупп играют минимальные параболич. k-подгруппы, роль групп U — их унипотентные радикалы, а вместо W рассматривается относительная, или k-группа Вейля W_k.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Chevalley C., Classification des groupes de Lie algébriques, v. 2, P., 1958.

В. П. Платонов.

БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА МЕТОД — см. *Галеркина метод*.

БУКВА — элементарный знак к.-л. символики, рассматриваемый вне зависимости от выражаемого им смысла. Обычно Б. вводятся в рассмотрение путем соглашения и используются в качестве элементарных «кирпичиков», из к-рых по определенным правилам строятся выражения данной символики. Правила построения выражений составляют синтаксис символики. Разработка способов понимания полученных выражений составляет предмет ее семантики.

Н. М. Нагорный.

БУЛЕВА АЛГЕБРА, булева решетка,— частично упорядоченное множество специального вида. Б. а. наз. *дистрибутивная решетка* (дистрибутивная структура), имеющая наибольший элемент 1 — единицу Б. а., наименьший элемент 0 — нуль Б. а. и содержащая вместе с каждым своим элементом x его дополнение — элемент Cx, удовлетворяющий соотношениям

$$\sup\{x, Cx\}=1, \quad \inf\{x, Cx\}=0.$$

Операции sup и inf обозначаются обычно знаками $\vee$ и $\wedge$, а иногда $\bigcup$ и $\bigcap$, чем подчеркивается их сходство с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. Вместо Cx иногда пишут $\bar{x}$, x', $-x$. Дополнение всякого элемента в Б. а. единственно.

Б. а. может определяться и иначе, а именно, как непустое множество с операциями C, $\vee$, $\wedge$, удовлетворяющими аксиомам:

1) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
3) $(x \wedge y) \vee y = y$, $(x \vee y) \wedge y = y$;
4) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
5) $(x \wedge Cx) \vee y = y$, $(x \vee Cx) \wedge y = y$.

При таком подходе упорядочение не предполагается заранее заданным, а вводится условием: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x = x \wedge y$.

Возможны и другие аксиоматики. В аксиомах Б. а. отражена аналогия между понятиями «множества», «события», «высказывания». Отношение порядка в Б. а. может быть (в зависимости от выбора интерпретации) истолковано как теоретико-множественное включение, как причинное следование для событий, как логич. следование для высказываний и т. д.

Кроме основных операций C, $\vee$, $\wedge$, в Б. а. могут быть определены и другие, среди к-рых особенно важна операция симметрической разности:

$$x+_2y=(x\wedge Cy)\vee(y\wedge Cx)$$

(пишут также $x\Delta y$, $|x-y|$).

Всякая Б. а. есть *булево кольцо* с единицей относительно операций $+_2$ («сложение») и $\wedge$ («умножение»); любое булево кольцо с единицей можно рассматривать как Б. а.

Б. а. возникли в трудах Дж. Буля [1], [2] как аппарат символич. логики. В последующем они нашли широкое применение в различных разделах математики — в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и др. В основе приложений Б. а. к логике лежит интерпретация элементов Б. а. как высказываний (см. *Алгебра логики)*; при этом дополнение Cx истолковывается как отрицание высказывания x, а операции $\wedge$ и $\vee$ — как конъюнкция и дизъюнкция. К логике близка и другая область применения Б. а.— теория *контактных схем*. Б. а. используются при обосновании теории вероятностей. Поле событий, изучаемое в теории вероятностей, есть Б. а.; при этом неравенство $x\leqslant y$ означает, что событие x влечет событие y; соответственно с этим истолковываются нуль Б. а., единица Б. а. и булевы операции $\vee$, $\wedge$, C.

Пример Б. а.— упорядоченная по включению система всех подмножеств к.-л. фиксированного множества Q. Такая Б. а. обозначается 2^Q; ее нулем служит пустое множество, единицей — само множество Q. Дополнение элемента x есть множество $Q\setminus x$; булевы операции $\vee$ и $\wedge$ совпадают соответственно с объединением и пересечением.

Вместо подмножеств множества Q удобно рассматривать их характеристич. функции. Система X_Q всех таких функций при естественном упорядочении оказывается Б. а., изоморфной Б. а. 2^Q. Операции $\vee$, $\wedge$, C, $+_2$ истолковываются в такой Б. а. следующим образом:

$$(x\vee y)(q)=\max\{x(q),\ y(q)\},$$
$$(x\wedge y)(q)=\min\{x(q),\ y(q)\}=x(q)\cdot y(q),$$
$$(Cx)(q)=1-x(q),$$
$$(x+_2y)(q)=|x(q)-y(q)|=x(q)+y(q)\pmod 2,$$
$$(q\in Q).$$

Особенно важны случаи:

1) $Q=Q_n=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Характеристич. функции подмножеств в данном случае суть «двоичные символы» вида

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad x_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}.$$

Их число равно 2^n. При $n-1$ получается двухэлементная Б. а., состоящая только из нуля и единицы.

2) $Q=X_{Q_n}$.

В этом случае элементами X_Q будут всевозможные функции, заданные на системе всех двоичных символов длины n и принимающие только значения 0 и 1. Их наз. *булевыми функциями* от n переменных. Всякая правильно построенная формула логики высказываний определяет нек-рую булеву функцию, причем совпадение функций означает эквивалентность формул.

При нек-рых условиях множество E элементов Б. а. X само оказывается Б. а. относительно индуцированного из X порядка. Так будет, в частности, в следующих случаях:

а) E — главный идеал, т. е. множество вида $\{x\in X|x\leqslant u\}$; роль единицы здесь играет элемент u;

б) E — подалгебра Б. а. X. Это означает, что из $x,\ y\in E$ следует $x\vee y$, $x\wedge y$, $Cx\in E$. Нулем и единицей новой Б. а. служат нуль и единица исходной Б. а. Особенно

важны подалгебры Б. а. 2^Q; их наз. алгебрами множеств. Всякое множество $E \subset X$ порождает нек-рую подалгебру — наименьшую подалгебру, содержащую E.

Среди отображений Б. а. особую роль играют гомоморфизмы Б. а., то есть отображения, перестановочные с булевыми операциями. Биективный гомоморфизм Б. а. является изоморфизмом Б. а. Если Б. а. X порождена множеством E, то для того чтобы всякое отображение множества E в произвольную Б.а. допускало продолжение до гомоморфизма, необходимо и достаточно, чтобы E было независимым множеством, т. е. чтобы все элементы вида

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge Cx_{p+1} \wedge \ldots \wedge Cx_m, \quad x_i \in E, \quad x_i \neq x_k,$$

были отличны от нуля. Б. а., порожденная независимой системой, наз. свободной Б. а.

Пример свободной Б. а. — рассмотренная выше алгебра булевых функций от n переменных. Ее независимыми образующими являются функции

$$f_i\colon\ f_i(x) = f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = x_i.$$

Теорема Стоуна: всякая Б. а. X изоморфна нек-рой алгебре множеств, а именно, алгебре всех открыто-замкнутых множеств вполне несвязного бикомпакта $\Sigma(X)$, определяемого с точностью до гомеоморфизма. Этот бикомпакт наз. стоуновским бикомпактом. Гомоморфизму Б. а. X в Б. а. Y соответствует топологич. вложение $\Sigma(Y)$ в $\Sigma(X)$; подалгебре Б. а. X соответствует непрерывный образ бикомпакта $\Sigma(X)$. Стоуновский бикомпакт свободной Б. а. есть двоичный дисконтинуум.

Б. а. X наз. полной, если всякое множество $E \subset X$ имеет верхнюю грань $\sup E$ и нижнюю грань $\inf E$. Это равносильно экстремальности бикомпакта $\Sigma(X)$ (см. *Экстремально несвязные пространства)*. Подалгебры полной Б. а., содержащие вычисленные в X грани всех своих подмножеств, наз. правильными подалгебрами. Вес Б. а. X есть наименьшая мощность вполне порождающего множества, т. е. множества, не содержащегося ни в какой правильной подалгебре, отличной от X. Если веса всех ненулевых главных идеалов совпадают, то Б. а. наз. однородной; такая Б. а. всегда содержит вполне порождающее независимое множество. Другими словами, полная однородная Б. а. «натянута» на свободную Б. а. Изучение произвольной Б. а. легко сводится к изучению однородных Б. а. Неполная Б. а. может быть многими способами пополнена, т. е. вложена в качестве подалгебры в нек-рую полную Б. а.

Полная Б. а. наз. нормированной, если на ней определена действительная функция μ (мера), обладающая свойствами: 1) $\mu(x) > 0$ при $x \neq 0$; 2) если $E \subset X$ и $x \wedge y = 0$ при $x,\ y \in E,\ x \neq y$, то

$$\mu(\sup E) = \sum\nolimits_{x \in E} \mu(x).$$

В теории вероятностей, где нормированные Б. а. особенно важны, обычно предполагают, что $\mu(1) = 1$. При этом значение $\mu(x)$ интерпретируется как вероятность события x. На нормированные Б. а. в основном переносится классическая теория меры и интеграла. Для нормированных Б. а. имеется полная классификация (см. [4], [5], [7]). В частности, для однородных нормированных Б. а. единственным инвариантом является вес. Не всякая Б. а. может быть нормирована. Известны различные условия существования меры, однако они далеко не исчерпывают проблемы нормируемости.

Б. а. может быть наделена различными топологиями. Особенно важна так наз. (o)-топология, к-рая в

случае нормированной Б. а. метризуема и соответствует метрике

$$\rho(x, y) = \mu[(x \wedge Cy) \vee (Cx \wedge y)],$$

а для Б. а. вида 2^Q совпадает с тихоновской топологией. В самом общем случае может не существовать никакой топологии, хорошо согласованной с порядком в Б. а.

Лит.: [1] Boole G., The mathematical analysis of logic, Camb.— L., 1847; [2] его же, An investigation of the laws of thought, L., 1854; [3] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [4] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [5] Halmos P., Lectures on Boolean algebras, Toronto — N. Y.— L., [1963]; [6] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [7] Stone M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1936, v. 40, № 1, p. 37—111; [8] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [9] Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie, B.— Gött.— Hdlb., 1955; [10] Колмогоров А. Н., Algèbres de Boole mètriques complètes, в кн.: VI Zjazd, Mathematyków Polskich, Kraków, 1950; [11] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, [ч. 3] — Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [12] Kakutani S., «Ann. Math.», 1941, v. 42, ser. 2, p. 523—37, 994—1024; [13] Maharam D., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1942, v. 28, p. 108—11; [14] Макки Дж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [15] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [16] Куратовский К., Топология, т. 2, пер. с англ., М., 1969.

Д. А. Владимиров.

БУЛЕВА ФУНКЦИЯ, функция алгебры логики,— функция, аргументы к-рой, равно как и сама функция, принимают значения из двухэлементного множества (обычно {0,1}). Б. ф. являются одним из основных объектов дискретной математики, в особенности тех ее разделов, к-рые входят в математич. логику и математич. кибернетику. Б. ф. возникли при математич. постановке задач логики и были названы по имени Дж. Буля (G. Boole), положившего начало применению математики в логике (сер. 19 в.; см. *Алгебра логики*).

Одной из таких задач является построение алгебры высказываний. Для этого каждому высказыванию приписывается одно из двух значений 0 или 1 (играющие, соответственно, роль «лжи» и «истины»), и тогда основные логич. связки «и», «или», «не», «если..., то» и др. можно рассматривать, соответственно, как «элементарные» Б. ф.: $x\&y$, $x \vee y$, $\bar{x}$, $x \to y$ и т. д. Тем самым значение любого сложного высказывания, построенного с помощью основных логич. связок из заданных высказываний, является Б. ф. от значений этих высказываний. Такая Б. ф. представляет собой суперпозицию элементарных Б. ф., соответствующих логич. связкам, входящим в сложное высказывание. Позднее выяснилось, что язык Б. ф. удобен для описания функционирования дискретных *управляющих систем* таких, как контактные схемы, схемы из функциональных элементов, логич. сети и др. Эти управляющие системы строятся по определенным правилам из нек-рых исходных элементов подобно тому, как сложные высказывания строятся из элементарных. Правила построения указанных управляющих систем, а также функционирование исходных элементов таковы, что функционирование сложных управляющих систем может быть описано с помощью Б. ф. Б. ф. используются также в нек-рых задачах целочисленного программирования, к-рые сводятся к решению систем булевых уравнений вида

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где f_i — Б. ф., $i = 1, 2, \ldots, m$. Существуют и другие возможности применения Б. ф. в дискретной математике, благодаря чему изучение Б. ф. представляет самостоятельный интерес.

При решении различных задач, связанных с Б. ф., существенным моментом является способ задания Б. ф. Имеется целый ряд таких способов: таблицы, формулы, специальные классы формул, наз. нормальными формами (см. *Булевых функций нормальные*

формы), подмножества вершин n-мерного единичного куба и др. В последнем случае каждый набор длины n значений аргументов (0 или 1) рассматривается как вершина n-мерного единичного куба, и тогда Б. ф. от n аргументов может быть задана с помощью подмножества вершин, в к-рых эта функция принимает значение 1. Это подмножество, выписанное в виде матрицы, строками к-рой являются наборы значений аргументов Б. ф., наз. б у л е в о й м а т р и ц е й. В том случае, когда Б. ф. описывает функционирование управляющих систем, последнюю также можно рассматривать как средство задания Б. ф. Обычно говорят, что эта управляющая система реализует данную Б. ф. С реализацией Б. ф. теми или иными видами управляющих систем связан большой круг задач таких, как задачи синтеза, минимизации, задачи контроля и надежности и др. Другой круг задач возникает при изучении свойств и классов Б. ф. в связи с различными способами задания; это — изучение метрич. характеристик различных классов нормальных форм Б. ф. и связанных с ними геометрич. свойств n-мерного единичного куба (см. *Булевых функций метрическая теория*), а также различных алгебр Б. ф. (см. *Многозначная логика*, *Эквивалентные преобразования*). Система всех классов Б. ф., замкнутых относительно суперпозиций, была описана Э. Постом (E. Post). Она образует счетно бесконечную структуру с пятью максимальными (предполными) классами.

В нек-рых случаях возникает необходимость рассматривать частичные, т. е. не всюду определенные, Б. ф., для к-рых перечисленные задачи имеют характерную специфику.

Лит.: [1] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Я б л о н с к и й С. В., Г а в р и л о в Г. П., К у д р я в ц е в В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев.

БУЛЕВО КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо K, все элементы к-рого идемпотентны, т. е. $x^2=x$ для любого $x\in K$. Любое Б. к. $K\neq 0$ коммутативно и является подпрямой суммой полей Z_2 из двух элементов. При этом $x+x=0$ для всех $x\in K$. Конечное Б. к. $K\neq 0$ является прямой суммой полей Z_2 и потому имеет единицу.

Б. к.— это кольцевой вариант *булевых алгебр*, а именно: любая булева алгебра является Б. к. с единицей относительно операций сложения и умножения, определяемых правилами

$$(x+y)-(x+C_y)\cup(y+C_x),\quad x\cdot y=x\cap y,$$

где C_x — дополнение элемента x. Нуль и единица кольца совпадают с нулем и единицей алгебры. Обратно, любое Б. к. с единицей есть булева алгебра относительно операций $x\cup y=x+y+xy$, $x\cap y=x\cdot y$, $C_x=1+x$.

Лит.: [1] S t o n e M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1936, v. 40, № 1, p. 37—111; [2] Ж е г а л к и н И. И., «Матем. сб.», 1927, т. 34, в. 1, с. 9—28; [3] В л а д и м и р о в Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [4] С и к о р с к и й Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969.

Ю. М. Рябухин.

БУЛЕВО УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0, \qquad (*)$$

где f — *булева функция* n переменных. Множество всех решений уравнения вида (*) может быть описано системой булевых функций, зависящих от n произвольных параметров.

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

Т. С. Фофанова.

БУЛЕВОЗНАЧНАЯ МОДЕЛЬ — модель, определяемая следующим образом. Пусть Ω — сигнатура нек-рого языка L 1-й ступени с одним сортом переменных, т. е. Ω — множество символов функций и предикатов. Б. м. наз. тройка $M=(B_M,\ V_M,\ \Omega_M)$, где B_M — невырожденная *булева алгебра*, V_M — непустое множество и Ω_M — функция, определенная на Ω и такая, что

$$\Omega_M(\rho)\in V_M^{V_M^n},$$

если ρ есть n-местный функциональный символ, и

$$\Omega_M(\rho) \in B_M^{V_M^n},$$

если ρ есть n-местный предикатный символ. Запись X^Y обозначает множество всех функций, определенных на Y со значениями в X и $X^n = X^{\{m, m<n\}}$, где $n \geqslant 0$ – натуральное число. Булева алгебра B_M наз. множеством истинностных значений модели M. Множество V_M наз. универсумом модели M. Б. м. M наз. также B-моделью, если множество истинностных значений есть булева алгебра B, $B_M = B$. Если булева алгебра B двухэлементна (т. е. $B = \{0,1\}$), то B-модель M есть классическая двузначная модель.

Пусть L_M – язык, пополненный новыми индивидными константами: для каждого $v \in V_M$ своя индивидная константа $\bar{v}$. Пусть M есть B-модель и $B = (B; 0, 1, \cdot, \cup, \cap,)$ полная булева алгебра. Тогда нижеследующие равенства 1) 8) определяют значение $\|e\|_M$ каждого замкнутого выражения e (т. е. формулы или терма без свободных переменных) языка L_M:

1) $\| \bar{v} \|_M = v$, где $v \in V_M$;

2) $\| \rho(\tau_1, \ldots, \tau_n) \|_M = (\Omega_M(\rho))(\| \tau_1 \|_M, \ldots, \| \tau_n \|_M)$,

где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ – замкнутые термы и ρ есть n-местный функциональный или предикатный символ;

3) $\| \varphi \supset \psi \|_M = - \| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$;

4) $\| \varphi \vee \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$;

5) $\| \varphi \wedge \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cap \| \psi \|_M$;

6) $\| \neg \varphi \|_M = - \| \varphi \|_M$;

7) $\| \exists \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcup_{v \in V_M} \| \varphi(\bar{v}) \|_M$;

8) $\| \forall \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcap_{v \in V_M} \| \varphi(\bar{v}) \|_M$.

Соотношения 1) – 8) определяют значение $\|e\|_M$ и для некоторых неполных булевых алгебр; надо только, чтобы существовали бесконечные объединения и пересечения в 7) и 8). Понятие Б. м. можно ввести и для языков со многими сортами переменных. В этом случае для каждого сорта переменных будет своя область изменения V_M.

Замкнутая формула φ наз. истинной в B-модели M ($M \models \varphi$), если

$$\| \varphi \|_M = 1.$$

B-модель M наз. моделью теории T, если $M \models \varphi$ для каждой аксиомы φ теории T. Если h есть гомоморфизм булевой алгебры B на булеву алгебру B', сохраняющий бесконечные объединения и пересечения, то существует B'-модель M' такая, что

$$\| \varphi \|_{M'} = h(\| \varphi \|_M)$$

для каждой замкнутой формулы φ языка L_M. В случае, если универсум модели M счетен, то существует гомоморфизм h в булеву алгебру $\{0,1\}$, позволяющий переделать модель M в классическую двузначную модель M' такую, что

$$M \models \varphi \rightarrow M' \models \varphi.$$

Доказано, что теория T непротиворечива тогда и только тогда, когда она имеет Б. м. На этой теореме основано применение теории Б. м. к вопросам непротиворечивости аксиоматич. теорий.

Если Б. м. теории T строится средствами другой аксиоматич. теории S, то получается результат о непротиворечивости теории T относительно S. Так, напр., результат П. Коэна (P. Cohen) о непротиворечивости теории $ZF + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ относительно ZF можно получить построением соответствующей Б. м. средствами системы ZF (см. *Вынуждения метод*). Построение ко-

эновского отношения вынуждения $p \Vdash \varphi$ равносильно построению такой Б. м. M, что

$$\| \varphi \|_M = \{p : p \Vdash \neg\neg\varphi\}.$$

Лит.: [1] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Takeuti G., Zaring W. M., Axiomatic set theory, N. Y. [a. o.], (1973); [4] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 5—72.

В. Н. Гришин.

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — направление, связанное с изучением числовых характеристик и метрич. свойств булевых функций. Основные разделы этой теории посвящены исследованию свойств «почти всех» булевых функций (см. *Булевых функций минимизация*), свойств совокупности всех булевых функций данного числа переменных и специальных подклассов булевых функций. Кроме того, изучается строение областей истинности булевых функций с помощью числовых характеристик, появившихся в основном в задачах, связанных с минимизацией булевых функций и теорией локальных алгоритмов. Этими характеристиками являются размерность и протяженность функции.

Пусть $N_{f(x_1, \ldots, x_n)}$ — множество вершин единичного n-мерного куба, на к-рых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна единице. Рассмотрим все максимальные интервалы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и выделим среди них интервал наибольшей размерности r. Величина r наз. р а з м е р н о с т ь ю функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается через $\operatorname{Dim} f(x_1, \ldots, x_n)$. С помощью размерности оцениваются отношения сложностей самой сложной тупиковой и кратчайшей дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.) функции f (см. *Булевых функций нормальные формы*). Сверху это отношение оценивается величиной $2^{\operatorname{Dim} f}$. В то же время для «почти всех» булевых функций имеет место неравенство

$$\operatorname{Dim} f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant [\log_2 n] + 1.$$

При решении задачи минимизации булевых функций представляет интерес вычисление размерности «типичных» максимальных интервалов. Доказано, что «почти все» максимальные интервалы «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеют размерность, близкую к $\log_2 \log_2 n$.

Пусть $S_k(\mathfrak{A}, f)$ — главная окрестность k-го порядка (см. *Алгоритм локальный*) элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$, входящей в сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f, и $k(\mathfrak{A}, f)$ минимальное значение порядка окрестности, при к-ром $S_k(\mathfrak{A}, f)$ включает в себя все элементарные конъюнкции, входящие в сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$. Величина

$$p(f) = \max_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_f} k(\mathfrak{A}, f)$$

наз. п р о т я ж е н н о с т ь ю функции f. Для «почти всех» булевых функций

$$p(f(x_1, \ldots, x_n)) \sim \frac{n}{\log_2 \log_2 n}.$$

Пусть

$$p(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} p(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Известно, что величина $p(n)$ реализуется на булевой функции специального вида, называемой цепью. Функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ наз. ц е п ь ю, если множество N_ψ единиц этой функции можно представить в виде последовательности $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_q$ такой, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, где ρ — расстояние Хемминга (см. *Код*); расстояние между другими парами $\tilde{\alpha}_r, \tilde{\alpha}_s$ (может быть, за исключением пары $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_q)$) больше единицы, и в множестве единиц функции ψ не содержится целиком ни один интервал размерности 2. Протяженность цепи ψ равна $q-1$. Поэтому задача вычисления $p(n)$ сводится к построению

в n-мерном единичном кубе цепи с максимальным q. Прямым построением таких цепей доказано, что

$$c_1 \cdot 2^n < p(n) < c_2 \cdot 2^n,$$

где c_1, c_2 — константы. Построение замкнутых цепей (циклов), т. е. цепей, у к-рых $\rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_q)=1$, с максимальной мощностью множества N_ψ является важной составной частью доказательства теоремы о невычислимости свойств конъюнкций «входить в минимальные или кратчайшие д. н. ф.» в классе локальных алгоритмов.

Следующий результат выясняет строение областей истинности «почти всех» булевых функций. Множество M вершин n-мерного единичного куба наз. связным, если для всякой точки $\tilde{\alpha} \in M$ существует точка $\tilde{\beta}$ из M такая, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=1$ Точка $\tilde{\alpha}$ в множестве M наз. изолированной, если для всех $\tilde{\beta}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=1$, выполнено условие: $\tilde{\beta} \notin M$. Имеет место следующее утверждение: у «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ множество единиц $N_{f(x_1, \ldots, x_n)}$ разбивается на сумму одного связного множества и нек-рого множества изолированных точек. При этом мощность связного множества не меньше $2^{n-1} - \sqrt{n} \cdot 2^{n/2} \cdot$ $- \mathrm{const} \cdot \log_2 n$, а число изолированных точек не превосходит $\mathrm{const} \cdot \log_2 n$.

С результатами по вычислению протяженности «почти всех» булевых функций тесно связаны результаты по вычислению радиусов и диаметров графов, порождаемых булевыми функциями. Графом $G(f)$, порожденным булевой функцией f, наз. граф, вершинами к-рого являются точки множества N_f, а ребрами — пары точек множества N_f, расстояние Хэмминга между к-рыми равно единице. Расстояние $r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ между вершинами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ графа $G(f)$ определяется как длина минимальной цепи, связывающей $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ (предполагается, что вершины $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ принадлежат одной компоненте связности графа $G(f)$). Отклонностью вершины $\tilde{\alpha}$ в графе $G(f)$ наз. величина $l(\tilde{\alpha})=\max r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где максимум берется по всем вершинам G, принадлежащим вместе с $\tilde{\alpha}$ к одной компоненте связности. Радиусом компоненты связности K графа G наз. число $R(K)=\min\limits_{\tilde{\alpha} \in K} l(\tilde{\alpha})$. Величина $R(G) =$ $=\max R(K)$, где максимум берется по всем компонентам связности графа G, наз. радиусом графа G. Диаметром графа G наз. число $D(G)=$ $=\max r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где максимум берется по всем парам вершин $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, принадлежащим одной компоненте связности. Для «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ величины $R(G)$ и $D(G)$ таковы, что $n-2 \leqslant R(G(f)) \leqslant$ $\leqslant n-1$ и $D(G(f))=n-1$.

Из результатов, относящихся к вычислению числовых характеристик отдельных классов булевых функций, выделяются результаты, относящиеся к монотонным булевым функциям. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, $\tilde{\beta}=(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ — бинарные наборы. Говорят, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Булева функция наз. монотонной, если из соотношения $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. Представляет интерес определение точного числа $\psi(n)$ различных монотонных булевых функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Это число известно лишь для небольших значений n. Известно также асимптотич. равенство

$$\log_2 \psi(n) \sim C_n^{[n/2]}.$$

Большое число приложений при решении дискретных экстремальных задач имеет задача оптимальной рас-

шифровки монотонной булевой функции. Пусть задан алгоритм A, позволяющий вычислять монотонную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в каждой точке $\tilde{\alpha}$. Если в процессе вычислений установлено, что $f(\tilde{\alpha})=1$ для нек-рой точки $\tilde{\alpha}$, то $f(\tilde{\beta})=1$ для всех $\tilde{\beta}\geqslant\tilde{\alpha}$. При $f(\tilde{\alpha})=0$ функция f известна (равна нулю) во всех точках $\tilde{\beta}\leqslant\tilde{\alpha}$. Поэтому для р а с ш и ф р о в к и, т. е. полного восстановления функции f, алгоритм A должен вычислить ее значения лишь в нек-ром множестве точек. Пусть $m(f)$ обозначает минимальное число точек, в к-рых достаточно вычислить $f(x_1, \ldots, x_n)$ для полного восстановления f. Пусть

$$m(n)=\max_{f(x_1, \ldots, x_n)} m(f).$$

Величина $m(n)$ удовлетворяет асимптотич. равенству:

$$m(n)\sim 2C_n^{[n/2]}.$$

Оценка для $m(f)$ может быть понижена, если известна дополнительная информация о монотонной булевой функции.

С задачей расшифровки монотонных булевых функций связана задача вычисления числовых характеристик совокупностей существенных переменных не всюду определенных булевых функций, т. е. функций, заданных на нек-ром подмножестве множества вершин единичного n-мерного куба. Совокупность переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ наз. с у щ е с т в е н н о й для не всюду определенной булевой функции $F(x_1, \ldots, x_n)$, если $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}\subseteq\{x_1, \ldots, x_n\}$ и существует не всюду определенная булева функция $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ такая, что $F(x_1, \ldots, x_n)\equiv\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ на всей области определения F. Существенная совокупность наз. т у п и к о в о й для F, если никакая истинная часть этой совокупности не является существенной для F.

У каждой всюду определенной булевой функции имеется единственная тупиковая совокупность переменных. Для не всюду определенных булевых функций строение совокупностей существенных переменных отличается большим разнообразием. Пусть Σ — система подмножеств множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющая условию: если $S\in\Sigma$ и S' — произвольное подмножество множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то $S\cup S'\in\Sigma$. Тогда существует не всюду определенная булева функция $F_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что система существенных для F_Σ наборов переменных есть Σ. Пусть $t_F(n)$ — число различных тупиковых наборов для $F(x_1, \ldots, x_n)$ и

$$t(n)=\max_{F(x_1, \ldots, x_n)} t_F(n).$$

Известно, что

$$t(n)=C_n^{[n/2]}.$$

Алгоритм построения всех тупиковых совокупностей переменных для $F(x_1, \ldots, x_n)$ имеет максимальную трудоемкость $2C_n^{[n/2]}$, причем этот максимум достигается (здесь единицей трудоемкости считается трудоемкость проверки, является ли данная совокупность переменных существенной для F).

К Б. ф. м. т. относят также задачи вычисления характеристик, связанных с задачей минимизации булевых функций.

Лит.: [1] Г л а г о л е в В. В., «Проблемы кибернетики», 1967, в. 19, с. 75—94; [2] Ж у р а в л е в Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1964, в. 11, с. 271—75; [3] К о р о б к о в В. К., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13, с. 5—28; [4] С а п о ж е н к о А. А., сб. «Дискретный анализ», 1967, в. 10, с. 91—119; [5] е г о ж е, «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 1, с. 32—35; [6] K l e i t m a n D., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 21, № 3, p. 677—82.

Ю. И. Журавлев.

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ МИНИМИЗАЦИЯ — представление булевых функций нормальными формами (см. *Булевых функций нормальные формы*), простейши-

ми относительно нек-рой меры сложности. Обычно под сложностью нормальной формы понимается число букв в ней. В этом случае простейшая форма наз. минимальной. Иногда в качестве меры сложности рассматривается число элементарных конъюнкций в дизъюнктивной нормальной форме или число сомножителей в конъюнктивной нормальной форме. В этом случае простейшая форма наз. кратчайшей. В силу двойственности дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм достаточно рассматривать только дизъюнктивные нормальные формы (д. н. ф.).

Построение кратчайших и минимальных д. н. ф. имеет каждое свою специфику. Множества минимальных и кратчайших д. н. ф. одной и той же функции могут находиться в любых теоретико-множественных соотношениях: содержаться одно в другом, иметь пустое пересечение или непустую симметрическую разность. Если для функции f обозначить через m_f сложность минимальной д. н. ф., через k_f — минимальную сложность кратчайшей д. н. ф., а через $l(n)$ — наибольшее из отношений k_f/m_f по всем функциям от n переменных, то справедливо асимптотич. соотношение:

$$l(n) \sim \frac{n}{2}.$$

Обычно под задачей Б. ф. м. понимается задача построения их минимальных д. н. ф. Существует тривиальный алгоритм построения всех минимальных д. н. ф. для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Он состоит в просмотре всех д. н. ф. с переменными $x_1, \ldots, x_n$ и выделении тех из них, к-рые реализуют функцию f и имеют минимальную сложность. Этот алгоритм фактически неприменим уже при небольших n ввиду быстрого роста числа операций. Поэтому было построено большое число других алгоритмов, к-рые, однако, эффективно применимы не ко всем функциям.

Исходным заданием функции в задаче минимизации обычно считают таблицу, совершенную д. н. ф. (см. *Булевых функций нормальные формы*) или произвольную д. н. ф. На первом этапе от исходного задания осуществляется переход к так наз. сокращенной д. н. ф., к-рая определена для каждой функции однозначно. Существует большое число методов реализации этого перехода. Наиболее универсальный метод состоит в выполнении над д. н. ф. преобразований вида

$$A \vee A \cdot B \Longrightarrow A \text{ (поглощение)},$$

$$xA \vee \bar{x}B \Longrightarrow xA \vee \bar{x}B \vee AB.$$

Сокращенная д. н. ф. обладает тем свойством, что любая минимальная д. н. ф. получается из нее удалением нек-рых элементарных конъюнкций. Второй, наиболее трудоемкий, этап состоит в получении из сокращенной д. н. ф. всех тупиковых д. н. ф., среди к-рых содержатся и все минимальные. На этом этапе обычно используется геометрич. представление булевых функций. Пусть E_n обозначает множество всех вершин n-мерного единичного куба. Каждой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ взаимно однозначно соответствует подмножество N_f, $N_f \subseteq E_n$, таких вершин $\tilde{\alpha}$, где $f(\tilde{\alpha})=1$. Пусть $\mathfrak{A}$ — элементарная конъюнкция ранга r, тогда множество $N_{\mathfrak{A}}$ наз. интервалом ранга r, соответствующим элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$. Говорят, что система интервалов $N_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{A}_m}$ образует покрытие множества $N \subseteq E_n$, если

$$N = N_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup N_{\mathfrak{A}_m}.$$

Так как равенства

$$f = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m \quad \text{и} \quad N_f = N_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup N_{\mathfrak{A}_m}$$

эквивалентны, то задача Б. ф. м. равносильна отысканию покрытий, сумма рангов интервалов к-рых мини-

мальна. Такие покрытия наз. минимальными. Интервал $N_{\mathfrak{A}}$ наз. максимальным для функции f, если $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$ и не существует интервала $N_{\mathfrak{B}}$ такого, что $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{B}} \subseteq N_f$. Построение тупиковых д. н. ф. функции f сводится к отысканию таких покрытий множества N_f максимальными интервалами, никакое собственное подмножество к-рых не является покрытием множества N_f. Эти покрытия соответствуют тупиковым д. н. ф. и наз. неприводимыми. Они получаются из покрытий, соответствующих сокращенным д. н. ф., путем удаления нек-рых интервалов.

Выбор минимальных д. н. ф. из всех тупиковых также оказывается весьма трудоемким процессом, поскольку для «почти всех» булевых функций от n аргументов различных тупиковых д. н. ф. не меньше, чем 2^{2^n}. При этом разброс сложностей тупиковых д. н. ф. может быть очень велик, так что выбор случайной тупиковой д. н. ф. вместо минимальной может привести к большой погрешности.

Оценки числа тупиковых д. н. ф. и разброса сложностей показывают, что естественным путем улучшения эффективности алгоритмов минимизации является путь более тонких рассмотрений при удалении элементарной конъюнкции из д. н. ф. Удалять (или, наоборот, закреплять до конца процесса) конъюнкцию следует лишь в том случае, если для нее посредством нек-рой процедуры удается установить, что она не входит ни в одну минимальную д. н. ф. для f (входит во все минимальные д. н. ф. для f). Последний факт устанавливается обычно при помощи анализа конъюнкций, близких к рассматриваемой, т. е. входящих в окрестность этой конъюнкции (см. *Алгоритм локальный)*. При этом разрешается накапливать информацию об элементарных конъюнкциях и использовать ее в дальнейшем анализе. Процедуры указанного вида получили назв. локальных алгоритмов упрощения. Ниже приводятся нек-рые из них. В их описании используется понятие окрестности k-го порядка $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$.

Окрестность нулевого порядка $S_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ состоит из одной конъюнкции $\mathfrak{A}$. Если $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ есть окрестность $(k-1)$-го порядка, то окрестность k-го порядка $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ состоит из всех конъюнкций $\mathfrak{A}_j$ д. н. ф. $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих одному из следующих условий: 1) $N_{\mathfrak{A}_j}$ имеет непустое пересечение хотя бы с одним интервалом, соответствующим конъюнкции из $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$; 2) $N_{\mathfrak{A}_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} N_{\mathfrak{B}_i}$, где $N_{\mathfrak{B}_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$, удовлетворяют условию 1).

Алгоритм Куайна. На каждом шаге рассматривается окрестность $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ одной из конъюнкций в д. н. ф. $\mathfrak{N}$. В процессе работы алгоритма для каждой из конъюнкций делается попытка вычислить одно из свойств: $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ входит во все минимальные д. н. ф.», $P_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ — не входит ни в одну минимальную д. н. ф.».

Алгоритм работает следующим образом. 1) По очереди для каждой конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$ строится окрестность $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$. Проверяется включение: $N_{\mathfrak{N}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_i}$. Если оно не имеет места, то $\mathfrak{A}$ отмечается нек-рым способом как входящая во все минимальные д. н. ф. В этом случае говорят, что $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (является ядровой конъюнкцией). 2) Пусть на первом этапе в $\mathfrak{N}$ отмечены конъюнкции $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q$. Остальные конъюнкции из $\mathfrak{N}$ упорядочиваются, и для каждой такой конъюнкции $\mathfrak{B}$ проверяется включение $N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} N_{\mathfrak{B}_i}$. Конъюнкции, для к-рых это соотношение выполнено, не входят ни в одну минимальную д. н. ф.; они удаляются из $\mathfrak{N}$.

Алгоритм регулярных точек. Этот алгоритм на каждом шаге осматривает окрестность $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и удаляет конъюнкции, не входящие ни в одну тупиковую и, следовательно, ни в одну минимальную д. н. ф. В описании алгоритма используется понятие $\tilde{\alpha}$-пучка в д. н. ф. $\mathfrak{N}$, представляющего собой для рассматриваемой точки $\tilde{\alpha}$ из $N_{\mathfrak{N}}$ множество $M(\tilde{\alpha}, \mathfrak{N})$ интервалов $N_{\mathfrak{A}_j}$ таких, что $\mathfrak{A}_j \in \mathfrak{N}$, $\tilde{\alpha} \in N_{\mathfrak{A}_j}$. Для конъюнкции $\mathfrak{A}$ из д. н. ф. $\mathfrak{N}$ точка $\tilde{\alpha}$ из $N_{\mathfrak{N}}$ наз. регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если существует точка $\tilde{\alpha}'$ такая, что $\tilde{\alpha}' \in N_{\mathfrak{N}} \setminus N_{\mathfrak{A}}$ и $M(\tilde{\alpha}', \mathfrak{N}) \subseteq M(\tilde{\alpha}, \mathfrak{N})$. Множество $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$ наз. регулярным относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если все его точки регулярны относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Описываемый алгоритм основывается на том, что конъюнкция $\mathfrak{A}$ из сокращенной д. н. ф. функции f не входит ни в одну тупиковую д. н. ф. функции f тогда и только тогда, когда $N_{\mathfrak{A}}$ есть множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Алгоритм проверяет в нек-ром порядке, являются ли интервалы конъюнкций, входящих в д. н. ф., регулярными множествами, и удаляет те из них, интервалы к-рых регулярны. Свойство интервала $N_{\mathfrak{A}}$ быть регулярным относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ полностью определяется окрестностью $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и, вообще говоря, не определяется окрестностью $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

A-алгоритм. Здесь используется понятие д. н. ф., минимальной относительно д. н. ф. $\mathfrak{N}$, т. е. такой д. н. ф., к-рая минимальна среди всех д. н. ф., эквивалентных $\mathfrak{N}$ и получающихся из $\mathfrak{N}$ опусканием нек-рых элементарных конъюнкций. Рассматриваются два свойства элементарной конъюнкции в д. н. ф.:

$P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ входит во все д. н. ф., минимальные относительно $\mathfrak{N}$», и

$P_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ не входит ни в одну д. н. ф., минимальную относительно $\mathfrak{N}$».

Считается, что $P_i = 1$, если свойство P_i имеет место, и $P_i = 0$ в противном случае. Предполагается, что д. н. ф. составлены из конъюнкций с информационными отметками (ω_1, ω_2), где $\omega_i \in \{0, 1, \Delta\}$. При этом равенство $\omega_i = \Delta$ означает, что свойство P_i не вычислено $(i = 1, 2)$, а равенства $\omega_i = 1$ означают, что $P_i = \omega_i$ $(i = 1, 2)$. Конъюнкция $\mathfrak{A}$ с информационными отметками (ω_1, ω_2) обозначается через $\mathfrak{A}^{\omega_1\omega_2}$. *A*-алгоритм вычисляет значения свойств P_1 и P_2 для конъюнкций $\mathfrak{A}$ из д. н. ф. $\mathfrak{N}$, используя для этого лишь конъюнкции из окрестности $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и их информационные отметки. Для конъюнкции $\mathfrak{A}$ ранга r из д. н. ф. $\mathfrak{N}$ множество $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$ наз. множеством первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ существуют конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ рангов $r_1, \ldots, r_m$ такие, что $M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_j}$ и $r > \sum_{j=1}^{m} r_j$.

Разностью $\mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ наз. д. н. ф., состоящая из элементарных конъюнкций, входящих в $\mathfrak{N}_1$ и не входящих в $\mathfrak{N}_2$.

До применения *A*-алгоритма все конъюнкции из рассматриваемой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ имеют отметку (Δ, Δ). Если выполнены i шагов и отметку $(1, \Delta)$ получили конъюнкции $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_s$, а отметку $(\Delta, 1)$ — конъюнкции $\mathfrak{A}''_1, \ldots, \mathfrak{A}''_t$, то $(i+1)$-й шаг состоит в следующем. Упорядочивают нек-рым способом конъюнкции из д. н. ф. Если д. н. ф. $\mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{s} \mathfrak{A}'_j \vee \vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}''_j)$ пустая, то *A*-алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае после упорядочивания к.-л. способом конъюнкций из этой д. н. ф. выделяются первая по порядку конъюнкция $\mathfrak{A}$ и ее окрестности S_1 и S_2 в д. н. ф.

$\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}_j'')$ и проверяется соотношение

$$N_{\mathfrak{A}} \equiv \bigcup_{\mathfrak{B} \in (S_1(\mathfrak{A}, \tilde{\mathfrak{N}}) \setminus \mathfrak{A})} N_{\mathfrak{B}}.$$

Если оно выполнено, то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на $(1, \Delta)$ и $(i+1)$-й шаг A-алгоритма заканчивается. Если оно не выполнено, то проверяется, можно ли $N_{\mathfrak{A}}$ представить в виде $M_1 \cup M_2$, где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, а M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Если $N_{\mathfrak{A}}$ можно представить в таком виде, то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на отметку $(\Delta, 1)$, и $(i+1)$-й шаг A-алгоритма заканчивается; если — нельзя, то описанная процедура применяется ко второй по порядку конъюнкции, и т. д. Если при этом ни у одной из конъюнкций отметка не изменится, то после просмотра всех конъюнкций работа A-алгоритма заканчивается.

Если за д. н. ф. $\mathfrak{N}$ принять сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f, то все конъюнкции, получившие в алгоритме отметку $(\Delta, 1)$, не входят ни в одну минимальную д. н. ф. функции f; они удаляются из $\mathfrak{N}_f$. Конъюнкции, получившие отметку $(1, \Delta)$, входят во все минимальные д. н. ф. функции f. Рассматривались также различные частные случаи A-алгоритма.

Кольцевой алгоритм расставляет над конъюнкциями информационные отметки (ω_1, ω_2), значение к-рых то же, что и в A-алгоритме. На каждом шаге кольцевой алгоритм использует конъюнкции, входящие в окрестность k-го порядка нек-рой конъюнкции, и их информационные отметки. Ниже излагается упрощенный вариант этого алгоритма. В полном виде кольцевой алгоритм — наилучший в классе локальных алгоритмов со специальной памятью по окрестностям $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Описанные выше алгоритмы являются частными случаями общего кольцевого алгоритма. Если

$$S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l\},$$

$$S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$$

и

$$N_{S_{k-1}} = N_{\mathfrak{A}} \cup \bigcup_{i=1}^{l} N_{\mathfrak{A}_i}, \quad N_{S_k} = N_{\mathfrak{A}} \cup \bigcup_{j=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_j},$$

$$Q(S_k) = N_{S_k} \setminus N_{S_{k-1}},$$

то каждому подмножеству $N \subseteq Q(S_k)$ сопоставляется не всюду определенная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, множество M_1^f единиц к-рой есть $N_{S_k} \setminus N$, а множество M_0^f нулей есть $E_n \setminus N_{S_k}$; на множестве N функция f не определена. Множество таких функций обозначается через $F_k(\mathfrak{A})$. До начала работы алгоритма все конъюнкции из рассматриваемой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ имеют отметку (Δ, Δ). Если выполнены i шагов и отметку $(1, \Delta)$ получили конъюнкции $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_s'$, а отметку $(\Delta, 1)$ — конъюнкции $\mathfrak{A}_1'', \ldots, \mathfrak{A}_t''$, то $(i+1)$-й шаг состоит в следующем. Упорядочивают нек-рым способом конъюнкции из д. н. ф. Если д. н. ф. $\mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{s} \mathfrak{A}_j' \vee \vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}_j'')$ пустая, то алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае после упорядочения к.-л. способом всех конъюнкций этой д. н. ф. для конъюнкции $\mathfrak{A}$, являющейся первой из них, и для каждой функции f из множества $F_k(\mathfrak{A})$ находятся все д. н. ф., реализующие f на ее области определения, к-рые составлены из конъюнкций окрестности $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и содержат по сравнению с другими такими д. н. ф. наименьшее число символов переменных. Среди них выделяются все те д. н. ф., к-рые, во-первых, не содержат конъюнкций $\mathfrak{A}_1'', \ldots, \mathfrak{A}_t''$ и, во-вторых, содержат все конъюнкции $\mathfrak{A}_j'$, $j = 1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющие условию $N_{\mathfrak{A}_j'} \cap (N_{S_k} \setminus N) = \varnothing$.

Если для всех f из $F_k(\mathfrak{A})$ конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит во все выделенные д. н. ф., то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на отметку $(1, \Delta)$ и $(i+1)$-й шаг алгоритма заканчивается. Если $\mathfrak{A}$ не входит ни в одну из выделенных д. н. ф., то отметка (Δ, Δ) заменяется на отметку $(\Delta, 1)$ и $(i+1)$-й шаг алгоритма заканчивается. В остальных случаях описанная процедура применяется ко второй по порядку конъюнкции и т. д. Если ни у одной из конъюнкций не удается изменить отметку, то на $(i+1)$-м шаге работа алгоритма заканчивается. Все конъюнкции, получившие в кольцевом алгоритме над сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f отметки $(1, \Delta)$ (соответственно $(\Delta, 1)$), входят во все минимальные д. н. ф. (соответственно не входят ни в одну минимальную д. н. ф.) функции f. Результат применения описанных выше алгоритмов не зависит от способа упорядочения конъюнкций в д. н. ф.

Задача выделения всех конъюнкций, входящих хотя бы в одну и не входящих ни в одну минимальную д. н. ф., не может быть решена алгоритмами, работающими с $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ при k, ограниченных или недостаточно быстро растущих с ростом n числа переменных. Ситуация не изменится, если к запоминаемым в алгоритме свойствам P_1, P_2 добавить ограниченное или недостаточно быстро растущее с ростом n множество свойств.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, 1958 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 51); [2] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 5—44; [3] Quine W. V., «Amer. Math. Monthly», 1959, v. 66, № 9, p. 755—60. *Ю. И. Журавлев.*

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — формулы специального вида, реализующие булевы функции. Различают д и з ъ ю н к т и в н ы е н о р м а л ь н ы е ф о р м ы (д. н. ф.; см. *Булевых функций минимизация*) и к о н ъ ю н к т и в н ы е н о р м а л ь н ы е ф о р м ы (к. н. ф.). Произведение $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $x^{\sigma} = x$ при $\sigma = 1$ и $x^{\sigma} = \bar{x}$ при $\sigma = 0$, наз. э л е м е н т а р н о й к о н ъ ю н к ц и е й ранга k, если все переменные в нем различны; 1 считается элементарной конъюнкцией нулевого ранга. Логическая сумма $x_{j_1}^{\sigma_1} \vee x_{j_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{j_r}^{\sigma_r}$ наз. э л е м е н т а р н о й д и з ъ ю н к ц и е й ранга r, если все переменные в ней различны; 0 считается элементарной дизъюнкцией нулевого ранга.

Формула $\mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_l$, где $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_l$ — различные элементарные конъюнкции рангов $r_1, \dots, r_l$ соответственно, наз. д. н. ф., а число $\sum_{i=1}^{l} r_i$ — с л о ж н о с т ь ю этой д. н. ф.; формула $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_t$, где $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_t$ — различные элементарные дизъюнкции рангов $\rho_1, \dots, \rho_t$ соответственно, наз. к. н. ф., а число $\sum_{i=1}^{t} \rho_i$ — с л о ж н о с т ь ю этой к. н. ф. Всякая булева функция, отличная от тождественного нуля, может быть задана д. н. ф. и, вообще говоря, неоднозначно. Аналогичный факт имеет место для к. н. ф. и функций, не равных тождественно единице.

По таблице, задающей булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, легко строится с о в е р ш е н н а я д. н. ф. $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_i = x_1^{\sigma_{i1}} x_2^{\sigma_{i2}} \dots x_n^{\sigma_{in}}$, $i = 1, 2, \dots, s$, и наборы $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{in}$ таковы, что $f(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{in}) = 1$. Совершенная д. н. ф., реализующая булеву функцию f, строится однозначно. Аналогично определяется с о в е р ш е н н а я к. н. ф.

Так как «почти все» булевы функции имеют число единичных наборов в пределах от $2^{n-1} - \sqrt{n} \cdot 2^{n/2}$ до $2^{n-1} + \sqrt{n} \cdot 2^{n/2}$, то асимптотич. сложность совершенной д. н. ф. для «почти всех» булевых функций равна $n \cdot 2^{n-1}$. Максимальная сложность совершенной д. н. ф. для функций от n переменных достигается для функций, равных 0, в одной точке. Она равна $n \cdot (2^n - 1)$.

Основной задачей в теории Б. ф. н. ф. является задача минимизации булевых функций, т. е. построение для произвольной булевой функции к. н. ф. или д. н. ф. минимальной сложности — м и н и м а л ь н о й к. н. ф. или д. н. ф. (см. *Булевых функций минимизация*, *Алгоритм локальный*). При этом, в силу принципа двойственности, достаточно рассматривать только д. н. ф. В связи с задачей минимизации булевых функций рассматриваются также д. н. ф. сокращенная, тупиковые, кратчайшие и минимальные. Важной задачей теории д. н. ф. является отыскание их числовых характеристик, а также характеристик, связывающих различные типы д. н. ф. одной функции.

Сокращенная д. н. ф. строится по булевой функции однозначно с помощью достаточно простых алгоритмов. Ее важнейшим свойством является то, что всякая минимальная д. н. ф. функции и хотя бы одна кратчайшая получаются из сокращенной д. н. ф. удалением нек-рых элементарных конъюнкций. Поэтому многие алгоритмы минимизации используют сокращенные д. н. ф. в качестве исходного задания булевой функции. В связи с этим большой интерес представляет определение сложности сокращенных д. н. ф. для «почти всех» функций и выяснение абсолютного максимума этой сложности. Если $S_f(n)$ — число элементарных конъюнкций в сокращенной д. н. ф. булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$S(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} S_f(n),$$

то имеют место следующие оценки:

$$C_1 \frac{3^n}{n} \leqslant S(n) \leqslant C_2 \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}},$$

и для «почти всех» булевых функций

$$n^{(1-\varepsilon)\log_2 \log_2 n} 2^n < S_f(n) < n^{(1+\varepsilon)\log_2 \log_2 n} \cdot 2^n,$$
$$\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty.$$

Из этих результатов и оценок сложности совершенной д. н. ф. видно, что сложность сокращенной д. н. ф. существенно больше сложности совершенной д. н. ф. как в «типичном», так и в «рекордном» случаях. В отличие от совершенной и сокращенной д. н. ф., у одной булевой функции может быть много тупиковых и минимальных д. н. ф. Пусть $t_f(n)$ — число тупиковых д. н. ф., $m_f(n)$ — число минимальных д. н. ф. булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$t(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} t_f(n), \quad m(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} m_f(n).$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left(2^{2^n}\right)^{1/\sqrt{n}} \leqslant t(n) \leqslant \left(2^{2^n}\right)^{n/2}, \quad m(n) > \left(2^{2^n}\right)^{\text{const} \cdot \sqrt{n}}$$

и для «почти всех» булевых функций

$$\left(2^{2^n-1}\right)^{(1-\varepsilon)\log_2 n \log_2 \log_2 n} < t_f(n) <$$
$$< \left(2^{2^n-1}\right)^{(1+\varepsilon)\log_2 n \log_2 \log_2 n},$$
$$\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty.$$

Верхняя оценка для $m(n)$ и оценка $m_f(n)$ для «почти всех» функций, отличных от тривиальных, пока (1977) не найдены. Большой интерес в задачах минимизации булевых функций представляют оценки сложности тупиковых д. н. ф. и минимальных д. н. ф. Пусть $\lambda_f^T(n)$ — число элементарных конъюнкций в тупиковой д. н. ф. T функции $f(x_1, \ldots, x_n)$; $l_f(n)$ — число элементарных конъюнкций в кратчайших д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\lambda(n) = \max_{f,\ T} \lambda_f^T(n), \quad l(n) = \max_f l_f(n).$$

Имеют место следующие оценки:

$$\lambda(n) \sim 2^n, \quad l(n) = 2^{n-1}.$$

У «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех тупиковых д. н. ф. T:

$$\lambda_f^T(n) \sim 2^{n-1}.$$

Для «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{2^n}{\log_2 n \log_2 \log_2 n} < l_f(n) < \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Эти оценки показывают, что кратчайшие (а также минимальные) д. н. ф. составляют у «почти всех» булевых функций малую долю от числа тупиковых д. н. ф. Существуют также оценки относительной сложности тупиковых д. н. ф. и кратчайших д. н. ф. булевых функций. Пусть $\lambda_f(n)$ — максимальное число элементарных конъюнкций в тупиковой д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Для «почти всех» булевых функций

$$\log_2 n < \frac{\lambda_f(n)}{l_f(n)} < \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n.$$

Максимальное значение отношения $\lambda_f(n)/l_f(n)$ оценивается снизу величиной $2^{n(1-\varepsilon)}$, $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Получены также оценки для величины $y(f)$, наз. разбросом булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Здесь

$$y(f) = \max_{T', T''} \frac{L(T')}{L(T'')},$$

где T' и T'' — произвольные тупиковые д. н. ф., реализующие $f(x_1, \ldots, x_n)$, а $L(T)$ — число букв в тупиковой д. н. ф. T. Построены примеры булевых функций, у к-рых $y(f) \geqslant 2^{n(1-o(1))}$; установлено, однако, что для «почти всех» булевых функций

$$y(f) \leqslant \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n.$$

Приведенные выше оценки позволяют получить полное представление о тех трудностях, к-рые возникают при минимизации булевых функций по схеме: совершенная д. н. ф. — сокращенная д. н. ф. — тупиковая д. н. ф. — минимальная д. н. ф.

Лит.: [1] Васильев Ю. Л., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10, с. 5—61; [2] Глаголев В. В., «Проблемы кибернетики», 1967, в. 19, с. 75—94; [3] Коршунов А. Д., «Кибернетика», 1969, т. 6, с. 1—8; [4] Сапоженко А. А., «Матем. заметки», 1968, т. 4, № 6, с. 649—58. *Ю. И. Журавлев.*

БУНЯКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО — неравенство математич. анализа; для функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом,

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx;$$

установлено В. Я. Буняковским [1]. Это неравенство аналогично алгебраич. неравенству Коши:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Иногда Б. н. наз. неравенством Шварца (по имени Г. А. Шварца; H. A. Schwarz). Однако В. Я. Буняковский опубликовал свою работу о неравенствах еще в 1859, тогда как в работах Г. А. Шварца то же неравенство появилось не ранее 1884 (без ссылок на Буняковского).

Лит.: Bounjakowsky W., «Mémoires de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg. 7 série», 1859, t. 1, № 9.

В. И. Битюцков.

БУРМЕ ФУНКЦИЯ — функция $J_{n,k}(z)$, определяемая как обобщение интегрального представления *бесселевых функций*:

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int t^{-n-1} \left(t + \frac{1}{t}\right)^k \exp\left\{\frac{1}{2} z \left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} dt,$$

где n — целое, а k — положительное целое. Контур интегрирования обходит один раз начало координат против часовой стрелки. Иначе,

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos\theta)^k \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta,$$

$J_{n,0}(z)\equiv J_n(z)$ — цилиндрич. функция 1-го рода. Б. ф. наз. по имени Ж. Бурже [1], к-рый изучал ее, имея в виду различные астрономич. приложения.

Лит.: [1] Bourget J., «J. math. pures et appl.», 1861, t. 6, p. 32—54; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., 1949, ч. 1, гл. 10.

В. И. Пагурова.

БУТА ЛЕМНИСКАТА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2+(2m^2+n)x^2+(2m^2-n)\,y^2=0.$$

Если $|n|<2m^2$, то Б. л. наз. эллиптической Б. л. (имеет изолированную особую точку O, см. рис. 1, где $0<n<2m^2$). Если $|n|>2m^2$, то Б. л. наз. гиперболической Б. л. (имеет в начале координат узловую точку, см. рис. 2, где $n>2m^2$). В полярных координатах уравнение эллиптич. Б. л. имеет вид:

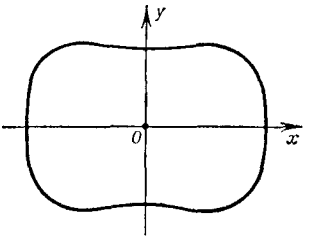


Рис. 1.

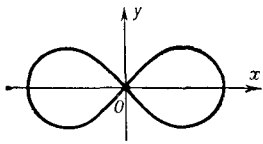


Рис. 2.

$$\rho^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi \text{ или } \rho\equiv 0;$$

если $n>2m^2$, то уравнение гиперболической Б. л. имеет вид:

$$\rho^2=a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi,$$

если $n<-2m^2$:

$$\rho^2=-a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi$$
$$(a^2=|2m^2+n|,\ b^2=|2m^2-n|).$$

Длина дуги Б. л. выражается через эллиптич. интегралы. Площадь, ограничиваемая эллиптич. Б. л.:

$$S=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2),$$

гиперболич. Б. л.:

$$S=\frac{a^2-b^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\frac{ab}{2}.$$

Б. л. — частный случай *Персея кривой*.

Б. л. названа по имени Дж. Бута [1].

Лит.: [1] Booth J., A treatise on some new geometrical methods, v. 1—2, L., 1873—77; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960, с. 144—46.

Д. Д. Соколов.

БУШУЮЩАЯ СИСТЕМА — *динамическая система* с пространством состояний, содержащим многообразия бушевания, т. е. многообразия, при прохождении к-рых изменяется закон, управляющий движением системы. Б. с. S в $\mathbb{R}^n$ описывается несколькими системами дифференциальных уравнений

$$x'=f_i(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad x'=\frac{dx}{dt}\qquad (S_i)$$

и поверхностями

$$M_i\subset\mathbb{R}^n,\quad i=1,\ \ldots,\ m.$$

При попадании траектории S на участке действия (S_i) к поверхности M_i происходит бушевание, т. е. замена системы (S_i) системой (S_{i+1}), причем (S_{m+1}) совпадает с (S_1) (подробнее см. [3]). Участие в задании Б. с. нескольких дифференциальных систем (S_i) приводит к большому разнообразию качественных картин семейств траекторий Б. с. Напр., Б. с., описываемая двумя стационарными системами линейных дифференциальных уравнений

$$x_1'=a_i+b_ix_1+c_ix_2,$$
$$x_2'=\beta_ix_1+\gamma_ix_2,\quad i=1,\ 2,$$

и имеющая в качестве многообразий бушевания $M_1 = M_2$ прямую $x_2 = 0$, может, в частности, иметь *предельный цикл* (см. [3]). Б. с. доставляют специфич. модели нелинейных колебаний, позволяя описывать явления типа «гистерезиса».

Лит.: [1] Vogel T., «Bull. Soc. Math. France», 1953, t. 81, № 1, 63—75; [2] Вогель Т., Бушующие системы, наследственные системы, динамические системы, пер. с франц., К., 1961; [3] Мышкис А. Д., Хохряков А. Я., «Матем. сб.», 1958, т. 45, № 3, с. 401—14.

Ю. С. Богданов.

БЬЁРЛИНГА ЗАДАЧА — задача теории *минимальных поверхностей*, состоящая в нахождении минимальной поверхности, проходящей через заданную незамкнутую аналитич. кривую L и имеющей вдоль L заданные касательные плоскости. Б. з. является для минимальных поверхностей аналогом задачи Коши для дифференциальных уравнений. Эта задача поставлена и решена Э. Бьёрлингом [1]. Решение ее всегда существует, единственно и в явном виде выражается формулой Шварца для минимальных поверхностей. Решение Б. з. позволяет найти минимальную поверхность всякий раз, когда известна или ее геодезическая линия, или асимптотическая линия, или линия тени. В случае, когда заданная кривая L плоская и является на искомой минимальной поверхности геодезической, плоскость кривой L будет для минимальной поверхности плоскостью симметрии.

Лит.: [1] Björling E. G., Archikes Grunert, t. IV, 1844, p. 290; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, P., 1914, pt 1; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935, с. 264—65; [4] Ничe С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100.

И. Х. Сабитов.

БЭРА КЛАССЫ — семейства действительных функций, определяемые индуктивно по порядковому числу знаков предела, входящих в определение функции, и составляющие классификацию функций, предложенную Р. Бэром (R. Baire, 1899; см. [1]) и называемую *классификацией Бэра*. *Нулевым классом Бэра* H_0 наз. множество всех непрерывных функций $f : A \to \mathbb{R}$, где A — метрич. пространство. *Первый класс Бэра* H_1 есть множество разрывных функций $f : A \to \mathbb{R}$, являющихся пределом сходящейся в каждой точке последовательности непрерывных функций. *Класс Бэра* H_α, где α — трансфинитное число первого или второго класса, определяется как множество функций $f : A \to \mathbb{R}$, не входящих ни в один из предшествующих классов, но представимых в виде $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, где $f_n \in H_{\beta_n}$, $\beta_n < \alpha$. Объединение Б. к. H_α по всем трансфинитам первого и второго классов составляет множество *функций Бэра* (или *бэровских функций*). Это есть минимальный, замкнутый в смысле поточечной сходимости, класс функций $f : A \to \mathbb{R}$, содержащий все непрерывные функции. Линейная комбинация, произведение и частное (если знаменатель не обращается в нуль) функции Б. к. не выше α является функцией Б. к. не выше α. Равномерно сходящаяся последовательность функций Б. к. не выше α имеет пределом функцию Б. к. не выше α. Установлены [4] необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность функций Б. к. не выше α сходилась к функции Б. к. не выше α. *Открытым ядром множества* A *топологического пространства* наз. объединение всех открытых множеств $M \subset A$. Если A — полное пространство с непустым плотным в себе ядром, то ни один Б. к. не пуст (см. [2]). Множество функций Бэра совпадает с множеством функций, измеримых по Борелю (см. *Бореля мера*); поэтому все они измеримы по Лебегу (см. *Лебега мера*). Функция $g : A \to \mathbb{R}$, измеримая по Лебегу, эквивалентна нек-рой функции Бэра не выше второго Б. к. (см. [3]). Р. Бэр, рассматривая функции, определенные в $\mathbb{R}^n$ (в основном в $\mathbb{R}$), наиболее подробно исследовал

функции первого класса. Он показал, что для принадлежности разрывной функции первому классу необходимо и достаточно существование точки непрерывности индуцированной функции на каждом совершенном множестве (теорема Бэра). Это утверждение переносится на функции $f: A \to \mathbb{R}$, если A обладает *Бэра свойством* (см. [2]). Понятие функций Бэра естественным образом обобщается на функции $\varphi: A \to Y$, где Y — произвольное метрич. пространство.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [4] Гагаев Б. М., «Fundam. math.», 1932, t. 18, p. 182—88.

И. А. Виноградова.

БЭРА МНОЖЕСТВО в локально компактном хаусдорфовом пространстве X — множество, принадлежащее σ-кольцу, порожденному классом всех компактных множеств в X, являющихся G_δ-множествами. С помощью Б. м. определяется понятие функции, измеримой в смысле Бэра. Во всех классич. частных случаях, когда теория меры строится в топологич. пространствах, напр. в евклидовых пространствах, понятие Б. м. совпадает с понятием *борелевского множества*.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953, с. 214—18.

В. А. Скворцов.

БЭРА ПРОСТРАНСТВО — 1) Всякое пространство, в к-ром верна *Бэра теорема* (о полных пространствах). 2) Метрич. пространство, точками к-рого являются конечные последовательности $\{n_i\} = \{n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$ натуральных чисел, а расстояние задается формулой:

$$\rho(\{n_i\}, \{m_i\}) = \frac{1}{k_0},$$

где k_0 — первое натуральное k, для к-рого $n_k \neq m_k$. Это — полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство, содержащее топологич. образ всякого нульмерного метрического сепарабельного пространства.

П. С. Александров.

БЭРА СВОЙСТВО множества A в топологическом пространстве — свойство, аналогичное свойству измеримости множества. Множество A обладает свойством Бэра, если существует такое открытое множество G, что разности $A \setminus G$ и $G \setminus A$ являются множествами 1-й категории по Бэру (см. *Категория множества*) (термин «открытое» можно заменить на «замкнутое»). Существуют другие эквивалентные определения, напр. множество обладает Б. с., если оно является объединением множества типа G_δ и множества 1-й категории. Операция взятия дополнения, счетного объединения и счетного пересечения не выводит из класса множеств, обладающих Б. с. Пример множества, не обладающего Б. с., см. [1].

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966, с. 96.

В. А. Скворцов.

БЭРА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о полных пространствах: любая счетная система открытых и всюду плотных в данном полном метрическом пространстве множеств имеет непустое, и даже всюду плотное в этом пространстве пересечение. Эквивалентная формулировка: полное метрич. пространство не может быть представлено в виде счетной суммы своих нигде не плотных подмножеств. Установлена Р. Бэром [1].

Лит.: [1] Baire R., «Ann. di mat.», 1899, (3), t. 3, p. 67.

П. С. Александров.

2) Б. т. о полунепрерывных функциях: пусть A — подмножество метрич. пространства M и $f: M \to \mathbb{R}$; тогда условие: для любого числа a множество $E\{x, x \in A, f(x) \geqslant a\}$ (соответственно $E\{x, x \in A, f(x) \leqslant a\}$) замкнуто в A, — необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ была полунепрерывна сверху (соответственно снизу) на A. Доказана Р. Бэром для $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (см. [1]). Из Б. т. следует, что полунепрерывные

функции входят в первый *Бэра класс*. Имеет место более сильное утверждение: полунепрерывная сверху (снизу) функция, не принимающая значение $+\infty$ ($-\infty$), есть предел монотонно невозрастающей (неубывающей) последовательности непрерывных функций.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957.

И. А. Виноградова.

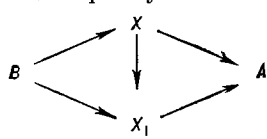
БЭРА УМНОЖЕНИЕ — бинарная операция на множестве классов эквивалентных расширений модулей; предложена Р. Бэром [1]. Пусть A и B — произвольные модули. Расширением A с ядром B наз. *точная последовательность*:

$$O \to B \to X \to A \to O. \qquad (1)$$

Расширение (1) наз. эквивалентным расширению

$$O \to B \to X_1 \to A \to O,$$

если существует гомоморфизм $\alpha : X \to X_1$, включаемый в коммутативную диаграмму:



Множество классов эквивалентных расширений обозначается $\mathrm{Ext}\,(A, B)$. Б. у. на $\mathrm{Ext}\,(A, B)$ индуцируется следующим образом определенной операцией произведения расширений. Пусть

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0, \qquad (2)$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta_1} Y \xrightarrow{\alpha_1} A \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

два расширения. В прямой сумме $X \oplus Y$ выбираются подмодули

$$C = \{(x,\ y) \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$$

и

$$D = \{(-x,\ y) \mid x = \beta(b),\ y = \beta_1(b)\}.$$

Ясно, что $D \subset C$, так что определен фактормодуль $Z = C/D$. Произведением Бэра расширений (2) и (3) наз. расширение

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta_2} Z \xrightarrow{\alpha_2} A \longrightarrow 0,$$

где

$$\beta_2(b) = [\beta(b), 0] = [0, \beta'(b)],$$

а

$$\alpha_2[x,\ y] = \alpha(x) = \alpha_1(y).$$

Лит.: [1] Baer R., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 374—416; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960.

В. Е. Говоров.

БЭРРИ — ЭССЕЕНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку отклонения функции распределения суммы независимых случайных величин от нормальной функции распределения. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}X_j = 0, \quad \mathsf{E}X_j^2 = \sigma^2 > 0, \quad \mathsf{E}\,|X_j|^3 < \infty.$$

Пусть

$$\rho = \frac{\mathsf{E}\,|X_j|^3}{\sigma^3}$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt;$$

тогда для любого n

$$\sup_x \left| \mathrm{P}\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j \leqslant x \right\} - \Phi(x) \right| \leqslant A\,\frac{\rho}{\sqrt{n}},$$

где A — абсолютная положительная постоянная. Этот

результат был получен А. Бэрри [1] и независимо от него К.-Г. Эссеном [2].

Лит.: [1] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 122—36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat., Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, p. 1—19; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

В. В. Петров.

БЮДАНА — ФУРЬЕ ТЕОРЕМА: число корней алгебраич. уравнения

$$f(x=0,$$

заключенных в интервале (a, b), $a<b$, равно или на четное число меньше, чем $\tau=t_1-t_2$, где t_1 — число перемен знака в ряду производных многочлена $f(x)$ в точке a, т. е. в ряду

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a),$$

а t_2 — число перемен знака в этом ряду в точке b. При этом каждый кратный корень считается за столько корней, какова его кратность. Установлена Ф. Бюданом (F. Budan, 1822) и Ж. Фурье (J. Fourier, 1820).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 2 — Алгебра, М.— Л., 1951, с. 331.

О. А. Иванова.

БЮРМАНА — ЛАГРАНЖА РЯД, ряд Лагранжа,— степенной ряд, полностью решающий задачу локального обращения голоморфных функций. Именно, пусть функция $w=g(z)$ комплексного переменного z регулярна в окрестности точки $z=a$, причем $g(a)=b$ и $g'(a)\neq 0$. Тогда в нек-рой окрестности точки $w=b$ плоскости w определена регулярная функция $z=h(w)$, обратная по отношению к $g(z)$ и такая, что $h(b)=a$; при этом, если $f(z)$ — любая регулярная в окрестности точки $z=a$ функция, то сложная функция $F(w)=f[h(w)]$ разлагается в окрестности точки $w=b$ в ряд Бюрмана — Лагранжа

$$F(w)=f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}(w-b)^n. \quad (*)$$

Случай непосредственного обращения функции $w=g(z)$ получается при $f(z)\equiv z$.

Разложение (*) вытекает из теоремы Бюрмана [1]: при указанных выше предположениях относительно голоморфных функций $g(z)$ и $f(z)$ последняя в нек-рой области на плоскости z, содержащей точку a, может быть представлена в виде:

$$f(z)-f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{[g(z)-b]^n}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}+R_m,$$

где

$$R_m=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma\left[\frac{g(z)-b}{g(t)-b}\right]^{m-1}\frac{f'(t)\,g'(z)\,dt\,dz}{g(t)-g(z)},$$

γ — контур на плоскости t, содержащий внутри точки a и z и такой, что если ζ — какая-либо точка внутри γ, то уравнение $g(t)=g(\zeta)$ не имеет ни на γ, ни внутри γ иных корней, кроме простого корня $t=\zeta$.

Разложение (*) для случая $b=0$ было получено Ж. Лагранжем [2].

В случае, когда производная $g'(t)$ имеет в точке $z=a$ нуль порядка $r-1$, Б.—Л. р. для многозначной обратной функции допускает следующее обобщение (см. [3]):

$$F(w)=f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}(w-b)^{n/r}.$$

Другое обобщение (см., напр., [4]) относится к функциям $g(z)$, регулярным в кольце; оно приводит вместо ряда (*) к ряду по положительным и отрицательным степеням разности $w-b$.

Лит.: [1] Burmann H., «Mem. de l'Inst. national des sci. et arts. Sci. Math. et Phys.», P., 1799, t. 2, p. 13—17; [2] Lag-

range J. L., «Mem. de l'Académie royale des sci. et belles-lettres de Berlin», 1770, t. 24; Œuvres, t. 2, P., 1868, p. 581—652; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 1, гл. 8; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1962; [5] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *Е. Д. Соломенцев.*

БЮФФОНА ЗАДАЧА об игле — классическая задача теории *геометрических вероятностей*, по праву считающаяся исходным пунктом развития этой теории. Впервые была отмечена Ж. Бюффоном в 1733 и воспроизведена вместе с решением в [1]. Ж. Бюффон рассматривал следующую ситуацию: на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a, наудачу бросается игла длиною $2r\,(2r<a)$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных параллелей? Очевидно, что положение иглы определяется расстоянием x от ее центра до ближайшей прямой линии и острым углом θ, составленным иглой с перпендикуляром к этой линии. Величина x лежит между нулем и $a/2$, а θ — между нулем и $\pi/2$. Предполагается, что точка (x, θ) распределена равномерно в соответствующем прямоугольнике (это равносильно тому, что случайные величины x и θ независимы и равномерно распределены на $(0, a/2)$ и $(0, \pi/2)$). Тогда искомая вероятность определяется как отношение площадей, соответствующих благо-

приятствующим и всем возможным исходам, и равна

$$p = \frac{1}{\frac{a}{2}\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} r \cos\theta \, d\theta = \frac{4r}{a\pi}. \qquad (*)$$

В свое время Б. з. послужила основой для экспериментальной проверки *Бернулли теоремы*. Действительно, если игла бросается n раз и в m случаях игла пересекает одну из линий, то частота m/n при больших n по теореме Бернулли должна быть близка к вероятности (*). Это соображение было использовано многими исследователями для определения числа π методом случайных испытаний (см. [1], [2]). Ж. Бюффон рассматривал и другие сходные задачи, в частности задачу о вероятности пересечения иглой линий, принадлежащих двум взаимно перпендикулярным системам, к-рые разбивают плоскость на прямоугольники со сторонами a и b, соответственно. Ответ Ж. Бюффона к этой задаче неверен. Правильный ответ:

$$\frac{4r(a+b)-4r^2}{\pi ab}$$

был указан П. Лапласом (P. Laplace) в 1812.

Лит.: [1] Buffon G., Essai d'arithmétique morale. Supplément à «l'Histoire Naturelle», v. 4, 1777; [2] Uspensky J. V., Introduction to mathematical Probability, N. Y.— L., 1937; [3] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972.

А. В. Прохоров.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов; обозначается символом (VP). Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

суммируется методом Валле Пуссена к числу S, если выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_0+\frac{n}{n+1}a_1+\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}a_2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n!}{(n+1)\ldots 2n}a_n\right]=S.$$

Метод предложен Ш. Валле Пуссеном [1]. Для ряда Фурье функции $f(x)\in L[0,\ 2\pi]$ средние Валле Пуссена (см. также *Валле Пуссена сингулярный интеграл*) имеют вид

$$V_n(f,\ x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\tau_n(t)\,dt,$$

где

$$\tau_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cos^{2n}\frac{t}{2}$$

— так наз. ядро Валле Пуссена. В. П. м. с. является *регулярным методом суммирования*. Этот метод сильнее всей совокупности *Чезаро методов суммирования* (см. *Включение методов суммирования*). Ввиду слабых аппроксимативных свойств В. П. м. с. практически не имеет применения в теории приближения функций.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Bull. Acad. de Belgique», 1908, t. 3; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Gronwall T., «J. reine und angew. Math.», 1917, Bd 147, S. 16—35.

А. А. Захаров.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания решения обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

или линейного уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=0, \qquad (2)$$

где $x\in[a,\ b]$, $|y^{(s)}|<+\infty$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, при условиях

$$y(x_i)=c_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad x_i\in[a,\ b]. \qquad (3)$$

Ш. Валле Пуссен [1] доказал, что если $p_k(x)\in C_{[a,b]}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\,\frac{h^k}{k!}<1, \qquad (4)$$

где $l_k\geqslant|p_k(x)|$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $x\in[a,\ b]$, $h=b-a$, то существует единственное решение задачи (2), (3). Им же было доказано, что если $f(x,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ непрерывна по всем своим аргументам и удовлетворяет условиям Липшица с константами l_k по переменным u_{n+1-k}, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то при выполнении неравенства (4) может существовать лишь одно решение задачи (1), (3).

Исследования по В. П. м. з. проводятся в следующих направлениях: улучшение оценки числа h с помощью изменения коэффициентов в (4); расширение класса функций $p_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, или $f(x,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$; обобщение условий (3). Основная проблема (1977) —

доказательство существования и единственности решения. Для задачи (2), (3) это свойство равносильно следующему: любое нетривиальное решение уравнения (2) имеет не более $n-1$ нулей на $[a, b]$ [неосцилляция (или неколеблемость) решений, или разъединенность нулей].

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «J. math. pures et appl.», 1929, cep. 9, t. 8, № 1, p. 125—44; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1, М., 1953. *Л. Н. Ешуков.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПРИЗНАК точечной сходимости ряда Фурье: если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ такова, что функция

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}\,dt, \quad x\neq 0,$$

$F(0)=0$, имеет ограниченную вариацию на нек-ром отрезке $[0, \delta]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к числу

$$F(+0)=\lim_{x\to+0} F(x).$$

В. П. п. сильнее *Дини признака*, *Дирихле признака*, *Жордана признака*. В. П. п. доказан Ш. Валле Пуссеном [1].

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Rend. circolo mat. Palermo», 1911, t. 31, p. 296—99; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 247—48. *Б. И. Голубов.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПРОИЗВОДНАЯ, обобщенная симметрическая производная; определена Ш. Валле Пуссеном [1]. Пусть r — четное и пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}=$$

$$=\beta_0+\frac{t^2\beta_2}{2}+\ldots+\frac{t^r\beta_r}{r!}+\gamma(t)\,t^r, \qquad (*)$$

где $\beta_0, \ldots, \beta_r$ — постоянные, $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$ и $\gamma(0)=0$. Тогда число $\beta_r=f_{(r)}(x_0)$ наз. производной Валле Пуссена порядка r, иначе — симметрической производной порядка r функции f в точке x_0.

Аналогично определяется В. П. п. нечетного порядка r с заменой равенства $(*)$ на

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)-f(x_0-t)\}=$$

$$=t\beta_1+\frac{t^3\beta_3}{3!}+\ldots+\frac{t^r\beta_r}{r!}+\gamma(t)t^r.$$

В. П. п. $f_{(2)}(x_0)$ совпадает со второй производной Римана, к-рую часто наз. производной Шварца. Если существует $f_{(r)}(x_0)$, то существует и $f_{(r-2)}(x_0)$, $r\geqslant 2$; при этом $f_{(r-1)}(x_0)$ может не существовать. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}(x_0)$, то $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. Для функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$, напр., $f_{(2k)}(0)=0$, $k=1, 2, \ldots$, и не существуют конечные $f_{(2k+1)}(0)$, $k=0,1, \ldots$ Если существует В. П. п. $f_{(r)}(x_0)$, то ряд $S^{(r)}(f)$, полученный из ряда Фурье функции f почленным дифференцированием r раз, суммируем в точке x_0 к $f_{(r)}(x_0)$ методом (C, α) при $\alpha>r$ [2] (см. *Чезаро методы суммирования*).

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Bull. Acad. de Belgique», 1908, t. 3, p. 193—254; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965, гл. 11. *А. А. Конюшков.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$V_n(f;\ x)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

(см. также *Валле Пуссена метод суммирования*). Последовательность $V_n(f;\ x)$ равномерно сходится к $f(x)$ для функций $f(x)$, непрерывных и 2π-периодических на $(-\infty;\ \infty)$ (см. [1]). Если

$$\left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$$

в точке x, то $V_n(f;\ x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Справедливо равенство [2]:

$$V_n(f;\ x)-f(x)=\frac{f''(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949, с. 263.
П. П. Коровкин.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА СУММА — выражение

$$V_{n,\,p}(f,\ x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} S_k(f,\ x), \qquad (*)$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $S_k(f, x)$, $k=0, 1, \ldots$ — частные суммы *Фурье ряда* функции $f(x)$ периода 2π. При $p=0$ В. П. с. $V_{n,\,0}(f,\ x)$ совпадают с частными суммами Фурье, а при $p=n$ — с *Фейера суммами*. Метод приближения периодич. функций полиномами вида (*) впервые рассмотрел Ш. Валле Пуссен (см. [1], [2]); он же установил неравенство

$$|f(x)-V_{n,\,p}(f,\ x)|\leqslant 2\frac{n+1}{p+1}E_{n-p}(f),$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где $E_m(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)\in C_{2\pi}$ при помощи тригонометрич. полиномов порядка не выше m. Если $p=[cn]$, $0<c<1$, $[a]$ — целая часть числа a, то полиномы $V_{n,[cn]}(f,\ x)$ осуществляют приближение, имеющее порядок $O(E_{[(1-c)n]}(f))$. К непрерывным функциям периода 2π, для к-рых при некоторых θ, $0\leqslant\theta<1$, имеет место оценка $E_{[\theta n]}(f)=O(E_n(f))$, полиномы $V_{n,[cn]}(f,\ x)$ дают наилучшее по порядку приближение. В. П. с. обладают рядом свойств, представляющих интерес для теории суммирования рядов Фурье. Напр., если $p=[cn]$, $0<c<1$, то $|V_{n,p}(f,\ x)|\leqslant K(c)\max|f(x)|$, а если $f(x)$ — тригонометрич. полином порядка не выше $n-p$, то $V_{n,p}(f,\ x)=f(x)$. В. П. с. можно записать в виде

$$V_{n,\,p}(f,\ x)=$$

$$=\frac{1}{(p+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\frac{\sin\dfrac{p+1}{2}t}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\right]dt,$$

где выражения

$$K_{n,\,p}(t)=\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t\sin\dfrac{p+1}{2}t}{2(p+1)\sin^2\dfrac{t}{2}},$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

наз. ядрами Валле Пуссена.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «C. r. Acad. sci.», 1918, t. 166, p. 799—802; [2] его же, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réele, P., 1919; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949, с. 211—13; [4] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959, с. 150—59; [5] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 6, с. 509—20; [6] Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 4, с. 545—48; [7] Щербина А. Д., «Матем. сб.», 1950, т. 27, в. 2, с. 157—70; [8] Тиман А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, 17, № 1, с. 99—134; [9] его же, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [10] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.,»

1959, 23, № 5, с. 737—70; [11] его же, там же, 1960, 24, № 3, с. 431—68; [12] Теляковский С. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 3, с. 426—29; [13] его же, там же, 1960, т. 131, № 2, с. 259—62.
А. В. Ефимов.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ТЕОРЕМА — 1) В. П. т. о распределении простых чисел: пусть $\pi(x)$ — число простых чисел, меньших x; тогда при $x \geqslant 1$ выполняется равенство

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-C\sqrt{\ln x}}\right),$$

где C — нек-рая положительная постоянная, а $\operatorname{li} x$ — *интегральный логарифм* x. Из В. П. т. следует справедливость гипотезы Гаусса о распределении простых чисел, т. е. при $x \to +\infty$

$$\operatorname{li} x \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Установлена Ш. Валле Пуссеном [1]. См. *Распределение простых чисел.*

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Ann. Soc. sci. Bruxelles», 1899, t. 20, p. 183—256; [2] его же, «Mem. couronnes Acad. sci. de Belgique», 1899—1900, t. 59, № 1; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с англ., М., 1967.
С. М. Воронин.

2) В. П. т. об альтернансе: если последовательность точек $\{x_i\}$, $i=0, 1, \ldots, n+1$ из замкнутого множества $Q \in [a, b]$ образует альтернанс, то для *наилучшего приближения* функции $f(x)$ полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k s_k(x),$$

где $\{s_k(x)\}_0^n$ — система Чебышева, верна оценка:

$$E_n(f) = \inf_{C_k} \sup_{x \in Q} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k s_k(x) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |f(x_i) - P_n(x_i)|.$$

Установлена Ш. Валле Пуссеном [1].

По *Чебышева теореме* равенство достигается тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ — полином наилучшего приближения. Имеются аналоги этой теоремы для произвольных банаховых пространств [2]. Применяется в численных методах построения полиномов наилучшего приближения.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, «Bull. Acad. de Belgique», 1910, t. 12, p. 808—45; [2] Гаркави А. Л., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132.
Ю. Н. Субботин.

ВАЛЛИСА ФОРМУЛА — формула, выражающая число $\pi/2$ в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdots . \qquad (*)$$

Существуют другие варианты этой формулы, напр.

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m \to \infty} \frac{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}}.$$

Формула (*) впервые встречается у Дж. Валлиса [1] в его вычислениях площади круга; В. ф.— один из первых примеров бесконечного произведения.

Лит.: [1] Wallis J., ... Arithmetica infinitorum, [Oxf.], 1655.
Т. Ю. Попова.

ВАЛЬДА ТОЖДЕСТВО — тождество в последовательном анализе, утверждающее, что математич. ожидание суммы $S_\tau = X_1 + \ldots + X_\tau$ случайного числа τ независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ равно произведению математич. ожиданий $\mathsf{E}X_1$ и $\mathsf{E}\tau$:

$$\mathsf{E}(X_1 + \ldots + X_\tau) = \mathsf{E}X_1 \cdot \mathsf{E}\tau.$$

Для справедливости В. т. достаточно, чтобы существовали математич. ожидания $\mathsf{E}|X_1|$ и $\mathsf{E}\tau$ и чтобы случайная величина τ была марковским моментом (т. е. чтобы при каждом $n=1, 2, \ldots$ событие $\{\tau = n\}$ определялось по значениям случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ или, что то же, событие $\{\tau = n\}$ принадлежало σ-алгебре,

порожденной случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$). В. т. является частным случаем основной теоремы последовательного анализа, утверждающей, что

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda s_\tau}(\varphi(\lambda))^{-\tau}\right]=1$$

для всех комплексных λ, для к-рых $\varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{\lambda X_1}$ существует и $|\varphi(\lambda)|\geqslant 1$. Установлено А. Вальдом (A. Wald, см. [1]).

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., т. 1, 1967, гл. 14. *А. Н. Ширяев.*

ВАН ДЕР ВАРДЕНА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* однородности двух выборок $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Z_1, \ldots, Z_m$, основанный на *ранговой статистике*

$$X=\sum_{i=1}^{m}\Psi\left(\frac{s(r_i)}{m+n+1}\right),$$

где r_i — ранги (порядковые номера) случайных величин Z_i в общем вариационном ряду из Y_j и Z_i, функция $s(r)$ определяется заранее выбранной подстановкой

$$\begin{pmatrix}1 & \ldots & (m+n)\\ s(1) & \ldots & s(m+n)\end{pmatrix},$$

$\Psi(p)$ — обратная функция нормального распределения с параметрами (0, 1). Выбор подстановки определяется тем, что для заданной альтернативной гипотезы мощность критерия должна быть наибольшей. При $m+n\to\infty$, независимо от поведения m и n по отдельности, величина Y распределена асимптотически нормально. В предположении, что Y и Z независимы и распределены нормально с одинаковыми дисперсиями, В. д. В. к. для альтернативы $\mathsf{P}(Y<T)<\mathsf{P}(Z<T)$ или $\mathsf{P}(Y<T)>\mathsf{P}(Z<T)$ (в этом случае $s(r)\equiv r$) имеет асимптотически ту же мощность, что и *Стьюдента критерий*. Введен Б. Л. Ван дер Варденом [1].

Лит.: [1] Van der Waerden B. L., «Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.», A., 1955, v. 55, p. 453; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *А. В. Прохоров.*

ВАН ДЕР ПОЛЯ УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0,\quad \mu-\text{const}>0,\quad \dot{x}(t)\equiv\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Является важным частным случаем *Льенара уравнения*. В. д. П. у. описывает свободные *автоколебания* одной из простейших нелинейных колебательных систем (осциллятора Ван дер Поля). В частности, уравнение (1) служит математич. моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубич. характеристики лампы. Характер решений уравнения (1) был впервые подробно изучен Б. Ван дер Полем (см. [1]).

Уравнение (1) эквивалентно системе двух уравнений относительно фазовых переменных x, v:

$$\dot{x}=v,\quad \dot{v}=-x+\mu(1-x^2)v. \tag{2}$$

Иногда вместо x удобнее ввести переменную $z(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau$; тогда уравнение (1) приведется к уравнению

$$\ddot{z}-\mu\left(\dot{z}-\frac{\dot{z}^3}{3}\right)+z=0,$$

являющемуся частным случаем *Рэлея уравнения*. Если вместе с переменной x рассмотреть переменную $y=-x+\frac{x^3}{3}+\frac{\dot{x}}{\mu}$, ввести новое время $\tau=t/\mu$ и положить $\varepsilon=\mu^{-2}$, то вместо уравнения (1) получим систему

$$\varepsilon x'=y-x+\frac{x^3}{3},\quad y'=-x,\quad '=\frac{d}{d\tau}. \tag{3}$$

При любом $\mu>0$ в фазовой плоскости системы (2) существует единственный устойчивый предельный цикл,

к к-рому при $t \to \infty$ приближаются все остальные траектории (кроме положения равновесия в начале координат); этот предельный цикл адекватен автоколебаниям осциллятора Ван дер Поля (см. [2] — [4]).

При малых μ автоколебания осциллятора (1) близки к простым гармоническим колебаниям (см. *Нелинейные колебания*) с периодом 2π и с определенной амплитудой. Для вычисления колебательного процесса с большей точностью применяются асимптотич. методы. При возрастании μ автоколебания осциллятора (1) все более отклоняются от гармонич. колебаний. При больших μ уравнение (1) описывает *релаксационные колебания* с периодом (в первом приближении) $1{,}614\,\mu$. Известны более точные асимптотич. разложения величин, характеризующих релаксационные колебания (см. [5]); изучение этих колебаний равносильно исследованию решений системы (3) с малым параметром ε при производной (см. [6]).

Уравнение

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - F_0 + E\sin\omega t$$

описывает поведение осциллятора Ван дер Поля под воздействием внешнего периодич. возмущения. Здесь наиболее важны изучение явления захватывания частоты (существования периодич. колебаний) и исследование биений (возможности почти периодич. колебаний; см. [2], [4]).

Лит.: [1] Van der Pol B., «Phil. Mag.», 1922, ser. 6, v. 43, p. 700—19; 1926, ser. 7, v. 2, p. 978—92; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [5] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механика», 1947, т. 11, с. 313—28; [6] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975.

Н. Х. Розов.

ВАНДЕРМОНДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель порядка n вида:

$$B(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы нек-рого коммутативного кольца. При любом $n \geqslant 2$

$$B(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Для колец без делителей нуля имеет место основное свойство В. о.: $B(a_1, \ldots, a_n) = 0$ тогда и только тогда, когда среди элементов $a_1, \ldots, a_n$ не все элементы различны. В. о. был рассмотрен впервые А. Т. Вандермондом для случая $n = 3$ (см. [1]), затем О. Коши (1815, см. [2]).

Лит.: [1] Vandermonde A. T., в кн.: Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1771, P., 1774, p. 365—416; année 1772, pt 2, P., 1776, p. 516—32; [2] Cauchy A., Oeuvres, sér. 2, t. 1, P., 1905, p. 91—169.

В. Н. Ремесленников.

ВАРДА ТЕОРЕМА о дифференцировании аддитивной функции сегмента: пусть F — аддитивная функция сегмента, а $\underline{F}(x)(\overline{F}(x))$ — нижняя (верхняя) грань пределов отношений $F(G_n)$ к мере Лебега G_n, где $\{G_n\}$ — регулярная последовательность сегментов, стягивающихся к точке x. Тогда равенство $\overline{F}(x) = \underline{F}(x)$ выполняется почти везде (в смысле меры Лебега) на множестве $\{x : \underline{F}(x) > -\infty$ или $\overline{F}(x) < \infty\}$. Регулярности последовательности сегментов G_n означает, что существует число $\alpha > 0$ и последовательность шаров S_n', S_n'' таких, что для всех n

$$\operatorname{diam} S_n' > \alpha \operatorname{diam} S_n''$$

$$S_n' \subset G_n \subset S_n''.$$

Если в приведенной выше формулировке отбросить условие регулярности, то получится вторая В. т. Эти теоремы обобщают *Данжуа теорему* о производных числах функции одной переменной. В. т. установлены А. Вардом [1].

Лит.: [1] Ward A. J., «Fundam. math.», 1936, t. 28, p. 167—182; 1937, t. 28, p. 265—79. *Л. Д. Иванов.*

ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — безразмерная мера рассеяния распределения случайной величины. Существует несколько способов определения В. к. Наиболее часто в практике В. к. определяется по формуле

$$V = \frac{\sigma}{\mu},$$

где σ^2 — дисперсия, μ — математич. ожидание (при этом μ должно быть положительным). Иногда это выражение приводится к процентам, т. е. $V = 100\ \sigma/\mu\%$. Такое определение В. к. было предложено К. Пирсоном (K. Pearson, 1895). *Т. С. Лельчук.*

ВАРИАЦИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕОРЕМА в статистической механике — утверждение об изменении (вариации) среднего значения динамич. величины по *Гиббса статистическому ансамблю* вследствие бесконечно малого изменения гамильтониана. Изменение среднего зависит, вообще говоря, от способа «включения» изменения гамильтониана и от начальных условий. Пусть в начальный момент времени $t \to -\infty$ система многих взаимодействующих частиц (квантовая или классическая), описываемая не зависящим от времени явно гамильтонианом H, находилась в состоянии термодинамич. равновесия. При адиабатич. включении бесконечно малого зависящего от времени возмущения гамильтониана

$$H \to H + \delta V(t),$$

где

$$\delta V(t) = \sum_{(E)} e^{\varepsilon t - iEt}\, \delta V_E, \quad \varepsilon > 0,\ \varepsilon \to +0,$$

равновесное гиббсовское среднее $\langle A \rangle$ не зависящей от времени явно динамич. величины A изменяется на величину (в линейном приближении по возмущению)

$$\delta \langle A(t) \rangle = -2\pi i \sum_{(E)} e^{\varepsilon t - iEt} \ll A \mid \delta V_E \gg_E^{(\mathrm{ret})},$$

где $\ll A \mid \delta V_E \gg_E^{(\mathrm{ret})}$ — фурье-образ запаздывающей коммутаторной функции Грина.

Основное применение теорема находит в теории неравновесных и необратимых процессов (где одна из формулировок этой теоремы известна также под назв. флюктуационно-диссипационной теоремы), а также при выводе цепочек и систем уравнений для функций Грина из цепочек и систем уравнений для *корреляционных функций*.

Лит.: [1] Kubo R., «J. Phys. Soc. Japan», 1957, t. 12, p. 570; [2] Боголюбов Н. Н. [мл.], Садовников Б. И., «Ж. экспер. и теор. физики», 1962, № 43, с. 677; [3] их же, Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [4] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975. *В. Н. Плечко.*

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — 1) В. з. с закрепленными концами — задача вариационного исчисления, в к-рой концы кривой, доставляющей экстремум, зафиксированы. Напр., в простейшей задаче вариационного исчисления $\inf \int_{(t_0,\ x_0)}^{(t_1,\ x_1)} F(t,\ x,\ \dot{x})\, dt$ с закрепленными концами заданы начальная и конечная точки $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, через к-рые должна проходить искомая кривая $x(t)$. Учитывая, что общее решение *Эйлера уравнения* простейшей задачи зависит от двух произвольных постоянных $x = x(t, c_1, c_2)$, кривая, доставляющая экстремум, ищется среди решений соответствующей краевой задачи. При этом может оказаться, что краевая задача имеет единственное решение, неединственное или не имеет решения.

2) В. з. со свободными (подвижными) концами — задача вариационного исчисления, в к-рой концы кривой, доставляющей экстремум, могут перемещаться вдоль заданных многообразий. Напр., если в *Больца задаче* число граничных условий, к-рым должна удовлетворять искомая кривая $x=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ строго меньше $2n+2$:

$$\psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \ \mu = 1, \ \ldots, \ p < 2n-2, \ (*)$$

то концы кривой могут смещаться вдоль $(2n+2-p)$-мерного многообразия (*). В случае, когда граничные условия (*) заданы в виде

$$\psi_\rho(t_1, x(t_1)) = 0, \ \psi_\sigma(t_2, x(t_2)) = 0,$$

$$\rho = 1, \ \ldots, r, \ \sigma = 1, \ldots, q,$$

и $n+1-r>0$ или $n+1-q>0$, концы кривой $x(t)$ могут смещаться по соответствующим многообразиям размерностей $n+1-r$ и $n+1-q$. На концах кривой, доставляющей экстремум, должны выполняться *трансверсальности условия*, к-рые в совокупности с условиями (*) позволяют получить замкнутую систему соотношения, приводящую к нек-рой краевой задаче. Из решения этой краевой задачи определяются произвольные постоянные, входящие в общий интеграл уравнения Эйлера.

Качественным отличием В. з. от задачи на экстремум функции многих переменных является то, что объектом поиска в В. з. является не точка в конечномерном пространстве, а функция (или точка в бесконечномерном пространстве). *И. Б. Вапнярский.*

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, посвященный исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при разного рода ограничениях (фазовых, дифференциальных, интегральных и т. п.), накладываемых на эти функции. Этими рамками обозначен класс задач, наз. еще задачами классического В. и. Иногда в термин «В. и.» вкладывают более широкий смысл, понимая под ним тот раздел теории экстремальных задач, где исследование экстремумов проводят «методом вариаций» (см. *Вариация*), т. е. методом малого возмущения аргументов и функционалов; задачи, относящиеся к В. и. в этом широком смысле, противопоставляются дискретным задачам оптимизации.

Весьма широкий круг задач классич. В. и. описывает следующая схема. Требуется минимизировать функционал

$$J(x) = \int_T f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \qquad (1)$$

где $T \subset \mathbb{R}^m$, $t=(t_1, \ldots, t_m)$, $x=(x^1, \ldots, x^n)$,

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}\right), \quad f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R},$$

при ограничениях типа равенств:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \\ \varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^s \end{array}\right\} \qquad (2)$$

и некоторых краевых условиях: $x|_{\partial T} \in \Gamma$. Задачи такого типа наз. *Лагранжа задачами*. Кроме задач Лагранжа, рассматривают еще *Майера задачи*, *Больца задачи* и ряд других.

Наиболее элементарной среди задач классич. В. и. является простейшая задача В. и., когда в (1) t и x одномерны, ограничения (2) отсутствуют, а граничные условия закрепленные:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \longrightarrow \inf; \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1. \ (3)$$

К этому типу относится задача о *брахистохроне* или о кривой наикратчайшего спуска. С задачей о брахи-

стохроне обычно связывают начало истории классич. В. и.

Теоретич. основы классич. В. и. были заложены Л. Эйлером (L. Euler) и Ж. Лагранжем (J. Lagrange) в 18 в. Ими же были вскрыты важнейшие связи этой дисциплины с механикой и физикой. На первом же этапе развития В. и. усилиями в основном Г. Лейбница (G. Leibniz), Я. и И. Бернулли (Jacob et Johann Bernoulli), Л. Эйлера и Ж. Лагранжа получили решение многие конкретные задачи (о геодезических, о поверхности вращения, ряд изопериметрич. задач и т. п.).

В В. и. изучаются алгоритмич. методы отыскания экстремумов, методы получения необходимых и достаточных условий, условия, гарантирующие существование экстремума, качественные вопросы и т. п. Среди алгоритмич. методов нахождения экстремумов важнейшее место занимают прямые методы.

Прямые методы. Л. Эйлер (1768) создал метод приближенного (численного) решения задач В. и., к-рый получил назв. метода ломаных Эйлера. С этого момента начались исследования путей численного решения экстремальных задач. Метод Эйлера был первым представителем большого класса методов, наз. прямыми методами В. и. Эти методы основаны на редукции задачи отыскания экстремума функционала к задаче математич. анализа об отыскании экстремума функции многих переменных.

Метод ломаных Эйлера в применении к задаче (3) состоит в следующем. Интервал $[t_0, t_1]$ разбивается на N равных частей точками $\tau_0 \quad t_0$, $\tau_1 = t_0 + \tau$, . . ., $\tau_N = t_0 + N\tau = t_1$. Значения функции в этих точках обозначены $x_0, x_1, \ldots, x_N$ соответственно. Каждая совокупность точек (τ_0, x_0), (τ_1, x_1), . . ., (τ_N, x_N) определяет нек-рую ломаную. Ставится задача: среди всех возможных ломаных, соединяющих точки (τ_0, x_0) и (τ_N, x_N), найти ту, к-рая доставляет функционалу (1) экстремальное значение. Значение производной $\dot{x}$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будет: $\dot{x}_i = (x_{i+1} - x_i)/\tau$. Функционал $J(x)$ превращается в функцию конечного числа переменных x_i:

$$J(x) \sim J(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

и задача (3) сводится к задаче отыскания экстремума функции $J(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Для того чтобы ломаная Эйлера, реализующая экстремум этой функции, аппроксимировала решение задачи (3) с высокой точностью, число N должно быть, вообще говоря, достаточно велико. При этом объем вычислений для отыскания экстремума функции (3) столь велик, что проведение вычислений «вручную» весьма сложно. Поэтому долгое время прямые методы были в стороне от основных исследований по В. и.

В 20 в. интерес к прямым методам значительно возрос. Прежде всего были предложены новые способы редукции к задаче об экстремуме функции конечного числа переменных. Эти идеи могут быть пояснены на примере минимизации функционала (3) при условии

$$x(t_0) - x(t_1) = 0.$$

Пусть разыскивается решение задачи в форме

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(t),$$

где $\varphi_n(t)$ — некоторая система функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(t_0) - \varphi_i(t_1) \quad 0$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда функционал $J(x)$ становится функцией коэффициентов $J(x) \sim J(a_1, \ldots, a_n)$, и задача сводится к отысканию экстремума этой функции N переменных. При нек-рых условиях, наложенных на систему функций $\{\varphi_n\}$, решение задачи стремится при $N \to \infty$ к решению задачи (3) (см. *Галеркина метод*).

Метод вариаций. Второе направление исследований— изучение необходимых и достаточных условий, к-рым должна удовлетворять функция $x(t)$, реализующая

экстремум функционала $J(x)$. Основным методом получения необходимых условий является метод вариаций. Пусть тем или иным способом построена нек-рая функция $x(t)$. Как проверить, является ли эта функция решением вариационной задачи (3)? Первый вариант ответа на этот вопрос был дан Л. Эйлером (1744). В приведенной ниже формулировке ответа употребляется введенное Ж. Лагранжем (1762) понятие вариации (отсюда назв. «В. и.») δJ функционала J (см. *Вариация*, *Вариация функционала*).

Для простейшей задачи В. и.:

$$\delta J(x, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{x(t)} h(t)\, dt,$$

где $h(t)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Условие $\delta J = 0$ является необходимым, для того чтобы функция $x(t)$ реализовала экстремум функционала (3). Отсюда и из выражения для вариации δJ следует: для того чтобы функция $x(t)$ доставляла экстремум функционалу (3), необходимо, чтобы она удовлетворяла следующему дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно функции $x(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение наз. *Эйлера уравнением*, а интегральные кривые этого семейства — э к с т р е м а л я м и рассматриваемой вариационной задачи. Функция $x(t)$, на к-рой $J(x)$ достигает экстремума, необходимо должна быть решением краевой задачи $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ для уравнения (4). Таким образом, возникает второй путь решения экстремальной задачи: надо решить краевую задачу для уравнения Эйлера (в регулярных случаях при этом получится лишь конечное число решений), и далее надо каждую из полученных экстремалей подвергнуть дополнительному исследованию, чтобы определить, имеется ли среди них кривая, дающая решения задачи. Однако указанный метод обладает тем существенным недостатком, что не имеется универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Весьма часто встречаются *вариационные задачи* с п о д в и ж н ы м и к о н ц а м и. Напр., в простейшей задаче точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ могут перемещаться вдоль заданных кривых. Для задач с подвижными концами из условия $\delta J = 0$ выводятся дополнительные условия, к-рым должны удовлетворять подвижные концы, — так наз. *трансверсальности условия*, к-рые в совокупности с граничными условиями приводят к замкнутой системе условий для краевой задачи.

Основные результаты, относящиеся к простейшей задаче В. и., переносятся на общий случай функционалов вида

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^sx}{dt^s} \right) dt,$$

где $x(t)$ — вектор-функция произвольной размерности (см. [3]).

Задача Лагранжа. Л. Эйлер и Ж. Лагранж изучали и задачи на условный экстремум. Простейшим классом задач подобного рода является класс так наз. *изопериметрических задач*. Ж. Лагранж выделил (в случае, когда t одномерно) класс задач (1), (2) и получил для них аналог уравнения Эйлера с привлечением так наз. множителей Лагранжа. Такой аналог получается и для самого общего случая задачи (1), (2). Особое значение задача Лагранжа приобрела в середине 20 в. в связи с созданием *оптимального управления математической теории*. Далее основные результаты, касающиеся задачи Лагранжа, даются на языке этой теории, возникшем после работ Л. С. Понтрягина и его учеников.

Рассмотрим тот случай, когда в задаче (1), (2) t одномерно и система $\varphi(t, x, \dot{x})$ может быть частично разрешена относительно последних переменных. Тогда получается задача о минимизации функционала

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\, dt \tag{5}$$

при дифференциальной связи

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{6}$$

и граничных условиях:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in E. \tag{7}$$

В (5) — (7) $x=(x^1, \ldots, x^n)$ — вектор-функция, наз. фазовым вектором, $u=(u^1, \ldots, u^m)$ — вектор-функция, наз. управлением, $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to R$, $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^{2n}$.

Примером граничных условий типа (7) могут служить закрепленные условия как в задаче (3). В задачах оптимального управления помимо условий (6) и (7) накладывают еще и «неклассические» условия, напр.

$$u(t)\in U\subset\mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Слабый и сильный экстремумы. В В. и. обычно различают две топологии — сильную и слабую, и в соответствии с этим оперируют понятиями сильного и слабого экстремумов. Напр., в применении к задаче (3) говорят, что кривая $x_0(t)$ реализует с л а б ы й м и н и м у м, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям: $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]} |x(t)-x_0(t)| + \max_{t\in[t_0, t_1]} |\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)| < \varepsilon.$$

Иными словами, здесь фиксируется близость не только фазовых переменных, но и скоростей (управлений). Говорят, что функция доставляет с и л ь н ы й э к с т р е м у м, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех допустимых абсолютно непрерывных функций $x(t)$ (для к-рых $J(x)$ существует), удовлетворяющих условиям $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]} |x(t)-x_0(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь фиксируется лишь близость фазовых переменных.

Если $x_0(t)$ реализует сильный экстремум, то эта функция реализует тем более и слабый экстремум, поэтому достаточные условия сильного экстремума являются достаточными условиями и слабого. С другой стороны, из отсутствия слабого экстремума следует отсутствие сильного экстремума, т. е. необходимые условия слабого экстремума являются необходимыми условиями сильного экстремума.

Необходимые и достаточные условия экстремума. Уравнение Эйлера, о к-ром рассказывалось выше, представляет собой необходимое условие слабого экстремума. В конце 50-х гг. 20 в. Л. С. Понтрягиным был выдвинут принцип максимума для задач (5) — (8), являющийся необходимым условием сильного экстремума. Принцип максимума гласит: если пара (x, u) доставляет сильный экстремум в задаче (5) — (8), то найдутся вектор-функция ψ и число λ_0 такие, что для функции Гамильтона $H(t, x, \psi, u, \lambda_0)=(\psi, f)-\lambda_0 F$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\psi}, \quad -\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial x}, \\ &\max_{u\in U} H(t, x(t), \psi(t), u, \lambda_0) = \\ &= H(t, x(t), \psi(t), u(t), \lambda_0). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если приложить принцип максимума Понтрягина к задаче (3), то получится, что для того чтобы кривая

$x(t)$ доставляла сильный минимум в задаче (3), необходимо, чтобы она была экстремалью (т. е. удовлетворяла уравнению Эйлера (4)) и, кроме того, чтобы выполнялось необходимое условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), \xi) \geqslant 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \ \xi \in R, \qquad (10)$$

где

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, \xi) = L(t, x, \xi) - L(t, x, \dot{x}) - (\xi - \dot{x}) L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$$

— так наз. $\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса.

Помимо условий типа (4) и (10), носящих л о к а л ь н ы й характер (т. е. проверяемых в каждой точке экстремали), имеется необходимое условие г л о б а л ь н о г о характера, связанное с поведением множества экстремалей, близких к заданной экстремали (см. *Якоби условие*). Для задачи (3) условие Якоби состоит в следующем. Для того чтобы экстремаль $x(t)$ доставляла минимум в задаче (3), необходимо, чтобы решение уравнения (*Якоби уравнения*)

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\Big|_{x(t)} \frac{d}{dt} h(t)\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x \, \partial \dot{x}}\right)\Big|_{x(t)} h(t) = 0 \qquad (11)$$

с краевыми условиями $h(t_0)=0$, $\dot{h}(t_0)\neq 0$ не имело бы нулей в интервале (t_0, t_1). Нули решения $h(t)$ уравнения (11) наз. т о ч к а м и, с о п р я ж е н н ы м и с т о ч к о й t_0. Таким образом, условие Якоби заключается в том, что интервал (t_0, t_1) не должен содержать точек, сопряженных с t_0.

Необходимые условия слабого минимума $\delta J = 0$, $\delta^2 J \geqslant 0$ являются точными аналогами условий минимума $f'(x)=0$, $f''(x)\geqslant 0$ для функций одного переменного. Условие Якоби при выполнении *Лежандра условия* (усиленного) является необходимым условием неотрицательности второй вариации. Это приводит к следующему результату: для того чтобы функция $x(t)$ реализовывала слабый минимум функционала (3), необходимо, чтобы: а) функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера, б) выполнялось условие Лежандра $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\Big|_{x(t)} > 0$, в) интервал (t_0, t_1) не содержал точек, сопряженных с точкой t_0 (при условии, что выполняется усиленное условие Лежандра).

Достаточные условия слабого минимума таковы: функция $x(t)$ должна быть экстремалью, на ней выполняется усиленное условие Лежандра и полуинтервал $(t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных с точкой t_0. Для того чтобы кривая $x(t)$ доставляла сильный минимум, достаточно, чтобы, помимо сформулированных достаточных условий слабого минимума, выполнялось *Вейерштрасса условие* достаточное.

Задачи оптимального управления. Одним из основных направлений развития В. и. являются неклассич. задачи В. и., подобные сформулированной выше задаче (5) — (8). Задачи, укладывающиеся в эту схему, имеют огромное прикладное значение. Пусть, напр., уравнение (6) описывает движение нек-рого динамич. объекта, напр. космич. корабля. Управление — вектор u — тяга его двигателя. Начальное положение корабля — это нек-рая орбита, конечное положение — это орбита другого радиуса. Функционал J описывает расход горючего на выполнение маневра. Тогда задачу (5) — (7) можно применительно к данной ситуации сформулировать следующим образом: определить закон изменения тяги двигателя космич. аппарата, совершающего переход с одной орбиты на другую за фиксированное время так, чтобы расход топлива был минимальным. При этом необходимо учитывать ограничения на управления: тяга двигателя не может превосходить нек-рой величины и угол поворота тяги также ограничен. Таким образом, в данном примере получается, что компо

ненты u^i, $i=1, 2, 3$, вектора тяги подчинены ограничениям

$$a_i^- \leqslant u^i \leqslant a_i^+,$$

где a_i^- и a_i^+ — нек-рые заданные числа.

Имеется большое число задач, к-рые сводятся к задаче Лагранжа, но при дополнительном ограничении типа (8). Такие задачи получили назв. задач о п т и м а л ь н о г о у п р а в л е н и я. Для теории оптимального управления должен был быть разработан специальный аппарат. Им и явился принцип максимума Понтрягина.

Возможен и другой подход к тем же проблемам теории оптимального управления. Пусть $S(t, x)$ — значение функционала (5) вдоль оптимального решения от точки (t_0, x_0) до точки (t, x). Тогда для того чтобы функция $u(t)$ была оптимальным управлением, необходимо (а в нек-рых случаях и достаточно), чтобы удовлетворялось следующее дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\left(\frac{\partial S}{\partial x},\ (f(t, x(t), u, \psi(t))-F(t, x(t), u)\right),$$

наз. у р а в н е н и е м Б е л л м а н а (см. *Динамическое программирование*). Для задач классич. В. и. S-функция $S(t, x)$ (или функция действия) должна удовлетворять у р а в н е н и ю Г а м и л ь т о н а—Я к о б и:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)=0,$$

где H — *Гамильтона функция*. Для задачи (3) функция есть *Лежандра преобразование* по $\dot{x}$ интеграта $L(t, x, \dot{x})$. Теория Гамильтона — Якоби является мощным инструментом исследования многих важнейших задач вариационного типа, связанных с классич. механикой.

Связь В. и. с задачами теории уравнений с частными производными была обнаружена уже в 19 в. П. Дирихле (P. Dirichlet) показал, что решение краевых задач для уравнения Лапласа эквивалентно решению нек-рой вариационной задачи. Пусть, напр., имеется нек-рое линейное операторное уравнение

$$Ax=f, \tag{12}$$

где $x(\xi, \eta)$ — нек-рая функция двух независимых переменных, обращающаяся в нуль на замкнутой кривой Г. В предположениях, естественных для нек-рого класса задач физики, задача отыскания решения уравнения (8) эквивалентна отысканию минимума функционала

$$J(x)=\int\int_\Omega A_{xx}\,d\xi\,d\eta-2\int\int_\Omega fx\,d\xi\,d\eta, \tag{13}$$

где Ω — область, ограниченная кривой Г. Уравнение (12) в этом случае является уравнением Эйлера для функционала (13).

Редукция задачи (12) к (13) возможна, напр., если A — самосопряженный и положительно определенный оператор. Связь между проблемами для уравнений с частными производными и вариационными задачами позволяет, в частности, устанавливать справедливость различных теорем существования и единственности; она сыграла важную роль в кристаллизации понятия обобщенного решения. Эта редукция очень важна и для вычислительной математики, поскольку она позволяет использовать прямые методы В. и. для решения краевых задач теории уравнений с частными производными.

Качественные методы исследования задач В. и. дают возможность ответить на вопросы о существовании решений, об их числе, о качественных особенностях экстремалей и их семейств. В 20 в. была установлена зависимость числа решений вариационных задач от свойств пространства, на к-ром определен функционал. Так, напр., если функционал J задан на всевозможных гладких кривых тора (на торе), соединяющих две фиксированные точки, или если функционал J задан на

всевозможных замкнутых кривых поверхности, топологически эквивалентной тору, то в обоих случаях число критич. элементов — линий, на к-рых вариация $\delta J=0$, бесконечно. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман (7) доказали, что на каждой поверхности, топологически эквивалентной сфере, существует по крайней мере три самопересекающиеся замкнутые геодезические различной длины; если же длины хотя бы двух из этих геодезических совпадают, то существует бесконечное множество замкнутых геодезических равной длины. Проблемы подобного рода указывают на тесную связь В. и. с качественной теорией дифференциальных уравнений и топологией. При исследовании качественных методов сыграло большую роль развитие функционального анализа. См. также *Вариационное исчисление в целом*.

Связь В. и. с теорией конусов. Круг вопросов, к-рыми занимается В. и., непрерывно расширяется. В частности, все большее и большее внимание уделяется изучению функционалов $J(x)$ весьма общего вида, задаваемых на множествах G_k элементов нормированных пространств. Для задач такого рода уже трудно ввести понятие вариации. Потребовалось привлечение нового аппарата исследования. Таким аппаратом оказалась теория конусов в банаховых пространствах. Напр., пусть поставлена задача о минимуме $f(x)$, где x — элемент замкнутого множества G. Конусом $\Gamma_G(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное число λ_e таким образом, чтобы вектор $x=x_0+\lambda e\in G$ для любого $\lambda\in(0,\ \lambda_e^*)$. Конусом $\Gamma_f(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное λ_e^* таким образом, чтобы

$$f(x_0+\lambda e)\geqslant f(x_0)$$

для любого $\lambda\in[0,\ \lambda_e^*]$. Для того чтобы x_0 реализовал минимум функции $f(x)$, необходимо, чтобы пересечение конусов $\Gamma_G(x_0)$ и $\Gamma_f(x_0)$ было пустым. Это условие столь же элементарно, как и условие обращения в нуль вариации, однако из него вытекают не только те результаты, к-рые можно получить классич. методами В. и.; оно позволяет подойти к проблемам гораздо более сложным, напр. к исследованию экстремальных значений недифференцируемых функционалов (см. [6]).

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [4] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957; [5] Понтрягин Л. С. (и др.), Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [6] Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [7] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

Н. Н. Моисеев.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный методам отыскания экстремальных значений функционалов.

Численные методы В. и. принято разделять на два больших класса: непрямые и прямые методы. Непрямые методы основаны на использовании необходимых условий оптимальности (см. *Вариационное исчисление, Эйлера уравнение, Вейерштрасса условия, Трансверсальности условие, Понтрягина принцип максимума*), с помощью к-рых исходная вариационная задача сводится к краевой задаче. Поэтому вычислительные достоинства и недостатки непрямых методов полностью определяются свойствами соответствующей краевой задачи. Прямые методы ориентированы на непосредственное отыскание экстремума функционала. Используемые при этом методы оптимизации являются развитием идей математич. программирования.

Разделение численных методов В. и. на прямые и непрямые весьма условно. Нек-рые алгоритмы используют элементы обоих подходов. Кроме того, существуют методы, к-рые непосредственно не относятся к двум выделенным классам. Например, методы, основанные на достаточных условиях оптимальности, образуют самостоятельную группу.

Первые численные методы В. и. появились в работах Л. Эйлера (L. Euler). Однако наибольшее развитие они получили с 50-х гг. 20 в. в результате распространения вычислительной техники и открывшейся в связи с этим возможностью решения сложных технич. задач. При этом разработка численных методов В. и. шла в основном применительно к задачам теории оптимального управления наиболее важного для практич. приложений раздела В. и. (см. *Оптимального управления математическая теория*).

Непрямые методы. С появлением принципа максимума Понтрягина (1956) сведение вариационных задач к краевым стало особенно популярным.

Пусть в задаче оптимального управления требуется найти траекторию $x(t)$ и управление $u(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u)\, dt \tag{1}$$

при дифференциальных связях:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{2}$$

граничных условиях:

$$x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

$$x(T) = x_T \tag{4}$$

и ограничениях на управление:

$$u \in U, \tag{5}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — векторы фазовых координат и управлений, $f = (f^1, \ldots, f^n)$, U — замкнутое множество m-мерного пространства, t — независимое переменное (время).

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $u(t)$ должно при каждом t доставлять абсолютный максимум *Гамильтона функции*

$$H(\tilde{u}) = \max_{u \in U} H(u) =$$

$$= \max_{u \in U} \left[\sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right], \tag{6}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ определяется системой уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Из условия (6) находится управление $u(t, x, \psi)$ и подставляется в (2) и (7). В результате получается замкнутая краевая задача для системы $2n$ дифференциальных уравнений (2) и (7) с $2n$ граничными условиями (3) и (4).

Наиболее распространенной схемой численного решения этой краевой задачи является схема, использующая метод Ньютона с дроблением шага (см. [3]). При этом вводится вектор невязки

$$\varphi_i = x^i(T) - x_T^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где значение $x^i(T)$ получается из решения задачи Коши для системы (2), (7) с начальными условиями (3) и $\psi_j(t_0) = \psi_{j0}$, $j = 1, \ldots, n$. Невязки (8) рассматриваются как функции от неизвестных $\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0}$, к-рые определяются из системы уравнений

$$\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Решение системы (9) проводится *Ньютона методом*; используемые при этом частные производные

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_{j0}}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

определяются численно по формуле

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_{j0}} = \frac{\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \ldots, \psi_{n0}) - \varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0})}{\Delta\psi_{j0}},$$

где значения $\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \ldots, \psi_{n0})$ получаются путем решения задачи Коши для системы (2), (7) с начальными условиями (3) и условиями

$$\psi_l(t_0) = \psi_{l0}, \quad \psi_j(t_0) = \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \quad l \neq j,$$

$\Delta\psi_{j0}$ — малое приращение величины ψ_{j0}.

Для определения частных производных известен более точный, но громоздкий метод (см. [4]), в к-ром используется интегрирование системы $2n$ уравнений в вариациях для системы (2), (7).

Трудности в использовании метода Ньютона связаны, во-первых, с проблемой выбора удачного начального приближения для ψ_{j0} и, во-вторых, с неустойчивостью задачи Коши, к-рая особенно сильно проявляется на больших интервалах $[t_0, t_1]$. Для преодоления первой трудности не существует универсального подхода. Для преодоления неустойчивости задачи Коши имеется ряд приемов (*Коши задача*; численные методы).

В тех случаях, когда граничные условия и функционал заданы в более общем виде, чем в (3), (4) и (1) [напр., *Больца задача* с подвижными концами, *вариационная задача* со свободными (подвижными) концами], к необходимым условиям оптимальности (6), (7) добавляются *трансверсальности условия*. После исключения входящих в эти условия произвольных постоянных получаются замкнутая краевая задача и отвечающая ей система уравнений типа (9).

Решение системы (9) может отыскиваться любым другим методом, применяемым для решения нелинейных систем.

Специфич. методы разработаны для решения краевых задач частного вида. Так, линейные краевые задачи решаются методом переноса граничных условий (*прогонки метод*). Этот метод также используется в качестве составного элемента для итеративного решения нелинейных краевых задач (см. [1]).

Эффективность и относительная простота реализации непрямых методов на ЭВМ сделали их весьма распространенным средством для решения задач вариационного исчисления. Однако эти методы не стали универсальными: для некоторых важных классов задач В. и., например, содержащих фазовые ограничения, выписывание необходимых условий оптимальности затруднено и приводит к краевым задачам со сложной структурой. Кроме того, необходимые условия не гарантируют, что найденное решение доставляет относительный экстремум функционалу. Для проверки приходится привлекать достаточные условия оптимальности. Все это ограничивает сферу применения непрямых методов.

Прямые методы. Первый прямой метод был предложен Л. Эйлером для решения простейшей задачи В. и. Этот метод известен под названием метода ломаных Эйлера (или конечно разностного метода Эйлера) и заключается в том, что функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \tag{10}$$

рассматривается на непрерывных ломаных $x(t)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{11}$$

и состоящих из N прямолинейных отрезков с заданными абсциссами концов. Таким образом, функционал превращается в функцию от ординат вершин этих ломаных, а исходная задача — в задачу минимизации функции многих переменных (см. *Эйлера метод*).

Из-за сложности подобных задач для ручного счета прямые методы долгое время оставались в стороне от

традиционных исследований по В. и. Интерес к ним вновь возрос в нач. 20 в. Были предложены новые способы редукции к задаче об отыскании экстремума функции многих переменных. Наиболее важным из них является *Ритца метод*, согласно к-рому решение задачи о минимуме (10) при условии (11) разыскивается на классе функций вида

$$x = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$, $i=0, 1, \ldots, N$ — элементы бесконечной полной системы линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям

$\varphi_0(t_0) = x_0$, $\varphi_0(t_1) = x_1$, $\varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Задача сводится к отысканию минимума функции N переменных

$$J = J(a_1, \ldots, a_N).$$

Метод Ритца является достаточно общим. Он применяется для решения вариационных задач математич. физики, заключающихся в минимизации функционала, зависящего от функций многих переменных. Его дальнейшим обобщением для данного класса задач является метод (см. [2]), в к-ром коэффициенты считаются неизвестными функциями одного из независимых переменных (напр., если в задаче две независимые переменные t и τ, то a_i могут задаваться в виде $a_i(\tau)$). Исходный функционал становится зависящим от N функций $a_i(\tau)$, к-рые могут определяться с помощью необходимых условий, т. е., в конечном счете, из решения краевой задачи для системы N уравнений Эйлера.

Потребности практики увеличили интерес к неклассич. задачам оптимального управления. Наличие в технич. задачах сложных ограничений на фазовые координаты и управляющие функции, разрывность правых частей дифференциальных уравнений, возможность существования особых и скользящих оптимальных режимов и т. д.— все это потребовало разработки новых разновидностей прямых методов. Наибольшее распространение получили методы, использующие идеи спуска в пространстве управлений и идеи последовательного анализа вариантов (типа *динамического программирования*).

Методы спуска в пространстве управлений основаны на получении последовательности управлений $u_k \in U$ вида

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \delta u_k(t), \qquad (12)$$

к-рой соответствует монотонно убывающая последовательность значений функционала. Пусть, напр., ищется минимум функционала

$$J = F(x(T)) \qquad (13)$$

при условиях (2), (3) и (5) (U — выпуклое и односвязное множество). Отыскание $\delta u_k(t)$ производится следующим образом. С помощью уравнений в вариациях для (2) и сопряженной системы (7) с условиями на правом конце

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

линейная часть приращения функционала (13) от вариации δu представляется в виде

$$\delta J = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial u}\, \delta u\, dt.$$

Для уменьшения функционала (13) следует на каждой итерации выбирать приращение

$$\delta u_k(t) = \varkappa \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \varkappa > 0,$$

где величина $\partial H/\partial u$ вычисляется на управлении $u_k(t)$ и соответствующей ему траектории $x_k(t)$. Закон-

ность линеаризации, а следовательно, и уменьшение функционала (13) обеспечиваются выбором достаточно малой величины $\varkappa$. Процесс спуска (12) начинается с нек-рого $u_0(t)$ и заканчивается, когда на нек-рой итерации $|\delta J|$ становится меньше нек-рого заданного ε. Для описанного случая свободного правого конца алгоритм получается наиболее простым (см. [5], [6], [7]). Весьма эффективным для решения задач со свободным концом является метод (см. [8]), к-рый не использует линеаризации исходной задачи. В случае, когда граничные условия заданы и на правом конце, все эти алгоритмы существенно усложняются. Для учета граничных условий в [5] привлекается процедура проектирования градиента, а в [6] вводится штраф за невыполнение граничных условий, т. е. вместо (13) рассматривается функционал

$$J = F(x(T)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i(T) - x_T^i)^2, \quad \lambda_i > 0. \quad (14)$$

К градиентным методам примыкает метод [9], в к-ром приращение управления определяется из решения вспомогательной задачи линейного программирования.

Большая группа прямых методов численного решения задач оптимального управления основана на идеях последовательного анализа вариантов (см. [10], [11], [12]). Важным достоинством этих методов является то, что с их помощью удается решать задачи с фазовыми ограничениями вида

$$x \in G, \quad (15)$$

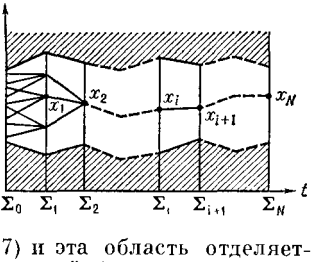
где G — замкнутое множество n-мерного пространства. Их основной недостаток - существенное возрастание трудностей с увеличением размерности пространства. Эти методы используют редукцию исходной задачи к задаче нелинейного программирования специального вида. Распространены два способа такой редукции. Согласно первому способу в конечном итоге получается задача минимизации функции, зависящей только от управлений, заданных в точках дискретной сетки на оси (см. [13]). Во втором способе (см. [12]) управление исключается и задача сводится к минимизации функции вида

$$J(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}), \quad (16)$$

где x_i — значение вектора x в точке t_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, при ограничениях

$$x_i \in G_i, \quad (17)$$

к-рые получаются из ограничений (3), (4), (15). Для пояснения схемы решения задачи минимизации (16) при условиях (17) удобно использовать следующую геометрич. интерпретацию. Каждой совокупности векторов $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ ставится в соответствие ломаная (см. рис.), к-рая проходит через точки $x_0, \ldots, x_N$, лежащие в гиперплоскостях Σ_i, задаваемых уравнениями $t = t_i$. Длина этой ломаной $J(x_0, \ldots, x_N)$ складывается из длин $f_i(x_i, x_{i+1})$ отдельных звеньев. Область допустимых значений x_i задается (17) и эта область отделяется от запретной нек-рой ломаной (на рис. запретная область заштрихована). Задача состоит в отыскании ломаной наименьшей длины, лежащей в допустимой области и соединяющей гиперплоскости Σ_0 и Σ_N. Алгоритм решения задачи представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге i к-рого отметается нек-рое множество вариантов Ω_i, заведомо не содержащее оптимальной ломаной. На нулевом шаге определяется функция



$$l(x_1) = \min_{x_0 \in G_0} f_0(x_0, x_1),$$

т. е. длина кратчайшего звена, соединяющего каждую точку $x_1 \in \Sigma_1$ с гиперплоскостью Σ_0. Так как

$$\min_{x_0 \in G_0} J(x_0, x_1, \ldots, x_N) = l(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

то множество ломаных Ω_0, не содержащих отрезка $l(x_1)$, может быть отброшено. На первом шаге строится кратчайшая ломаная

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in G_1} (l(x_1) + f_1(x_1, x_2)),$$

соединяющая каждую точку $x_2 \in \Sigma_2$ с Σ_0, и множество ломаных Ω_1, не содержащих ломаной $l(x_2)$, также отбрасывается, и т. д. На i-м шаге строится кратчайшая ломаная

$$l(x_{i+1}) = \min_{x_i \in G_i} (l(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})), \qquad (18)$$

соединяющая каждую точку $x_{i+1} \in \Sigma_{i+1}$ с Σ_0, и отбрасывается множество ломаных Ω_i, не содержащих ломаной $l(x_{i+1})$. На последнем шаге находится решение исходной задачи — кратчайшая ломаная, соединяющая гиперповерхности Σ_N и Σ_0:

$$l = \min_{x_N \in G_N} l(x_N).$$

Формула (18) — рекуррентное соотношение, описывающее многошаговый процесс отыскания решения. На этом соотношении основаны динамич. программирование и принцип оптимальности Беллмана.

В соответствии с (18) необходимо отыскивать минимум на множествах G_i, имеющих, вообще говоря, мощность континуума. При численной реализации используется их конечномерная аппроксимация. Для этого, кроме сетки, по t (напр., с постоянным шагом τ) строится сетка по x^j с шагом h^j ($j = 1, \ldots, n$). Тогда задача сводится к отысканию кратчайшего пути на специальном графе с вершинами — узлами сетки. Пусть $P_k(i)$ — узел k, лежащий в гиперплоскости Σ_i;

$$l_{ks}(i) = f_i(P_k(i), P_s(i+1))$$

—длина отрезка, соединяющего два узла k и s в соседних гиперплоскостях, $l_k(i)$ — длина наикратчайшего пути, соединяющего узел $P_k(i)$ с гиперплоскостью Σ_0. Тогда рекуррентное соотношение (18) имеет вид

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i)),$$

где минимум берется по номерам k всех узлов, к-рые лежат в допустимой области G_i гиперплоскости Σ_i. В общем случае этот минимум отыскивается перебором по всем узлам. Изложенный метод позволяет отыскивать глобальный экстремум функции (16) при ограничениях (3), (4), (15) с точностью, определяемой шагами сетки τ и h^j. Для сходимости метода к решению исходной задачи необходимо наличие определенных соотношений между этими шагами [напр., вида $h^j = o(\tau)$]. Метод предъявляет большие требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Поэтому при практич. реализации сначала находят экстремум на грубой сетке, а затем в окрестности полученного решения его уточняют на более мелкой сетке. Это делается с помощью одного из методов, позволяющих отыскивать локальный экстремум (см. *Блуждающей трубки метод*, *Локальных вариаций метод*, *Бегущей волны метод*).

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [2] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [3] Исаев В. К., Сонин В. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 2, с. 252—61; [4] Джурович С., Макинтайр Д., «Ракетная техника», 1962, № 9, с. 47—53; [5] Денхэм В., Брайсон В., «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 1, с. 34—47; [6] Шатровский Л. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 3, с. 488—91; [7] Энеев Т. М., «Космические исследования», 1966, т. 4, вып. 5, с. 651—69; [8] Крылов П. А., Черноусько Ф. Л., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 6, с. 1132—9; [9] Федоренко Р. П.,

там же, 1964, т. 4, № 6, с. 1045 -64; [10] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [11] Михалевич В. С., «Кибернетика», 1965, № 1, с. 45—46; [12] Моисеев Н. Н., там же, 1966, № 3, с. 1—29; [13] Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., там же, 1967, № 3, с. 1—20.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЦЕЛОМ — раздел математики, в к-ром применяются топологич. понятия и методы для качественного исследования вариационных задач существование и оценка числа экстремалей, выяснение нек-рых качественных свойств последних и соотношений между числом экстремалей различных типов. Часто в состав В. и. в ц. включают также теорию «в целом» стационарных (критических) точек функций на многообразиях, где для этих точек рассматриваются такие же задачи. (Во всяком случае, эта последняя теория тесно связана с В. и. в ц. и возникла вместе с ним, а относящиеся к ней задачи часто служат упрощенной моделью собственно вариационных задач. Иногда последние даже изучают с помощью некрой аппроксимации их первыми.) При этом интересуются всеми экстремалями (стационарными точками), существующими для данной задачи, независимо от того, отвечает ли им действительно экстремальное (т. е. минимальное или максимальное) значение рассматриваемого функционала (функции) или же это последнее является только стационарным. В этом одно из отличий В. и. в ц. от возникших ранее «классических» разделов *вариационного исчисления*, где после сравнительно простого вывода условий стационарности, общих для всех экстремалей, основное внимание уделялось экстремуму (хотя бы локальному), обычно минимуму. Кроме того, значительная часть «классических» разделов связана с исследованием малой окрестности экстремали, тогда как в В. и. в ц. используются топологич. свойства всего функционального пространства вариационной задачи, т. е. всего пространства кривых (функций, поверхностей и т. п.), где задан рассматриваемый функционал (или всего многообразия, где задана рассматриваемая функция). Эти свойства, в свою очередь, связываются с топологией того пространства (области, многообразия и т. д.), где должны лежать эти кривые (поверхности) или где должны быть определены и (или) принимать значение эти функции (а также с характером краевых или еще каких-либо дополнительных условий). Такой «глобальный» характер свойственного В. и. в ц. подхода и подчеркивается в его названии определением «в целом». (В ходе развития В. и. в ц. оказалось необходимым подробнее исследовать свойства *второй вариации* [1], имеющей чисто локальный характер. Раньше эти свойства исследовались лишь в той мере, в какой это было нужно для применений к условиям минимума функционала.)

В. и. в ц. сложилось в 20 30-х гг. 20 в. в работах, посвященных решению задачи об оценке числа *замкнутых геодезических* на замкнутом римановом (более общо, финслеровом) многообразии (называемой также н е п е р и о д и ч е с к о й з а д а ч е й В. и. в ц.) (см. [1], [2], [4]).

Общий прием исследования, свойственный для В. и. в ц., состоит в том, что для функции (в том числе и для функционала, рассматриваемого как функция на соответствующем бесконечномерном функциональном пространстве) следят за изменением тех или иных топологич. свойств о б л а с т и м е н ь ш и х з н а ч е н и й

$$f^{-1}(-\infty, C] = \{x : f(x) \leqslant C\}$$

с изменением у р о в н я ф у н к ц и и C. Стремятся доказать, что эти свойства изменяются только при прохождении C через стационарные значения (отвечающие стационарным точкам функции), и описать, как связаны изменения, происходящие при таких прохождениях, со свойствами соответствующих стационарных точек. Получаются нек-рые связи между стационарными точ-

ками f, с одной стороны, и топологич.свойствами области меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ с достаточно большими C или даже всего пространства, где задана f, — с другой. Если эти последние свойства известны, то из установленных связей делают определенные заключения о стационарных точках. Для собственно вариационных задач остается еще один шаг (иногда тривиальный, иногда очень трудный): полученные результаты, относящиеся к вспомогательным объектам (точки нек-рого функционального пространства), нужно интерпретировать в терминах первоначальной постановки задачи. (В задаче о замкнутых геодезических именно этот последний шаг вызывает основные затруднения.)

Описанную программу сравнительно легко удается осуществить для гладкой функции f на замкнутом многообразии M. При сравнении областей меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ с различными C обычно используется градиентный спуск, т. е. движение точек согласно *градиентной динамической системе*, определяемой f и какой-нибудь вспомогательной римановой метрикой на M. Отдельно рассматривается ситуация возле стационарных точек. Если все они невырожденные, то изменение области меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ при прохождении C через стационарный уровень можно описать очень подробно — с точностью до диффеоморфизма. Такое описание, как и аналогичное описание изменений многообразий уровня $f^{-1}(C)$, оказалось важным для топологии (см. [5], [6]), тогда как для В. и. в ц. пока оказывается достаточной менее полная информация в терминах нек-рого числового инварианта — категории Люстерника — Шнирельмана cat M и в терминах гомологий. Последняя приводит к *Морса неравенствам*, дающим обычно значительно лучшую оценку числа невырожденных критич. точек, чем категория. В то же время и оценка через категорию, и неравенства Морса годятся также без предположения о невырожденности стационарных точек, хотя из неравенств Морса при этом следует оценка, в к-рой вырожденные стационарные точки считаются со специально приписываемыми им кратностями (в связи с чем говорят об оценке числа аналитически различных стационарных точек или алгебраического числа этих точек). Категория же дает оценку числа стационарных точек в обычном смысле (подчеркивая это обстоятельство, говорят об оценке числа геометрически различных стационарных точек) и даже с нек-рой дополнительной информацией: либо число стационарных уровней не меньше cat M, либо имеется континуум стационарных точек.

Чтобы получить аналогичные результаты для функций на бесконечномерных многообразиях, необходимы определенные дополнительные предположения об аналитич. свойствах этих функций (кроме гладкости). Наиболее полная аналогия с конечномерным случаем достигается при использовании так наз. условия (C) Пале — Смейла (R. Palais S. Smale, см. [7]), но оно не выполняется в нек-рых интересных случаях, а при выполнении более слабых условий соответствующие результаты тоже могут быть слабее. Затруднения может вызвать исследование траекторий градиентного спуска или какого-нибудь его аналога. Напр., для нек-рых задач геометрич. происхождения — минимальные замкнутые подмногообразия риманова многообразия, гармонические отображения — этот вопрос сводится к поведению решений параболич. систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. [8]). Иногда удовлетворительные результаты удается получить только для точек минимума. Основные применения — собственные значения нелинейных операторов (см. [7], [8], [9]) и многомерные задачи вариационного исчисления (т. е. такие, в к-рых рассматриваемый функционал выража-

ется в виде некоторого кратного интеграла), в том числе упомянутые выше задачи геометрич. происхождения.

Для одномерных задач (т. е. тех, в к-рых рассматриваемый функционал выражается в виде интеграла по одной независимой переменной) вместо градиентного спуска можно использовать специфические для них более элементарные приемы [фактически с их помощью и были получены многие имеющиеся здесь результаты (см. [1], [2], [3])]. Одномерными являются задача о замкнутых геодезических и задача об оценке числа геодезич. дуг, соединяющих две точки на связном полном римановом многообразии M. Последняя полностью решена: если M не стягивается по себе в точку, то таких дуг бесконечное число (см. [10]). (На примере обычной сферы видно, что одни из этих дуг могут включать в себя многократно проходимые другие дуги.)

По-видимому, первым применением В. и. в ц. в других областях математики было вычисление гомологий классич. групп Ли (см. [11]). Важнейшим из современных применений, наряду с упомянутым выше использованием теории стационарных точек функций в топологии, является вычисление стационарных гомотопич. групп Ли (так наз. теория Ботта; см. [12]). В. и. в ц. используется также в глобальной дифференциальной геометрии (см. [13]).

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 166—217; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, пер. с нем., М., 1947; [4] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1917, v. 18, p. 199—300; [5] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [6] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [7] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, № 3, с. 157—210; [8] Альбер С. И., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 4, с. 57—122; [9] Бергер М. С., Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем, в сб.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, М., 1974; [10] Серр Ж. П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, пер. с франц., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [11] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 389—422; «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 6, с. 151—85; [12] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [13] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

Д. В. Аносов.

ВАРИАЦИОННО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД — метод, объединяющий вариационный метод Г. М. Голузина (см. *Внутренних вариаций метод*) и *параметрических представлений метод* К. Лёвнера (K. Löwner) для важного подкласса однолистных функций класса S, отображающих круг $E=\{z:|z|<1\}$ на области, получающиеся из плоскости $\mathbb{C}_w$ проведением разрезов по кусочно непрерывным дугам. Это объединение достигается посредством специальной вариации, определяемой в простейшем случае одного жорданова разреза следующей теоремой. Пусть функция $w=f(z)\in S$ отображает E на область $B(0)$, полученную из $\mathbb{C}_w$ проведением разреза

$$L=\{w: w=\varphi(t),\ 0\leqslant t\leqslant\infty\},\quad \varphi(\infty)=\infty,$$

где $\varphi(t)$ непрерывна, а область $B(\tau)=\mathbb{C}_w\setminus L(\tau)$, где $L(\tau)=\{w: w=\varphi(t),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\infty\}$, односвязна. Можно считать параметризацию разреза L такой, что присоединенная к $f(z)$ функция $z=F(w,\tau)$, $F(0,\tau)=0$, однолистно и конформно отображающая $B(\tau)$ на E, нормирована условием $F'_w(0,\tau)=e^{-\tau}$. Пусть $\Psi(z,\tau)$ обозначает функцию, обратную к $F(w,\tau)$ при фиксированном τ. Тогда, каковы бы ни были точки $z_k\in E$ ($k=1,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$) и постоянные A_k, в классе S существует функция $f_*(z)$, представимая в виде

$$f_*(z)=f(z)+$$
$$+\lambda\sum_{k=1}^{n}\left[2A_kH^2(z_k,\tau)\frac{f^2(z)}{f(z)-\Psi(z_k,\tau)}+\right.$$
$$\left.+A_kK(z,\tau,z_k)+\overline{A}_kK\left(z,\tau,\frac{1}{z_k}\right)\right]+\gamma(\lambda,E).$$

Здесь

$$K(z, \tau, \zeta) = \frac{F(f(z), \tau)}{F'_w(f(z), \tau)} \cdot \frac{\zeta + F(f(z), \tau)}{\zeta - F(f(z), \tau)} - f(z),$$

$$H(z, \tau) = \frac{z\Psi'_z(z, \tau)}{\Psi(z, \tau)}$$

и $\gamma(\lambda, E)$ — голоморфная в E функция, предел отношения к-рой к λ при $\lambda \to 0$ ($\lambda > 0$) равномерно стремится к нулю внутри E.

Использование в процессе исследования экстремальных задач на классе S специальной (упомянутой выше) вариации и уравнения Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta},$$

$$\mu(\tau) = \Psi(\varphi(\tau), \tau),$$

к-рому удовлетворяет функция $F(w, \tau)$ при условии $F(f(z), 0) = z$, обычно позволяет получать для функции, присоединенной к экстремальной, два уравнения. Несмотря на содержащиеся в них постоянные, выражаемые через значения экстремальной функции, дальнейшее исследование этих уравнений в большом числе случаев привело к полному решению рассмотренных задач, в частности к решению задачи об области значений функционала, аналитически зависящего от функции, ее производной и сопряженных им значений на классе S. Метод был предложен П. П. Куфаревым [1] (о дальнейшем его развитии и применениях см. [2] [5]).

Лит.: [1] Куфарев П. П., «Докл. АН СССР», 1954, т. 97, № 3, с. 391—93; [2] Александров И. А., «Уч. зап. Томск. ун-та», 1958, т. 32, с. 41—57; [3] его же, «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 1, с. 17—31; [4] Редьков М. И., «Докл. АН СССР», 1960, т. 133, № 2, с. 284—87; [5] его же, «Изв. вузов. Математика», 1962, т. 29, с. 134—42.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ в теории функций комплексного переменного — положения, выявляющие закономерности изменения отображающих функций при определенных деформациях плоских областей.

Основным качественным В. п. является *Линделёфа принцип*, к-рый состоит в следующем. Пусть B_k, $0 \in B_k$ ($k = 1, 2$),—односвязная конечная область в z_k-плоскости, имеющая более одной граничной точки, и пусть $L(r, B_k)$, $0 < r < 1$,—линия уровня функции Грина для B_k, т. е. образ окружности $C(r) = \{\zeta : |\zeta| = r\}$ при однолистном конформном отображении круга $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область B_k, оставляющем неподвижным начало. Пусть далее функция $f(z_1)$, $f(0) = 0$, осуществляет однолистное конформное отображение области B_1 в область B_2. Тогда: 1) любой точке z_1^0, лежащей на $L(r, B_1)$, соответствует точка, находящаяся либо на линии уровня $L(r, B_2)$ (это возможно лишь, если $f(B_1) = B_2$), либо внутри нее; 2) $|f'(0)| \leqslant |g'(0)|$, где $g(z_1)$, $g(0) = 0$, однолистное конформное отображение B_1 на B_2 (равенство имеет место только в случае $f(B_1) = B_2$). Принцип Линделёфа выводится из теоремы Римана о конформном изоморфизме областей и из леммы Шварца. Более тонкие построения позволяют находить поточечные отклонения отображающих функций, вызванные заданной деформацией отображаемых областей.

Основной количественный В. п., полученный М. А. Лаврентьевым [1] (см. также [2]), состоит в следующем. Пусть B_1, $0 \in B_1$,—односвязная конечная область с аналитич. границей. Пусть имеется семейство областей $B_1(t)$, $0 \in B_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$, $B_1(0) \equiv B_1$, с жордановыми границами $\Gamma_1(t) = \{z_1 : z_1 = \Omega(\lambda, t)\}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$, $\Omega(0, t) = \Omega(2\pi, t)$, где $\Omega(\lambda, t)$ равномерно относительно λ дифференцируема по t при $t = 0$, и пусть $F(z_1, t)$, $F(0, t) = 0$, $F'_{z_1}(0, t) > 0$,—функция, однолистно и конформно отображающая $B_1(t)$ на круг $B_2 = \{z_2 : |z_2| < 1\}$, а $\Phi(z_2, t)$ — обратная к $F(z_1, t)$ функция при фиксированном t.

Тогда

$$F(z_1, t) = F(z_1, 0) + tK(F(z_1, 0)) + \gamma_1(z_1, t),$$

$$\Phi(z_2, t) = \Phi(z_2, 0) + t\Phi'_{z_2}(z_2, 0)\, K(z_2) + \gamma_2(z_2, t),$$

где

$$K(z) = \lim_{r \to 1-0} \int_{C(r)} \frac{\partial \ln |F(\Omega(\lambda, t), 0)|}{\partial t}\Bigg|_{t=0} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

и $\frac{1}{t}\gamma_k(z_k, t)$ равномерно внутри B_k ($k = 1, 2$) стремится к нулю при $t \to 0$. В [3] дано распространение этого результата на двусвязные области. При дальнейших ограничениях на области $B_1(t)$ удается получить равномерные в замкнутой области оценки остаточных членов в разложении отображающей функции по параметрам, характеризующим деформацию границ рассматриваемых областей (см. [4]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР», 1934, т. 5, с. 159–246; [2] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13(55), № 1, с. 87—118; [3] Александров И. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 961–76; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ — основные, исходные положения аналитич. механики, математически выраженные в форме вариационных соотношений, из к-рых как логич. следствия вытекают дифференциальные уравнения движения, а также все положения и законы механики. В В. п. к. м. действительные движения материальной системы, происходящие под действием заданных сил, сравниваются с кинематически возможными движениями, допускаемыми наложенными на систему связями и удовлетворяющими определенным условиям. В большинстве случаев признаком, по к-рому действительное движение выделяется из рассматриваемого класса кинематически возможных движений, служит условие экстремальности (стационарности) нек-рой скалярной функции или функционала, обеспечивающее инвариантность описания.

В. п. к. м. отличаются один от другого как по форме и способам варьирования, так и по общности, но каждый из них, в рамках его приложимости, образует единую основу и как бы синтезирует всю механику соответствующих материальных систем. Иными словами, тот или иной из В. п. к. м. потенциально заключает в себе все содержание этой области науки и объединяет все ее положения в единой формулировке.

Классич. механика основывается на законах Ньютона, установленных для свободных материальных точек, и аксиомах связей. Справедливость В. п. к. м. доказывается, исходя из этих законов и аксиом. В свою очередь, любой из В. п. к. м. можно принять за аксиому и из нее логически вывести законы механики.

В. п. к. м. по форме подразделяются на дифференциальные и интегральные принципы. К дифференциальным принципам, характеризующим свойства движения для любого данного момента времени, относятся: принцип возможных перемещений, принцип Д'Аламбера – Лагранжа, принципы Гаусса, Герца, Четаева и Журдена. Интегральными принципами, характеризующими свойства движения на любых конечных промежутках времени, являются принципы наименьшего действия в формах Гамильтона Остроградского, Лагранжа, Якоби и нек-рые др.

Первый из В. п. к. м.— принцип возможных (виртуальных) перемещений, применялся еще Г. Галилеем (G. Galilei, 1665). Первым, кто понял общность этого принципа и его полезность для решения задач статики, был И. Бернулли (J. Bernoulli, 1717). Принцип получил обоснование, существенное развитие и применение в «Аналитической механике» Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1788), считавшего его основным для всей механики.

Этот принцип позволяет находить положения равновесия системы материальных точек, т. е. такие положения $r_\nu = r_\nu(t_0)$, в к-рых система будет оставаться все время, если она помещена в эти положения с нулевыми начальными скоростями $v_\nu(t_0)=0$ при условии, что $r_\nu(t_0)$ — возможные положения и $v_\nu = 0$ — кинематически возможные скорости при любом t. Здесь r_ν — радиус-векторы точек системы относительно начала O инерциальной системы координат $Oxyz$, причем $v_\nu = \dot{r}_\nu$; δr_ν — возможные перемещения, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями, $F_\nu(t, r_\mu, \dot{r}_\mu) \in C^1$ — заданные активные силы, R_ν — реакции связей. Связи далее предполагаются идеальными и удерживающими, т. е.

$$\sum\nolimits_\nu R_\nu \cdot \delta r_\nu = 0.$$

Принцип возможных перемещений: механич. система находится в равновесии в нек-ром положении тогда и только тогда, когда сумма элементарных (бесконечно малых) работ активных сил на всяком возможном перемещении, выводящем систему из рассматриваемого положения, равна нулю

$$\sum\nolimits_\nu F_\nu \cdot \delta r_\nu = 0 \qquad (1)$$

в любой момент времени.

Уравнение (1) является общим уравнением статики, сводящим любую задачу статики к математич. задаче исследования этого уравнения. Для частного случая потенциальных сил

$$F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U(t, r_1, \ldots, r_N); \quad U(t, r_\nu) \in C^2,$$

где N — число точек системы, равенство (1) принимает вид

$$\delta U = 0 \qquad (2)$$

при любом t, т. е. механич. система, подверженная действию потенциальных сил, находится в равновесии тогда и только тогда, когда силовая функция имеет стационарное значение.

Для вывода уравнений динамики методами статики применяется так наз. принцип Д'Аламбера: если к действующим на точки материальной системы заданным (активным) силам и силам реакций связей присоединить силы инерции $-m_\nu w_\nu$, то такая система сил будет находиться в равновесии. Здесь m_ν — масса ν-й точки, $w_\nu = \ddot{r}_\nu$ — ее ускорение. Обобщение принципа Д'Аламбера и принципа возможных перемещений было получено Ж. Лагранжем (1788).

Принцип Д'Аламбера — Лагранжа: для действительного движения системы сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях равна нулю:

$$\sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu) \cdot \delta r_\nu = 0 \qquad (3)$$

в любой момент времени.

В принципе Д'Аламбера — Лагранжа сравниваются положения системы в ее действительном движении с бесконечно близкими положениями, допускаемыми связями в рассматриваемый момент времени. Соотношение (3) определяет зависимость между активными силами, вызываемыми ими при наложенных связях ускорениями и возможными перемещениями. Выражая необходимое и достаточное условие соответствия действительного движения, являющегося одним из кинематически возможных движений, заданным активным силам, уравнение (3) является общим уравнением динамики. Когда все ускорения $w_\nu = 0$, уравнение (3) принимает вид (1) общего уравнения статики.

Уравнения движений содержатся в уравнении (3). Для получения полной системы независимых дифференциальных уравнений динамики достаточно выразить

возможные перемещения δr_ν через систему независимых перемещений и подставить в уравнение (3). Таким путем могут быть получены, напр., уравнения Лагранжа, Аппеля и любая другая система независимых дифференциальных уравнений движения. Если же из семейства возможных перемещений выделить к.-л. одно перемещение и подставить его в уравнение (3), то полученное соотношение будет являться или одним из дифференциальных уравнений движения системы или следствием из них. Таким способом можно получить, например, общие теоремы (законы) динамики: о количестве движения, моменте количеств движения, кинетической энергии.

Общие теоремы динамики системы характеризуют нек-рые свойства движения, но, в отличие от В. п. к. м., ни одна из них в общем случае не в состоянии заменить всю систему дифференциальных уравнений движения и вполне охарактеризовать движение системы.

Принцип Д'Аламбера — Лагранжа является одним из наиболее общих В. п. к. м., справедливым как для голономных, так и для неголономных систем. Все другие В. п. к. м. представляют собой или иные формулировки этого принципа или следствия из него. Принцип Д'Аламбера — Лагранжа не связан, однако, с понятием экстремума к.-л. функции. В нем фигурирует бесконечно малая величина — сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции на бесконечно малом возможном перемещении из заданной конфигурации, не представляющая собой вариации к.-л. функции, подобно равенству (2).

К. Гаусс (C. Gauss, 1829) предложил новый вариационный принцип, представляющий собой модификацию принципа Д'Аламбера—Лагранжа. Среди всех кинематически возможных движений рассматриваются мыслимые по Гауссу движения, удовлетворяющие условиям, наложенным на систему связей, и условиям постоянства r_ν и v_ν для рассматриваемого момента времени t. В момент $t+dt$:

$$\delta r_\nu = \frac{1}{2}\Delta w_\nu (dt)^2, \quad \Delta w = \frac{\delta v_\nu}{dt} - \frac{dv_\nu}{dt},$$

где dv_ν и δv_ν обозначают изменения скоростей за промежуток времени dt для действительного и к.-л. мыслимого движений; при этом уравнение (3) приводится к виду

$$\Delta Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left(w_\nu - \frac{F_\nu}{m_\nu}\right)^2, \qquad (4)$$

причем $\Delta^2 Z > 0$.

Принцип наименьшего принуждения (Гаусса принцип): движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы они стали свободными, т. е. движение происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения за время dt принять величину Z, равную сумме произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной. Иначе говоря, в каждый момент времени t среди всех ускорений, обусловленных связями, действительными ускорениями w_ν различных точек системы будут те, которые обращают в минимум функцию Z второй степени относительно ускорений.

Равновесие является частным случаем общего закона: оно имеет место в том случае, когда точки не имеют скорости и когда сохранение системы в состоянии покоя более близко к свободному движению в случае упразднения связей, чем к возможным движениям, допускаемым связями.

Из принципа Гаусса при выражении Z через независимые ускорения системы получаются уравнения Аппеля. Принцип Гаусса представляет собой физич. аналогию предложенному К. Гауссом *наименьших квадратов методу* теории ошибок. Принцип Гаусса эквивалентен принципу Д'Аламбера Лагранжа, однако при рассмотрении нелинейных дифференциальных связей вида $\varphi_s(t, r_\nu, \dot{r}_\nu) = 0$ эти принципы по П. Аппелю (P. Appell) и Э. Делассю (E. Delassus, 1911 13) оказались несовместимыми. Этот вопрос был разрешен Н. Г. Четаевым (1932—33), предложившим определять возможные перемещения для нелинейных связей условиями вида

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{r_\nu} \varphi_s \cdot \delta r_\nu = 0.$$

Из принципа Гаусса следует принцип наименьших реакций: для действительного движения величина

$$\sum_\nu \frac{R_\nu^2}{2m_\nu}$$

есть минимум. Принцип Гаусса обобщен на случай освобождения системы от части связей. Так как возможные перемещения исходной системы находятся среди возможных перемещений освобожденной системы, то справедливо соотношение:

$$\frac{(dt)^2}{2} \sum_\nu \left(m_\nu \frac{\partial v_\nu}{dt} - F_\nu \right) \cdot \Delta w_\nu = 0,$$

где ∂v_ν — изменение скорости за время dt в освобожденном движении. Это уравнение с учетом (4) можно привести к виду

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} = 0, \tag{5}$$

где

$$A_{\partial\delta} = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial v_\nu}{dt} - \frac{\delta v_\nu}{dt} \right)^2$$

характеризует меру отклонения движения (∂) от движения (δ) за время dt. Аналогично записываются $A_{d\delta}$ и $A_{d\partial}$. Из уравнения (5) следуют неравенства

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \quad A_{d\partial} < A_{\partial\delta}, \tag{6}$$

выражающие теорему: отклонение действительного движения (d) системы от мыслимого (δ) [освобожденного действительного (∂)] движения меньше отклонения движения (δ) от движения (∂). Эта теорема доказана Н. Г. Четаевым (1932—33). Теорема, выражаемая вторым из неравенств (6), для случая линейных неголономных связей высказана Э. Махом (E. Mach, 1883) и доказана Е. А. Болотовым (1916).

К принципу Гаусса тесно примыкает принцип прямейшего пути, постулированный Г. Герцем (H. Hertz, 1894) в качестве основного закона разработанной им механики, в которой, в отличие от механики Ньютона, вместо понятия силы введены представления о скрытых связях, скрытых массах и скрытых движениях.

Принцип прямейшего пути (наименьшей кривизны принцип, Герца принцип): всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути. Под свободной системой Г. Герц понимает систему, не подверженную действию активных сил и стесненную только внутренними связями, накладывающими условия лишь на взаимное расположение точек системы. Прямейший путь определяется как такая траектория, элементарные дуги к-рой обладают наименьшей кривизной по сравнению с любыми другими дугами, допускаемыми связями и имеющими с рассматриваемой элементарной дугой общие начальную точку и касательную в ней, причем величина Z интерпретируется как кривизна траектории точки, изо-

бражающей положение системы в $3N$-мерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $\sqrt{m_\nu}\,x_\nu$, $\sqrt{m_\nu}\,y_\nu$, $\sqrt{m_\nu}\,z_\nu$. Иными словами, принцип Герца утверждает, что среди всех совместимых со связями траекторий действительная траектория обладает наименьшей кривизной.

Принцип Герца эквивалентен принципу Гаусса для систем, стесненных стационарными связями и не подверженных действию активных сил. Н. Г. Четаев (1941) предложил следующее видоизменение принципа Гаусса.

Принцип максимума работы (принцип Четаева): работа

$$A_\delta = \sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu)\cdot\left(v_\nu + \frac{\delta v_\nu}{dt}\frac{dt}{2}\right)dt + \ldots$$

на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного в поле сил, к-рых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механич. система была совершенно свободной; для действительного движения имеет (относительный) максимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Принцип Четаева позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механич. систем путем привлечения принципа Карно из термодинамики.

Изложенные принципы по способам варьирования подразделяются на две группы: в принципах возможных перемещений и Д'Аламбера — Лагранжа варьируется в нек-рый момент времени положение r_ν системы, а в принципах Гаусса, Герца и Четаева варьируются ускорения $\ddot{r}_\nu$ системы при постоянных r_ν и $\dot{r}_\nu$. Промежуточное место между этими двумя группами занимает принцип Журдена, в к-ром в момент t варьируются скорости $\dot{r}_\nu$ при постоянных r_ν. В момент $t+dt$ возможные перемещения $\delta r_\nu = \delta\ddot{r}_\nu\,dt$, и уравнение (3) принимает вид:

$$\sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu)\cdot\delta\dot{r}_\nu = 0.$$

В интегральных В. п. к. м. сравнение действительного и кинематически возможных движений производится для конечных промежутков времени. Именно, сравниваются значения нек-рых определенных интегралов (наз. действием), вычисляемых для действительного и кинематически возможных движений, удовлетворяющих определенным условиям, между нек-рыми двумя конечными положениями системы. Интегральные В. п. к. м. менее общи по сравнению с дифференциальными принципами и применимы гл. обр. к голономным системам, находящимся под действием потенциальных сил. Наиболее общим из них является принцип, установленный У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834—35) для случая стационарных голономных связей и обобщенный М. В. Остроградским (1848) на нестационарные геометрич. связи. Пусть известны положения P_0 и P_1 голономной системы в моменты времени t_0 и t_1 в нек-ром ее действительном движении под действием заданных сил и сил реакций. В этом движении r_ν будут функциями времени, к-рые удовлетворяют связям и принимают для $t=t_0$ и $t=t_1$ значения, отвечающие положениям P_0 и P_1. Пусть $r_\nu+\delta r_\nu$ — нек-рые функции времени класса C^2, достаточно близкие к $r_\nu(t)$, удовлетворяющие связям и принимающие для $t=t_0$ и $t=t_1$ те же значения, что и $r_\nu(t)$. При этом δr_ν уничтожаются при $t=t_0$ и $t=t_1$ и имеют смысл возможных перемещений. Если считать $F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U$, то

$$\delta S = 0, \quad S = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt, \tag{7}$$

где функционал S наз. действием по Гамильтону за промежуток времени t_1-t_0.

Принцип стационарного действия (принцип Гамильтона — Остроград-

с к о г о): в действительном движении системы действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с любыми бесконечно близкими кинематически возможными движениями, для к-рых начальное и конечное положения системы одинаковы с соответствующими положениями для действительного движения и время движения одинаково. В случае непотенциальных сил принцип Гамильтона — Остроградского выражается уравнением

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{\nu} F_{\nu} \cdot \delta r_{\nu})\, dt = 0, \qquad (8)$$

т. е., если $r_{\nu}(t)$ — функции времени, соответствующие действительному движению системы, то интеграл в (8) равен нулю для всех вариаций функций $r_{\nu}(t)$, совместимых со связями и уничтожающихся на обоих пределах интеграла.

Равенства (7) и (8) представляют собой необходимые и достаточные условия для действительности движения системы под действием заданных сил. Уравнение (8) справедливо и для неголономных систем, однако для последних движение $r_{\nu} + \delta r_{\nu}$ не является, вообще говоря, кинематически возможным; уравнение (7) несправедливо для неголономных систем.

Если уравнения геометрич. связей представить в виде

$$r_{\nu} = r_{\nu}(t, q_1, \ldots, q_n), \quad n = 3N - k,$$

где k — число связей, и ввести функцию Лагранжа

$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T + U,$$

то

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt.$$

При этом в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве $(t, q_1, \ldots, q_n)$ равенство (7) соответствует обычной (непараметрической) задаче вариационного исчисления при закрепленных концах. В $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве с координатами t, q_i, $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ равенство (7) соответствует вариационной задаче со свободными концами (t и q_i — фиксированы, p_i свободны), причем

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt,$$

где $H(t, q_i, p_i)$ — функция Гамильтона.

Из уравнения (7) выводятся уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (9)$$

и канонич. уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Для решения основной задачи динамики достаточно знания функции действия

$$v(t, q_i, q_{i0}) = \int_{t_0}^{t} L\, dt. \qquad (11)$$

Однако для определения функции действия по формуле (11) необходимо знание закона движения. Чтобы обойти эту трудность, У. Гамильтон нашел дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad (12)$$

к-рому удовлетворяет функция действия. К. Якоби (C. Jacobi, 1837) показал, что если известен полный интеграл $v(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения (12), зависящий от n произвольных постоянных α_i, из к-рых ни одна не является аддитивной, то общее решение уравнений (10) дается равенствами:

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где β_i — произвольные постоянные.

Для систем, стесненных стационарными связями и находящихся под действием потенциальных сил, не зависящих явно от времени, существует интеграл энергии

$$E = T - U = h. \tag{13}$$

Его существование позволяет ограничить множество сравниваемых кинематически возможных движений, переводящих систему из положения P_0 в положение P_1, движениями, при к-рых полная механич. энергия E имеет одно и то же фиксированное значение h. В этом случае интеграл (13) можно рассматривать как неголономное условие и искать принцип механики в виде условного вариационного принципа. Эту задачу разрешил Ж. Лагранж (1760).

Принцип стационарного действия Лагранжа: если заданы начальный момент времени t_0 и начальное и конечное положения голономной системы, для к-рой существует интеграл энергии, то для действительного движения

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2T \, dt = 0 \tag{14}$$

по сравнению с варьированными движениями между теми же начальным и конечным положениями и с той же энергией h, что и в действительном движении. Символ δ — вариация при условии (13).

Выполнение соотношения (13) при постоянном h для всех сравниваемых в принципе Лагранжа движений налагает определенные ограничения на скорости этих движений и время движения из положения P_0 в положение P_1 зависит от кривой, по к-рой совершается движение. Таким образом, принцип Лагранжа (14) [с учетом (13)] представляет собой условную вариационную задачу с верхним свободным концом.

Для рассматриваемых систем исключением времени t из (14) с помощью интеграла энергии (13) К. Якоби (1837) получил новый В. п. к. м.

В обобщенных координатах q_i кинетич. энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Пусть заданы метрика координатного пространства формулой

$$ds^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \, dq_i \, dq_j, \tag{15}$$

а также конечные положения системы P_0 и P_1 в нек-ром действительном движении системы.

Принцип стационарного действия Якоби: если заданы начальное и конечное положения голономной консервативной системы, то для действительного движения

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} \, ds = 0 \tag{16}$$

при сравнении со всякими другими бесконечно близкими движениями между теми же самыми начальным и конечным положениями и с тем же самым постоянным значением энергии h, что и в действительном движении.

Принцип Якоби приводит задачу изучения движения голономной консервативной системы к геометрич. задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой (15) экстремалей вариационной задачи (16), к-рые представляют собой действительные траектории системы. Принцип Якоби выявляет тесную связь, существующую между движениями голономной консервативной системы и римановой геометрией пространства. Если движение системы происходит в отсутствие заданных сил, когда $U = 0$, то система движется вдоль геодезич. линии координатного пространства $(q_1, \ldots, q_n)$ с постоянной скоростью. Этот факт является обобщением закона инерции Галилея. Когда $U \neq 0$, разыскание движения голо-

номной консервативной системы также сводится к задаче определения геодезических в римановом пространстве с метрикой

$$ds_1^2 = 2(U+h)\,ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j .$$

Для случая одной материальной точки, когда линейный элемент ds — элемент евклидова 3-мерного пространства, принцип Якоби представляет собой механич. аналог принципа Ферма в оптике.

Уравнения Лагранжа (9) или уравнения экстремалей вариационных принципов Гамильтона — Остроградского, Лагранжа и Якоби являются необходимыми условиями экстремума соответствующего интеграла, или действия по Гамильтону, Лагранжу, Якоби. В случаях, когда выполняются достаточные условия минимума, эти интегралы в действительных движениях принимают минимальные значения. Вследствие этого интегральные В. п. к. м. наз. также **принципами наименьшего действия**.

Использование интегральных В. п. к. м. естественным образом приводит к понятию обобщенных решений и расширению классов функциональных пространств, в к-рых разыскиваются решения задач математич. физики.

В. п. к. м. оказались применимыми не только к дискретным материальным системам, но и к системам с распределенными параметрами, к сплошным средам; они играют важную роль в теории поля и в математич. физике. С В. п. к. м. тесно связаны оптико-механич. аналогия, теория канонич. преобразований, теория групп Ли и законы сохранения. В. п. к. м. обладают большой эвристической ценностью, они распространены и на другие области физики, в частности на теорию относительности и на квантовую и волновую механику, где важную роль играют принципы наименьшего действия и связанный с ними лагранжев и гамильтонов математич. формализм.

Лит.: [1] Аппель П., Теоретическая механика, 6 изд., т. 2, пер. с франц., М., 1960; [2] Болотов Е. А., О принципе Гаусса, «Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2», 1916, т. 21, № 3, с. 99—152; [3] Вариационные принципы механики, сб. статей, М., 1959; [4] Ланцош К., Вариационные принципы механики, пер. с англ., М., 1965; [5] Парс Л. А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971; [6] Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938; [7] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962.

В. В. Румянцев.

ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД — расположение значений случайной выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с функцией распределения $F(x)$ в порядке их возрастания: $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$. В. р. служит для построения эмпирич. функции распределения $F_n(x) = m_x\ n$, где m_x — число членов ряда, меньших x. Важными характеристиками В. р. являются его крайние члены $(x_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,\ x_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i)$ и размах $R_n = x_{(n)} - x_{(1)}$. Плотности распределения минимального и максимального членов В. р. в случае

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

задаются соответственно выражениями

$$p_{(1)}(x) = n\,[1 - F(x)]^{n-1} p(x)$$

и

$$p_{(n)}(x) = nF^{n-1}(x)\,p(x).$$

Для повторной выборки В. р. образует неоднородную цепь Маркова.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, гл. 8.

А. И. Шалыт.

ВАРИАЦИЯ — термин, введенный в математику Ж. Лагранжем [1] для обозначения малого смещения независимого переменного или функционала. Метод В.— метод исследования экстремальной задачи, основанный на малых смещениях аргумента и изучении того, как в зависимости от них изменяются функционалы. Этот метод является одним из основных методов при решении

задач на экстремум (отсюда и назв. *Вариационное исчисление*).

Пусть X — нек-рое пространство, на к-ром задан функционал $f(x)$, а V — пространство нек-рых параметров. Под вариацией аргумента $x_0 \in X$, понимают обычно кривую $x(t, v)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $v \in V$ в пространстве X, проходящую через x_0 в определенной близости от ограничений, причем x_0 соответствует значение $t=0$. Когда v пробегает множество всех параметров, вариации пробегают определенное семейство кривых, исходящих из точки x_0. В конечномерном и бесконечномерном анализе, начиная с первой работы Ж. Лагранжа, обычно применяют вариации по направлениям, когда $V=X$ и $x(t, v)=x_0+tv$. В этом случае В. наз. вектор v. Однако в геометрии, в вариационном исчислении и в особенности в теории оптимального управления применяют и др. классы В., напр. ломаные В., игольчатые В., В., связанные со скользящими режимами (см. [2], [3]). Выбор пространства В. и построение самих В. — важнейший элемент при получении необходимых условий экстремума. См. также *Вариация функционала*, *Гато производная*, *Фреше производная*, *Функциональная производная*.

Лит.: [1] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

В. М. Тихомиров.

ВАРИАЦИЯ МНОЖЕСТВА — число, характеризующее k-мерную протяженность множества в n-мерном евклидовом пространстве. Нулевая вариация $V_0(E)$ замкнутого ограниченного множества E есть число компонент этого множества.

Для простейшего случая плоскости линейная вариация множества (то есть В. м. порядка 1) $V_1(E)$ есть интеграл

$$V_1(E) = c \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, E)\, d\alpha$$

от функции

$$\Phi(\alpha, E) = \int_{\Pi_\alpha} V_0\left(E \cap \Pi^{\perp}_{\alpha, z}\right) dz,$$

где интегрирование ведется по прямой Π_α, проходящей через начало координат, α — угол наклона Π_α к фиксированной оси и $\Pi^{\perp}_{\alpha, z}$ — прямая, перпендикулярная к Π_α и пересекающая ее в точке z. Нормирующая константа c выбирается так, чтобы вариация $V_1(E)$ отрезка E совпадала с его длиной. Для достаточно простых множеств, напр. спрямляемых кривых, В. м. равна длине кривой. Для замкнутой области E со спрямляемой границей Γ линейная В. м. $V_1(E)$ равна половине длины Γ. Вторая В. м. (то есть В. м. порядка 2) есть двумерная мера множества E и $V_k(E)=0$ при $k>2$.

Для n-мерного евклидова пространства вариацией $V_i(E)$ порядка $i=0, 1, \ldots, n$ ограниченного замкнутого множества E наз. интеграл

$$V_k(E) = \int_{\Omega^n_k} V_0(E \cap \beta)\, d\mu_\beta$$

от нулевой вариации пересечения E с $(n-k)$-мерной плоскостью β по пространству Ω^n_k всех $(n-k)$-мерных плоскостей из R_n, с *Хаара мерой* $d\mu_\beta$, нормированной так, чтобы единичный k-мерный куб J_k имел В. м. $V_k(J_k)=1$.

В. м. $V_n(E)$ совпадает с n-мерной мерой Лебега множества E. Для выпуклых тел В. м. при надлежащей нормировке совпадает со *смешанными объемами* Минковского (см. [4]).

Свойства В. м. 1) Для $E \subset R_n \subset R_{n'}$ В. м. $V_k(E)$ не зависит от того, вычисляется она для $E \subset R_n$ или для $E \subset R_{n'}$.

2) В. м. выражаются индуктивно по формуле

$$\int_{\Omega_k^n} V_i(E \cap \beta)\, d\mu_\beta = c(n, k, i)\, V_{k+i}(E), \quad k+i \leqslant n,$$

где $c(n, k, i)$ — нормирующая константа.

3) Условие $V_i(E)=0$ влечет $V_{i+1}(E)=0$.

4) В. м. (в известном смысле) не зависят друг от друга, т. е. для любой последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_0>0$ — целое, $0<a_i\leqslant\infty$, $i=1, \ldots, n-1$; $a_n=0$, можно построить множество $E\subset R_n$, для к-рого $V_i(E)=a_i$, $i=0,1, \ldots, n$.

5) $V_i(E_1 \cup E_2) \leqslant V_i(E_1)+V_i(E_2)$, если E_1 и E_2 не пересекаются. В общем случае

$$V_i(E_1 \cup E_2) \leqslant V_i(E_1)+V_i(E_2).$$

Для $i=0, 1, \ldots, n-1$ В. м. V_i не монотонны, т. е. может оказаться, что $V_i(E_1)<V_i(E_2)$ для $E_1 \supset E_2$.

6) В. м. полунепрерывны, т. е. если последовательность замкнутых ограниченных множеств E_k сходится (в смысле метрики уклонений) к множеству E, то

$$V_0(E) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} V_0(E_n),$$

а если, к тому же, равномерно ограничены суммы $V_0(E_k)+\ldots+V_{i-1}(E_k)$, то

$$V_i(E) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} V_i(E_k), \quad i=1, \ldots, n.$$

7) В. м. $V_k(E)$ совпадает с k-мерной *Хаусдорфа мерой* множества E, если $V_{k+1}(E)=0$, а

$$V_0(E)+\ldots+V_k(E) < \infty.$$

Эти условия выполняются, напр., для дважды гладких многообразий.

Понятие В. м. возникло в связи с исследованием решений системы Коши — Римана и в окончательной формулировке принадлежит А. Г. Витушкину. В. м. оказалась полезным аппаратом при решении нек-рых задач анализа, в частности при изучении *суперпозиций функций* многих переменных (см. [1]), а также в вопросах аппроксимации (см. [2]).

Лит.: [1] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955; [2] его же, Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 5, с. 1022—25; [4] Леонтович А. М., Мельников М. С., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 306—37; [5] Иванов Л. Д., «Матем. сб.», 1967, т. 72 (114), № 3, с. 445—70; [6] его же, там же, 1969, т. 78(120), № 1, с. 85—100.

А. Г. Витушкин, Л. Д. Иванов.

ВАРИАЦИЯ ОДНОЛИСТНОЙ ФУНКЦИИ — понятие теории однолистных функций. Пусть в нек-рой области D плоскости комплексного переменного z заданы однолистная функция $f(z)$ и зависящее от вещественного параметра λ, $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$, $\Lambda>0$, семейство $F(z, \lambda)$ функций, однолистных в D при каждом фиксированном $\lambda\in[0, \Lambda]$. Считая, что $F(z, 0)=f(z)$, образуем разность $F(z, \lambda)-f(z)\equiv\Phi(z, \lambda)$. Вариацией n-го порядка, или n-й вариацией, $n=1, 2, \ldots$, функции $f(z)$ (по семейству $F(z, \lambda)$) наз. коэффициент $q_n(z)$ при λ^n в разложении $\Phi(z, \lambda)$ по параметру при условии, что остаточный член

$$\varphi_n(z, \lambda)=\Phi(z, \lambda)-q_1(z)\lambda-\ldots-q_n(z)\lambda^n$$

имеет порядок малости более высокий, чем λ^n, равномерно относительно z или в области D, или внутри D, или в замыкании D. Выбор одного из указанных дополнительных условий обычно предопределяется задачей, в исследовании к-рой используются вариационные методы, связанные с В. о. ф.

Впервые вычисления и применения вариаций 1-го порядка однолистных функций были проведены Ж. Адамаром [1], а позднее М. А. Лаврентьевым [2]. Получение вариаций в нек-ром классе однолистных функций нередко (из-за нелинейности семейств таких функций) представляет сложную самостоятельную задачу. Она

решена для нек-рых классов функций в односвязных и многосвязных областях.

Лит.: [1] Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, t. 1, P., 1910; [2] Лаврентьев М. А., «Матем. сб.», 1938, т. 4(46), № 3, с. 391—458; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., 1966; [4] Бабенко К. И., «Тр. матем. ин-та АН СССР», М., 1972, т. 101.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ — числовая характеристика отображения, связанная с его дифференциальными свойствами. Определена С. Банахом [1]. Ниже дается определение лишь для двумерного случая. Рассмотрим отображение

$$\alpha : x = f(u,\ v),\quad y = \varphi(u,\ v),$$

где $f(u,v)$ и $\varphi(u,v)$ — непрерывные на квадрате $D_0 = [0,1] \times [0,1]$ функции. Говорят, что отображение α имеет ограниченную вариацию, если существует число $M > 0$ такое, что для любой последовательности неперекрывающихся квадратов $D^i \subset D_0$ ($i = 1, 2, \ldots$) со сторонами, параллельными осям координат u, v, справедливо неравенство

$$\sum\nolimits_i \operatorname{mes} D^i_{xy} \leqslant M,$$

где E_{xy} обозначает образ множества $E \subset D_0$ при отображении α, а mes E — плоскую меру Лебега множества E. При этом численное значение $V(\alpha)$ В. о. α может быть определено различными способами. Напр., пусть отображение α имеет ограниченную вариацию. Тогда вариация $V(\alpha)$ может быть определена по формуле

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(s,\ t)\, ds\, dt,$$

где $N(s, t)$ — число решений системы $f(u, v) = s$, $\varphi(u, v) = t$ (индикатриса Банаха отображения α).

Если отображение α имеет ограниченную вариацию, то почти всюду на D_0 существует обобщенный якобиан $J(P)$ ($P \subset D_0$), к-рый интегрируем на D_0. При этом

$$J(P) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\operatorname{mes} K \to 0} \frac{\operatorname{mes} K_{xy}}{\operatorname{mes} K},$$

где $K \subset D_0$ — квадрат, содержащий точку $P \subset D_0$, стороны к-рого параллельны осям u, v (см. [2]).

Лит.: [1] Banach S., «Fundam. math.», 1925, t.7, p. 225—36; [2] Кудрявцев Л. Д., в сб.: Метрические вопросы теории функций и отображений, в. 1, К., 1969, с. 34—108.

Б. И. Голубов.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ — числовая характеристика функции одного действительного переменного, связанная с ее дифференциальными свойствами.

1) Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного x, заданная на отрезке $[a, b]$; ее вариация $V_a^b(f)$ есть точная верхняя грань сумм вида

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольная система точек из $[a, b]$. Это определение предложено К. Жорданом [1]. Если $V_a^b(f) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию на отрезке $[a, b]$, а класс всех таких функций обозначают через $V[a, b]$ или просто через V. Функция $f(x)$ принадлежит классу $V[a, b]$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где f_1 и f_2 — возрастающие (убывающие) на $[a, b]$ функции (*Жордана разложение* функции ограниченной вариации). Сумма, разность и произведение двух функций класса $V[a, b]$ также есть функция класса $V[a, b]$. Это справедливо и для частного двух функций класса $V[a, b]$, если модуль знаменателя превосходит положительную постоянную на отрезке $[a, b]$. Каждая функция класса $V[a, b]$ ограничена и может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем все они 1-го рода. Все эти свойства функций класса

$V[a, b]$ установлены К. Жорданом [1] (см. также [2], с. 234—38).

Функции $f(x)$ класса $V[a, b]$ почти всюду дифференцируемы на $[a, b]$ и для них имеет место разложение

$$f(x)=A(x)+S(x)+D(x),$$

где $A(x)$ — абсолютно непрерывная, $S(x)$ - сингулярная функция, а $D(x)$ — функция скачков (*Лебега разложение* функции ограниченной вариации). Это разложение единственно, если $f(a)=A(a)$ (см. [3] и [2], с. 290).

Первоначально класс $V[a, b]$ был введен К. Жорданом в связи с обобщением Дирихле признака сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций. К. Жордан доказал, что ряды Фурье 2π-периодич. функций класса $V[0, 2\pi]$ сходятся в каждой точке действительной оси. Однако в дальнейшем функции ограниченной вариации нашли широкое применение в различных областях математики, особенно в теории интеграла Стилтьеса.

Иногда рассматриваются классы $V_\Phi[a, b]$, к-рые определяются следующим образом. Пусть $\Phi(u)$ ($u\geqslant 0$, $\Phi(0)=0$) положительная при $u>0$ монотонно возрастающая непрерывная функция. Обозначим через $V^b_{\Phi a}(f)$ точную верхнюю грань сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|),$$

где $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Величина $V^b_{\Phi a}(f)$ наз. Ф-в а р и а ц и е й ф у н к ц и и $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $V^b_{\Phi a}(f)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную Ф-вариацию на отрезке $[a, b]$, а класс всех таких функций обозначается через $V_\Phi[a, b]$ или просто через V_Φ (см. [4], с. 287). При $\Phi(u)=u$ получается класс $V[a, b]$ К. Жордана, а при $\Phi(u)=u^p(1<p<\infty)$ — классы V_p Н. Винера [5]. Определение класса $V_\Phi[a, b]$ предложено Л. Юнг [6].

Если

$$\overline{\lim_{u\to+0}}\frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)}<\infty,$$

то

$$V_{\Phi_2}[a, b]\subset V_{\Phi_1}[a, b].$$

В частности,

$$V_{u^p}\subset V_{u^q}\subset V_{\exp(-u^{-\alpha})}\subset V_{\exp(-u^{-\beta})}$$

при $1\leqslant p<q<\infty$, $0<\alpha<\beta<\infty$, причем эти вложения строгие.

Лит.: [1] J o r d a n C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, № 5, p. 228—30; [2] Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [3] Л е б е г А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, (пер. с франц.), М.— Л., 1934; [4] Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] W i e n e r N., «Massachusetts J. Math. and Phys.», 1924, v. 3, p. 72—94; [6] Y o u n g L. C., «C. r. Acad. sci.», 1937, t. 204, № 7, p. 470—72.

Б. И. Голубов.

2) Для функции нескольких переменных имеются различные определения вариаций (*Арцела вариация*, *Витали вариация*, *Пьерпонта вариация*, *Тонелли плоская вариация*, *Фреше вариация*, *Харди вариация*). Очень плодотворным оказалось также следующее определение (см. [1]), основанное на использовании *Банаха индикатрисы*. Пусть действительнозначная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ задана и измерима по Лебегу на n-мерном кубе Q_n. Вариацией $V_k(f)$ порядка k ($k=1, 2, \ldots, n$) функции $f(x)$ на кубе Q_n наз. число

$$\int_{-\infty}^{+\infty}v_{k-1}(l_t)\,dt,$$

где $v_{k-1}(l_t)$ обозначает $(k-1)$-ю вариацию множества $l_t=\{x: x\in Q_n, f(x)=t\}$, а интеграл понимается в смысле Лебега. Это определение позволяет перенести на функ-

ции нескольких переменных многие свойства функций ограниченной вариации одного переменного. Напр.:

а) $$V_n(f+g) \leqslant V_n(f) + V_n(g);$$
$$V_k(cf) = |c| V_k(f), \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

б) Если последовательность функций $f_s(x)$ ($s=1, 2, \ldots$) сходится к $f(x)$ равномерно на Q_n, то

$$V_k(f) \leqslant \varliminf_{s\to\infty} V_k(f_s), \quad k=1, \ldots, n.$$

в) Если функция $f(x)$ непрерывна на Q_n и все ее вариации конечны, то $f(x)$ почти всюду имеет полный дифференциал.

г) Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на Q_n, то

$$V_n(f) = \int_{Q_n} |\operatorname{grad} f|\, dx.$$

д) Если функция $f(x)$ непрерывна на кубе Q_n со стороной 2π, имеет конечные вариации всех порядков на кубе Q_n и может быть периодически продолжена с периодом 2π по каждому аргументу x_k, $k=1, \ldots, n$ на все n-мерное пространство, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней на Q_n по Прингсхейму.

Достаточные условия конечности вариаций: если функция $f(x)$ имеет на кубе Q_n непрерывные производные всех порядков до $(n-k+1)$-го включительно, то ее вариация порядка k конечна. Эта теорема является окончательной в том смысле, что условия на гладкость не улучшаемы ни при одном k.

Лит.: [1] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

А. Г. Витушкин.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА, первая вариация, - обобщение понятия дифференциала функции одного переменного, главная линейная часть приращения функционала вдоль определенного направления; используется в теории экстремальных задач для получения необходимых и достаточных условий экстремума. Именно такой смысл вкладывается в термин «В. ф.», начиная с работы Ж. Лагранжа [1] (1760). Ж. Лагранж рассматривал по преимуществу функционалы классического вариационного исчисления вида:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, td. \qquad (1)$$

Если заданную функцию $x_0(t)$ заменить на $x_0(t)+\alpha h(t)$ и подставить в выражение для $J(x)$, то при допущении о непрерывной дифференцируемости интеграла L имеет место следующее равенство:

$$J(x_0+\alpha h) - J(x_0) = \alpha J_1(x_0)(h) + r(\alpha), \qquad (2)$$

где $|r(\alpha)| \to 0$ при $\alpha \to 0$. Функцию $h(t)$ часто наз. вариацией функции $x_0(t)$ и иногда обозначают через $\delta x(t)$. Выражение $J_1(x_0)(h)$, представляющее собой функционал относительно вариаций h, наз. первой вариацией функционала $J(x)$ и обозначают через $\delta J(x_0, h)$. В применении к функционалу (1) выражение для первой вариации имеет вид:

$$\delta J(x_0, h) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t)\dot{h}(t) + q(t)h(t))\, dt, \qquad (3)$$

где

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)), \quad q(t) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)).$$

Равенство нулю первой вариации для всех h является необходимым условием экстремума функционала $J(x)$. Для функционала (1) из этого необходимого условия и основной леммы вариационного исчисления (см. *Дюбуа-Реймона лемма)* следует уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0.$$

Путем, аналогичным (2), определяются и вариации более высоких порядков (см., напр., в ст. *Вторая вариация* функционала).

Общее определение первой вариации в бесконечномерном анализе было дано Р. Гато (R. Gateaux) в 1913 (см. *Гато вариация*). По сути своей определение Гато тождественно с определением Лагранжа. Первая вариация функционала является однородным, но не обязательно линейным функционалом, В. ф. при дополнительном предположении о линейности и непрерывности (по h) выражения $\delta J(x_0, h)$ наз. обычно *Гато производной*. Термины «вариация Гато», «производная Гато», «дифференциал Гато» более употребимы, чем В. ф.; термин «В. ф.» сохранился лишь для функционалов классического вариационного исчисления (см. [3]).

Лит.: [1] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [2] Gateaux R., «Bull. Soc. Math. France», 1919, т. 47, с. 70—96; [3] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

В. М. Тихомиров.

ВАРИНГА ПРОБЛЕМА — проблема теории чисел, сформулированная Э. Варингом (E. Waring) в 1770 в следующем виде: всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней. Другими словами: для любого $n \geqslant 2$ существует такое $k = k(n)$, зависящее только от n, что любое натуральное число есть сумма k n-х степеней неотрицательных целых чисел. Первое общее решение В. п. с очень грубой оценкой величины k в зависимости от n дано в 1909 Д. Гильбертом (D. Hilbert), в связи с чем В. п. иногда наз. проблемой Гильберта — Варинга. Если через $J_{k,n}(N)$ обозначить число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1^n + \ldots + x_k^n = N, \qquad (1)$$

то теорема Гильберта утверждает, что существует $K = k(n)$, для к-рого $J_{k,n}(N) \geqslant 1$ при любом $N \geqslant 1$. В 1928 Г. Х. Харди и Дж. И. Литлвуд (G. H. Hardy, J. E. Littlewood), применив к В. п. круговой метод, доказали, что при $k \geqslant (n \quad 2)\ 2^{n-1} + 5$ для $J_{k,n}(N)$ имеет место асимптотич. формула вида

$$J_{k,n}(N) = AN^{k/n-1} + O\left(N^{k/n-1-\gamma}\right), \qquad (2)$$

где $A = A(N) \geqslant c_0 > 0$, а c_0 и $\gamma > 0$ некоторые постоянные. Следовательно, при $N \geqslant N_0(n)$ уравнение (1) имеет решение. В связи с этим результатом возникли три проблемы: установить порядок трех величин $G(n)$, $g(n)$, $k_0(n)$ — наименьших целых чисел, для к-рых: а) уравнение (1) разрешимо при $k \geqslant G(n)$ и $N \geqslant N_0(n)$; б) уравнение (1) разрешимо при $k \geqslant g(n)$ и $N \geqslant 1$; в) для величины $J_{k,n}(N)$ при $k \geqslant k_0(n)$ имеет место асимптотич. формула (2).

а) Известно, что $G(n) \geqslant n + 1$. В 1934 И. М. Виноградов при помощи созданного им метода доказал, что

$$G(n) \leqslant 3n(\ln n + 9).$$

Кроме того, имеется много результатов относительно $G(n)$ для небольших значений n: $G(4) = 16$ (Х. Давенпорт, H. Davenport, 1939), $G(3) = 7$ (Ю. В. Линник, 1942).

б) В 1936 Л. Диксон и С. Пиллаи (L. Dickson, S. Pillai), применив *Виноградова метод*, доказали, что

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 2$$

для всех $n > 6$, для к-рых

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] + 3\right\}.$$

Последнее же условие доказано К. Малером (K. Mahler) в 1957 для всех достаточно больших n.

в) Наилучший результат принадлежит И. М. Виноградову, к-рый доказал, что

$$k_0(n) \leqslant 4n^2 \ln n.$$

Элементарное доказательство В. п. дано Ю. В. Линником в 1942. Существует много различных обобщений

В. п. (переменные пробегают нек-рое подмножество множества натуральных чисел; вместо одночленов $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n$ в представлении числа N рассматриваются многочлены $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_k(x_k)$; вместо уравнения (1) рассматривается сравнение и т. д.).

Особое значение В. п. состоит в том, что при ее решении созданы мощные методы *аналитической теории чисел*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; [5] Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.—Л., 1948.

А. А. Карацуба.

ВАРИНЬОНА ТЕОРЕМА — одна из основных теорем теории скользящих векторов. Согласно В. т., если система скользящих векторов $\boldsymbol{F}_\nu$ приводится к одной равнодействующей $\boldsymbol{F}$, то момент равнодействующей относительно нек-рой точки 0 (или оси l) равен сумме моментов векторов системы относительно той же точки (или оси):

$$\mathrm{mom}_0 \boldsymbol{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_0 \boldsymbol{F}_\nu, \quad \mathrm{mom}_l \boldsymbol{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_l \boldsymbol{F}_\nu.$$

В. т. установлена П. Вариньоном (P. Varignon, 1687) для случая сходящейся системы сил. Эта теорема широко используется в геометрич. статике, кинематике твердого тела, сопротивлении материалов.

В. В. Румянцев.

ВАТСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование $g(x)$ функции $f \in L^2(0, \infty)$, определяемое следующим образом:

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{\omega}_1(xu) f(u) \frac{du}{u}, \qquad (1)$$

где x — действительное переменное, ядро $\tilde{\omega}(x)$ представляется в виде

$$\tilde{\omega}_1(x) = \frac{x}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} x^{-\frac{1}{2} - it} dt \qquad (2)$$

(l. i. m. означает предел в среднем в L^2); причем функция $\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)$ удовлетворяет условию

$$\Omega(s)\Omega(1-s) = 1.$$

Достаточными условиями существования ядра $\tilde{\omega}_1(x)$ и включения $\frac{\tilde{\omega}_1(x)}{x} \in L^2(0, \infty)$ являются

$$\Omega\left(\frac{1}{2} - it\right) = \Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

и

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Для функции $f \in L^2(0, \infty)$ формула (1) определяет почти всюду функцию $g \in L^2(0, \infty)$. Формула обращения для В. п. (1) имеет вид

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{\omega}_1(xu) g(u) \frac{du}{u}.$$

В. п. названо по имени Дж. Ватсона [1], впервые рассмотревшего это преобразование.

Лит.: [1] Watson G. N., «Proc. London Math. Soc.», Ser. 2, 1933, v. 35, p. 156—99.

А. П. Прудников.

ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА МЕТОД — метод представления правой части системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (1)$$

в виде

$$f(t, x) = f_0(t, x) + \varepsilon g(t, x), \quad \varepsilon = 1, \quad g = f - f_0,$$

где f_0 означает главную (в том или ином смысле) часть

вектор-функции f, а g — совокупность членов второстепенного значения. Разбиение f на f_0 и g обычно диктуется физич. или аналитич. смыслом задачи, описываемой системой (1). Наряду с (1) рассматривают систему с параметром

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = f_0(t, x_\varepsilon) + \varepsilon g(t, x_\varepsilon), \qquad (2)$$

к-рая при $\varepsilon = 0$ обращается в вырожденную систему

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t, x_0). \qquad (3)$$

Если $f(t, x)$ и $g(t, x)$ голоморфны в окрестности точки (τ, ξ), то система (2) при достаточно малых по модулю значениях ε имеет решение $x_\varepsilon(t; \tau, \xi)$, $x_\varepsilon(\tau; \tau, \xi) \equiv \xi$, к-рое в окрестности начальных значений (τ, ξ) представимо в виде ряда по степеням ε:

$$x_\varepsilon(t; \tau, \xi) = x_0(t; \tau, \xi) + \varepsilon\varphi_1(t; \tau, \xi) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^n\varphi_n(t; \tau, \xi) + \ldots, \quad \varphi_k(\tau; \tau, \xi) = 0 \qquad (4)$$

(в нек-рых случаях для φ_k задают и ненулевые начальные значения). Если ряд (4) сходится при $\varepsilon = 1$, то он доставляет решение системы (1) с начальными значениями (τ, ξ). Для фактического построения коэффициентов φ_n достаточно располагать общим решением системы (3) и частным решением $z(t; \tau, 0)$ любой системы

$$\frac{dz}{dt} = f_0(t, z) + h(t),$$

где $h(t)$ голоморфна в окрестности $t = \tau$.

В частности, все φ_n последовательно определяются с помощью квадратур, если $f_0(t, x) = Ax$, где A — постоянная матрица.

Особенно широко В. п. м. используется в теории нелинейных колебаний [3] при построении периодич. решений системы (1). См. также *Малого параметра метод*. В. п. м. был использован П. Пенлеве (P. Painlevé) для выделения дифференциальных уравнений 2-го порядка, решения к-рых не имеют подвижных критических особых точек (см. *Пенлеве уравнение*). Справедливо утверждение: системами с неподвижными критич. точками могут быть лишь такие системы (1), к-рые после введения подходящего параметра ε имеют в качестве вырожденных систем (3) системы без подвижных критич. особенностей. В. п. м. широко применяется для построения новых классов существенно нелинейных дифференциальных систем (1) без подвижных критических особых точек и для исследования систем указанных классов (см. *Особая точка дифференциального уравнения*).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., М., 1971, т. 1, с. 9—456; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., М.— Л., 1956, т. II, с. 7—263; [3] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М. — Л., 1950; [5] Еругин Н. П., «Дифференц. уравнения», 1967, т. 3, № 11, с. 1821—63.

Ю. С. Богданов.

ВЕБЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0, \quad \nu = \text{const}; \qquad (*)$$

точка $x = \infty$ является для него сильно особой точкой. Уравнение этого вида впервые было рассмотрено Г. Вебером в теории потенциала в связи с параболич. цилиндром (см. [1]); оно возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в параболич. координатах. В. у. заменой $y = x^{-1/2}w$, $z = x^2/2$ приводится к *Уиттекера уравнению* и представляет собой частный случай *вырожденного гипергеометрического уравнения*. Замена $y = u\exp(-x^2/4)$ приводит В. у. к виду

$$u'' - xu' + \nu u = 0.$$

Решения уравнения (*) наз. функциями параболического цилиндра, или функциями Вебера — Эрмита. В частности, если ν — целое неотрицательное число, то уравнению (*) удовлетворяет функция

$$y = \exp(-x^2/4)\, H_\nu(x),$$

где $H_\nu(x)$ — *Эрмита многочлен* (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] Weber H., «Math. Ann.», 1869, Bd 1, S. 1—36; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968. *Н. Х. Розов.*

ВЕБЕРА ФУНКЦИЯ — функция

$$E_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\, d\theta,$$

где z — комплексное, ν — действительное, удовлетворяющая неоднородному *Бесселя уравнению*:

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)\, y = -\pi^{-1}[(z+\nu) + (z-\nu)\cos\nu\pi].$$

Для нецелых ν справедливо разложение

$$E_\nu(z) = \frac{1-\cos\nu\pi}{\nu\pi}\left[1 - \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} - \dots\right] - \frac{1+\cos\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2} - \frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)} + \frac{z^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)} - \dots\right].$$

При $|z|\to\infty$ и $|\arg z| < \pi/2$ имеет место асимптотич. разложение

$$E_\nu(z) \approx -N_\nu(z) - \frac{1+\cos\nu\pi}{\pi z}\left[1 - \frac{1^2-\nu^2}{z^2} + \frac{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}{z^4} - \dots\right] - \frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5} - \dots\right],$$

где N_ν — *Неймана функция*. Если ν не целое, то В. ф. связана с *Ангера функцией* $\mathbf{J}_\nu(z)$ следующими соотношениями:

$$\sin\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z) = \cos\nu\pi\, E_\nu(z) - E_{-\nu}(z),$$
$$\sin\nu\pi\cdot E_\nu(z) = \mathbf{J}_{-\nu}(z) - \cos\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z).$$

В. ф. впервые изучалась Г. Вебером [1].

Лит.: [1] Weber H. F., «Zürich Vierteljahresschrift», 1879, Bd 24, S. 33—76; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949. *А. П. Прудников.*

ВЕДДЕРБЕРНА — АРТИНА ТЕОРЕМА — теорема, полностью описывающая строение ассоциативных *артиновых колец* без нильпотентных идеалов; ассоциативное кольцо R удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов и не имеет нильпотентных идеалов в том и только том случае, если R есть прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из к-рых изоморфен полному кольцу матриц конечного порядка над подходящим телом, причем это разложение в прямую сумму единственно с точностью до порядка следования слагаемых. Эта теорема получена первоначально Дж. Веддерберном (J. Wedderburn) и доказана в окончательной формулировке Э. Артином [1].

Лит.: [1] Artin E., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 56, № 1, p. 65—72. *К. А. Жевлаков.*

ВЕДДЕРБЕРНА — МАЛЬЦЕВА ТЕОРЕМА: пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F с радикалом N и пусть факторалгебра A/N — *сепарабельная алгебра* (для алгебр над полем характеристики 0 это всегда выполнено); тогда алгебра A разлагается (как линейное пространство) в прямую сумму радикала N и нек-рой полупростой подалгебры S

$$A = N \oplus S,$$

причем, если имеется другое разложение $A = N \dotplus S_1$, где S_1 — полупростая подалгебра, то существует автоморфизм φ алгебры A, отображающий S на S_1 (автоморфизм φ является внутренним, т. е. существуют элементы a, $a' \in A$ такие, что $a \cdot a' - a' \cdot a = 0$ и $x\varphi = a \cdot x \cdot a'$ для всех $x \in A$, где $x \cdot y = x + y + xy$). Существование указанного разложения получено Дж. Веддерберном [1], а единственность (с точностью до автоморфизма) полупростого слагаемого доказана А. И. Мальцевым [2]. Эта теорема вместе с теоремой Веддерберна (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) о строении полупростых алгебр составляет центральную часть классич. теории конечномерных алгебр.

Лит.: [1] Wedderburn J. H. M., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1908, v. 6, p. 77—118; [2] Мальцев А. И., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 1, с. 42—5; [3] Albert A. A., Structure of algebras, N. Y., 1939; [4] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.
Л. А. Бокуть.

ВЕЕР, финитарный поток, — *поток* π такой, что для всякого узла $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ из π существует лишь конечное число натуральных k, для к-рых $\langle n_1, \ldots, n_m, k \rangle$ является узлом π.

На языке формального интуиционистского математич. анализа формула $\mathrm{Fan}(a)$, выражающая понятие «функция a задает В.», записывается в виде

$$\mathrm{Spr}(a) \,\&\, \forall x\,(a(x) = 0 \supset \exists y\, \forall z\,(a(x * \hat{z}) = 0 \supset z \leqslant y)),$$

где $\mathrm{Spr}(a)$ означает «функция a задает поток».

Теорема Брауэра о веере: если имеется правило, согласно к-рому каждому элементу В. сопоставлен нек-рый объект, напр. натуральное число, то найдется натуральное z такое, что для всякого элемента В. этот объект определяется уже первыми z значениями элемента. Теорема Брауэра используется в доказательстве многих специфически интуиционистских фактов, таких, как равномерная непрерывность всякой действительнозначной функции, заданной на отрезке. В формальном интуиционистском математич. анализе теорема Брауэра о В. выводится обычно с помощью *бар-индукции* и принципа непрерывности Брауэра (см. *Интуиционизм*). На языке этой формальной теории теорема о В. может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{Fan}(a) \,\&\, (\forall \alpha \in a)\, \exists x \varphi(\alpha, x) \supset$$

$$\exists z\, (\forall \alpha \in a)\, \exists x\, (\forall \beta \in a)\, (\overline{\alpha}(z) = \overline{\beta}(z) \supset \varphi(\beta, x)).$$

Лит.: [1] Kleene S. C., Vesley R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965.
А. Г. Драгалин.

ВЕЕРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ системы топологических пространств X_α относительно системы непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to X_0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, подмножество $X_\mathfrak{A}$ *тихоновского произведения* $\Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, рассматриваемое в индуцированной топологии и состоящее из таких точек $x = \{x_\alpha\} \in \Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, для к-рых $f_\alpha x_\alpha = f_{\alpha'} x_{\alpha'}$ при любом выборе индексов α и α' из $\mathfrak{A}$. Отображение, ставящее в соответствие точке $x = \{x_\alpha\} \in X_\mathfrak{A}$ точку $x_\alpha \in X_\alpha$ (соответственно точку $f_\alpha x_\alpha \in X_0$), наз. проекцией В. п. $X_\mathfrak{A}$ в X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ (соответственно в X_0). Если пространство X_0 одноточечно, то $X_\mathfrak{A} = \Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$. Если X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — вполне регулярные пространства, то В. п. $X_\mathfrak{A}$ вполне регулярно. В. п., и особенно их частный случай — *частичное произведение*, хорошо приспособлено к построению универсальных (в смысле гомеоморфного вложения) топологич. пространств данного веса и данной размерности (см. *Универсальное пространство*).
Б. А. Пасынков.

ВЕЙБУЛЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — специальный вид распределения вероятностей случайных величин X_w; характеризуется функцией распределения

$$F_w(t,\ p,\ \sigma,\ \mu) = \begin{cases} 1-\exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^p\right\} & \text{при } t>\mu, \\ 0 & \text{при } t\leqslant\mu, \end{cases} \quad (*)$$

где p — параметр формы кривой распределения, σ — параметр масштаба, μ — параметр сдвига. Семейство распределений (*) названо по имени В. Вейбулла [1], впервые использовавшего его для аппроксимации экспериментальных данных о прочности стали на разрыв при усталостных испытаниях и предложившего методы оценки параметров распределения (*). В. р. принадлежит к асимптотич. распределению третьего типа крайних членов вариационного ряда. Оно широко используется для описания закономерностей отказов шарикоподшипников, вакуумных приборов, элементов электроники. Частными случаями В. р. являются экспоненциальное ($p=1$) и рэлеевское ($p=2$) распределения. Кривые функции распределения (*) не принадлежат семейству распределений Пирсона. Имеются вспомогательные таблицы для вычислений функции распределения Вейбулла (см. [2]). При $\mu=0$ квантиль уровня q равна $\sigma[-\ln(1-q)]^{1/p}$,

$$\mathsf{E}X_w^k = \sigma^k\Gamma\left(1+\frac{k}{p}\right), \quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\mathsf{D}X_w = \sigma^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{p}\right)\right],$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; коэффициент вариации, асимметрия и эксцесс не зависят от σ, что облегчает их табулирование и создание вспомогательных таблиц для получения оценок параметров. При $p\geqslant 1$ В. р. унимодально, мода равна $\sigma(p-1)^{1/p}$, а функция опасности отказов $\lambda(t)=pt^{p-1}/\sigma^p$ не убывает. При $p<1$ функция $\lambda(t)$ монотонно убывает. Можно построить так. наз. вероятностную бумагу Вейбулла (см. [3]). На ней $F_w(t,\ p,\ \sigma,\ 0)$ трансформируется в прямую, при $\mu>0$ образ $F_w(t,\ p,\ \sigma,\ \mu)$ имеет вогнутость, а при $\mu<0$ — выпуклость. Оценки параметров В. р. по методу квантилей приводят к уравнениям существенно более простым, чем по методу максимального правдоподобия. Совместная асимптотич. эффективность оценок параметров p и σ (при $\mu=0$) по методу квантилей максимальна (и равна 0,64) при использовании квантилей уровня 0,24 и 0,93. Функция распределения (*) хорошо аппроксимируется функцией распределения логнормального распределения

$$\Phi\left(\frac{\ln(t-b)-a}{c}\right)$$

($\Phi(x)$ — функция распределения нормированного нормального распределения, $-\infty<b<\infty$, $-\infty<a<\infty$, $c>0$):

$$\inf_{p,\ \sigma}\ \sup_{a,\ c}\ \sup_{t}\left|F_w(t,\ p,\ \sigma,\ 0)-\Phi\left(\frac{\ln t-a}{c}\right)\right| =$$

$$= \inf_{a,\ c}\ \sup_{t}\left|F_w(t,\ 1,\ 1,\ 0)-\Phi\left(\frac{\ln t-a}{c}\right)\right| = 0{,}038.$$

Лит.: [1] Weibull W., A statistical theory of the strength of materials, Stockh., 1939; [2] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [3] Johnson L., The statistical treatment of fatigue experiments, Amst., 1964; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

Ю. К. Беляев, Е. В. Чепурин.

ВЕЙЕРШТРАССА КОЛЬЦО — локальное гензелево псевдогеометрическое (см. *Геометрическое кольцо*) кольцо, каждое факторкольцо к-рого по простому идеалу является конечным расширением регулярного локального кольца. В. к. аналитически неприводимо. Любое конечное расширение В. к. есть В. к. Примерами В. к. являются *аналитические кольца* (кольца сходящихся

степенных рядов) над совершенным полем, для к-рых имеет место подготовительная *Вейерштрасса теорема.*

Лит.: [1] Nagata M., Lokal rings, N. Y., 1962; [2] Seydi H., «Bull. Soc. Math. France», 1971, t. 95, p. 227—35.

В. И. Данилов.

ВЕЙЕРШТРАССА КООРДИНАТЫ — один из видов координат в эллиптическом пространстве. Пусть M^n — эллиптическое пространство, а S — изометричное ему пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек единичной сферы S^n $(n+1)$-мерного евклидова пространства. В. к. $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ точки пространства M^n есть декартовы прямоугольные координаты соответствующей ей по изометрии точки сферы S^n. Вследствие неоднозначности изометрич. отображения M^n на S^n В. к. определены с точностью до знака. Гиперплоскость в M^n задается линейным однородным уравнением

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

где $a_i = \text{const} \neq 0$. В. к. названы по имени К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), к-рый пользовался ими в своих лекциях по геометрии Лобачевского в 1872. *Е. В. Шикин.*

ВЕЙЕРШТРАССА КРИТЕРИЙ минимальности поверхности: для того чтобы двумерная поверхность в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 3$, принадлежащая в изотермич. координатах u и v классу C^2, была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы компоненты ее радиус-вектора были гармонич. функциями от (u, v). *И. Х. Сабитов.*

ВЕЙЕРШТРАССА ПРИЗНАК равномерной сходимости — утверждение, дающее достаточные условия равномерной сходимости ряда или последовательности функций посредством сравнения их с соответствующими числовыми рядами и последовательностями; установлен К. Вейерштрассом [1]. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

составленного из действительных или комплексных функций, определенных на нек-ром множестве E, существует числовой сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то исходный ряд сходится равномерно и абсолютно на множестве E. Напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

абсолютно сходится на всей действительной оси, поскольку

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

Если для последовательности действительных или комплексных функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся на множестве E к функции $f(x)$, существует бесконечно малая числовая последовательность α_n такая, что $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, то данная последовательность сходится на множестве E равномерно. Напр., последовательность

$$f_n(x) = 1 - \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$$

равномерно на всей действительной оси сходится к

функции $f(x)=1$, так как

$$|1-f_n(x)|<\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

В. п. равномерной сходимости переносится на функции, значения к-рых лежат в нормированных линейных пространствах.

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1886; Math. Werke, Bd 2, B., 1895.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА — 1) В. т. о бесконечном произведении [1]: для любой наперед заданной последовательности точек плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z

$$0,\ \ldots,\ 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,$$
$$0<|\alpha_k|\leqslant|\alpha_{k+1}|,\quad k=1,\ 2,\ \ldots;\quad \lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\infty, \qquad (1)$$

существует целая функция, имеющая нулями точки α_k этой последовательности и только их. Эта функция может быть построена в виде *канонического произведения*

$$W(z)=z^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{P_k(z)}, \qquad (2)$$

где λ — кратность нуля в последовательности (1), а

$$P_k(z)=\frac{z}{\alpha_k}+\frac{z^2}{2\alpha_k^2}+\ldots+\frac{z^{m_k}}{k\alpha_k^{m_k}}.$$

Множители

$$W\left(\frac{z}{\alpha_k};\ m_k\right)=\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{P_k(z)}$$

наз. первичными, или примарными, множителями Вейерштрасса. Показатели m_k в них выбираются так, чтобы обеспечить сходимость произведения (2), напр., выбор $m_k=k$ обеспечивает сходимость (2) для любой последовательности вида (1).

Из этой теоремы вытекает также, что любая целая функция $f(z)$ с нулями (1) имеет вид

$$f(z)=e^{g(z)}W(z),$$

где $W(z)$ — канонич. произведение (2), а $g(z)$ — нек-рая целая функция (см. также *Адамара теорема* о целых функциях).

В. т. о бесконечном произведении обобщается на случай произвольной области $D\subset\mathbb{C}$: какова бы ни была последовательность точек $\{\alpha_k\}\subset D$, не имеющая предельных точек в D, существует голоморфная в D функция f, имеющая нули в точках α_k и только в них.

Утверждение теоремы в части, касающейся существования целой функции с произвольно заданными нулями, обобщается следующим образом на функции многих комплексных переменных: пусть каждой точке α комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, поставлена в соответствие нек-рая ее окрестность U_α и голоморфная в U_α функция f_α. При этом, если пересечение $U_\alpha\cap U_\beta$ окрестностей точек α, $\beta\in\mathbb{C}^n$ не пусто, то отношение $f_\alpha/f_\beta\neq 0$ в $U_\alpha\cap U_\beta$ есть голоморфная функция. При этих условиях существует целая функция f в $\mathbb{C}^n$ такая, что отношение f/f_α есть голоморфная функция в любой точке $\alpha\in\mathbb{C}^n$. Это утверждение известно как вторая теорема Кузена (см. также *Кузена проблемы*).

Лит.: [1] Weierstrass K., Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1 2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

2) В. т. о приближении функций: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраич. многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции $f(x)$; установлена К. Вейерштрассом [1].

Аналогичные результаты имеют место во всех пространствах $L_p[a, b]$. Усилением этой В. т. является *Джексона теорема*.

Эта теорема справедлива также для действительных непрерывных 2π-периодич. функций и тригонометрич. полиномов или, напр., для действительных функций, непрерывных на ограниченной замкнутой области m-мерного пространства, и многочленов от m переменных. Об обобщениях см. *Вейерштрасса — Стоуна теорема*. О приближении функций комплексного переменного многочленами см. [3].

Лит.: [1] Weierstrass K., «Sitzungsber. Acad. Berlin», 1885, S. 633—9, 789—805; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976. *Ю. И. Субботин.*

3) В. т. о равномерно сходящихся рядах аналитических функций [1]: если члены ряда

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z), \qquad (*)$$

равномерно сходящегося внутри области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являются аналитич. функциями в D, то его сумма $s(z)$ также является аналитич. функцией в D. Кроме того, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m)}(z),$$

полученные m-кратным почленным дифференцированием ряда (*) при любом m, также равномерно сходятся внутри D к производным $s^{(m)}(z)$ от суммы ряда (*). Эта теорема обобщается на ряды аналитич. функций многих комплексных переменных, равномерно сходящиеся внутри области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, причем ряды, составленные из частных производных любого порядка от членов ряда (*), сходятся равномерно к соответствующим частным производным от суммы ряда:

$$\frac{\partial^m s(z)}{\partial z_1^{m_1}\, \partial z_2^{m_2} \ldots \partial z_n^{m_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^m u_k(z)}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \ldots \partial z_n^{m_n}},$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Е. Д. Соломенцев.

4) В. т. о равномерной сходимости на границе области [1]: если члены ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$$

непрерывны в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и аналитичны в D, то из равномерной сходимости этого ряда на границе области D вытекает его равномерная сходимость в замкнутой области $\overline{D}$.

Это свойство рядов, составленных из аналитич. функций, остается справедливым и для аналитич. или гармонич. функций, заданных соответственно в областях комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, или евклидова пространства E^n, $n \geqslant 2$. Вообще, оно остается справедливым в любой ситуации, где применим *максимума модуля принцип*.

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1860; Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2 изд., пер. с англ., ч. 1, М., 1963, гл. 3; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3, т. 2, М., 1968, гл. 7. *Е. Д. Соломенцев.*

5) В. т. подготовительная — теорема, полученная К. Вейерштрассом [1] и сформулированная им первоначально в 1860 как подготовительная лемма при доказательстве существования и аналитичности неявной функции комплексного переменного, определяемой уравнением $f(z, w) = 0$, левая часть к-рого есть голоморфная функция двух комплексных переменных. Эта теорема обобщает на функции многих комплексных переменных следующее важное свойство голоморфных

функций одного комплексного переменного: если $f(z)$ — голоморфная функция от z в окрестности начала координат и $f(0)=0$, $f(z)\not\equiv 0$, то она представима в виде $f(z)=z^s g(z)$, где s — кратность нуля $f(z)$ в начале координат, $s\geqslant 1$, а голоморфная функция $g(z)$ отлична от нуля в нек-рой окрестности начала.

Формулировка подготовительной теоремы Вейерштрасса для функций n комплексных переменных, $n\geqslant 1$. Пусть

$$f(z)=f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

— голоморфная функция от $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в поликруге

$$U=\{z; |z_i|<a_i, \quad i=1, 2, \ldots, n\},$$

причем

$$f(0)=0, \quad f(0, 0, \ldots, 0, z_n)\not\equiv 0.$$

Тогда в некотором поликруге

$$V=\{z; |z_i|<b_i\leqslant a_i, \quad i=1, 2, \ldots, n\}$$

функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=[z_n^s+f_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})z_n^{s-1}+\ldots \\ \ldots+f_s(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})]\,g(z)$$

где s — кратность нуля функции

$$f(z_n)=f(0, 0, \ldots, 0, z_n)$$

в начале координат, $s\geqslant 1$; функции $f_j(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ голоморфны в поликруге

$$V'=\{(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}); \ |z_i|<b_i, \ i=1, 2, \ldots, n-1\},$$
$$f_j(0, 0, \ldots, 0)=0, \quad j=1, 2, \ldots, s;$$

функция $g(z)$ голоморфна и не обращается в нуль в поликруге V. Функции $f_j(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, $j=1, 2, \ldots, s$, и $g(z)$ определяются условиями теоремы однозначно.

Вместо начала координат можно принять, изменив соответственно формулировку, любую точку $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Из подготовительной В. т. вытекает, что при $n>1$, в отличие от случая одного комплексного переменного, во всякой окрестности любого нуля голоморфной функции находится бесконечное множество других ее нулей.

Подготовительная В. т. имеет чисто алгебраич. природу и может быть сформулирована для формальных степенных рядов. Пусть $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$ — кольцо формальных *степенных рядов* от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ с коэффициентами из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$; f — такой ряд из этого кольца, члены к-рого имеют низшую степень $s\geqslant 1$, причем существует член вида cz_n^s, $c\neq 0$. Тогда f можно представить в виде

$$f=(z_n^s+f_1z_n^{s-1}+\ldots+f_s)g,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_s$ — ряды из кольца $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]]$, свободные члены к-рых равны нулю, а g — ряд из $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$ со свободным членом, отличным от нуля. Формальные степенные ряды $f_1, f_2, \ldots, f_s$ и g определяются по f однозначно.

Иногда подготовительной В. т. наз. следующее утверждение о делении: пусть ряд

$$f\in\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$$

удовлетворяет только что указанным условиям, g — любой ряд из $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$. Тогда существуют такой ряд

$$h\in\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$$

и такие ряды

$$a_j\in\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]], \quad a_j(0, 0, \ldots, 0)=0, \\ j=0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

для к-рых выполняется равенство

$$g = hf + a_0 + a_1 z_n + \ldots + a_{s-1} z_n^{s-1}.$$

Подготовительная В. т. верна также для колец формальных ограниченных рядов. Она дает способ индуктивного перехода, напр., от $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]]$ к $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$. Таким образом удается установить нек-рые свойства колец $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ и $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$, напр., нётеровость и факториальность. Имеется обобщение этой теоремы для дифференцируемых функций (см. [6]).

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1860; Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1–2, 2 изд., М., 1976; [3] Бохнер С., Мартин У., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951, гл. 9; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969, гл. 2; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 2; [6] Мальгранж Б., Идеалы дифференцируемых функций, пер. с англ., М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЕЙЕРШТРАССА ТОЧКА — точка на алгебраич. кривой (или римановой поверхности) X рода g, удовлетворяющая следующему условию: существует рациональная непостоянная функция на X, имеющая в этой точке полюс порядка не больше g и не имеющая особенностей в остальных точках X. На X может существовать только конечное число В. т., причем для g, равного 0 и 1, их нет совсем, а для $g \geqslant 2$ В. т. всегда существуют. Для римановых поверхностей эти результаты были получены К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). Для алгебраич. кривых рода $g \geqslant 2$ всегда существует не менее $2g+2$ В. т., причем точно $2g+2$ их имеется только для гиперэллиптич. кривых. Верхняя граница для числа В. т. равна $(g-1)g(g+1)$. Наличие В. т. на алгебраич. кривой X рода $g \geqslant 2$ гарантирует существование морфизма степени не выше g кривой X на прямую P^1.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960. *В. Е. Воскресенский.*

ВЕЙЕРШТРАССА УСЛОВИЯ экстремума — необходимое и (отдельно) достаточное условия сильного экстремума в классическом вариационном исчислении. Предложены К. Вейерштрассом (K. Weierstrass, 1879).

Необходимое условие Вейерштрасса: для того чтобы функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

достигал локального сильного минимума на экстремали $x_0(t)$, необходимо, чтобы для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнялось неравенство

$$\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \xi) \geqslant 0,$$

где $\mathcal{E}$ — *Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция*. Это условие может быть выражено через функцию

$$\Pi(t, x, p, u) = (p, u) - L(t, x, u)$$

(см. *Понтрягина принцип максимума*). В. у. ($\mathcal{E} \geqslant 0$ на экстремали $x_0(t)$) эквивалентно тому, что функция

$$\Pi(t, x_0(t), p_0(t), u), \text{ где } p_0(t) = L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)),$$

достигает максимума по u при $u = \dot{x}_0(t)$. Тем самым необходимое В. у. оказывается частным случаем принципа максимума Понтрягина.

Достаточное условие Вейерштрасса: для того чтобы функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

достигал локального сильного минимума на вектор-функции $x_0(t)$ достаточно, чтобы в окрестности G кривой $x_0(t)$ нашлась вектор-функция $U(t, x)$ наклона

поля (геодезич. наклона) (см. *Гильберта инвариантный интеграл*), для к-рой

$$\dot{x}_0(t) = U(t, x_0(t))$$

и

$$\mathscr{E}(t, x, U(t, x), \xi) \geqslant 0$$

для всех $(t, x) \in G$ и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА ФОРМУЛА для приращения функционала — формула классич. вариационного исчисления, задающая значения функционала

$$J(x) - \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

в виде криволинейного интеграла от *Вейерштрасса $\mathscr{E}$-функции*. Пусть вектор-функция $x_0(t)$ является *экстремалью* функционала $J(x)$ и при этом она включена в поле экстремалей с вектор-функцией наклона поля $U(t, x)$ и действием $S(t, x)$, соответствующим этому полю (см. *Гильберта инвариантный интеграл*). Для любой кривой γ $x(t)$, лежащей в области, покрытой полем, имеет место В. ф.:

$$J(x) = S(t_1, x(t_1)) - S(t_0, x(t_0)) + \int_\gamma \mathscr{E}(t, x, U(t, x), \dot{x})\, dt. \qquad (1)$$

В частности, если граничные условия кривых γ $x(t)$ и γ_0 $x_0(t)$ совпадают, т. е. если $x(t_i) = x_0(t_i)$, $i = 0, 1$, то получается В. ф. для приращения функционала:

$$\Delta J = J(x) - J(x_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{E}(t, x(t), U(t, x(t)), \dot{x}(t))\, dt. \qquad (2)$$

Иногда формулы (1) и (2) наз. основной теоремой Вейерштрасса.

Лит.: [1] Caratheodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.—Lpz., 1935; [2] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА $\mathscr{E}$-ФУНКЦИЯ в классическом вариационном исчислении — функция, выделяющая главную часть приращения функционала при варьировании экстремали при помощи локальной (игольчатой) вариации с заданным значением ее производной в фиксированной точке экстремали. Для функционала

$$J(x) - \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\mathscr{E}$-функция имеет вид

$$\mathscr{E}(t, x, \dot{x}, x') =$$
$$= -L(t, x, x') - L(t, x, \dot{x}) - (x' - \dot{x}, L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})). \qquad (1)$$

Если ввести функцию

$$\Pi(t, x, p, x') = (p, x') - L(t, x, x')$$

(см. *Лежандра преобразование*, *Понтрягина принцип максимума*), то $\mathscr{E}$-функция принимает вид

$$\mathscr{E}(t, x, \dot{x}, x') = \Pi(t, x, p, \dot{x}) - \Pi(t, x, p, x'),$$

где $p = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$. Общая конструкция, приводящая к функциям, аналогичным $\mathscr{E}$-функции (1), состоит в следующем. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая или выпуклая функция, заданная в банаховом пространстве

X, и X^* — сопряженное пространство. Если функция $\Pi : X^* \times X \to R$ определяется равенством

$$\Pi(x^*, x') = \langle x^*, x' \rangle - f'(x'),$$

где x^* — производная $f'(x)$ функции f в точке x (или элемент субдифференциала, если f выпукла), то функция

$$\mathscr{E}(x, x', x^*) = \Pi(x^*, x) - \Pi(x^*, x')$$

есть $\mathscr{E}$-функция, построенная по f. В случае, если f дифференцируема,

$$\mathscr{E}(x, x') = f(x') - f(x) - \langle x' - x, f'(x) \rangle, \qquad (2)$$

т. е. $\mathscr{E}$-функция есть разность в точке x' между функцией f и линейной функцией, касательной к f в x. Сравнение формул (1) и (2) показывает, что $\mathscr{E}$-функция в классич. вариационном исчислении получается из конструкции (2) относительно переменных, связанных с производными, а переменные t, x играют роль параметров.

Для случая функционала

$$\int_T L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad t = (t_1, \ldots, t_m), \quad T \subset \mathbb{R}^m,$$
$$L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \dot{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_m} \right)$$

многомерной вариационной задачи $\mathscr{E}$-функция имеет вид

$$\mathscr{E}(t, x, z, z') = L(t, x, z') - L(t, x, z) - (z' - z, L_z(t, x, z)).$$

Для *Лагранжа задачи* с ограничениями $\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0$ и множителями Лагранжа $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, s$, $\mathscr{E}$-функция имеет вид (1), где L заменяется на

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i.$$

$\mathscr{E}$-функция была впервые введена К. Вейерштрассом в 1879 (см. [1]) и лежит в основе теории вариационного исчисления. В терминах $\mathscr{E}$-функции формулируются необходимое и (отдельно) достаточное условия экстремума (см. *Вейерштрасса условия*), через $\mathscr{E}$-функции выражается в виде конечного интеграла приращение функционала J на экстремали (см. *Вейерштрасса формула* для приращения функционала).

Особенно важную роль в вариационном исчислении играют гладкие функционалы, у к-рых в нек-рой области параметров $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x') \geqslant 0$ для всех $\dot{x}$, x', или, сильнее, если $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x') > 0$ для всех $\dot{x} \neq x'$. Они наз. квазирегулярными (соответственно регулярными, или эллиптическими). Для них всегда выполнены *Лежандра условие* и необходимое *Вейерштрасса условие*, а также справедливы теоремы существования и регулярности [7].

Лит.: [1] Weierstrass K., Vorlesungen über Variationsrechnung (Math. Werke, Bd 7), Lpz., 1927; [2] Caratheodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.—Lpz., 1935; [3] Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Lpz., 1949; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [5] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [6] Hestenes M. R., Calculus of variations and optimal control theory, N. Y.— L., 1966; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] Блисс Г., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА $\wp$-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА ζ-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА σ-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, положенные К. Вейерштрассом в основу его общей теории *эллиптических функций*, излагавшейся им с 1862 на лекциях в Берлинском университете (см.

[1], [2]). В отличие от более раннего построения теории эллиптич. функций, связанного с именами А. Лежандра (A. Legendre), Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi), в основу к-рого были положены эллиптич. функции 2-го порядка, имеющие в параллелограмме периодов два простых полюса, основная В. э. ф. имеет в параллелограмме периодов один полюс 2-го порядка. В теоретич. отношении теория Вейерштрасса более проста, так как исходная в этой теории функция $\wp(z)$ и ее производная служат образующими алгебраич. поля эллиптич. функций с заданными примитивными периодами.

П э-ф у н к ц и я ($\wp$-ф у н к ц и я) В е й е р ш т р а с с а $\wp(z)$ ($\wp$ — з н а к В е й е р ш т р а с с а, стилизованная буква «пэ») для заданных примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\operatorname{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$, определяется рядом

$$\wp(z)=\wp(z;\,2\omega_1,\,2\omega_3)=$$
$$=\frac{1}{z^2}+\sum\nolimits'_{m_1,\,m_3=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(z-2\Omega_{m_1,\,m_3})^2}-\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\,m_3})^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{z^2}+c_2z^2+c_4z^4+\ldots, \qquad (1)$$

где $2\Omega_{m_1,\,m_3}=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3$ и целые числа m_1, m_3 пробегают все значения, кроме пары $m_1=m_3=0$. Функция $\wp(z)$ есть четная эллиптич. функция порядка 2, имеющая в каждом параллелограмме периодов единственный полюс 2-го порядка с нулевым вычетом. Ее производная $\wp'(z)$ есть нечетная эллиптич. функция порядка 3 с теми же примитивными периодами; $\wp'(z)$ имеет простые нули в точках, конгруэнтных $2\omega_1$, $2\omega_2=2\omega_1+2\omega_3$, $2\omega_3$. Наиболее важное свойство функции $\wp(z)$ состоит в том, что любая эллиптич. функция с данными примитивными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ может быть представлена в виде рациональной функции от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, т. е. $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ являются образующими алгебраич. поля эллиптич. функций с данными периодами. Среди однопериодических тригонометрич. функций аналогом функции $\wp(z)$ служит $1/\sin^2 z$.

Функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3\equiv$$
$$\equiv 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3],\quad e_1+e_2+e_3=0, \qquad (2)$$

в к-ром *модулярные формы*

$$g_2=20c_2=60\sum\nolimits'_{m_1,\,m_3=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\,m_3})^4},$$
$$g_3=28c_4=140\sum\nolimits'_{m_1,\,m_3=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\,m_3})^6}$$

наз. о т н о с и т е л ь н ы м и и н в а р и а н т а м и, а величины $e_1=\wp(2\omega_1)$, $e_2=\wp(2\omega_2)$, $e_3=\wp(2\omega_3)$ — и р р а ц и о н а л ь н ы м и и н в а р и а н т а м и функции $\wp(z)$. А б с о л ю т н ы м и н в а р и а н т о м функции $\wp(z)$ наз. всякая рациональная функция от $j=g_2^3/g_3^2$ или от $J=g_2^3/\Delta$, где $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ есть д и с к р и м и н а н т. Имеется в виду инвариантность относительно модулярных преобразований (см. *Модулярная функция*). В приложениях обычно g_2 и g_3 — действительные; если при этом $\Delta>0$, то e_1, e_2, e_3 — также все действительные. Уравнение (2) показывает, что $\wp(z)$ может быть определена как обращение *эллиптического интеграла* I рода в нормальной форме Вейерштрасса:

$$u=-\int_{(z,\,w)}^{x}\frac{dz}{w},\quad w^2=4z^3-g_2z-g_3.$$

Функция $\wp(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно параллелограмм периодов на канонически разрезанную двулистную компактную риманову поверхность F с точками ветвления e_1, e_2, e_3, ∞ рода 1; поверхность F иногда наз. э л л и п т и ч е с к и м о б р а-

зом. На главной накрывающей поверхности F указанный интеграл I рода однозначен и является униформизирующей переменной для F.

Эллиптич. интеграл II рода поля эллиптич. функций с данными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ при этой униформизации переходит в дзета-функцию (ζ-функцию) Вейерштрасса $\zeta(z)$, определяемую рядом

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum\nolimits'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{z-2\Omega_{m_1,\ m_3}}+\frac{1}{2\Omega_{m_1,\ m_3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^2}\right]. \qquad (3)$$

Функция $\zeta(z)$ — нечетная мероморфная функция, связанная с $\wp(z)$ соотношением $\zeta'(z)=-\wp(z)$; она не является периодической и при добавлении периодов преобразуется по закону $\zeta(z\pm2\omega_i)=\zeta(z)\pm2\eta_i$, где $\eta_i=\zeta(\omega_i)$. При этом между ω_1, ω_3, η_1, η_3 имеет место соотношение Лежандра

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2},$$

равносильное соотношению между полными эллиптич. интегралами:

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}.$$

Произвольная эллиптич. функция $f(z)$ с данными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ выражается через $\zeta(z)$ по формуле Эрмита:

$$f(z)=C+\sum\nolimits_{k=1}^{s}\left[B_1^k\,\zeta(z-b_k)-B_2^k\,\zeta'(z-b_k)+\right.$$
$$+\frac{B_3^k}{2!}\,\zeta''(z-b_k)-\ldots+$$
$$\left.+(-1)^{\nu_k-1}\frac{B_{\nu_k}^k}{(\nu_k-1)!}\,\zeta^{(\nu_k-1)}(z-b_k)\right], \qquad (4)$$

где C — постоянная, b_1, b_2, ..., b_s — полная система полюсов функции $f(z)$, числа B_1^k, B_2^k, ..., $B_{\nu_k}^k$ — коэффициенты главной части разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности полюса b_k. Разложение (4) есть аналог разложения произвольной рациональной функции на простейшие дроби. Среди тригонометрич. функций аналогом функции $\zeta(z)$ является $\operatorname{ctg} z$.

Сигма-функция (σ-функция) Вейерштрасса $\sigma(z)$ определяется как бесконечное произведение

$$\sigma(z)$$
$$=z\prod\nolimits'_{m_1,m_3=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{2\Omega_{m_1,\ m_3}}\right)e^{\frac{z}{2\Omega_{m_1,m_3}}+\frac{z^2}{8\Omega^2_{m_1,\ m_3}}}.$$

Функция $\sigma(z)$ есть нечетная целая функция с нулями $2\Omega_{m_1,\ m_3}$, связанная с функциями $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ соотношениями:

$$\frac{d^2\ln\sigma(z)}{dz^2}=-\wp(z),\qquad \frac{d\ln\sigma(z)}{dz}=\zeta(z);$$

она не является двоякопериодической; имеют место тождества:

$$\sigma(z+2\Omega_{mn})=(-1)^{m+n+mn}\,\sigma(z)\,e^{H_{mn}(z+\Omega_{mn})},$$

где

$$H_{mn}=2m\eta_1+2n\eta_3,\qquad \eta_i=\zeta(\omega_i)=\frac{\sigma'(\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}.$$

Произвольная эллиптич. функция $f(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ выражается через $\sigma(z)$ в виде:

$$f(z)\quad C\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_s)},$$

где C — постоянная; a_1, a_2, ..., a_s, b_1, b_2, ..., b_s — нулевая полная система нулей и полюсов функции

$f(z)$. Среди тригонометрич. функций аналогом функции $\sigma(z)$ является $\sin z$.

В теории Вейерштрасса имеют также значение с и г м а-ф у н к ц и и с и н д е к с а м и:

$$\sigma_i(z) = \frac{\sigma(z+\omega_i)}{\sigma(\omega_i)} e^{-\eta_i z}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Функции $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ выражаются через *тета-функции* $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ (см. *Якоби эллиптические функции*), а функция $\wp(z)$ просто выражается через $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$, что составляет вычислительный базис функций Вейерштрасса. Можно получить и непосредственное выражение В. э. ф. через эллиптич. функции Якоби, напр. в виде:

$$\wp(z+\omega_3) = e_1 + (e_3 - e_1)\,\mathrm{dn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right),$$
$$\wp(z+\omega_3) = e_2 - (e_3 - e_2)\,\mathrm{cn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right),$$
$$\wp(z+\omega_3) = e_3 - (e_2 - e_3)\,\mathrm{sn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right).$$

В прикладных вопросах обычно заданы относительные инварианты g_2, g_3. При этом для вычисления примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ используется абсолютный инвариант $J = g_2^3/\Delta$, к-рый является модулярной функцией от отношения периодов $\tau = \omega_3/\omega_1$ (см. также *Модулярная функция*).

Лит.: [1] Weierstrass K., Mathematische Werke, Bd 1—2, B., 1894—95; [2] Schwarz H. A., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, 2 Aufl., B., 1893; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, М., 1968, ч. 2; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 20; [5] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЕЙЕРШТРАССА — СТОУНА ТЕОРЕМА — широкое обобщение классической *Вейерштрасса теоремы* о приближении функций, принадлежащее М. Стоуну (M. Stone, 1935). Пусть $C(X)$ — кольцо непрерывных функций на бикомпакте X с топологией равномерной сходимости, порожденной нормой

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in C(X),$$

и пусть $C_0 \subseteq C(X)$ есть подкольцо, содержащее все константы и разделяющее все точки из X, т. е. для любых двух различных точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ существует функция $f \in C_0$, для к-рой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $[C_0] = C(X)$, т. е. всякая непрерывная функция на X есть предел равномерно сходящейся последовательности функций из C_0. *В. И. Пономарев.*

ВЕЙЕРШТРАССА — ЭРДМАНА УГЛОВЫЕ УСЛОВИЯ — дополнительные к *Эйлера уравнению* необходимые условия экстремума, задаваемые в точках, где экстремаль имеет излом. Пусть

$$J(x) = \int L(t,\ x,\ \dot{x})\,dt$$

— функционал классического вариационного исчисления, а *экстремаль* $x_0(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки τ за исключением самой точки τ, где $x_0(t)$ имеет разрыв. Тогда для того чтобы $x_0(t)$ давала хотя бы слабый локальный экстремум функционалу $J(x)$ необходимо, чтобы в угловой точке τ выполнялись равенства

$$p(\tau - 0) = p(\tau + 0),$$
$$H(\tau - 0) = H(\tau + 0),$$

где

$$p(t) = \frac{\partial L(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t))}{\partial \dot{x}},$$

а

$$H(t) = (\dot{x}_0(t),\ p(t)) - L(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t)).$$

Эти равенства и наз. у г л о в ы м и у с л о в и я м и

Вейерштрасса — Эрдмана (К. Вейерштрасс, К. Weierstrass, 1865; Г. Эрдман, 1877, см. [1]).

В.—Э. у. у. означают непрерывность в угловой точке экстремали канонич. переменных и гамильтониана; в классич. механике они означают непрерывность в угловой точке импульсов и энергии.

В регулярных задачах, когда L — строго выпуклая по $\dot{x}$ функция, экстремали не могут иметь угловых точек. Угловые точки появляются, когда $L(t, x, \dot{x})$, а следовательно, и *Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция* содержат отрезки по $\dot{x}$. В случае, когда рассматривается *Лагранжа задача* с ограничениями $\varphi_i(t, x, \dot{x}) \leqslant 0$ и *Лагранжа множителями* $\lambda_i(t)$, L в В.—Э. у. у. заменяется на $\tilde{L}=L+\sum_i \lambda_i \varphi_i$.

Лит.: [1] Erdmann G., «J. für Math.», 1877, Bd 82, S. 21–30; [2] Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Lpz., 1949, S. 367; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955, с. 17–18. *В. М. Тихомиров.*

ВЕЙЛЯ ГРУППА — 1) В. г. симметрий *корневой системы*. В зависимости от конкретной реализации корневой системы рассматривают и различные В. г.; так возникают В. г. полупростой расщепляемой алгебры Ли, В. г. симметрич. пространства, В. г. алгебраич. группы.

Пусть G — связная аффинная алгебраич. группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k. В. г. группы G относительно тора $T \subset G$ наз. факторгруппа

$$W(T, G) = N_G(T)/Z_G(T),$$

рассматриваемая как группа автоморфизмов тора T, индуцированных сопряжениями T с помощью $N_G(T)$. Здесь $N_G(T)$ — нормализатор, а $Z_G(T)$ — централизатор подгруппы T в G. Группа $W(T, G)$ конечна. Если T_0 максимальный тор, то $W(T_0 G)$ наз. группой Вейля $W(G)$ алгебраической группы G. Это определение (с точностью до изоморфизма) не зависит от выбора максимального тора T_0. Действие с помощью сопряжений группы $N_G(T_0)$ на множестве B^{T_0} *Бореля подгрупп* в G, содержащих T_0, индуцирует просто транзитивное действие $W(T_0, G)$ на B^{T_0}. Действие T на G сопряжениями индуцирует присоединенное действие T на алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Пусть $\Phi(T, G)$ — множество ненулевых весов весового разложения $\mathfrak{G}$ относительно этого действия, т. е. $\Phi(T, G)$ — корневая система $\mathfrak{G}$ относительно T (см. *Вес* представления). $\Phi(T, G)$ является подмножеством в группе $X(T)$ рациональных характеров тора T, причем $\Phi(T, G)$ инвариантно относительно действия $W(T, G)$ на $X(T)$.

Пусть G — редуктивная группа, $Z(G)^0$ — связная компонента единицы ее центра и T_0 — максимальный тор. Векторное пространство

$$X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}} = X(T_0/Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

канонически отождествляется с подпространством в векторном пространстве

$$X(T_0)_{\mathbb{Q}} = X(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Множество $\Phi(T_0, G)$ (как подмножество в $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$) является приведенной системой корней в $X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}}$, причем естественное действие $W(T_0, G)$ на $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$ определяет изоморфизм $W(T_0, G)$ с В. г. корневой системы $\Phi(T_0, G)$. Таким образом, $W(T_0, G)$ обладает всеми свойствами В. г. приведенной корневой системы, напр. она порождается *отражениями*.

Как обобщение этой ситуации возникает В. г. системы Титса (ее точное определение см. *Титса система*).

Группа Вейля W конечномерной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над алгебра-

ически замкнутым полем нулевой характеристики определяется как В. г. ее присоединенной группы. Присоединенное действие W в подалгебре Картана $\mathfrak{P}$ алгебры $\mathfrak{G}$ является точным представлением W; группу W часто отождествляют с образом этого представления, рассматривая ее как соответствующую линейную группу в $\mathfrak{P}$, порожденную отражениями. Понятие «В. г.» впервые появилось в работе Г. Вейля [1] для частного случая рассматриваемых здесь алгебр - для конечномерной полупростой алгебры Ли над полем комплексных чисел. В. г. может быть определена и для любой расщепляемой полупростой конечномерной алгебры Ли как В. г. ее корневой системы.

Для аффинной алгебраич. группы G, определенной над алгебраически незамкнутым полем, может быть определена относительная В. г. А именно, если T — максимальный разложимый над k тор группы G, то факторгруппа $N_G(T)\,Z_G(T)$ (нормализатора тора T по его централизатору в G), рассматриваемая как группа автоморфизмов T, индуцированных сопряжениями T с помощью элементов из $N_G(T)$, наз. относительной группой Вейля группы G.

О В. г. симметрического пространства см. *Симметрическое пространство*. В. г. действительной связной некомпактной полупростой алгебраич. группы совпадает с В. г. соответствующего симметрического пространства. Об аффинной В. г. см. *Корневая система*.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1925, Bd 23, S. 271—309; 1925, Bd 24, S. 328—95; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972; [5] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111, № 2, с. 3—31; [6] Брюа Ф., Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 19—33; [7] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

В. Л. Попов.

2) В. г. компактной связной группы Ли G — факторгруппа $W=N/T$, где N — нормализатор в G нек-рого максимального тора T группы G. В. г. изоморфна нек-рой конечной группе линейных преобразований алгебры Ли t группы T (изоморфизм осуществляется с помощью присоединенного представления N в t) и может быть охарактеризована с помощью корневой системы Δ алгебры Ли g группы G (относительно t), а именно: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней алгебры, являющихся линейными формами на действительном векторном пространстве t, то В. г. порождается отражениями в гиперплоскостях $\alpha_i(x)\ 0$. Таким образом, W является группой Вейля системы Δ (как линейная группа в t). W просто транзитивно действует на множестве всех *камер* системы Δ (называемых в данном случае камерами Вейля). Следует отметить, что N не является, вообще говоря, полупрямым произведением W и T; все случаи, когда это так, изучены. В. г. группы G изоморфна В. г. соответствующей комплексной полупростой алгебраич. группы $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация группы Ли*).

А. С. Феденко.

ВЕЙЛЯ КОГОМОЛОГИИ — когомологии алгебраич. многообразий с коэффициентами в поле нулевой характеристики, обладающие формальными свойствами, необходимыми для получения *Лефшеца формулы* для числа неподвижных точек. Необходимость такой теории была высказана А. Вейлем [1], показавшим, что рациональность *дзета-функций* многообразия и L-функций многообразия над конечным полем следует из формулы Лефшеца, а остальные гипотезы о ζ-функции естественно формулируются в когомологических терминах. Пусть многообразие X есть связная гладкая проективная схема над фиксированным алгебраически замкнутым полем k и пусть K — некоторое поле характеристики 0. Тогда когомологиями Вейля с полем коэффициентов K называется контравари-

антный функтор $X \to H^*(X)$ из категории многообразий в категорию конечномерных градуированных антикоммутативных K-алгебр, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Если $n = \dim X$, то $H^{2n}(X)$ изоморфно K, и отображение

$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n}(X),$$

определенное умножением в $H^*(X)$, невырождено при всех i;

2) $H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \simeq H^*(X \times Y)$ (формула Кюннета);

3) Отображение циклов. Существует функториальный гомоморфизм γ_X группы $C^p(X)$ алгебраич. циклов X коразмерности p в $H^{2p}(X)$, переводящий прямое произведение циклов в тензорное произведение, и нетривиальный в том смысле, что (для точки P) γ_P превращается в канонич. вложение $\mathbb{Z}$ в K.

$$b_i(X) = \dim_K H^i(X)$$

наз. i-м числом Бетти многообразия X.

Примеры. Если $k = \mathbb{C}$, то классические когомологии комплексных многообразий с коэффициентами в $\mathbb{C}$ являются В. к. Если l — простое число, отличное от характеристики поля k, то этальные l-адические когомологии

$$X \mapsto \{\lim_{\nu} H^*_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}/l^\nu \mathbb{Z})\} \otimes_{\mathbb{Z}_l} Q_l$$

являются В. к. с коэффициентами в поле Q_l. Для В.к. верна формула Лефшеца

$$\langle u \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(u_i),$$

где $\langle u \cdot \Delta \rangle$ — индекс пересечения в $X \times X$ графика Γ морфизма u с диагональю $\Delta \subset X \times X$, интерпретируемый также как число неподвижных точек эндоморфизма u, а $\operatorname{Tr}(u_i)$ — след эндоморфизма u_i, являющегося ограничением u на $H^i(X)$. Более того, эта формула верна также для соответствий, т. е. элементов $u \in H^{2n}(X \times X)$.

Лит.: [1] Weil A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 55, p. 497–508; [2] Dix exposes sur la cohomologie des schemas, P., 1968, p. 359–86.

В. И. Данилов.

ВЕЙЛЯ КРИТЕРИЙ — основной критерий, с помощью к-рого для бесконечной последовательности (x_n) любых действительных чисел x_n решается вопрос о ее равномерном распределении по mod 1, т. е. устанавливается существование предела:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n \leqslant N,\ \alpha \leqslant \{x_n\} < \beta} \frac{1}{N} \right) = \beta - \alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $\{x_n\}$ — дробная часть x_n. По В. к. последовательность $\{x_n\}$ тогда и только тогда равномерно распределена по mod 1, когда

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi i m x_n) = 0$$

для всех целых $m \neq 0$. В. к. доказан Г. Вейлем (H. Weyl, 1916). См. *Вейля метод*.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ МЕТОД в теории чисел — метод для получения нетривиальных оценок тригонометрич. сумм вида

$$S(f) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i f(x)}, \qquad (1)$$

где

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

а $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — любые действительные числа. В. м. был разработан Г. Вейлем [1] для установления критериев равномерного распределения (см. *Вейля критерий*).

Сущность В. м. заключается в следующем. Сумма (1) возвышается в степень $\rho_0 = 2^{n-1}$ путем последова-

тельных возвышений в квадрат с целью понижения степени многочлена $f(x)$. Напр., на первом шаге

$$S^2(f) = \sum_{\lambda_1 \neq 0} \sum_x e^{2\pi i (f(x+\lambda_1) - f(x))} + O(P),$$

где суммирования производятся по интервалам длины $\leqslant P$,

$$f(x+\lambda_1) - f(x) = n\alpha_n \lambda_1 x^{n-1} + \dots$$

является многочленом степени $n-1$ относительно x (символы $O(P)$, $\leqslant P$ обозначают величины порядка P). На $(n-1)$-м шаге приходят к внутренней сумме

$$S(\alpha) = \sum_{x=a+1}^{a+P_1} e^{2\pi i \alpha x}, \qquad (2)$$

где $P_1 \leqslant P$, $\alpha - n!\,\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{n-1}\alpha_n$, $\lambda_i \neq 0$. Суммы вида (2) оцениваются с помощью неравенства:

$$|S(\alpha)| \leqslant \min\left(P_1, \frac{1}{|\sin \pi\alpha|}\right).$$

В результате получается оценка:

$$|S(f)|^{\rho_0} \leqslant P^{\rho_0 - 1} + P^{\rho_0 - n + \varepsilon} \sum_{0 < y \leqslant P^{n-1}} \min\left(P_1, \frac{1}{|\sin \pi y \alpha_n|}\right). \qquad (3)$$

Из неравенства (3) выводятся различные оценки суммы (1) в случае, когда $\frac{1}{|\sin \pi y \alpha_n|}$ будет величиной малой по сравнению с P. Эти оценки зависят от точности, с к-рой коэффициент α_n многочлена $f(x)$ аппроксимируется рациональными дробями.

Пример. Пусть

$$\left|\alpha_n - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|S(f)| \ll P^{1+\varepsilon} q^{\varepsilon} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^n}\right)^{\rho_0}.$$

В частности, если

$$P \leqslant q \leqslant P^{n-1},$$

то

$$|S(f)| \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

В. м. позволил решить в первом приближении ряд важных проблем теории чисел. С помощью оценки (3) и ее следствий было исследовано *распределение дробных долей* многочлена $f(x)$. Решение *Варинга проблемы*, данное в 1919 Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. И. Литлвудом (J. E. Littlewood), опиралось на оценки сумм (1) с помощью В. м. При этом им удалось оценить значения $r = r(k)$, для к-рых уравнение

$$N = x_1^k + \dots + x_r^k$$

($N > 0$ — целое, x_i — целые) разрешимо или даже имеет асимптотику для числа решений. Обобщение оценки (3) на случай функций $f(x)$, не являющихся многочленами, но в известном смысле близких к ним, привело к улучшению нек-рых теорем в теории *распределения простых чисел* (оценка разности соседних простых чисел, оценка остаточного члена в асимптотич. формуле для числа $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N).

Недостаточная сила оценок, получаемых с помощью В. м., объясняется высокой степенью ρ_0, в к-рую возвышается сумма $S(f)$. Нек-рое усовершенствование оценок сумм (1) дал И. ван дер Корпут (J. van der Corput). С помощью *Виноградова метода* получается весьма точная оценка сверху для интеграла

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |S(f)|^{2b} d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

уже при $b \geqslant cn^2$ ($c > 0$ — константа, $n \geqslant 2$). Из этой

оценки (см. *Виноградова теорема* о среднем) выводятся принципиально новые оценки сумм Вейля (1) (с понижающим множителем $P^{-\rho}$, $\rho - c_1 n^2 \ln n$, $c_1 > 0$ — константа), недосягаемые для В. м.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ ОБЛАСТЬ — частный случай *аналитического полиэдра*. Ограниченная область D n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ наз. областью Вейля, если существует $N \geqslant n$ таких функций $f_i(z)$, $i=1, 2, \ldots, N$, голоморфных в фиксированной окрестности $U(\bar{D})$ замыкания $\bar{D}$, что:

1) $D = \{z : |f_i(z)| < 1, \quad i=1, 2, \ldots, N; \quad z \in U(\bar{D})\}$;

2) грани В. о. D, т. е. множества

$$\sigma_i = \{z \in D; \quad |f_i(z)| = 1, \quad |f_j(z)| \leqslant 1, \quad j \neq i\},$$

имеют размерность $2n-1$;

3) ребра В. о. D, т. е. пересечения любых k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ различных граней, имеют размерность $\leqslant 2n-k$. Совокупность всех n-мерных ребер В. о. наз. остовом В. о. Для В. о. справедливо интегральное *Бергмана — Вейля представление*. Названа по имени А. Вейля, к-рому принадлежат первые важные результаты для этой области [1].

Лит.: [1] Weil A., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 178—82; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

М. Ширинбеков.

ВЕЙЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс W^p-пп комплекснозначных почти периодических функций $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, суммируемых со степенью p в каждом конечном интервале действительной оси и обладающих, при нек-ром $l = l(\varepsilon, f)$, относительно плотным множеством S_l^p, *ε-почти периодов*; определены Г. Вейлем [1]. Класс W^p-пп является расширением класса *Степанова почти периодических функций*.

В. п. п. ф. связаны с метрикой

$$W^p(f, g) = \left\{ \lim_{l \to \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Если $\varphi(x)$ нулевая функция в метрике W^p, т. е.

$$\lim_{l \to \infty} \sup_{x} \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |\varphi(t)|^p \, dt = 0,$$

а $f(x)$ — почти периодическая функция Степанова, то

$$f(x) + \varphi(x) \qquad (*)$$

есть В. п. п. ф. Существуют (см. [3]) В. п. п. ф., не представимые в виде (*).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1926, Bd 97, S. 338—56; [2] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953; [3] Левитан Б. М., Степанов В. В., «Докл. АН СССР», 1939, т. 22, № 5, с. 229—32.

Е. А. Бредихина.

ВЕЙЛЯ ПРОБЛЕМА — проблема реализации в трехмерном евклидовом пространстве регулярной метрики положительной кривизны, заданной на сфере; т. е. вопрос о существовании регулярного овалоида, метрика к-рого совпадала бы с заданной. В. п. была поставлена Г. Вейлем (H. Weyl, 1915; см. [1]). Х. Леви (H. Lewy, 1937; см. [2]) дано решение В. п. в случае аналитич. метрики: заданная на сфере аналитич. метрика положительной кривизны всегда реализуется на нек-рой аналитич. поверхности трехмерного евклидова пространства. Теорема А. Д. Александрова о реализации метрики положительной кривизны выпуклой поверхностью в соединении с теоремой А. В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой дают полное решение В. п. (см. [3], с. 121). А именно, регулярная метрика класса C^n, $n \geqslant 2$ с положительной гауссовой кривизной, заданная на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой регулярной выпуклой поверхностью по крайней

мере класса $C^{n-1+\alpha}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая. В. п. для случая общего трехмерного риманова пространства поставлена и решена А. В. Погореловым ([3], гл. 6).

Лит.: [1] Вейль Г., Успехи матем. наук, 1948, т. 3, в. 2, с. 159—90; [2] Леви Г., там же, с. 191—219; [3] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969, гл. 5—7.

Е. В. Шикин.

ВЕЙЛЯ СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* без кручения на римановом пространстве M, обобщающая *Леви-Чивита связность* в том смысле, что ковариантный дифференциал метрич. тензора g_{ij} пространства M относительно нее необязательно равен нулю, но является пропорциональным самому тензору g_{ij}. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\left.\begin{aligned} \omega^i &= \Gamma^i_k(x)\,dx^k, \quad \det|\Gamma^i_k| \neq 0, \\ \omega^i_j &= \Gamma^i_{jk}(x)\,\omega^k, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, то она является В. с. тогда и только тогда, когда

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j + \theta g_{ij}. \tag{2}$$

Другая, эквивалентная форма этого условия:

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle + \theta(Z)\langle X, Y\rangle,$$

где $\nabla_Z X$ — ковариантная производная X по Z — определяется формулой

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z\omega^i(X) + \omega^i_k(Z)\,\omega^k(X).$$

Относительно локального поля ортонормированных реперов, где $g_{ij} = \delta_{ij}$, имеет место

$$\omega^j_i + \omega^i_j + \delta^i_j\theta = 0,$$

то есть В. с. для нек-рой римановой метрики на M является каждая аффинная связность без кручения, *голономии группа* к-рой является группой подобий или нек-рой ее подгруппой.

Если в (1) $\omega^i = dx^i$, то в случае В. с.

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) + \frac{1}{2}g^{il}g_{jk}\theta_l - \delta^i_{(j}\theta_{k)},$$

где $\theta = \theta_k\,dx^k$. Так как

$$g_{kj}\Omega^k_i + g_{ik}\Omega^k_j + g_{ij}d\theta = 0,$$

то тензор

$$F_{ij,\,kl} = g_{im}R^m_{jkl} + \frac{1}{2}g_{ij}(\nabla_k\theta_l - \nabla_l\theta_k),$$

наз. (по Вейлю) тензором кривизны направлений, антисимметричен по обеим парам индексов:

$$F_{ij,\,kl} + F_{ji,\,kl} = 0.$$

В. с. введена Г. Вейлем [1].

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1918, Bd 2, S. 384—411; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950; [3] Folland G. B., «J. Different. Geom.», 1970, v. 4, p. 145—53.

Ю. Г. Лумисте.

ВЕЙЛЯ СУММА — тригонометрическая сумма вида

$$S(f) = \sum_{1 < x \leqslant P} e^{2\pi i f(x)}, \tag{*}$$

где

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

а $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — любые действительные числа. В. с. применяются при решении многих известных проблем теории чисел. Первый метод нетривиальных оценок сумм (*) был разработан в 1916 Г. Вейлем (см. *Вейля метод*). Принципиально лучшие оценки В. с. были получены в 1934 И. М. Виноградовым с помощью созданного им нового метода оценок тригонометрич. сумм (см. *Виноградова метод*).

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ — ШАТЛЕ ГРУППА — группа *главных однородных пространств* над абелевым многообразием. То, что для любого абелева многообразия A над полем k множество $WC(A, k)$ главных однородных пространств над A, определенных над k, обладает групповой структурой, было доказано А. Вейлем [1], а в одном частном случае — Ф. Шатле (F. Chatelet). Группа $WC(A, k)$ изоморфна одномерной группе *Галуа когомологий* $H^1(k, A)$. Группа $WC(A, k)$ всегда периодична, кроме того, в случае $k=\mathbb{Q}$ в ней имеются элементы произвольного порядка (см. [4], [5]). Согласно теореме Ленга $WC(A, k)=0$, если k — конечное поле. Для любого элемента $D\in WC(A, k)$ определен показатель $I=\mathrm{ind}_k(D)$, равный наименьшей степени расширения K k, для к-рого существует K-рациональная точка D. В случае, когда $\dim A=1$ и k — поле алгебраич. функций над алгебраически замкнутым полем констант или локальное поле, I совпадает с порядком D в группе $WC(A, k)$ (см. [6], [10]). В общем случае эти числа различны, однако всегда $\mathrm{ord}(D)$ делит I (см. [7]). Для локальных полей k группа $WC(A, k)$ вычисляется (см., напр., [6], [8], [9]).

Если k — глобальное поле, то основой для вычисления группы $WC(A, k)$ являются гомоморфизмы редукции

$$\varphi_v: WC(A, k)\longrightarrow WC(A, k_v),$$

где v — произвольное нормирование поля k, а k_v — пополнение k относительно v. Ядро $Ш(A)$ гомоморфизма

$$\varphi=\sum\varphi_v: WC(A, k)\longrightarrow\sum_v WC(A, k_v),$$

наз. группой Тейта — Шафаревича абелевого многообразия A, вычислено только в случае, когда k — поле алгебраич. функций от одного переменного над алгебраически замкнутым полем констант (см. [5], [8], [11]). В этом же случае описано и коядро φ (все с точностью до p-компоненты, где p — характеристика k). Результаты этих вычислений применяются в теории эллиптич. поверхностей. В случае, когда k — поле алгебраич. чисел, структура группы $Ш(A)$ мало изучена.

Лит.: [1] Weil A., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, № 3, p. 493—512; [2] Башмаков М. И., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 6, с. 25—66; [3] Кассельс Дж., «Математика», (Сб. переводов), 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 3—49; [4] Шафаревич И. Р., «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, № 2, с. 267—70; [5] его же, там же, 1957, № 4, с. 714—6; [6] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 316—46; [7] Lang S., Tate J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 3, p. 659—84; [8] Ogg A. P., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 2, p. 185—212; [9] Tate J., в кн.: Semin. Bourbaki, 2 èd., P., 1958, t. 10, exposes 156, p. 1—13; [10] Lichtenbaum S., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 4, p. 1209—23; [11] Roynaud M., в кн.: Semin. Bourbaki, 2 èd., P., 1964/65, exposes 286.

Н. В. Долгачев.

ВЕЙНГАРТЕНА ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ — формулы, дающие разложение производной единичного вектора нормали к поверхности по первым производным радиус-вектора этой поверхности. Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ радиус-вектор поверхности, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали и E, F, G, L, M, N — коэффициенты соответственно первой и второй квадратичных форм поверхности, то В. д. ф. имеют вид

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v,$$

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v.$$

В. д. ф. установлены Ю. Вейнгартеном (J. Weingarten, 1861).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

А. Б. Иванов.

ВЕЙНГАРТЕНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, средняя кривизна к-рой связана с ее гауссовой кривизной функциональной зависимостью. Для того чтобы поверхность S была В. п., необходимо и достаточно,

чтобы обе полости ее эволюты были наложимы на поверхности вращения, и ребра возврата нормалей линий кривизны поверхности S налагались на меридианы. Примеры В. п.: поверхности вращения, поверхности постоянной средней или гауссовой кривизны. В. п. введены Ю. Вейнгартеном ([1], [2]) в связи с задачей отыскания всех поверхностей, изометрических с данной поверхностью вращения. Эта задача сводится к задаче отыскания всех В. п. того же класса.

Лит.: [1] Weingarten J., «J. reine und angew. Math.», 1861, Bd 59, S. 382; [2] его же, там же, 1861, Bd 62, S. 164; [3] Шуликовский В. П., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

А. Б. Иванов.

ВЕКОВОЕ УРАВНЕНИЕ — см. *Характеристическое уравнение.*

ВЕКТОР геометрический — направленный отрезок прямой евклидова пространства, у к-рого один конец (точка A) называется началом B., другой конец (точка B) концом В. Обозначения В.: $\boldsymbol{a}$, $\overline{a}$, $\vec{a}$ или $\overline{AB}$. В., начало и конец к-рого совпадают, наз. нулевым В. и обычно обозначается $\mathbf{0}$. В. характеризуется модулем (или длиной), к-рый равен длине отрезка AB, и обозначается $|\boldsymbol{a}|$, и направлением: *от* A *к* B. Вектор $\overline{BA}$ наз. В., противоположным вектору $\overline{AB}$. В. длины, равной единице, наз. единичным вектором, или ортом. Нулевому В. приписывают любое направление. Два В. наз. коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В. наз. компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Два коллинеарных В. наз. одинаково (противоположно) направленными, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, лежащие на одной прямой, наз. одинаково (противоположно) направленными, если один из лучей AB, $A'B'$ целиком содержится (не содержится целиком) в другом. Два В. наз. равными, если они имеют равные модули и одинаково направлены (такие В. наз. также свободными векторами). Все нулевые В. считаются равными.

Кроме свободных В., то есть В., начальная точка к-рых может быть выбрана свободно, в механике и физике часто рассматриваются В., к-рые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки — точки приложения. Класс равных между собой В., расположенных на одной прямой, наз. скользящим вектором. Рассматриваются связанные векторы, к-рые считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. В основу *векторного исчисления*, занимающегося изучением операций над В., положено понятие свободного В., так как задание скользящего или связанного В. может быть заменено заданием двух свободных В.

Понятие В. возникло как математич. абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, напр.: перемещение, скорость, напряженность электрического или магнитного поля.

Понятие В. может быть введено аксиоматически (см. *Векторное пространство*).

А. Б. Иванов.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются простейшие операции над (свободными) *векторами*. К числу этих операций относятся линейные операции над векторами: операция сложения векторов и умножения вектора на число.

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. вектор, проведенный из начала $\boldsymbol{a}$ к концу $\boldsymbol{b}$, если конец $\boldsymbol{a}$ и начало

b совмещены. Операция сложения векторов обладает свойствами:

$$a + b = b + a \quad \text{(коммутативность)},$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(ассоциативность)},$$

$$a + 0 = a \quad \text{(наличие нулевого элемента)},$$

$a + (-a) = 0$ (наличие противоположного элемента), где 0 – нулевой вектор, $-a$ есть вектор, п р о т и в о п о л о ж н ы й вектору a. Р а з н о с т ь ю $a - b$ векторов a и b наз. вектор x такой, что $x + b = a$.

П р о и з в е д е н и е м λa вектора a на число λ в случае $\lambda \neq 0$, $a \neq 0$ наз. вектор, модуль к-рого равен $|\lambda| |a|$ и к-рый направлен в ту же сторону, что и вектор a, если $\lambda > 0$, и в противоположную, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$ или (и) $a = 0$, то $\lambda a = 0$. Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (дистрибутивность относительно сложения чисел),

$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (ассоциативность),

$1 \cdot a = a$ (умножение на единицу).

Множество всех векторов пространства с введенными в нем операциями сложения и умножения на число образует *векторное пространство* (линейное пространство).

В В. а. важное значение имеет понятие линейной зависимости векторов. Векторы a, b, ..., c наз. л и н е й н о з а в и с и м ы м и в е к т о р а м и, если существуют числа α, β, ..., γ, из к-рых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что справедливо равенство

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c = 0. \qquad (1)$$

Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность, для линейной зависимости трех векторов необходима и достаточна их компланарность. Если один из векторов a, b, ..., c нулевой, то они линейно зависимы. Векторы a, b, ..., c наз. л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и, если из равенства (1) следует, что числа α, β, ..., γ равны нулю. На плоскости существует не более двух, а в трехмерном пространстве не более трех линейно независимых векторов.

Совокупность трех (двух) линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 трехмерного пространства (плоскости), взятых в определенном порядке, образует б а з и с. Любой вектор a единственным образом представляется в виде суммы:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

Числа a_1, a_2, a_3 наз. к о о р д и н а т а м и (к о м п о н е н т а м и) в е к т о р а a в д а н н о м б а з и с е и пишут $a = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Два вектора $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b \neq 0$, является пропорциональность их соответствующих координат: $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ и $c = \{c_1, c_2, c_3\}$ является равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами. Координаты суммы векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ равны суммам соответствующих координат: $a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$. Координаты произведения вектора a на число λ равны произведениям координат a на λ: $\lambda a = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

Скалярным произведением (a, b) ненулевых векторов a и b наз. произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(a, b) = |a||b|\cos\varphi.$$

За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Если $a=0$ или $b=0$, то скалярное произведение полагают равным нулю. Скалярное произведение обладает свойствами:

$(a, b)=(b, a)$ (коммутативность),

$(a, b+c)=(a, b)+(a, c)$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda(a, b)=(\lambda a, b)=(a, \lambda b)$ (сочетательность относительно умножения на число),

$(a, b)=0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или $a \perp b$.

Для вычисления скалярных произведений векторов часто пользуются декартовыми прямоугольными координатами, т. е. координатами векторов в базисе, состоящем из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов) i, j, k (ортонормированный базис). Скалярное произведение векторов

$$a=\{a_1, a_2, a_3\} \text{ и } b=\{b_1, b_2, b_3\},$$

заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле:

$$(a, b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Косинус угла φ между ненулевыми векторами $a=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $b=\{b_1, b_2, b_3\}$ может быть вычислен по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(a, b)}{|a|\cdot|b|},$$

где $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ и $|b|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$.

Косинусы углов вектора $a=\{a_1, a_2, a_3\}$ с векторами базиса i, j, k наз. направляющими косинусами вектора a:

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Направляющие косинусы обладают следующим свойством:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Осью наз. прямая с лежащим на ней единичным вектором e — ортом, задающим положительное направление на прямой. Проекцией $\text{Пр.}_e a$ вектора a на ось наз. направленный отрезок на оси, алгебраич. значение к-рого равно скалярному произведению вектора a на вектор e. Проекции обладают свойствами:

$$\text{Пр.}_e(a+b)=\text{Пр.}_e a+\text{Пр.}_e b \quad \text{(аддитивность)},$$

$$\lambda\text{Пр.}_e a=\text{Пр.}_e \lambda a \quad \text{(однородность)}.$$

Каждая координата вектора в ортонормированном базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую соответствующим вектором базиса.

В пространстве различают правые и левые тройки векторов. Тройка некомпланарных векторов a, b, c наз. правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов a, b, c в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае a, b, c — левая тройка. Правая (левая) тройка векторов располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки (см. рис.). Все правые (или левые) тройки векторов

наз. одинаково ориентированными. Ниже тройка векторов базиса i, j, k считается правой.

Пусть на плоскости задано направление положительного вращения (от i к j). Псевдоскалярным произведением $a \vee b$ ненулевых векторов a и b наз. произведение их модулей на синус угла φ положительного вращения от a к b:

$$a \vee b = |a||b| \sin \varphi.$$

Псевдоскалярное произведение нулевых векторов полагают равным нулю. Псевдоскалярное произведение обладает свойствами:

$a \vee b = -b \vee a$ (антикоммутативность),

$a \vee (b+c) = a \vee b + a \vee c$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda(a \vee b) = \lambda a \vee b$ (сочетательность относительно умножения на число),

$a \vee b = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или a и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$, то

$$a \vee b = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Векторным произведением $[a, b]$ ненулевых и неколлинеарных векторов a и b наз. вектор, модуль к-рого равен произведению их модулей на синус угла φ между ними, перпендикулярный a и b и направленный так, что тройка векторов a, b, $[a, b]$ — правая:

$$[a, b] = |a||b| \sin \varphi.$$

Векторное произведение полагают равным нулю, если $a=0$ или (и) $b=0$ или они коллинеарны. Векторное произведение обладает свойствами:

$[a, b] = -[b, a]$ (антикоммутативность),

$[a, b+c] = [a, b] + [a, c]$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda[a, b] = [\lambda a, b] = [a, \lambda b]$ (сочетательность относительно умножения на число),

$[a, b] = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или a и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$[a, b] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Смешанным произведением (a, b, c) векторов a, b, c наз. скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c:

$$(a, b, c) = (a, [b, c]).$$

Смешанное произведение обладает свойствами:

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b).$$

$(a, b, c) = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или (и) $c=0$, или векторы a, b, c компланарны.

$(a, b, c) > 0$, если тройка векторов a, b, c — правая, $(a, b, c) < 0$, если a, b, c — тройка левая.

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c. Если в ортонормированном базисе векторы a, b и c имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\{c_1, c_2, c_3\}$, то

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Двойным векторным произведением $[a, b, c]$ векторов a, b, c наз. векторное произведение $[a, [b, c]]$.

При вычислении двойного векторного произведения имеют место формулы:

$$[a, b, c] = [b, (a, c)] - [c, (a, b)],$$
$$([a, b], [c, d]) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c),$$
$$[[a, b], [c, d]] = (a, c, d)\, b - (b, c, d)\, a = (a, b, d)\, c - (a, b, c)\, d.$$

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968; [4] Погорелов А. В., Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1968.

Ю. П. Пытьев.

ВЕКТОРНАЯ ГРУППА — *частично упорядоченная группа*, вложимая в полное прямое произведение линейно упорядоченных групп. Группа G тогда и только тогда есть В. г., когда ее частичный порядок есть пересечение линейных порядков G. Частично упорядоченная группа тогда и только тогда является В. г., когда ее полугруппа P положительных элементов удовлетворяет условию: для любого конечного набора элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из G пересечение

$$\bigcap PS(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}, e) = P.$$

Здесь пересечение берется по всем наборам знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, а $S(x, y, \ldots, z)$ обозначает наименьшую инвариантную подполугруппу группы G, содержащую $x, y, \ldots, z$. *Доупорядочиваемая группа* G есть В. г. тогда и только тогда, когда для любых $g, g_1, \ldots, g_n \in G$ из

$$gg_1^{-1}gg_1 \ldots g_n^{-1}gg_n \in P$$

следует $g \in P$.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ВЕКТОРНАЯ РЕШЕТКА, векторная структура, K-линеал,— частично упорядоченное действительное *векторное пространство* с отношением порядка, определяющим *решетку*. См. *Полуупорядоченное пространство.*

ВЕКТОРНАЯ ТРУБКА — замкнутое множество Ф точек области Ω пространства, в к-рой задано *векторное поле* $a(M)$, такое, что всюду на его граничной поверхности S вектор нормали n ортогонален a. В. т. Ф состоит из векторных линий Г поля a, т. е. кривых в Ω, в каждой точке к-рых направление касательной совпадает с направлением a. Линия Г целиком содержится в Ф, если одна точка Г содержится в Ф. Если a - поле скоростей стационарного потока жидкости, то Г — траектория частицы жидкости, а Ф — часть Ω, к-рую при движении «заметает» фиксированное множество частиц жидкости.

Интенсивностью I трубки Ф в сечении S наз. поток (см. *Векторный анализ*) поля a через S':

$$I(S') = \int\int S' (a, n)\, d\sigma,$$

где n — единичный вектор нормали к S'. Если поле a — соленоидально ($\operatorname{div} a = 0$), то выполняется закон сохранения интенсивности В. т.:

$$I(S') = I(S'').$$

Пусть $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$ — декартовы прямоугольные координаты вектора $a = a(M)$; x, y, z — координаты точки M. Тогда локально граница Ф задается уравнением $F(x, y, z) = \text{const}$, где $F(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению с частными производными:

$$(a, \nabla F) = a_1(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial y} + a_3(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ю. П. Пытьев.

ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *вектор-функция.*

ВЕКТОРНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — морфизм многообразий $E \to X$, локально (в *Зарисского топологии*) устроенный как проекция прямого произведения $k^n \times X$ на X, причем склейка сохраняет послойно структуру векторного пространства. При этом E наз. пространством расслоения, X — базой, а n — рангом (или размерностью) расслоения. Морфизмы В. а. р. определяются так же, как и в топологии. Более общее определение, пригодное для произвольной схемы, использует понятие *пучка*. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей конечного (постоянного) ранга, тогда *аффинный морфизм* $V(\mathcal{E})$: $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}\,\mathcal{E}) \to X$, где $\mathrm{Sym}\,\mathcal{E}$ — пучок симметрических алгебр $\mathcal{E}$, наз. векторным расслоением, ассоциированным с $\mathcal{E}$. Эту терминологию сохраняют иногда и в случае, когда $\mathcal{E}$ — произвольный квазикогерентный пучок. Пучок $\mathcal{E}$ однозначно восстанавливается по В. а. р. $V(\mathcal{E})$, и категория В. а. р. на X оказывается двойственной к категории локально свободных пучков $\mathcal{O}_X$-модулей. При этом для X-схемы Y множество X-морфизмов $Y \to V(\mathcal{E})$ биективно соответствует множеству гомоморфизмов $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{E} \to f_*(\mathcal{O}_Y)$, где f — структурный морфизм X-схемы Y. В частности, пучок ростков сечений В. а. р. $V(\mathcal{E})$ отождествляется с двойственным к $\mathcal{E}$ пучком $\mathcal{E}^\vee$. В. а. р. $V(\mathcal{O}_X^n)$ наз. тривиальным векторным расслоением ранга n. Множество всех В. а. р. ранга n на схеме находится во взаимно однозначном соответствии с множеством когомологий $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_X))$, где $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_X)$ — пучок автоморфизмов тривиального векторного расслоения ранга n. В. а. р. ранга 1 наз. линейными векторными расслоениями, они соответствуют обратимым пучкам $\mathcal{O}_X$-модулей и тесно связаны с *дивизорами* на X; множество линейных векторных расслоений с операцией тензорного произведения образует группу $\mathrm{Pic}(X) \approx H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (см. *Пикара группа*).

Для В. а. р., как и в топологии, определены операции прямой суммы, тензорного произведения, двойственного расслоения, симметрической и внешней степени, индуцированного В. а. р. и др. Для В. а. р. E ранга n линейное векторное расслоение $\lambda^n E$ наз. определителем. С В. а. р. E можно связать проективное расслоение $P(E)$ аналогично тому, как с векторным пространством связано проективное пространство (см. *Проективная схема*).

Примеры нетривиальных В. а. р. дают канонические В. а. р. на *Грассмана многообразиях*; в частности, на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ имеется каноническое линейное расслоение, соответствующее пучку $\mathcal{O}(1)$. Если В. а. р. E на схеме X является подрасслоением тривиального В. а. р., то такое вложение определяет морфизм X в соответствующее многообразие Грассмана, причем относительно этого морфизма индуцируется каноническим В. а. р. на многообразии Грассмана. Линейные расслоения, определяющие вложение X в $\mathbf{P}^n$, наз. очень обильными (см. *Обильное векторное расслоение*).

Другими примерами В. а. р. являются касательное расслоение $T(X)$ на гладком многообразии X и расслоения, построенные из него при помощи различных операций (см. *Касательный пучок*, *Канонический класс*, *Нормальный пучок*).

В. а. р. на многообразии, определенном над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, можно рассматривать как аналитическое или как топологическое (в топологии комплексного пространства) В. а. р. На полном алгебраич. многообразии категории аналитич. и алгебраич. В. а. р. эквивалентны (см. *Сравнения теоремы* в алгебраич. геометрии). Топологич. векторное расслоение не всегда допускает алгебраич. структуру, а если и допускает

(как, например, расслоения на P^2), то, вообще говоря, не единственную. Рассмотрение В. а. р. как топологического позволяет использовать топологические методы, в частности, вводить *Чжэня классы* В. а. р. Имеется и абстрактное определение классов Чжэня, использующее *K-функтор* или один из вариантов *Вейля когомологий*.

Свойства В. а. р. зависят от того, является ли его база полной или аффинной схемой. В случае аффинной базы $X=\operatorname{Spec} A$, В. а. р. соответствуют *проективным модулям* конечного типа над кольцом A. Если ранг В. а. р. E больше размерности базы X, то E можно представить в виде $E=E'\oplus 1$, где 1 — одномерное тривиальное расслоение. E' определяется, вообще говоря, не однозначно. Все же, если ранг E больше размерности базы и $E'\oplus 1\simeq F\oplus 1$, то $E\simeq F$ (см. [4]). Если X неособая одномерная схема (т. е. A — *дедекиндово кольцо*), то любое В. а. р. есть прямая сумма тривиального и линейного векторного расслоений. Это же верно для В. а. р. на неособой аффинной поверхности над алгебраически замкнутым полем, бирационально эквивалентной линейчатой поверхности.

Случай проективной базы. Изучение линейных расслоений на проективных многообразиях — классич. задача алгебраич. геометрии (см. *Пикара группа*, *Пикара схема*). Исследование В. а. р. большего ранга началось в 1957, когда А. Гротендик (A. Grothendieck) показал, что В. а. р. на проективной прямой является прямой суммой линейных расслоений. М. Атья (M. Atiyah) классифицировал В. а. р. на эллиптич. кривой X: если через $\mathcal{E}(r, d)$ обозначить множество неразложимых (в прямую сумму) В. а. р. ранга r и степени d (под степенью понимается степень определителя расслоения), то $\mathcal{E}(r, d)$ отождествляется с точками самой кривой X ([3]).

При изучении В. а. р. на кривых полезным оказалось понятие стабильного В. а. р. Положим для В. а. р. E, что $\mu(E)$ есть степень E, деленная на ранг E; тогда В. а. р. E наз. стабильным (соответственно полустабильным), если для любого подрасслоения $E'\subset E$ имеет место $\mu(E')<\mu(E)$ (соответственно $\mu(E')\leqslant\mu(E)$). Стабильное расслоение просто (т. е. $\operatorname{End}(E)\simeq k$) и, в частности, неразложимо. В. а. р. степени 0 на алгебраич. кривой X рода $g\geqslant 2$ стабильно в том и только том случае, когда оно ассоциировано с неприводимым унитарным представлением фундаментальной группы $\pi_1(X)$ (см. [1]). Пусть $U(r, d)$ — множество всех полустабильных В. а. р. ранга r и степени d, являющихся прямой суммой стабильных В. а. р., $US(r, d)$ — подмножество стабильных В. а. р. Если род g гладкой кривой X больше 1, то $U(r, d)$ обладает естественной структурой нормального проективного многообразия размерности $r^2(g-1)+1$, а $US(r, d)$ — открытое гладкое подмногообразие $U(r, d)$ (см. [1]). Если r и d взаимно простые, то $U(r, d)=US(r, d)$ и поэтому гладкое. Пространство модулей полустабильных В. а. р. достаточно изучено, а именно, известно, что $U(1, d)$ — компонента схемы Пикара для X, слои отображения определителя $\det: U(r, d)\to U(1, d)$ являются унирациональными многообразиями; если r и d взаимно просты, то $U(r, d)$ однозначно определяет исходную кривую X. Поскольку над $U(r, d)$ не всегда существует универсальное семейство В. а. р., то $U(r, d)$ не является представляющим объектом подходящего функтора [1]. Большинство указанных результатов получены для случая поля $\mathbb{C}$, хотя многие остаются верны и для произвольного алгебраически замкнутого поля. Некоторые специальные факты известны для В. а. р. на алгебраич. поверхностях и проективных пространствах (см. [5]).

Лит.: [1] Нарасимхан М., Шешадри К., «Математика», 1969, т. 13, вып. 1, с. 27—52; [2] Тюрин А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30 в. 6, с. 1353—66;

[3] Atiyah M., «Proc. London Math. Soc.», 1957, v. 7, p. 414—52; [4] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973; [5] Долгачев И. В., Исковских В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170.
В. И. Данилов.

ВЕКТОРНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное аналитич. расслоение над аналитич. пространством, слои к-рого обладают структурой n-мерного векторного пространства над основным полем k (если $k=\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел, то аналитич. расслоение наз. также голоморфным). Число n наз. рангом, или размерностью, расслоения. Так же, как в топологич. случае (см. *Векторное расслоение*), определяются категория векторных аналитич. расслоений, понятия подрасслоения, факторрасслоения, прямой суммы, тензорного произведения, внешней степени В. а. р. и т. д.

Аналитич. сечения В. а. р. $E\to X$ с базой X образуют модуль $\Gamma(E)$ над алгеброй $A(X)$ аналитич. функций на базе. В случае, когда $k=\mathbb{C}$ и X компактно, $\Gamma(E)$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ (см. *Конечности теоремы*). Если же X — конечномерное комплексное пространство Штейна, то $\Gamma(E)$ — проективный модуль конечного типа над $A(X)$, причем соответствие $E\mapsto\Gamma(E)$ определяет эквивалентность категории В. а. р. над X и категории проективных $A(X)$-модулей конечного типа [4].

Примерами В. а. р. являются касательное расслоение на аналитич. многообразии X (его аналитич. сечения — аналитич. векторные поля на X), нормальное расслоение на подмногообразии $Y\subset X$.

Классификация В. а. р. ранга n на заданном аналитич. пространстве X равносильна классификации *главных аналитических расслоений* с базой X и структурной группой $\mathrm{GL}(n, k)$ и при $n>1$ проведена полностью только в некоторых специальных случаях. Для проективных комплексных алгебраич. многообразий X она совпадает с классификацией алгебраич. векторных расслоений (см. *Сравнения теоремы* в алгебраической геометрии).

В. а. р. ранга 1 на комплексном пространстве X (иначе, расслоения на комплексные прямые или линейные расслоения) играют важную роль в комплексной аналитич. геометрии. Каждый *дивизор* на пространстве X естественным образом определяет аналитич. расслоение ранга 1, причем два дивизора определяют изоморфные расслоения тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны. На проективном алгебраич. многообразии всякое линейное аналитич. расслоение определяется дивизором. Вложимость комплексного пространства X в проективное пространство тесно связана с существованием на X обильных линейных расслоений (см. *Обильное векторное расслоение*). Если на комплексном пространстве X задана дискретная группа Γ его автоморфизмов, то каждый фактор автоморфности группы Γ определяет линейное расслоение над X/Γ, аналитич. сечения к-рого суть соответствующие автоморфные формы. В. а. р. ранга 1 составляют группу $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$, где $\mathcal{O}^*_X$ — пучок обратимых элементов структурного пучка. Сопоставление каждому расслоению его 1-го класса Чженя дает гомоморфизм

$$\gamma: H^1(X, \mathcal{O}^*_X)\to H^2(X, \mathbb{Z}),$$

ядро к-рого есть множество топологически тривиальных линейных расслоений. В случае, когда X — комплексное многообразие, $\mathrm{Im}\,\gamma$ можно описать как множество классов когомологий, представимых замкнутыми дифференциальными формами типа (1,1). Если X, кроме того, компактно и кэлерово, то $\mathrm{Ker}\,\gamma$ изоморфно *Пикара многообразию* многообразия X и тем самым является комплексным тором [2].

Каждому В. а. р. V ранга n на аналитич. пространстве X соответствует пучок ростков аналитич. сечений

расслоения V, к-рый является локально свободным аналитическим пучком ранга n на X. Это соответствие определяет эквивалентность между категориями В.а.р. и локально свободных аналитич. пучков на X. Попытка обобщить этот результат на произвольные когерентные аналитич. пучки привела к следующему обобщению понятия В. а. р. [3]. Сюръективный морфизм $\pi: V \to X$ наз. аналитическим семейством векторных пространств над X (или линейным пространством над X), если его слои обладают структурой конечномерных векторных пространств над k, причем операции сложения, умножения на скаляр и нулевое сечение удовлетворяют естественным требованиям аналитичности. Если $k=\mathbb{C}$ (или $k=\mathbb{R}$ и X когерентно), то аналитич. семейство векторных пространств $\pi: V \to X$ определяет когерентный аналитич. пучок F на X: для $U \subset X$ группа $F(U)$ есть пространство аналитич. функций на $\pi^{-1}(U)$, линейных на слоях. Тем самым определяется двойственность между категориями аналитич. семейств векторных пространств и когерентных аналитич. пучков на X.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Fischer G., «Arch. Math.», 1967, Bd 18, s. 609—17; [4] Forster O., Ramspott K. J., там же, 1968, Bd 19, s. 417—22. *А. Л. Онищик.*

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — устаревшее название раздела математики, в к-ром изучаются свойства операций над *векторами*. В. и. подразделяют на векторную алгебру и векторный анализ. В *векторной алгебре* изучают линейные операции (сложение векторов и умножение векторов на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное, двойное векторное). В *векторном анализе* изучают векторы, являющиеся функциями от одного или нескольких скалярных аргументов.

Возникло В. и. в 19 в. в связи с потребностями механики и физики, когда операции над векторами стали проводиться непосредственно над ними, без обращения к координатному способу их задания (см. [1], [2], [3]). Дальнейшее изучение тех свойств математич. и физич. объектов, к-рые инвариантны относительно выбора системы координат, привело к одному из обобщений В. и.— *тензорному исчислению*.

Лит.: [1] Wessel C., Om directionens analytiske Betegning, «Danske Selsk. Skr.», N. Samml., 1799 («Arch. for Math. og Naturvid.», 1896, Bd 18); [2] Hamilton W. R., Lectures on quaternions..., Dublin, 1853; [3] Gibbs J. W., Wilson E. B., Vector Analysis, New Haven, 1901; [4] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [5] Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1—2, М.—Л., 1950—52. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОРНОЕ КОЛЬЦО — частично упорядоченное кольцо R, являющееся подпрямой суммой линейно упорядоченных колец R_λ. Каждый элемент В. к. есть вектор

$$a=\{\ldots, a_\lambda, \ldots\}$$

с координатами из R_λ и $a \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда каждое $a_\lambda \geqslant 0$. Если частичный порядок кольца R является пересечением линейных порядков, то R будет В. к., причем за R_λ можно принять само R, снабженное различными линейными продолжениями его частичного порядка.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *О. А. Иванова.*

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ — термин, под к-рым обычно понимается функция точки нек-рого пространства X, значениями к-рой являются *векторы*, в том или ином смысле определенные для этого пространства.

В классическом *векторном исчислении* роль X играет подмножество евклидова пространства, а В. п. представляет собой направленные отрезки, приложенные в точках этого подмножества. Напр., совокупность касательных или нормальных векторов к гладкой кривой (поверхности) — В. п. на ней.

Если X — абстрактно заданное дифференцируемое многообразие, то под В. п. понимается касательное В. п., т. е. функция, относящая каждой точке X инвариантно сконструированный касательный вектор к X. В случае конечномерности X В. п. равносильно определяется как совокупность одновалентных контравариантных тензоров, зависящих от точек.

В общем случае В. п. интерпретируется как определенная на X функция со значениями в *векторном пространстве* P, тем или иным способом ассоциированного с X; ее отличие от произвольной вектор-функции состоит в том, что P определяется по отношению к X «внутренним образом», а не «надстройкой» над X. Впрочем, напр., иногда и сечение *векторного расслоения* с базой X считается В. п.

М. И. Войцеховский.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ на многообразии M — сечение *касательного расслоения* $\tau(M)$. Множество В. п. образует модуль над кольцом F дифференцируемых функций на M.

Пример 1. Для карты x_U многообразия M определяется i-е базисное В. п. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad p \in U,$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ есть i-й базисный касательный вектор к M в точке p, и любое В. п. однозначно представляется в виде

$$X = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, \frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

$\xi^i(p)$ наз. компонентами В. п. X в карте x_U. В. п. является дифференцированием кольца F, вследствие чего множество В. п. образует относительно операции коммутирования (скобки Ли) алгебру Ли.

Пример 2. Для карты x_U и $f \in F$ функция Xf определяется формулой

$$(Xf)(p) = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, D_i(f(x_u^{-1}))\,|_{x(p)} = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f),$$

где D_i — частная производная по x^i, $\xi^i(p) = Xx^i(p)$; Xf наз. производной от f по направлению X.

Пример 3. Для карты x_U и $f \in F$ коммутатор (скобка Ли) $[X, Y]$ В. п.

$$X = \sum\nolimits_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad Y = \sum\nolimits_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

определяется формулой

$$([X, Y]f)(p) = \sum\nolimits_i (X\eta^i - Y\xi^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f) = \sum\nolimits_{i,\,k} \left(\xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p;$$

он удовлетворяет соотношениям:

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

в частности

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

Каждое В. п. X индуцирует на M локальный поток — семейство диффеоморфизмов окрестности U

$$\Phi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times U \longrightarrow M$$

такое, что $\Phi(0, p) = p$ для $p \in U$ и

$$\Phi(t, p) = \Phi_p(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

— интегральный путь В. п. X, т. е.

$$\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} = X\Phi(t, p),$$

где $\Phi^*\frac{\partial}{\partial t}$ — В. п., касательное к отображению $\Phi_p(t)$. И наоборот, В. п. X ассоциировано с локальным потоком $\Phi(t,\ p)=\Phi_t(p)$ — вариацией отображения $\Phi_0(p)$; при этом

$$(Xf)(p)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\Phi_t(p))-f(p)}{t}.$$

Каждое В. п. определяет дифференцирование Ли LX тензорного поля типа λ со значениями в векторном пространстве (инфинитезимальное преобразование λ), соответствующее локальному потоку $\Phi(t,\ p)$, частными случаями к-рого являются действие В. п. на $f\in F$

$$L_Xf=Xf$$

и скобка Ли

$$L_XY=[XY]=\lim_{t\to 0}\frac{Y-\Phi_t^*Y\Phi_{-t}}{t}.$$

В. п. без особенностей порождает на M интегрируемую одномерную дифференциальную систему и ассоциированную с ней *Пфаффа систему*.

Обобщением понятия В. п. на многообразии является В. п. вдоль отображения φ: $N\to M$ — сечение расслоения $\tau_\varphi(N)$, индуцированного φ, а также тензорное поле типа λ — сечение ассоциированного с $\tau(M)$ при помощи функтора λ расслоения $\lambda[\tau]$.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [3] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [4] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [5] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [6] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.
А. Ф. Щекутьев.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ — вектор $\boldsymbol{c}$, обозначаемый символом $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ или $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и удовлетворяющий условиям:

длина вектора $\boldsymbol{c}$ равна произведению длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на синус угла φ между ними, т. е.

$$|\boldsymbol{c}|=|[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi;$$

вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Ориентация тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ совпадает с ориентацией тройки базисных векторов. См. *Векторная алгебра*.
А. Б. Иванов.

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО, линейное пространство, над полем K, — аддитивно записанная абелева группа E, в которой определено умножение элементов на скаляры, т. е. отображение

$$K\times E\to E\colon(\lambda,\ x)\to\lambda x,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам ($x,\ y\in E$, $\lambda,\ \mu,\ 1\in K$):

1) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,
2) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,
3) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$,
4) $1\cdot x=x$.

Из аксиом 1) — 4) вытекают следующие важные свойства векторного пространства ($0\in E$):

5) $\lambda\cdot 0=0$,
6) $0\cdot x=0$,
7) $(-1)x=-x$.

Элементы В. п. наз. точками В. п., или векторами, а элементы поля K — скалярами.

Наибольшее применение в математике и приложениях имеют В. п. над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел или над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; они наз. соответственно комплексными В. п. или действительными В. п.

Аксиомы В. п. выявляют нек-рые алгебраич. свойства многих классов функций, часто встречающихся в анализе. Из примеров В. п. самыми фундаментальными и наиболее ранними являются n-мерные еквли-

довы пространства. Почти столь же важными примерами являются многие функциональные пространства: пространство непрерывных функций, пространство измеримых функций, пространство суммируемых функций, пространство аналитич. функций, пространство функций ограниченной вариации.

Понятие В. п. есть частный случай понятия модуля над кольцом, а именно, В. п. есть *унитарный модуль* над полем. Унитарный модуль над некоммутативным телом также наз. векторным пространством над телом; теория таких В. п. во многом сложнее теории В. п. над полем.

Одной из важных задач, связанных с В. п., является изучение геометрии В. п., т. е. изучение прямых в В. п., плоских и выпуклых множеств в В. п., подпространств В. п. и базисов в В. п.

Векторным подпространством, или просто подпространством, В. п. E над полем K наз. подмножество $F \subset E$, замкнутое относительно действий сложения и умножения на скаляр. Подпространство, рассматриваемое отдельно от вмещающего его пространства, есть В. п. над тем же полем.

Прямой линией, проходящей через две точки x и y В. п. E, наз. множество элементов $z \in E$ вида $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\lambda \in K$. Множество $G \in E$ наз. плоским множеством, если вместе с любыми двумя точками оно содержит прямую, проходящую через эти точки. Каждое плоское множество получается из нек-рого подпространства с помощью сдвига (параллельного переноса): $G=x+F$; это означает, что каждый элемент $z \in G$ представим единственным образом в виде $z=x+y$, $y \in F$, причем это равенство осуществляет взаимно однозначное соответствие между F и G.

Совокупность всех сдвигов $F_x=x+F$ данного подпространства F образует В. п. над K, наз. факторпространством E/F, если определить операции следующим образом:

$$F_x - F_y = F_{x+y}; \quad \lambda F_x = F_{\lambda x}, \quad \lambda \in K.$$

Пусть $M=\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное множество векторов из E; линейной комбинацией векторов $x_\alpha \in E$ наз. вектор x, определенный формулой

$$x=\sum\nolimits_\alpha \lambda_\alpha x_\alpha, \quad \lambda_\alpha \in K,$$

в к-рой лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля. Совокупность всех линейных комбинаций векторов данного множества M является наименьшим подпространством, содержащим M, и наз. линейной оболочкой множества M. Линейная комбинация наз. тривиальной, если все коэффициенты λ_α равны нулю. Множество M наз. линейно независимым множеством, если все нетривиальные линейные комбинации векторов из M отличны от нуля.

Любое линейно независимое множество содержится в нек-ром максимальном линейно независимом множестве M_0, т. е. в таком множестве, к-рое перестает быть линейно независимым после присоединения к нему любого элемента из E.

Каждый элемент $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов максимального линейно независимого множества:

$$x=\sum\nolimits_\alpha \lambda_\alpha x_\alpha, \quad x_\alpha \in M_0.$$

В связи с этим максимальное линейно независимое множество наз. *базисом* В. п. (алгебраическим базисом). Все базисы данного В. п. имеют одинаковую мощность, к-рая наз. размерностью В. п. Если эта мощность конечна, пространство наз. конечномерным В. п.; в противном случае оно наз. бесконечномерным В. п.

Поле K можно рассматривать как одномерное В. п. над полем K; базис этого В. п. состоит из одного элемента; им может быть любой элемент, отличный от нуля. Конечномерное В. п. с базисом из n элементов наз. n-мерным пространством.

В теории действительных и комплексных В. п. важную роль играет теория *выпуклых множеств*. Множество M в действительном В. п. наз. выпуклым множеством, если вместе с любыми двумя его точками x, y отрезок $tx+(1-t)y$, $t\in[0, 1]$, также принадлежит M.

Большое место в теории В. п. занимает теория линейных функционалов на В. п. и связанная с этим теория двойственности. Пусть E есть В. п. над полем K. Линейным функционалом на E наз. аддитивное и однородное отображение $f: E\to K$:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

Множество E^* всех линейных функционалов на E образует В. п. над полем K относительно операций

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$
$$x\in E,\quad \lambda\in K,\quad f_1,\ f_2,\ f\in E^*.$$

Это В. п. наз. сопряженным (или двойственным) пространством (к E). С понятием сопряженного пространства связан ряд геометрич. терминов. Пусть $D\subset E$ (соответственно $\Gamma\subset E^*$); аннулятором множества D, или ортогональным дополнением множества D (соответственно множества Γ) наз. множество

$$D^\perp=\{f\in E^*:\ f(x)=0 \text{ для всех } x\in D\}$$

(соответственно $\Gamma_\perp=\{x\in E: f(x)=0$ для всех $f\in\Gamma\}$); здесь $D^\perp$ и $\Gamma_\perp$ — подпространства соответственно пространств E^* и E. Если f — ненулевой элемент из E^*, то $\{f\}$ есть максимальное собственное линейное подпространство в E, наз. иногда гиперподпространством; сдвиг такого подпространства наз. гиперплоскостью в E; всякая гиперплоскость имеет вид

$$\{x: f(x)=\lambda\},\ \text{где } f\neq 0,\ f\in E^*,\ \lambda\in K.$$

Если F — подпространство В. п. E, то существуют естественные изоморфизмы между F^* и

$$E^*/F^\perp \text{ и между } (E/F)^* \text{ и } F^\perp.$$

Подмножество $\Gamma\subset E^*$ наз. тотальным подмножеством над E, если его аннулятор содержит лишь нулевой элемент: $\Gamma_\perp=\{0\}$.

Каждому линейно независимому множеству $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E$ можно сопоставить сопряженное множество $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E^*$, т. е. такое множество, что $f_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$ (*Кронекера символ*) для всех α, $\beta\in A$. Множество пар $\{x_\alpha, f_\alpha\}$ наз. при этом биортогональной системой. Если множество $\{x_\alpha\}$ есть базис в E, то $\{f_\alpha\}$ тотально над E.

Значительное место в теории В. п. занимает теория линейных преобразований В. п. Пусть E_1, E_2 — два В. п. над одним и тем же полем K. Линейным отображением, или линейным оператором, T, отображающим В. п. E_1 в В. п. E_2 (или линейным оператором из E_1 в E_2), наз. аддитивное и однородное отображение пространства E_1 в E_2:

$$T(x+y)=Tx+Ty;\quad T(\lambda x)=\lambda T(x);\quad x,\ y\in E_1.$$

Частным случаем этого понятия является линейный функционал, или линейный оператор из E_1 в K. Линейным отображением является, напр., естественное отображение В. п. E на факторпростран-

ство E/F, сопоставляющее каждому элементу $x \in E$ плоское множество $F_x \in E/F$. Совокупность $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ всех линейных операторов T: $E_1 \to E_2$ образует В. п. относительно операций

$$(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x; \quad (\lambda T)x = \lambda Tx;$$
$$x \in E_1; \ \lambda \in K; \ T_1, \ T_2, \ T \in \mathscr{L}(E_1, E_2).$$

Два В. п. E_1 и E_2 наз. изоморфными В. п., если существует линейный оператор («изоморфизм»), осуществляющий взаимно однозначное соответствие между их элементами. E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их базисы имеют одинаковую мощность.

Пусть T — линейный оператор, отображающий E_1 в E_2. Сопряженным линейным оператором, или двойственным линейным оператором, по отношению к T, наз. линейный оператор T^* из E_2^* в E_1^*, определенный равенством

$$(T^*\varphi)\, x = \varphi(Tx) \text{ для всех } x \in E_1, \ \varphi \in E_2^*.$$

Имеют место соотношения $T^{*-1}(0) = [T(E_1)]^\perp$, $T^*(E_2^*) = [T^{-1}(0)]^\perp$, откуда следует, что T^* является изоморфизмом тогда и только тогда, когда T является изоморфизмом.

С теорией линейных отображений В. п. тесно связана теория *билинейных отображений* и *полилинейных отображений* В. п.

Важную группу задач теории В. п. образуют задачи продолжения линейных отображений. Пусть F — подпространство В. п. E_1, E_2 — линейное пространство над тем же полем, что и E_1, и пусть T_0 — линейное отображение F в E_2; требуется найти продолжение T отображения T_0, определенное на всем E_1 и являющееся линейным отображением E_1 в E_2. Такое продолжение всегда существует, но дополнительные ограничения на функции (связанные с дополнительными структурами в В. п., напр., топологией или отношением порядка) могут сделать задачу неразрешимой. Примерами решения задачи продолжения являются *Хана — Банаха теорема* и теоремы о продолжении положительных функционалов в пространствах с конусом.

Важным разделом теории В. п. является теория операций над В. п., т. е. способов построения новых В. п. по известным. Примеры таких операций — известные операции взятия подпространства и образования факторпространства по подпространству. Другие важные операции — построение прямой суммы, прямого произведения и тензорного произведения В. п.

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство В. п. над полем K. Множество E — произведение множеств E_α — можно превратить в В. п. над полем K, введя операции

$$(x_\alpha)+(y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha); \quad \lambda(x_\alpha) = (\lambda x_\alpha);$$
$$\lambda \in K; \quad x_\alpha, \ y_\alpha \in E_\alpha, \quad \alpha \in I;$$

полученное В. п. E наз. прямым произведением В. п. E_α и обозначается $\Pi_{\alpha \in I} E_\alpha$. Подпространство В. п. E, состоящее из всех тех наборов (x_α), для каждого из к-рых множество $\{\alpha : x_\alpha \neq 0\}$ конечно, наз. прямой суммой В. п. E_α и обозначается $\Sigma_\alpha E_\alpha$ или $\Sigma_\alpha + E_\alpha$; для конечного числа слагаемых эти определения совпадают; в этом случае используются обозначения:

$$E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_n \text{ или } E_1 \times \ldots \times E_n.$$

Пусть E_1, E_2 — два В. п. над полем K; E_1', E_2' — тотальные подпространства В. п. E_1^*, E_2^*, и $E_1 \square E_2$ — В. п., имеющее своим базисом совокупность всех элементов пространства $E_1 \times E_2$. Каждому элементу $x \square y \in E_1 \square E_2$ сопоставляется билинейная функция $b = T(x, y)$ на $E_1' \times E_2'$ по формуле $b(f, g) = f(x)g(y)$,

$f \in E_1'$, $g \in E_2'$. Это отображение базисных векторов $x \square y \in E_1 \square E_2$ можно продолжить до линейного отображения T В. п. $E_1 \square E_2$ в В. п. всех билинейных функционалов на $E_1' \times E_2'$. Пусть $E_0 = T^{-1}(0)$. Тензорным произведением В. п. E_1 и E_2 наз. факторпространство $E_1 \circ E_2 = (E_1 \square E_2)/E_0$; образ элемента $x \square y$ обозначается $x \circ y$. В. п. $E_1 \circ E_2$ изоморфно В. п. билинейных функционалов на $E_1' \times E_2'$ (см. *Тензорное произведение* векторных пространств).

Наиболее содержательной частью теории В. п. является теория конечномерных В. п. Но и понятие бесконечномерного В. п. часто оказывается плодотворным и имеет интересные приложения, особенно в теории топологических векторных пространств, т. е. В. п., наделенных топологией, определенным образом согласованной с его алгебраич. структурой.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Райков Д. А., Векторные пространства, М., 1962; [3] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [4] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963; [6] Глазман И. М., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969.

М. И. Кадец.

ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ — *локально тривиальное расслоение* $\pi : X \to B$, каждый слой к-рого $\pi^{-1}(b)$ наделен структурой (конечномерного) векторного пространства V над телом $\mathcal{P}$; $\dim V$ наз. размерностью В. р. Сечения В. р. π образуют локально свободный модуль $\Gamma(\pi)$ над кольцом непрерывных функций на B со значениями в $\mathcal{P}$. Морфизмом В. р. наз. морфизм расслоений $f : \pi \to \pi'$, для к-рого каждое отображение является линейным отображением. Совокупность В. р. и их морфизмов образует категорию Bund. Понятие В. р. возникло как обобщение *касательного расслоения* и нормального расслоения в дифференциальной геометрии; в настоящее время оно является базой и орудием исследования в различных областях математики — в дифференциальной и алгебраич. топологии, теории линейных связностей, алгебраич. геометрии, теории (псевдо)дифференциальных операторов и т. д.

Подмножество $X' \subset X$ такое, что $\pi|_{X'} : X' \to B$ есть В. р. и $X' \cap \pi^{-1}(b)$ — векторное подпространство $\pi^{-1}(b)$, наз. подрасслоением В. р. π. Пусть, напр., V — векторное пространство и $G_k(V)$ — *Грассмана многообразие* подпространства V размерности k; тогда подпространство произведения $G_k(V) \times V$, состоящее из пар (p, v) таких, что $v \in p$, есть подрасслоение γ_k тривиального В. р. $G_k(V) \times V$; объединение всех векторных пространств $\pi^{-1}(b)/\pi_2^{-1}(b)$, где π_2 — подрасслоение π, снабженное фактортопологией, наз. факторрасслоением В. р. π. Пусть, далее, V — векторное пространство и $G^k(V)$ — комногообразие Грассмана подпространств V коразмерности k; тогда факторпространство произведения $G^k(V) \times V$ по подрасслоению, состоящему из пар (p, v) с $v \in p$, есть факторрасслоение γ^k тривиального В. р. $G^k(V) \times V$. Понятия подрасслоения и факторрасслоения используются в конструкциях стягивания и склеивания, применяющихся для построения В. р. над факторпространствами.

B-морфизм В. р. $f : \pi \to \pi'$ наз. точным, если $\dim \ker f|\pi^{-1}(b)$ локально постоянна на B. Инъективный и сюръективный морфизмы являются точными и наз. соответственно мономорфизмом и эпиморфизмом В. р. Для точного морфизма f однозначно определены следующие В. р.: $\operatorname{Ker} f$ (ядро f) — подрасслоение π, $\operatorname{Im} f$ (образ f) — подрасслоение π', $\operatorname{Coker} f$ (коядро f) — факторрасслоение π, $\operatorname{Coim} f$ (кообраз f) — факторрасслоение π'; каждое под-

расслоение π_1 является образом нек-рого мономорфизма $i : \pi_1 \to \pi$, а факторрасслоение π_2 — коядром нек-рого эпиморфизма $j : \pi \to \pi_2$. Последовательность B-морфизмов В. р.

$$\ldots \to \pi' \to \pi \to \pi'' \to \ldots$$

наз. точной, если для всех $b \in B$ является точной последовательность

$$\ldots \to (\pi')^{-1}(b) \to \pi^{-1}(b) \to (\pi'')^{-1}(b) \to \ldots$$

В частности, последовательность

$$0 \to \pi_1 \xrightarrow{i} \pi \xrightarrow{j} \pi_2 \to 0$$

(где 0 — нулевое В. р.: $X = B$, $\pi = id$) точна, если i — мономорфизм, j — эпиморфизм и $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j$. Совокупность В. р. над B и их точных B-морфизмов образует точную подкатегорию Bund_B категории Bund.

Для любого В. р. $\pi : X \to B$ и отображения $u : B_1 \to B$ — *индуцированное расслоение* $u^*(\pi)$ снабжается такой структурой В. р., что морфизм $U : u^*(\pi) \to \pi$ является морфизмом В. р. Эта структура единственна и обладает тем свойством, что каждое отображение $(u^*(\pi))^{-1}(b) \to \pi^{-1}(u(b))$ является изоморфизмом векторных пространств. Напр., каждое В. р. размерности k над паракомпактным пространством B изоморфно В. р. $u^*(\gamma_k)$ и $\tilde{u}^*(\gamma^k)$, индуцированным нек-рыми отображениями $u : B \to G_k(V)$ и $\tilde{u} : B \to G^k(V)$ соответственно, причем гомотопные отображения индуцируют изоморфные В. р., и, если $\dim V \neq \infty$, — наоборот: изоморфным В. р. соответствуют гомотопные отображения u и $\tilde{u}$. Это — одна из основных теорем гомотопической классификации В. р., выражающая универсальность В. р. γ_k и γ^k по отношению к классифицирующим отображениям u и $\tilde{u}$.

Любой непрерывной операции (*функтору*) T на категории векторных пространств однозначно соответствует непрерывный функтор на категории В. р. над B; таким образом строятся расслоения, ассоциированные с данным В. р.: тензорные расслоения, В. р. морфизмов $\mathrm{Hom}_B(\pi, \pi')$ и, в частности, сопряженное В. р. π^*, внешние степени В. р. и т. д., сечения к-рых наделяют В. р. дополнительными структурами, широко используемыми в приложениях.

Для В. р. π и π' определяются прямая сумма (с у м м а У и т н и) $\pi \oplus \pi'$ и тензорное произведение $\pi \otimes \pi'$, — относительно этих операций множество классов Vekt_B, изоморфных над B, В. р. образуют полукольцо, играющее важную роль в построении *K-функтора*; так, если для В. р. π и π' существуют тривиальные В. р. θ и θ' такие, что В. р. $\pi \oplus \theta$ и $\pi' \oplus \theta'$ изоморфны (т. е. π и π' стабильно эквивалентны), то их образы в пополнении $K(B)$ полукольца Vekt_B совпадают, при этом существование обратного В. р. для любого В. р. над паракомпактным пространством влечет совпадение кольца $K(B)$ и множества классов стабильной эквивалентности В. р.

Для каждого В. р. $\pi : X \to B$ над паракомпактным пространством B существует сечение β В. р.

$$\pi^* \oplus \pi^* - \mathrm{Hom}(\pi \oplus \pi, P),$$

где P — тривиальное одномерное В. р., являющееся на каждом слое $\pi^{-1}(b)$ положительно определенной формой, т. е. π — метризуемое; это позволяет установить, в частности, расщепляемость любой точной последовательности В. р. $0 \to \xi \xrightarrow{u} \pi \xrightarrow{v} \zeta \to 0$, в которой π метризовано, — существование такого морфизма $w : \xi \oplus \zeta \to \pi$, что $wi = u$, $vw = j$, причем i — вложение в первое слагаемое, j — проекция на второе слагаемое.

Отождествлением в каждом слое $\pi^{-1}(b)$ В. р. $\pi : X \to B$ точек, лежащих на одной прямой, проходящей через 0, получается расслоение $\pi_0 : \Pi(\pi) \to B$, ассоциированное

с В. р. π и наз. его *проективизацией*; слоем π_0 является проективное пространство $\Pi(V)$, ассоциированное с V. С помощью этого расслоения изучаются *Тома пространства* $T(\pi)=\Pi(\pi\oplus\theta)/\Pi(\pi)$, используемые для гомотопической интерпретации классов бордантных многообразий, характеристических классов В. р., описывающих гомологические свойства многообразий, и т. д.

Понятие В. р. обобщается на случай, когда слой является бесконечномерным векторным пространством; при этом следует различать разные топологии пространства морфизмов $\mathrm{Hom}(\pi, \pi')$, вносить соответствующие изменения в определение точности морфизмов и их последовательностей, а также в построение В. р., ассоциированных с непрерывными функторами на категории бесконечномерных векторных пространств.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [3] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973. *А. Ф. Щекутьев.*

ВЕКТОРНО-ТОЧЕЧНАЯ АКСИОМАТИКА — аксиоматика n-мерного аффинного пространства R^n, первичными понятиями к-рой являются «точка» и «вектор»; связь между ними реализуется с помощью сопоставления парам точек однозначно определенного вектора. Выполняются следующие аксиомы.

I. Множество всех векторов пространства R^n есть n-мерное векторное пространство V^n.

II. Каждые две точки A и B (данные в определенном порядке) определяют единственный вектор $\boldsymbol{u}$.

III. Если даны произвольный вектор $\boldsymbol{u}$ и произвольная точка A, то существует единственная точка B такая, что $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}$.

IV. Если $\boldsymbol{u}_1=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{BC}$, то $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{AC}$.

Пара «точка A и вектор $\boldsymbol{u}$» наз. «вектором $\boldsymbol{u}$, приложенным к точке A» (или «закрепленным в этой точке»); сама точка A наз. начальной точкой приложенного к ней вектора $\boldsymbol{u}$, а точка B (однозначно определенная парой A, $\boldsymbol{u}$) наз. концом вектора $\boldsymbol{u}$ (приложенного к точке A).

Произвольно данный вектор $\boldsymbol{u}$ порождает вполне определенное взаимно однозначное отображение множества всех точек пространства R^n на себя. Это отображение, называемое *сдвигом* пространства R^n на вектор $\boldsymbol{u}$, состоит в том, что каждой точке $A\in R^n$ ставится в соответствие конец B приложенного к точке A вектора $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}$.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются *векторные поля* и *скалярные поля*.

Одним из основных понятий В. а. для изучения скалярных полей является градиент. Скалярное поле $u(M)$ наз. дифференцируемым в точке M области D, если приращение поля Δu в точке M может быть представлено в виде:

$$\Delta u = f(\Delta \boldsymbol{r}) + o(\rho),$$

где $\Delta \boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий точку M с M', $\rho=\rho(M, M')$ — расстояние между точками M и M', а $f(\Delta \boldsymbol{r})$ — линейная форма относительно вектора $\Delta \boldsymbol{r}$. Линейная форма $f(\Delta \boldsymbol{r})$ единственным образом может быть представлена в следующем виде:

$$f(\Delta \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{g}, \Delta \boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{g}$ — не зависящий от $\Delta \boldsymbol{r}$ (т. е. выбора точки M')

вектор. Вектор $\boldsymbol{g}$ наз. градиентом скалярного поля и обозначается символом grad u. В случае, когда скалярное поле дифференцируемо в каждой точке нек-рой области, grad u является векторным полем. Градиент всегда направлен ортогонально линии (поверхности) уровня $u(M)$—const скалярного поля u с производной по направлению $\boldsymbol{e}$ связан соотношением:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (\operatorname{grad} u,\ \boldsymbol{e}).$$

Для изучения векторных полей используется понятие дивергенции и ротора. Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. дифференцируемым в точке M нек-рой области D, т. е. приращение поля $\Delta\boldsymbol{a}$ в точке M единственным образом может быть представлено в виде:

$$\Delta\boldsymbol{a} = A\Delta\boldsymbol{r} + o(|\Delta\boldsymbol{r}|),$$

где $\Delta\boldsymbol{r}$—$|MM'|$, A — линейный оператор, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ (от выбора точки M'). Дивергенцией $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ наз. следующий скалярный инвариант линейного оператора A:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{r}^i,\ A\boldsymbol{r}_i), \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{r}_i$ — взаимные базисы $(\boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{r}^k)=\delta_i^k$ (δ_i^k — символ Кронекера). Если $\boldsymbol{a}(M)$ — поле скоростей в установившемся потоке несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ в точке M означает интенсивность источника ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}>0$) или стока ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}<0$), находящихся в точке M, или отсутствие их ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$).

Вихрем (ротором) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ наз. следующий векторный инвариант линейного оператора A из $(*)$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} \equiv [\boldsymbol{r}_i,\ A\boldsymbol{r}^i],$$

где $\boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{r}_i$ — взаимные базисы. Вихрь векторного поля может быть интерпретирован как векторная «вращательная составляющая» этого поля.

Для векторных и скалярных полей класса C^2 возможны повторные операции, напр.:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Градиент, дивергенция и вихрь обычно наз. основными дифференциальными операциями В. а. О свойствах основных дифференциальных операций В. а. и записи в специальных системах координат см. *Вихрь*, *Градиент*, *Дивергенция*.

В терминах основных операций В. а. могут быть записаны основные интегральные формулы, связывающие объемные, поверхностные и контурные интегралы. Пусть векторное поле непрерывно дифференцируемо в конечной связной области V, граница L — кусочно гладкая.

Пусть S — ограниченная, полная, кусочно гладкая двусторонняя поверхность с кусочно гладкой границей ∂S. Тогда справедлива *Стокса формула*:

$$\iint_S (\boldsymbol{n},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a})\,ds = \oint_{\partial S} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})\,dl,$$

причем нормальный к S вектор $\boldsymbol{n}$ и касательный к ∂S вектор $\boldsymbol{t}$ должны определять согласованные ориентации поверхности S и края ∂S. Интеграл $\oint_{\partial S}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})dl$ наз. циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{a}$ по кривой ∂S. Если циркуляция векторного поля по любой замкнутой кусочно гладкой кривой, расположенной в нек-рой области, равна нулю, то векторное поле наз. потенциальным в этой области. В односвязной области векторное поле потенциальное, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$. Для

потенциального векторного поля существует так наз. скалярный потенциал — функция $v(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} v$; при этом

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})\, dl = v(B) - v(A),$$

где точки $A,\ B \in D$, AB — кусочно гладкая кривая, $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной к AB, dl — дифференциал дуги.

Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ непрерывно и дифференцируемо в конечной связной области V с кусочно гладкой границей ∂V, тогда справедлива *Остроградского формула*:

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\sigma = \iint_{\partial V} (\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a})\, ds,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к ∂V.

Интеграл $\iint_{\partial V} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) ds$ наз. потоком векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через поверхность ∂V. Если поток векторного поля через любую замкнутую кусочно гладкую несамопересекающуюся ориентированную поверхность, расположенную в V и представляющую собой границу нек-рой ограниченной подобласти области V, равен нулю, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. соленоидальным в области V. Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div} \boldsymbol{a}=0$ во всех точках V. Для соленоидального векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ существует так наз. векторный потенциал — функция $A(M)$ такая, что

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} A(M).$$

Если дивергенция и вихрь векторного поля определены в каждой точке M области D, то всюду в D векторное поле может быть представлено в виде суммы потенциального $\boldsymbol{a}_1(M)$ и соленоидального $\boldsymbol{a}_2(M)$ полей (теорема Гельмгольца):

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}_1(M) + \boldsymbol{a}_2(M).$$

Векторные поля, для к-рых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, наз. гармоническими. Потенциал v гармонич. поля удовлетворяет уравнению Лапласа. Скалярное поле v также наз. гармоническим.

Лит. см. при статье *Векторное исчисление*. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ АЛГЕБРА — произвольное семейство A функций $x = \{x(t)\}$ на топологич. пространстве T, принимающих в каждой точке $t \in T$ значения в нек-рой алгебре $A(t)$ (вообще говоря, зависящей от t), образующее алгебру относительно поточечных операций. Если каждая из алгебр $A(t)$ является банаховой алгеброй, то A наз. В.-ф. а. при условии, что для любой функции $x = \{x(t)\} \in A$ функция $t \to \| x(t) \|$ непрерывна на T. Важнейшие общие вопросы теории В.-ф. а.: описание идеалов в A в терминах идеалов в алгебрах $A(t)$ и установление критерия принадлежности функции $x = \{x(t)\}$ алгебре A; чаще всего рассматривается случай, когда A — банахова алгебра относительно нормы

$$\| x \| = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_{A(t)},$$

а T — локально компактное или паракомпактное пространство. Особый интерес представляет В.-ф. а., связанная с семейством *C*-алгебр* $A(t)$; в этом частном случае известны некоммутативные аналоги *Вейерштрасса — Стоуна теоремы* и нек-рые теоремы о реализации C*-алгебр (в частности, C*-алгебр с непрерывным следом) в виде В.-ф. а. В свою очередь, эти теоремы позволяют в нек-рых случаях доказать коммутативность совокупности операторов, перестановочных с операторами симметричных представлений алгебр с инволюцией (континуальный аналог леммы Шура).

А. И. Штерн.

ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ, векторная функция,— функция $r(t)$ аргумента t, значения к-рой принадлежат нек-рому векторному пространству V.

В конечномерном (размерности m) векторном пространстве V задание В.-ф. эквивалентно заданию ее координат $r_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, в нек-ром базисе $e_1, \ldots, e_m$ пространства V:

$$r(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j(t)\, e_j. \qquad (1)$$

В.-ф. наз. непрерывной, дифференцируемой и т. п. (в точке или в области), если такими являются все функции $r_j(t)$. Для функции $r(t)$ одного переменного справедливы формулы:

$$\frac{d}{dt} r(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \sum_{j=1}^{m} r_j'(t)\, e_j, \qquad (2)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t)\, dt = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{t_0}^{t_1} r_j(t)\, dt \right) e_j, \qquad (3)$$

$$r(t) = r(t_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} r^{(k)}(t_0)\,(t - t_0)^k + \\ + \frac{1}{N!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^N r^{(N+1)}(\tau)\, d\tau$$

(формула Тейлора).

Множество концов векторов $r(t)$, отложенных от нулевой точки пространства V, наз. годографом В.-ф. Первая производная $\dot{r}(t)$ В.-ф. одного действительного переменного представляет собой вектор пространства V, касательный к годографу В.-ф. $r(t)$ в точке $r(t)$. Если $r(t)$ есть закон движения материальной точки (t — время), то $\dot{r}(t)$ является вектором мгновенной скорости точки в момент t. Вторая производная $\ddot{r}(t)$ — вектор ускорения точки.

Аналогично формулам (2), (3) определяются частные производные и кратные интегралы В.-ф. нескольких переменных. О понятиях векторного анализа для В.-ф. см. *Векторный анализ*, *Градиент*, *Дивергенция*, *Вихрь*.

В бесконечномерном векторном пространстве, имеющем базис, представление В.-ф. вида (1) является бесконечным рядом и покоординатное определение операций математического анализа встречает трудности, связанные с понятиями сходимости рядов, возможности почленного дифференцирования и интегрирования и т. п.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Л. П. Купцов.

ВЕКУА МЕТОД в теории *бесконечно малых изгибаний*—метод, заключающийся в том, что нек-рые величины, характеризующие изгибание поверхностей положительной гауссовой кривизны K, в сопряженно-изотермической параметризации являются *обобщенными аналитическими функциями*. Это обстоятельство позволяет свести задачу исследования изгибания поверхностей переменной $K>0$ к определенной задаче для поверхностей с $K=\text{const}>0$, бесконечно малые изгибания к-рых описываются обычными аналитич. функциями, и тем самым установить далеко идущую аналогию в свойствах изгибаний поверхностей с переменной и постоянной положительной гауссовой кривизной.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ВЕЛИЧИНА — одно из основных математич. понятий, смысл к-рого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

I. Еще в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) были отчетливо сформулированы свойства В., наз. теперь, для отличия от дальнейших обобщений, положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие В. является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площа-

ди, объема, массы и т. п. Каждый конкретный род В. связан с определенным способом сравнения физич. тел или др. объектов. Напр., в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Общеизвестны более сложные приемы, необходимые для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объему.

В соответствии со сказанным, в пределах системы всех однородных В. (т. е. в пределах системы всех длин или всех площадей, всех объемов) устанавливается отношение неравенства: две В. a и b одного и того же рода или совпадают ($a=b$), или первая меньше второй ($a<b$), или вторая меньше первой ($b<a$). Общеизвестно также в случае длин, площадей, объемов и то, каким образом устанавливается для каждого рода В. смысл операции сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных В. отношение $a<b$ и операция $a+b=c$ обладают следующими свойствами:

1) каковы бы ни были a и b, имеет место одно и только одно из трех соотношений: или $a=b$, или $a<b$, или $b<a$;

2) если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (транзитивность отношений «меньше», «больше»);

3) для любых двух В. a и b существует однозначно определенная В. $c=a+b$;

4) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

5) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность сложения);

6) $a+b>a$ (монотонность сложения);

7) если $a>b$, то существует одна и только одна В. c, для к-рой $b+c=a$ (возможность вычитания);

8) каковы бы ни были В. a и натуральное число n, существует такая В. b, что $nb=a$ (возможность деления);

9) каковы бы ни были В. a и b, существует такое натуральное число n, что $a<nb$. Это свойство наз. а к с и о м о й Е в д о к с а, или а к с и о м о й А р х и м е д а. В нем вместе с более элементарными свойствами 1) — 8) основана теория измерения В., развитая древнегреческими математиками.

Если взять к.-л. длину l за единичную, то система s' всех длин, находящихся в рациональном отношении к l, удовлетворяет требованиям 1) — 9). Существование несоизмеримых отрезков (открытие к-рых приписывается Пифагору, 6 в. до н. э.) показывает, что система s' еще не охватывает системы s всех вообще длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию В., к требованиям 1) — 9) надо присоединить еще ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, напр.:

10) если последовательности величин $a_1<a_2<\ldots<\ldots<b_2<b_1$ обладают тем свойством, что $b_n-a_n<c$ для любой В. c при достаточно большом номере n, то существует единственная В. x, к-рая больше всех a_n и меньше всех b_n.

Свойства 1) — 10) и определяют полностью современное понятие системы положительных скалярных В. Если в такой системе выбрать к.-л. В. l за единицу измерения, то все остальные В. системы однозначно представляются в виде $a=\alpha l$, где α — положительное действительное число.

II. Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и т. п. В. естественно приводит к тому обобщению понятия скалярной В., к-рое является основным в механике и физике. Система скалярных В. в этом понимании включает в себя, кроме положительной, В., нуль и отрицательную В. Выбирая в такой системе к.-л. положительную величину l за единицу измерения, выражают все остальные В. системы в виде $a=\alpha l$, где α — действительное число, положительное, отрица-

тельное или равно нулю. Конечно, систему скалярных В. в этом понимании можно охарактеризовать и аксиоматически, не опираясь на понятие числа. Для этого пришлось бы несколько изменить требования 1) — 10), к-рыми выше охарактеризовано понятие положительной скалярной В.

III. В более общем смысле слова величинами называются *векторы*, *тензоры* и др. «нескалярные величины». Такие В. можно складывать, но отношение неравенства ($a<b$) для них теряет смысл.

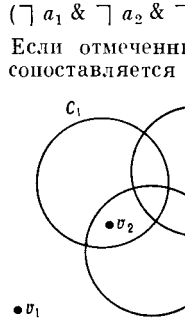
IV. В нек-рых более отвлеченных математич. исследованиях играют известную роль «неархимедовы» В., к-рые имеют с обычными скалярными В. то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9) не выполняется (для скалярных В. в смысле пункта II она сохраняется с оговоркой, что $b>0$).

V. Так как система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше свойствам 1) — 10), а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных В., то вполне законно сами действительные числа называть величинами. Это особенно принято при рассмотрении п е р е м е н н ы х В. Если какая-либо конкретная В., напр. длина l нагреваемого металлич. стержня, изменяется во времени, то меняется и измеряющее ее число $x=l/l_0$ (при постоянной единице измерения l_0). Само это меняющееся во времени число x принято называть переменной В. и говорить, что x принимает в какие-либо последовательные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ «числовые значения» $x_1, x_2, \ldots$. В традиционной математич. терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объемы и т. п., являются частными случаями В. и, как всякие В., могут быть и переменными, и постоянными. Столь же законно и рассмотрение переменных векторов, тензоров и т. п. *А. Н. Колмогоров.*

ВЕННА ДИАГРАММА — графический способ изображения формул математич. логики, прежде всего формул исчисления высказываний. В. д. n переменных $a_1, \ldots, a_n$ классич. логики высказываний представляет собой такой набор замкнутых контуров $C_1, \ldots, C_n$ (гомеоморфных окружностям), к-рый разбивает плоскость на 2^n областей, причем нек-рые из этих областей (например, $v_1, \ldots, v_k$, $0\leqslant k\leqslant 2^n$) отмечены. Каждой отмеченной области V_i, $0<i\leqslant k$, ставится в соответствие формула $B_i=b_1\&b_2\&\ldots\&b_n$, где b_j, $0<j\leqslant n$, есть a_j, если v_i лежит внутри контура C_j, и b_j есть $\neg a_j$ в противном случае. Диаграмме в целом соответствует формула $B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_n$. Напр., В. д., изображенной на рис., соответствует формула

$$(\neg a_1\,\&\,\neg a_2\,\&\,\neg a_3)\vee(a_1\,\&\,\neg a_2\,\&\,a_3)\vee(\neg a_1\,\&\,a_2\,\&\,\neg a_3).$$

Если отмеченных областей нет ($k=0$), то диаграмме сопоставляется тождественно ложная формула, напр. $a_1\&\neg a_1$. В логике высказываний В. д. используются для решения проблемы разрешения, проблемы вывода всех возможных попарно неэквивалентных логич. следствий из данных посылок и др. Логика высказываний может быть построена в виде операций над В. д., сопоставленных логич. операциям.



Аппарат диаграмм был предложен Дж. Венном [1] для решения задач логики классов. Метод В. д. распространен на классич. исчисление многоместных предикатов. В. д. находят применение в приложениях математич. логики и теории автоматов, в частности для решения задач теории нейронных сетей.

Лит.: [1] Venn J., Symbolic logic, 2 ed., L., 1894; [2] Кузичев А. С., Диаграммы Венна, М., 1968.
А. С. Кузичев.

ВЕРБАЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — пересечение всех конгруэнций θ алгебры A, факторалгебры A/θ по к-рым принадлежат нек-рому фиксированному многообразию Ω-алгебр. Конгруэнция θ произвольной алгебраич. системы $A=\langle A, \Omega\rangle$ наз. вербальной, если существует многообразие $\mathfrak{M}$ Ω-систем, для к-рого каноническое отображение $A \to A/\theta$ является $\mathfrak{M}$-морфизмом. В. к. является *вполне характеристической конгруэнцией*. Если F — свободная Ω-система в нек-ром многообразии $\mathfrak{B}$, то и, обратно, всякая вполне характеристическая конгруэнция η в F является В. к. относительно многообразия $\mathfrak{M}$, порожденного факторсистемой F/η.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.
Д. М. Смирнов.

ВЕРБАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа $V(G)$ группы G, порожденная всевозможными значениями всех *слов* из нек-рого множества $V=\{f_\nu(x_1, \ldots, x_{n_\nu})|\nu\in I\}$, когда $x_1, x_2, \ldots$ независимо друг от друга пробегают всю группу G. В. п. нормальна; конгруэнция, определяемая с помощью В. п. на группе, является *вербальной конгруэнцией* (см. также *Алгебраических систем многообразие*).

Примеры В. п.: 1) коммутант G' группы G, определяемый коммутатором $[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy$; 2) n-й коммутант $G^{(n)}=(G^{(n-1)})'$; 3) члены нижнего центрального ряда

$$\Gamma_1(G)=G\supseteq\Gamma_2(G)\supseteq\ldots\supseteq\Gamma_n(G)\supseteq\ldots,$$

где $\Gamma_n(G)$ — В. п., определяемая коммутатором

$$[x_1, \ldots, x_n]=[[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n];$$

4) степень G^n группы G, определяемая словом x^n.

При любом гомоморфизме φ справедливо равенство $V(G)\varphi=V(G\varphi)$. В частности, $V(G)$ — *вполне характеристическая подгруппа* в G. Обратное верно для свободных групп, но не в общем случае: пересечение двух В. п. может и не быть В. п. Для прямого произведения групп

$$V(\Pi\times G_i)=\Pi\times V(G_i),$$

что, однако, уже неверно при переходе к декартову произведению.

Особо важную роль играют В. п. свободной группы X счетного ранга. Они составляют (дедекиндову) подрешетку решетки всех ее подгрупп. В. п. обладает свойством «монотонности»: если $V(X)\neq E$ и $V(R)\supseteq V(S)$, где $R\lhd X$, $S\lhd X$ ($R\lhd X$ означает, что R является нормальным делителем группы X), то и $R\supseteq S$. В частности, $V(R)=V(S)$ влечет $R=S$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969.
О. Н. Головин.

ВЕРБАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп G_i, $i\in I$, — факторгруппа $F/(V(F)\bigcap C)$, где F — *свободное произведение* групп G_i, $i\in I$, V — нек-рое множество слов, $V(F)$ — вербальная V-подгруппа (см. *Вербальная подгруппа*) группы F, а C — декартова подгруппа (т. е. ядро естественного эпиморфизма F на прямое произведение тех же групп). Как операция на классе групп В. п. ассоциативно, а в пределах соответствующего многообразия групп и свободно.
О. Н. Головин.

ВЕРЗОР, версор, — *аффинор*, производящий поворот вектора на прямой угол.

ВЕРИФИКАЦИЯ — процесс проверки истинности *суждений*. В более узком смысле — процесс проверки истинности формул специального вида нек-рого логико-математич. языка.
А. Г. Драгалин.

ВЕРОНЕЗЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — специальное регулярное отображение проективного пространства; наз-

вано в честь Дж. Веронезе (G. Veronese). Пусть n, m — целые положительные числа, $\nu_{nm}=C^n_{n+m}-1$, а $\boldsymbol{P}^n$ $\boldsymbol{P}^{\nu_{nm}}$ — проективные пространства над произвольным полем (или над кольцом целых чисел), рассматриваемые как схемы, $u_0, \ldots, u_n$ — проективные координаты в $\boldsymbol{P}^n$, $v_{i_0 \ldots i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$, — проективные координаты в $\boldsymbol{P}^{\nu_{nm}}$. Отображение Веронезе есть морфизм

$$v_m: \boldsymbol{P}^n \longrightarrow \boldsymbol{P}^{\nu_{nm}},$$

задаваемый формулами $v_{i_0 \ldots i_n}=u_0^{i_0}\ldots u_n^{i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$. В инвариантных терминах В. о. может быть определено как регулярное отображение, задаваемое полной линейной системой $|mH|$, где H — гиперплоское сечение в $\boldsymbol{P}^n$. В. о. является замкнутым вложением, его образ $v_m(\boldsymbol{P}^n)$ наз. многообразием Веронезе и задается уравнениями

$$v_{i_0 \ldots i_n} v_{j_0 \ldots j_n} = v_{k_0 \ldots k_n} v_{r_0 \ldots r_n},$$

где $i_0+j_0=k_0+r_0$, $\ldots$, $i_n+j_n=k_n+r_n$. Напр., $v_2(\boldsymbol{P}^1)$ есть кривая с уравнением $x_0x_1=x_2^2$ в $\boldsymbol{P}^2$. Степень многообразия Веронезе равна m^n. Для любой гиперповерхности

$$F=\sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0 \ldots i_n} u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n}=0$$

в $\boldsymbol{P}^n$ ее образ относительно В. о. v_m является сечением многообразия Веронезе $v_m(\boldsymbol{P}^n)$ гиперплоскостью

$$\sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0 \ldots i_n} v_{i_0 \ldots i_n}=0.$$

Этот факт позволяет использовать В. о. для сведения нек-рых задач о гиперповерхностях к случаю гиперплоских сечений.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев.

ВЕРОЯТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ, срединное отклонение,— характеристика рассеяния *распределения вероятностей*. Для непрерывно распределенной симметричной случайной величины X В. о. B определяется условием:

$$\mathsf{P}\{|X-m|<B\}=\mathsf{P}\{|X-m|>B\}=\frac{1}{2}, \qquad (*)$$

где m — медиана X (совпадающая в этом случае с математич. ожиданием, если оно существует). Для *нормального распределения* существует простая связь В. о. со стандартной мерой рассеяния — квадратичным отклонением σ:

$$\Phi\left(\frac{B}{\sigma}\right)=\frac{3}{4},$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального (0,1) распределения. Приближенно $B=0{,}6745\sigma$.

А. В. Прохоров.

ВЕРОЯТНОСТЕЙ ТЕОРИЯ — математическая наука, позволяющая по *вероятностям* одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных к.-л. образом с первыми.

Утверждение о том, что к.-л. событие наступает с вероятностью, равной, напр., 1/2, еще не представляет само по себе окончательной ценности, т. к. мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты В. т., к-рые позволяют утверждать, что вероятность наступления к.-л. события A весьма близка к единице или (что то же самое) вероятность ненаступления события A весьма мала. В соответствии с принципом «пренебрежения достаточно малыми вероятностями» такое событие справедливо считают практически достоверным. Ниже (в разделе Предельные теоремы) показано, что имеющие научный и практич. интерес выводы такого рода обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступле-

ние события A зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом факторов (см. по этому поводу ст. *Больших чисел закон*). Поэтому можно также сказать, что В. т. есть математич. наука, выясняющая закономерности, к-рые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Предмет теории вероятностей. Для описания закономерной связи между нек-рыми условиями S и событием A, наступление или ненаступление к-рого при данных условиях может быть точно установлено, естествознание использует обычно одну из следующих двух схем.

а) При каждом осуществлении условий S наступает событие A. Такой вид, напр., имеют все законы классич. механики, к-рые утверждают, что при заданных начальных условиях и силах, действующих на тело или систему тел, движение будет происходить однозначно определенным образом.

б) При условиях S событие A имеет определенную вероятность $P(A|S)$, равную p. Так, напр., законы радиоактивного излучения утверждают, что для каждого радиоактивного вещества существует определенная вероятность того, что из данного количества вещества за данный промежуток времени распадается к.-л. число N атомов.

Назовем частотой события A в данной серии из n испытаний (т. е. из n повторных осуществлений условий S) отношение $p = m/n$ числа m тех испытаний, в к-рых A наступило, к общему их числу n. Наличие у события A при условиях S определенной вероятности, равной p, проявляется в том, что в почти каждой достаточно длинной серии испытаний частота события A приблизительно равна p. Всякая математич. модель, предназначенная для схематич. описания связи между условиями S и случайным событием A, обычно включает также определенные допущения о характере и степени зависимости испытаний. После того как такие дополнительные допущения (из к-рых наиболее часто встречающимся является независимость испытаний, см. раздел Основные понятия теории вероятностей) сделаны, вышеприведенное расплывчатое утверждение о близости частоты к вероятности может быть количественно уточнено.

Статистич. закономерности, т. е. закономерности, описываемые схемой типа б), были впервые обнаружены на примере азартных игр, подобных игре в кости. Очень давно известны также статистич. закономерности рождения, смерти (напр., вероятность новорожденному быть мальчиком равна 0,515). Конец 19 в. и 1-я пол. 20 в. отмечены открытием большого числа статистич. закономерностей в физике, химии, биологии и др. науках. Следует отметить, что статистич. закономерности возникают и в схемах, не связанных непосредственно с понятием случая, напр., в распределении цифр в таблицах функций и т. п., см. *Случайные и псевдослучайные числа*; это обстоятельство используют, в частности, при «моделировании» случайных явлений, см. *Статистических испытаний метод*.

Возможность применения методов В. т. к изучению статистич. закономерностей, относящихся к весьма далеким друг от друга областям науки, основана на том, что вероятности событий всегда удовлетворяют нек-рым простым соотношениям, о к-рых сказано ниже (см. раздел Основные понятия теории вероятностей). Изучение свойств вероятностей событий на основе этих простых соотношений и составляет предмет В. т.

Основные понятия теории вероятностей. Наиболее просто определяются основные понятия В. т. как математич. дисциплины в рамках так наз. элементарной теории вероятностей. Каждое испытание T, рассматриваемое в элементарной В. т., таково, что оно заканчивается одним и только одним из исходов, или, как говорят, одним из элементар-

ных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k — вероятность этого исхода. Числа p_k должны при этом в сумме давать единицу. Рассматриваются затем события A, заключающиеся в том, что

«наступает или ω_i, или ω_j, ..., или ω_k».

Исходы $\omega_i, \omega_j, \ldots, \omega_k$ наз. благоприятствующими A, и, по определению, полагают вероятность $P(A)$ события A, равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов:

$$P(A) = p_i + p_j + \ldots + p_k. \qquad (1)$$

Частный случай $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 1/s$ приводит к формуле

$$P(A) = \frac{r}{s}. \qquad (2)$$

Формула (2) выражает так наз. классическое определение вероятности, в соответствии с к-рым вероятность к.-л. события A равна отношению числа r исходов, благоприятствующих A, к числу s всех «равновозможных» исходов. Вычисление вероятностей сводится при этом к подсчету числа благоприятствующих событию A исходов и часто оказывается трудной комбинаторной задачей (см. *Комбинаторные задачи* в теории вероятностей).

Пример. При бросании двух игральных костей каждый из 36 возможных исходов может быть обозначен (i, j), где i - число очков, выпадающее на первой кости, j - на второй. Исходы предполагаются равновероятными. Событию A — «сумма очков равна 4», благоприятствуют три исхода (1; 3), (2; 2), (3; 1). Следовательно, $P(A) = 3/36 = 1/12$.

Вопрос о том, как определяются численные значения вероятностей p_k в данной конкретной задаче, лежит по существу за пределами В. т. как чисто математич. дисциплины. В одних случаях выбор этих значений производится на основе обработки результатов большого числа наблюдений. В других случаях возможно теоретич. предсказание вероятностей, с к-рыми те или иные события будут встречаться в данном испытании. Такое предсказание часто основывается на объективной симметрии связи между условиями, в к-рых производится испытание, и исходами этих испытаний, и приводит тогда к формуле (2). Пусть, напр., испытание состоит в подбрасывании игральной кости, представляющей собой кубик из однородного материала. Тогда можно предполагать, что с вероятностью 1/6 кость может упасть на каждую из своих граней. В этом примере предположение о равновероятности исходов находится в согласии с опытом. Такого рода примеры и послужили основой для классич. определения вероятности.

Более тонкое и глубокое объяснение причин равновероятности исходов в нек-рых специальных случаях дается так наз. методом произвольных функций. Суть этого метода можно пояснить следующим образом на примере бросания кости. Пусть опыт поставлен так, что случайные воздействия на кость со стороны воздуха можно считать пренебрежимо малыми. Тогда, если точно даны начальное положение, начальная скорость кости и ее механич. характеристики, движение может быть рассчитано по законам классич. механики, и результат опыта можно предсказать достоверно. Практически начальные условия не могут никогда быть фиксированы с абсолютной точностью и, напр., даже очень малые изменения начальной скорости приводят к другому результату, если только время t от момента подбрасывания до момента падения достаточно велико. Оказывается, что при очень широких допущениях относительно распределения вероятностей начальных значений (отсюда и название метода) вероятность каждого из шести возможных исходов стремится к 1/6 при $t \to \infty$.

Другой пример — тасование колоды карт с целью достижения равновероятности всех возможных расположений. Здесь переход от одного расположения карт к другому при очередном тасовании обычно носит вероятностный характер. Факт стремления к равновероятности устанавливается методами теории *Маркова цепей*.

Оба случая могут быть включены в общую эргодическую теорию.

Исходя из к.-л. данных событий, можно определить два новых события: их объединение (сумму) и совмещение (произведение). Событие B наз. объединением событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид:

«наступает или A_1, или A_2, ..., или A_r».

Событие C наз. совмещением событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид:

«наступает и A_1, и A_2, ..., и A_r».

Объединение событий обозначают знаком $\bigcup$, а совмещение — знаком $\bigcap$. Таким образом, пишут:

$$B = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_r, \quad C = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_r.$$

События A и B наз. несовместными, если их одновременное осуществление невозможно, т. е. если не существует среди исходов испытания ни одного благоприятствующего и A, и B. Если события A_i отождествить со множествами благоприятствующих им исходов, то события B и C будут отождествляться с объединением и пересечением соответствующих множеств.

С введенными операциями связаны две основные теоремы В. т.— теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таковы, что каждые два из них несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей.

Так, в приведенном выше примере с бросанием двух костей событие B — «сумма очков не превосходит 4», есть объединение трех несовместных событий A_2, A_3, A_4, заключающихся в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Вероятности этих событий 1/36; 2/36; 3/36. По теореме сложения вероятность $P(B)$ равна

$$1/36 + 2/36 + 3/36 = 6/36 = 1/6.$$

Условную вероятность события B при условии A определяют формулой

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

что, как можно показать, находится в полном соответствии со свойствами частот. События $A_1, A_2, \ldots, A_r$ наз. независимыми, если условная вероятность каждого из них при условии, что какие-либо из остальных наступили, равна его «безусловной» вероятности (см. также *Независимость* в теории вероятностей).

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совмещения событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$ равна вероятности события A_1, умноженной на вероятность события A_2, взятую при условии, что A_1 наступило, ..., умноженной на вероятность события A_r при условии, что $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ наступили. Для независимых событий теорема умножения приводит к формуле:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_r), \quad (3)$$

т. е. вероятность совмещения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Формула (3) остается справедливой, если в обеих ее частях нек-рые из событий заменить на противоположные им.

Пример. Производится 4 выстрела по цели с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле.

Попадания в цель при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

Каждый исход испытания может быть обозначен последовательностью из четырех букв [напр., (у, н, н, у) означает, что при первом и четвертом выстрелах были попадания (успех), а при втором и третьем — попаданий не было (неудача)]. Всего будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ исходов. В соответствии с предположением о независимости результатов отдельных выстрелов следует для определения вероятностей этих исходов использовать формулу (3) и примечание к ней. Так, вероятность исхода (у, н, н, н) следует положить равной

$$0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1024;$$

здесь $0{,}8 = 1 - 0{,}2$ — вероятность промаха при отдельном выстреле. Событию «в цель попадают три раза» благоприятствуют исходы (у, у, у, н), (у, у, н, у), (у, н, у, у), (н, у, у, у), вероятность каждого одна и та же:

$$0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = \ldots = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}0064;$$

следовательно, искомая вероятность равна

$$4 \cdot 0{,}0064 = 0{,}0256.$$

Обобщая рассуждения разобранного примера, можно вывести одну из основных формул В. т.: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и имеют каждое вероятность p, то вероятность наступления ровно m из них равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}; \qquad (4)$$

здесь C_n^m обозначает число сочетаний из n элементов по m (см. *Биномиальное распределение*). При больших n вычисления по формуле (4) становятся затруднительными. Пусть в предыдущем примере число выстрелов равно 100, и ставится вопрос об отыскании вероятности x того, что число попаданий лежит в пределах от 8 до 32. Применение формулы (4) и теоремы сложения дает точное, но практически мало пригодное выражение искомой вероятности

$$x = \sum_{m=8}^{32} C_{100}^m (0{,}2)^m (0{,}8)^{100-m}.$$

Приближенное значение вероятности x можно найти по *Лапласа теореме*

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{+3} e^{-z^2/2} dz = 0{,}9973,$$

причем ошибка не превосходит 0,0009. Найденный результат показывает, что событие $8 \leqslant m \leqslant 32$ практически достоверно. Это самый простой, но типичный пример использования *предельных теорем* В. т.

К числу основных формул элементарной В. т. относится также так наз. ф о р м у л а п о л н о й в е р о я т н о с т и: если события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно несовместны и их объединение есть достоверное событие, то для любого события B его вероятность равна сумме

$$P(B) = \sum_{k=1}^{r} P(B|A_k) P(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей оказывается особенно полезной при рассмотрении с о с т а в н ы х и с п ы т а н и й. Говорят, что испытание T составлено из испытаний $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n$, если каждый исход испытания T есть совмещение нек-рых исходов $A_i, B_j, \ldots, X_k, Y_l$ соответствующих испытаний $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n$. Из тех или иных соображений часто бывают известны вероятности

$$P(A_i),\ P(B_j|A_i),\ \ldots,\ P(Y_l|A_i \cap B_j \cap \ldots \cap X_k). \qquad (5)$$

По вероятностям (5) с помощью теоремы умножения могут быть определены вероятности $P(E)$ для всех исходов E составного испытания, а вместе с тем и ве-

роятности всех событий, связанных с этим испытанием (подобно тому, как это было сделано в разобранном выше примере). Наиболее значительными с практич. точки зрения представляются два типа составных испытаний: а) составляющие испытания н е з а в и с и м ы, т. е. вероятности (5) равны безусловным вероятностям $P(A_i)$, $P(B_j)$, ..., $P(X_k)$, $P(Y_l)$; б) на вероятности исходов к.-л. испытания влияют результаты лишь непосредственно предшествующего испытания, т. е. вероятности (5) равны соответственно: $P(A_i)$, $P(B_j|A_i)$, ..., $P(Y_l|X_k)$. В этом случае говорят об испытаниях, с в я з а н н ы х в ц е п ь М а р к о в а. Вероятности всех событий, связанных с составным испытанием, вполне определяются здесь начальными вероятностями $P(A_i)$ и переходными вероятностями $P(B_j|A_i)$, ..., $P(Y_l|X_k)$ (см. *Марковские процессы*).

С л у ч а й н ы е в е л и ч и н ы. Если каждому исходу испытания T поставлено в соответствие число x_r, говорят, что задана с л у ч а й н а я в е л и ч и н а X. Среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_s$ могут быть и равные; совокупность р а з л и ч н ы х значений x_r при $r=1, 2, \ldots, s$ называют совокупностью в о з м о ж н ы х значений случайной величины. Набор возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей наз. р а с п р е д е л е н и е м в е р о я т н о с т е й случайной величины. Так, в примере с бросанием двух костей с каждым исходом испытания (i, j) связывается случайная величина $X=i+j$ — сумма очков на обеих костях. Возможные значения суть 2, 3, 4, ..., 11, 12; соответствующие вероятности равны 1/36, 2/36, 3/36, ..., 2/36, 1/36.

При одновременном изучении нескольких случайных величин вводится понятие их совместного распределения, к-рое задается указыванием возможных значений каждой из них и вероятностей совмещения событий

$$\{X_1=x_1\},\ \{X_2=x_2\},\ \ldots,\ \{X_n=x_n\}, \qquad (6)$$

где x_k — какое-либо из возможных значений величины X_k. Случайные величины наз. н е з а в и с и м ы м и, если при любом выборе x_k события (6) независимы. С помощью совместного распределения случайных величин можно вычислить вероятность любого события, определяемого этими величинами, напр., события

$$a<X_1+X_2+\ldots+X_n<b$$

и т. п.

Часто вместо полного задания распределения вероятностей случайной величины предпочитают пользоваться небольшим количеством числовых характеристик. Из них наиболее употребительны *математическое ожидание* и *дисперсия* (см. также *Момент*, *Семиинвариант*).

В число основных характеристик совместного распределения нескольких случайных величин, наряду с математич. ожиданиями и дисперсиями этих величин, включаются коэффициенты *корреляции* и т. п. Смысл перечисленных характеристик в значительной степени разъясняется предельными теоремами (см. раздел Предельные теоремы).

Схема испытаний с конечным числом исходов недостаточна уже для самых простых применений В. т. Так, при изучении случайного разброса точек попаданий снарядов вокруг центра цели, при изучении случайных ошибок, возникающих при измерении к.-л. величины, и т. д. уже невозможно ограничиться испытаниями с конечным числом исходов. При этом в одних случаях результат испытания может быть выражен числом или системой чисел, в других — результатом испытания может быть функция (напр., запись изменения давления в данной точке атмосферы за данный промежуток времени), системы функций и т. п. Следует отметить, что многие данные выше определения и тео-

ремы с соответствующими изменениями приложимы и в этих более общих обстоятельствах, хотя способы задания распределения вероятностей изменяются (см. *Распределение вероятностей*, *Плотность вероятности*). Аналогом классич. «равновероятности исходов» здесь служит равномерное распределение рассматриваемых объектов в к.-л. области (именно его имеют в виду, говоря о наудачу взятой из данной области точке, о наудачу взятой секущей данной фигуры и т. п.).

Наиболее серьезное изменение претерпевает определение вероятности, к-рое в элементарном случае давалось формулой (2). В более общих схемах, о к-рых идет речь, события являются объединениями бесконечного числа элементарных событий, вероятность каждого из к-рого может быть равна нулю. В соответствии с этим свойство, выраженное теоремой сложения, не выводится из определения вероятности, а включается в него.

Наиболее распространенная в настоящее время логич. схема построения основ В. т. разработана в 1933 А. Н. Колмогоровым. Основные черты этой схемы следующие. При изучении к.-л. реальной задачи методами В. т. прежде всего выделяется множество U элементов u, называемых элементарными событиями. Всякое событие вполне описывается множеством благоприятствующих ему элементарных событий и потому рассматривается как нек-рое множество элементарных событий. С нек-рыми из событий A связываются определенные числа $P(A)$, называемые их вероятностями и удовлетворяющие условиям

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) $P(U) = 1$;

3) если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны и A — их сумма, то

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(аддитивность вероятности).

Для создания полноценной математич. теории требуют, чтобы область определения $P(A)$ была σ-алгеброй и чтобы условие 3) выполнялось и для бесконечных последовательностей попарно несовместных событий (счетная аддитивность вероятности). Свойства неотрицательности и счетной аддитивности есть основные свойства меры множества. В. т. может, таким образом, с формальной точки зрения рассматриваться как часть теории меры. Основные понятия В. т. получают при таком подходе новое освещение. Случайные величины превращаются в измеримые функции, их математич. ожидания — в абстрактные интегралы Лебега и т. п. Однако основные проблемы В. т. и теории меры различны. Основным, специфическим для В. т. является понятие независимости событий, испытаний, случайных величин. Наряду с этим В. т. тщательно изучает и такие объекты, как условные распределения, условные математические ожидания и т. п.

В отношении указанной выше схемы можно сделать следующие замечания. В соответствии с ней в основе каждой вероятностной модели лежит *вероятностное пространство*, рассматриваемое как тройка (Ω, S, P), где Ω — множество элементарных событий, S — выделенная в X σ-алгебра подмножеств, P — распределение вероятностей (счетно аддитивная нормированная мера) на S. Два достижения, связанных с этой схемой, — определение вероятностей в бесконечномерных пространствах (в частности, вероятностей, связанных с бесконечными последовательностями испытаний и случайными процессами) и общее определение *условных вероятностей* и условных математич. ожиданий (по отношению к данной случайной величине и т. п.).

При последующем развитии В. т. выяснилось, что указанное общее определение вероятностного пространства целесообразно ограничить. Так появились понятия совершенных распределений, плотных распределений и т. п. (см. *Распределение вероятностей*).

Известны и другие подходы к основным понятиям В. т., напр. аксиоматизация, при к-рой основным объектом становятся нормированные булевы алгебры событий. Основное преимущество (в предположении, что рассматриваемая алгебра полна в метрич. смысле) здесь состоит в том, что для любых направленных систем событий выполняются соотношения

$$P\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \sup_{\alpha} P(A_\alpha), \quad A_\alpha \uparrow,$$

$$P\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) = \inf_{\alpha} P(A_\alpha), \quad A_\alpha \downarrow.$$

Возможна аксиоматизация понятия случайной величины как элемента нек-рой коммутативной алгебры, на к-рой определен линейный функционал (аналог математич. ожидания).

Предельные теоремы. При формальном изложении В. т. предельные теоремы появляются в виде своего рода надстройки над ее элементарными разделами, в к-рых все задачи имеют конечный, чисто арифметич. характер. Однако познавательная ценность В. т. раскрывается только предельными теоремами. Так, *Бернулли теорема* показывает, что при независимых испытаниях частота появления к.-л. события, как правило, мало отклоняется от его вероятности, а *Лапласа теорема* указывает вероятности тех или иных отклонений. Аналогично смысл таких характеристик случайной величины, как ее математич. ожидание и дисперсия, разъясняется законом больших чисел и центральной предельной теоремой (см. *Больших чисел закон*, *Больших чисел усиленный закон*, *Предельные теоремы* теории вероятностей).

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{7}$$

— независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение вероятностей с $\mathsf{E}X_k = a$, $\mathsf{D}X_k = \sigma^2$ и Y_n — среднее арифметическое первых n величин из последовательности (7):

$$Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n.$$

В соответствии с законом больших чисел, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $|Y_n - a| \leqslant \varepsilon$ имеет при $n \to \infty$ пределом 1 и, таким образом, Y_n, как правило, мало отличается от a. Центральная предельная теорема уточняет этот результат, показывая, что отклонения Y_n от a приближенно подчинены нормальному распределению со средним 0 и дисперсией σ^2/n. Таким образом, для вычисления (в первом приближении) вероятностей тех или иных отклонений Y_n от a при больших n нет надобности знать во всех деталях распределение величин X_n; достаточно знать лишь их дисперсию. При необходимости увеличить точность приближения необходимо привлекать моменты более высокого порядка.

Эти утверждения могут быть с надлежащими изменениями распространены на случайные векторы (из конечномерных и нек-рых бесконечномерных векторных пространств). Условия независимости могут быть заменены условиями «слабой» (в том или ином смысле) зависимости X_n. Известны также предельные теоремы для распределений на группах, для распределений значений арифметич. функций и т. д.

В приложениях (в частности, в математич. статистике и статистич. физике) возникает необходимость аппроксимировать малые вероятности (событий типа $|Y_n - a| > \varepsilon$) с большой относительной точностью.

Это приводит к значительным поправкам в аппроксимации нормальным законом (см. *Больших отклонений вероятности*).

В 20-х гг. 20 в. было обнаружено, что даже в схеме последовательности одинаково распределенных и независимых случайных величин могут вполне естественным образом возникать предельные распределения, отличные от нормального. Так, напр., если X_1 — время до первого возвращения нек-рой случайно меняющейся системы в исходное положение, X_2 — время между первым и вторым возвращениями и т. д., то при очень общих условиях распределение суммы $X_1+\ldots+X_n$ (т. е. времени до n-го возвращения) после умножения на $n^{-1/\alpha}$ (α — постоянная, меньшая 1) сходится к некоторому предельному распределению. Таким образом, время до n-го возвращения растет, грубо говоря, как $n^{1/\alpha}$, т. е. быстрее n (в случае приложимости закона больших чисел оно было бы порядка n). Это обстоятельство видно уже в примере *Бернулли блуждания* (где проявляется и другой парадоксальный закон — *арксинуса закон*).

Основным методом доказательства предельных теорем является метод *характеристических функций* (и близкие к нему методы преобразований Лапласа и производящих функций). В ряде случаев необходимо обращение к методам теории функций комплексного переменного.

Механизм возникновения большинства предельных закономерностей может быть до конца понят лишь в связи с теорией случайных процессов.

Случайные процессы. В ряде физич. и химич. исследований последних десятилетий возникла потребность, наряду с одномерными и многомерными случайными величинами, рассматривать *случайные процессы*, т. е. процессы, для к-рых определена вероятность того или иного их течения. Примером случайного процесса может служить координата частицы, совершающей броуновское движение. В В. т. случайный процесс рассматривают обычно как однопараметрич. семейство случайных величин $X(t)$. В подавляющем числе приложений параметр t является временем, но этим параметром может быть, напр., произвольное независимое переменное и тогда обычно говорят о *случайной функции* (если t точка пространства, то — о *случайном поле*). В том случае, когда параметр t пробегает целочисленные значения, случайная функция наз. случайной последовательностью (или временны́м рядом). Подобно тому, как случайная величина характеризуется законом распределения, случайный процесс может быть охарактеризован совокупностью совместных законов распределения для $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ для всевозможных моментов времени t_1, t_2, ..., t_n при любом $n>0$ (так наз. конечномерными распределениями). Наиболее интересные конкретные результаты теории случайных процессов получены в двух специальных направлениях — *марковские процессы* и *стационарные случайные процессы*; наряду с ними сильно повысился интерес к *мартингалам*.

Исторически первыми изучались марковские процессы. Случайный процесс $X(t)$ наз. марковским, если для любых двух моментов времени t_0 и t_1 (где $t_0<t_1$) условное распределение вероятностей $X(t_1)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_0$, зависит только от $X(t_0)$ (в силу этого марковские случайные процессы иногда наз. процессами без последействия). Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов, рассматриваемых в классич. физике. В детерминированных процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет ход процесса

в будущем; в марковских процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t>t_0$, причем никакие сведения о ходе процесса до момента времени t_0 не изменяют это распределение.

Подобно тому, как изучение непрерывных детерминированных процессов сводится к дифференциальным уравнениям относительно функций, описывающих состояние системы, изучение непрерывных марковских процессов сводится к дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям относительно распределения вероятностей процесса.

Вторым крупным направлением случайных процессов является теория стационарных случайных процессов. Стационарность процесса, т. е. неизменность во времени его вероятностных закономерностей, налагает сильное ограничение на процесс и позволяет из одного этого допущения извлечь ряд важных следствий.

Для большей части теории достаточно предположения о стационарности в широком смысле, т. е. требования независимости от t математич. ожиданий $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t)\,X(t+\tau)$. Из этого предположения вытекает возможность так наз. «спектрального разложения»

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,dz(\lambda),$$

где $z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями. Для стационарных процессов развиты способы наилучшей (в среднем квадратичном) линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации.

В последнее время выделен довольно широкий класс процессов, для к-рых эффективно решаются задачи наилучшей нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции (см. *Случайных процессов прогнозирование*, *Случайных процессов фильтрация*). Существенную часть соответствующего аналитич. аппарата составляют стохастические дифференциальные уравнения, стохастич. интегралы и мартингалы. Отличительное свойство мартингала $X(t)$ состоит в том, что условное математич. ожидание $X(t)$ при условии, что известно поведение процесса до момента $s<t$, равно $X(s)$.

Теория случайных процессов тесно связана с классич. проблематикой предельных теорем для сумм случайных величин. Те законы распределения, к-рые выступают при изучении сумм случайных величин как предельные, в теории случайных процессов являются точными законами распределения соответствующих характеристик. Этот факт позволяет доказывать многие предельные теоремы с помощью соответствующих случайных процессов.

В заключение следует добавить, что логически безупречное определение понятий, связанных со случайными процессами в рамках указанной выше аксиоматики создавало и создает много трудностей теоретико-множественного характера (связанных, напр., с определением вероятности, непрерывности или дифференцируемости и т. п. свойств случайных процессов, см. *Сепарабельный процесс*). Поэтому, в частности, в монографиях по теории случайных процессов около половины объема отводится анализу развития теоретико-множественных конструкций.

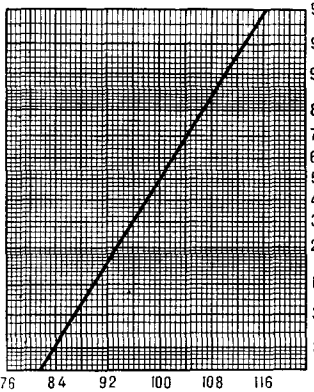
Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер.— Четвертая часть сочинения Я. Бернулли, СПБ, 1913); [2] Moivre A. de, Doctrine of Chances, 3 ed., ..., 1756; [3] Laplace [P. S.], Théorie analityque des probabilites, 3 ed., P., 1886; [4] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2—3, М.—Л., 1947—48; [5] Liapounoff A., Nouvelle forme du théoréme sur la limite de probabilité, СПБ, 1901; [6] Марков А. А., Исследование замечательного случая зависимых испытаний, «Изв. АН, 6 серия», 1907, т. 1, № 3; [7] его же, Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [8] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946; [9] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [10] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [11] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2 изд.,

пер. с англ., т. 1—2, М., 1967; [12] Poincaré, H., Calcul des probabilités, P., 1912; [13] Mises R., Wahrscheinlichkeitsrechnung..., W., 1931; [14] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—47», М.—Л., 1948; [15] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—57, т. 1, М., 1959; [16] его же, Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [17] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

См. также лит. при статьях о разделах В. т.

Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ БУМАГА нормальная — специальным образом разграфленная бумага, построенная так, что график функции *нормального распределения* изображается на ней прямой линией. Это достигается изменением шкалы на вертикальной оси (см. рис.). На свойстве «выпрямления» основан простой способ проверки гипотезы о принадлежности данной выборки к нормальной совокупности: если построенная на В. б. эмпирич. функция распределения хорошо приближается прямой линией, то можно с основанием полагать, что совокупность, из к-рой взята выборка, является приближенно нормальной. Достоинство этого метода состоит в том, что вывод о принадлежности к нормальной совокупности можно сделать без знания численных значений параметров гипотетич. распределения.



Проведенная линия — график функции нормального распределения со средним 100 и стандартным отклонением 8.

Лит.: [1] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [2] Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to statistical analysis, N. Y.— Toronto—L., 1951.

А. В. Прохоров.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА, вероятностное распределение, распределение вероятностей, распределение, вероятность,— действительная неотрицательная функция P на классе $\mathcal{A}$ подмножеств (событий) непустого множества Ω (пространства элементарных событий), образующем борелевское поле (т. е. замкнутом относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе), такая, что

$$\mathsf{P}(\Omega)=1 \text{ и } \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_i),$$

если $A_i \cap A_j=\phi$ при $i\neq j$ (счетная аддитивность).

Примеры В. м.: 1) $\Omega=\{1, 2\}$, $\mathcal{A}$ — класс всех подмножеств Ω, $\mathsf{P}(\{1\})=\mathsf{P}(\{2\})=1/2$ (эта В. м. отвечает случайному эксперименту с подбрасыванием симметричной монеты; гербу ставится в соответствие 1, решетке — 2; вероятность выпадения герба (решетки) равна $1/2$);

2) $\Omega=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{A}$ — класс всех подмножеств Ω,

$$\mathsf{P}(\{k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda>0$ (*Пуассона распределение*);

3) $\Omega=R^1$, $\mathcal{A}$ — класс борелевских подмножеств R^1,

$$\mathsf{P}(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A e^{-x^2/2}dx$$

(*нормальное распределение*);

4) $\Omega=C_0[0, 1]$ — пространство обращающихся в нуле в нуль непрерывных действительных функций

$x(t)$ на $[0, 1]$, $\mathcal{A}$ — класс борелевских подмножеств Ω относительно топологии равномерной сходимости, P — мера, однозначно определяемая формулой

$$\mathsf{P}(x:\ a_i < x(t_i) < b_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\} dx_1 \ \ldots \ dx_n,$$

где n — произвольное натуральное число и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ (мера Винера).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, поле вероятностей,— совокупность $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ непустого множества Ω, класса $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, являющегося борелевским полем (т. е. замкнутым относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе) и распределения *(вероятностной меры)* P на $\mathcal{A}$. Понятие В. п. принадлежит А. Н. Колмогорову [1]. Точки множества Ω наз. элементарными событиями, а само множество Ω — пространством элементарных событий. Принадлежащие $\mathcal{A}$ подмножества множества Ω наз. (случайными) событиями. Нередко ограничиваются рассмотрением лишь полных В. п., то есть пространств, удовлетворяющих требованию $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mathsf{P}(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$. Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — произвольное В. п., то класс множеств вида $A \cup N$, где $A \in \mathcal{A}$ и $N \subset M$, $\mathsf{P}(M) = 0$, образует борелевское поле $\overline{\mathcal{A}}$, а функция $\overline{\mathsf{P}}$ на $\overline{\mathcal{A}}$, определяемая формулой $\overline{\mathsf{P}}(A \cup N) = \mathsf{P}(A)$, есть распределение на $\overline{\mathcal{A}}$. Пространство $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \mathsf{P})$ полно и наз. пополнением $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Иногда также ограничиваются рассмотрением лишь совершенных В. п., то есть таких, что для любой действительной $\mathcal{A}$-измеримой функции f и любого множества E на прямой, для к-рого $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, существует борелевское множество B такое, что $B \subset E$ и $\mathsf{P}(f^{-1}(E)) = \mathsf{P}(f^{-1}(B))$. В рамках совершенных В. п. невозможны нек-рые «патологические» явления (связанные с существованием условных вероятностей, определением независимых случайных величин и т. д.), возникающие в общей схеме. Не всегда тривиален вопрос о существовании В. п., удовлетворяющего тем или иным специальным требованиям. Одним из результатов такого рода является фундаментальная теорема Колмогорова о согласованных распределениях: пусть каждому упорядоченному конечному набору $t_1, \ldots, t_n$ элементов множества T отвечает распределение $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ на борелевских множествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть выполнены следующие условия согласованности:

1) $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(I_{y_1, \ldots, y_n}) = \mathsf{P}_{t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_n}}(I_{y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_n}})$ при всех $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, где

$$I_{y_1, \ldots, y_n} = \{x = (x_1, \ \ldots, \ x_n) : x_i \leqslant y_i,\ \ i = 1, \ \ldots, \ n\}$$

и $\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ \ldots, \ n$;

2) $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(I_{y_1, \ldots, y_{n-1}, \infty}) = \mathsf{P}_{t_1, \ \ldots, \ t_{n-1}}(I_{y_1, \ldots, y_{n-1}})$.

Тогда на наименьшем борелевском поле $\mathcal{A}$ подмножеств произведения $\mathbb{R}^T = \{x = \{x_t\},\ t \in T,\ x_t \in \mathbb{R}^1\}$, относительно к-рого измеримы все координатные функции $t(x) = x_t$, существует распределение P такое, что для любого конечного подмножества $t_1, \ \ldots, \ t_n$ множества T и любого n-мерного борелевского множества B справедливо равенство:

$$\mathsf{P}_{t_1, \ \ldots, \ t_n}(B) = \mathsf{P}\{t_1(x), \ \ldots, \ t_n(x) \in B\}.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.
В. В. Сазонов.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС — то же, что *случайный процесс.*

ВЕРОЯТНОСТЬ математическая — числовая характеристика степени возможности появления к.-л. определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях. Как категория научного познания понятие «В.» отражает особый тип связей между явлениями, характерных для массовых процессов. Категория В. лежит в основе особого класса закономерностей — вероятностных или статистических.

Численное значение В. в нек-рых случаях получается из «классического» определения В.: В. равна отношению числа случаев, «благоприятствующих» данному событию, к общему числу «равновозможных» случаев. Напр., если из 10 млн. облигаций гос. выигрышного займа, на к-рые в одном тираже должен выпасть один выигрыш максимального размера, в данном городе размещено 500 тыс. облигаций, то В. того, что максимальный выигрыш достанется жителю данного города, равна 500 000/10 000 000=1/20.

В других, более сложных случаях определение численного значения В. требует статистического подхода. Напр., если при 100 попытках стрелок попал в цель 39 раз, то можно думать, что для него В. попадания в цель при данных условиях приблизительно равна 4/10. По В., определенной классич. или статистич. способом, могут быть вычислены в соответствии с правилами теории вероятностей новые В. Напр., если для нашего стрелка В. попадания при отдельном выстреле равна 4/10, то В. того, что он будет иметь хотя бы одно попадание при четырех выстрелах, равна $1-(1-4/10)^4\approx 0{,}87$. Этот вывод может быть проверен статистически: если попытки поразить цель хотя бы одним выстрелом из четырех будут повторяться много раз, то они будут иметь успех приблизительно в 87% случаев (в предположении, что за это время искусство стрелка не изменится заметным образом).

Математич. В. является выражением качественно своеобразной связи между случайным и необходимым. При изложении теории В. формулируются в виде аксиом те свойства В., к-рые на данном этапе развития науки необходимы для ее развития. Однако ни эти аксиомы, ни классич. подход к В., ни статистич. подход не дают исчерпывающего определения реального содержания понятия «В.»; они являются лишь известными приближениями ко все более полному его раскрытию. Далеко не всякое событие, наступление к-рого при заданных условиях не является однозначно определенным, имеет при этом комплексе условий определенную В. Предположение, что при данных условиях для данного события В. (т. е. вполне определенная нормальная доля числа появлений данного события при большом числе повторений данных условий) существует, является гипотезой, к-рая в каждом отдельном вопросе требует специальной проверки или обоснования. Напр., имеет смысл говорить о В. попадания в цель заданных размеров, с заданного расстояния из винтовки известного образца стрелком, вызванным наудачу из определенного воинского подразделения. Однако было бы бессмысленно говорить о В. попадания в цель, если об условиях стрельбы ничего не известно.

По поводу связи В. с частотой надо иметь в виду следующее: при конечном числе n повторений заданных условий доля числа случаев m, в к-рых данное событие появится, т. е. так наз. частота m/n, как

правило, мало отличается от вероятности p. Чем больше число повторений n, тем реже встречаются сколько-либо значительные отклонения частоты m/n от вероятности p. Для пояснения этого обстоятельства рассмотрим пример бросания монеты, в к-ром В. появления «герба» и «надписи» одинаковы и равны 1/2. При десяти бросаниях ($n=10$) появление десяти «гербов» или десяти «надписей» очень мало вероятно. Но и утверждать, что «герб» выпадет ровно пять раз, нет достаточных оснований; более того, утверждая, что «герб» выпадет 4 или 5, или 6 раз, мы еще довольно сильно рисковали бы ошибиться. Но при ста бросаниях монеты можно уже без практически ощутимого риска заранее утверждать, что число выпавших «гербов» будет лежать между 40—60 (см. *Больших чисел закон*).

Математическая В. может служить для оценки В. события в обычном, житейском смысле, т. е. для уточнения так наз. «проблематических» суждений, выражающихся обычно словами «возможно», «вероятно», «очень вероятно» и т. п. По поводу этих оценок следует иметь в виду, что в применении к любому определенному суждению, к-рое на самом деле может быть только истинным или ложным, оценка его В. имеет лишь временный или же субъективный смысл, т. е. выражает лишь наше отношение к делу. Напр., если кто-либо, не имея по этому поводу специальных сведений, захочет представить себе вид окрестностей Москвы 23 марта 1930, то он скажет: «вероятно, в этот день на полях лежал снег». Однако на самом деле в 1930 снег под Москвой к 22 марта уже сошел с полей. Выяснив это обстоятельство, мы должны будем отменить первоначальную оценку, выраженную заключенным в кавычки проблематич. суждением. Тем не менее эта оценка, оказавшаяся в применении к данному индивидуальному случаю ошибочной, основана на верном общем правиле: «в начале двадцатых чисел марта на полях под Москвой по большей части лежит снег». Это правило отражает объективные свойства климата Подмосковья. Такого рода правила можно выражать, указывая уровень В. интересующего нас события, при тех или иных общих, осуществимых неограниченное число раз условиях. Эти оценки уже имеют объективный смысл. Поэтому употребление расчета В. для подтверждения наших оценок степени надежности тех или иных утверждений, относящихся к отдельным индивидуальным событиям, не должно давать повода к мнению, что математич. В. является только числовым выражением нашей субъективной уверенности в наступлении нек-рого события. Такое идеалистическое, субъективное понимание смысла математич. В. является ошибочным. При последовательном развитии оно приводит к абсурдному утверждению, что из чистого незнания, анализируя одни лишь субъективные состояния нашей большей или меньшей уверенности, мы можем сделать к.-л. определенные заключения относительно внешнего мира.

Описанное выше употребление расчета В. для оценки положения в отдельных индивидуальных случаях неизбежно приводит к вопросу о том, какими В. можно пренебрегать на практике. Этот вопрос решается поразному, в зависимости от того, насколько велика необходимость быстрого перехода от накопления надежных данных к их действенному употреблению. Напр., если при данных условиях стрельбы теоретич. расчет приводит к тому, что поставленная боевая задача будет решена данным числом выстрелов с В. 0,95 (т. е. В. того, что назначенного числа снарядов не хватит, равна 0,05), то обычно считают возможным исходить при руководстве боевыми операциями из предположения, что назначенное число снарядов окажется достаточным. В более спокойной обстановке научных исследований принято пренебрегать лишь В. в 0,003 (эта норма связана с так наз. правилом трех сигма), а иногда требо-

вать и еще большего приближения В. отсутствия ошибки к единице. В математич. статистике В., к-рой решено пренебрегать в данном исследовании, наз. *значимости уровнем*. Хотя в статистике обычно рекомендуют пользоваться уровнями значимости от 0,05 при предварительных ориентировочных исследованиях до 0,001 при окончательных серьезных выводах, часто достижима значительно большая достоверность вероятностных выводов. Напр., основные выводы статистич. физики основаны на пренебрежении лишь В. порядка меньшего 0,000 000 000 1.

В основе математич. моделей, используемых в *вероятностей теории* лежат три понятия: пространство Ω так наз. элементарных событий, класс подмножеств Ω (событий) и определенная на этом классе функция множеств P — *распределение вероятностей*. Значение $P(A)$ функции P для события A наз. в этом случае вероятностью события A.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *А. Н. Колмогоров.*

ВЕРТОР — *тензор*, при помощи к-рого осуществляется перебрасывание индексов.

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ — 1) В. и н. п. последовательности — наибольший, и соответственно, наименьший, *предел* среди всех частичных пределов (конечных и бесконечных) данной последовательности действительных чисел. Для любой последовательности действительных чисел x_n, $n=1, 2, \ldots$, множество всех ее частичных пределов (конечных и бесконечных) на расширенной числовой прямой (т. е. в множестве действительных чисел, пополненном символами $-\infty$ и $+\infty$) не пусто и имеет как наибольший, так и наименьший элементы (конечный или бесконечный). Наибольший элемент множества частичных пределов наз. верхним пределом (в. п.) последовательности и обозначается

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \sup x_n;$$

наименьший элемент нижним пределом (н. п.) и обозначается

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

Напр., если

$$x_n=(-1)^n,$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=1;$$

если

$$x_n=(-1)^n\, n,$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty;$$

если

$$x_n=n+(-1)^n n,$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty.$$

У всякой последовательности существует в. п. (н. п.), при этом, если последовательность ограничена сверху (снизу), то ее в. п. (н. п.) конечен. Для того чтобы число a было в. п. (соответственно н. п.) последовательности x_n, $n=1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ выполнялись условия: а) существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n<a+\varepsilon$ ($x_n>a-\varepsilon$); б) для любого номера n_0 существует такой номер $n'=n'(\varepsilon, n_0)$, что $n'>n_0$ и $x_{n'}>a-\varepsilon$ ($x_{n'}<a+\varepsilon$). Условие а) означает существование при любом фиксированном $\varepsilon>0$ в последовательности $\{x_n\}$ лишь конечного числа таких членов x_n, что $x_n>a+\varepsilon$ ($x_n<a-\varepsilon$). Условие б) означает

существование бесконечного множества таких членов x_n, что $x_n > a - \varepsilon\,(x_n < a + \varepsilon)$. Понятие н. п. сводится к понятию в. п. с помощью изменения знака у членов последовательности:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -\varlimsup_{n\to\infty} (-x_n).$$

Для того чтобы последовательность x_n, $n=1, 2, \ldots$, имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $-\infty$ или $+\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

2) В. п. (н. п.) функции $f(x)$ в точке x_0 — предел верхних (нижних) граней множеств значений функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, когда эти окрестности стягиваются к точке x_0. Он обозначается

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) \left(\varliminf_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Пусть функция $f(x)$ определена на метрич. пространстве R и принимает действительные значения на R. Если $x_0 \in R$ и $O(x_0;\ \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x_0, $\varepsilon > 0$, то

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sup_{x\in O(x_0;\ \varepsilon)} f(x)\right];$$

соответственно

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{x\in O(x_0;\ \varepsilon)} f(x)\right].$$

В каждой точке $x \in R$ у функции $f(x)$ существуют как в. п. $\overline{f(x)}$, так и н. п. $\underline{f(x)}$ (конечные или бесконечные). Функция $\overline{f(x)}$ полунепрерывна сверху, а функция $\underline{f(x)}$ полунепрерывна снизу на пространстве R (в смысле понятия полунепрерывности функций, принимающих значения из расширенной числовой прямой).

Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \varlimsup_{x\to x_0} f(x).$$

Естественным образом понятие в. п. (н. п.) функции в точке переносится на действительные функции, определенные на топологич. пространствах.

3) В. п. (н. п.) последовательности множеств A_n, $n=1, 2, \ldots$, множество

$$\overline{A} = \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

состоящее из таких элементов x, к-рые принадлежат бесконечному числу множеств A_n; соответственно, множество

$$\underline{A} = \varliminf_{n\to\infty} A_n$$

таких элементов x, к-рые принадлежат всем множествам A_n, начиная с нек-рого номера $n = n(x)$. Очевидно, $\underline{A} \subset \overline{A}$.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973; [5] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М., 1937.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ МЕТОД — метод доказательства существования решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Идея В. и н. ф. м. для случая обыкновенных дифференциальных уравнений усматривается в работах Дж. Пеано (G. Pea-

по, 1880), для случая *Дирихле задачи* и для *Лапласа уравнения* — в *выметании методе* А. Пуанкаре (H. Poincaré); первое полное изложение В. и н. ф. м. для этого последнего случая дано О. Перроном [1].

Пусть поставлена задача Дирихле в области G пространства R^n, $n \geqslant 2$, для линейного однородного эллиптич. уравнения 2-го порядка с непрерывными коэффициентами вида

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \quad (1)$$
$$c \leqslant 0, \quad x \in G,$$

с краевым условием

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial G. \quad (2)$$

В. и н. ф. м. состоит в том, что, в предположении разрешимости задачи (1), (2) в малом, вводятся обобщенные супергармонич. функции (соответственно субгармонические). Непрерывная на области G функция v наз. о б о б щ е н н о й с у п е р г а р м о н и ч е с к о й ф у н к ц и е й (соответственно с у б г а р м о н и ч е с к о й) в области G, если для любого достаточно малого шара K, $\overline{K} \subset G$, справедливо неравенство $(v)_K \leqslant v$ (соответственно $(v)_K \geqslant v$), где $(v)_K$ — непрерывная на G функция, равная v вне K и на его границе и удовлетворяющая внутри K уравнению (1). Для непрерывной на границе ∂G функции f обобщенная супергармонич. (соответственно субгармоническая) функция v наз. в е р х н е й (соответственно н и ж н е й), если для $x \in \partial G$ справедливо неравенство $v(x) \geqslant f(x)$ (соответственно $v(x) \leqslant f(x)$).

Классы $\Phi(G, f)$ и $\Psi(G, f)$ всех, соответственно, верхних и нижних функций не пусты, причем если $v \in \Phi(G, f)$ и $w \in \Psi(G, f)$, то $v \geqslant w$ (см. [3]). О б о б щ е н н о е р е ш е н и е з а д а ч и Д и р и х л е определяется как нижняя огибающая класса $\Phi(G, f)$ или как верхняя огибающая класса $\Psi(G, f)$:

$$u(x) = \inf \{v(x); \quad v \in \Phi(G, f)\} =$$
$$= \sup \{w(x); \ w \in \Psi(G, f)\}, \quad x \in G. \quad (3)$$

Если граница ∂G допускает существование *барьера* в каждой своей точке, то $u(x) = f(x)$ всюду на ∂G, т. е. u — классич. решение задачи Дирихле. В общем случае поведение обобщенного решения (3) эллиптич. уравнения (1) в точках границы совершенно аналогично поведению обобщенного решения уравнения Лапласа; см. *Перрона метод*.

В. и н. ф. м. применяется также при исследовании первой краевой задачи для линейного однородного параболич. уравнения 2-го порядка вида

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in G \times [0, T],$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x, 0), \ x \in G,$$

и краевым условием

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \partial G \times [0, T],$$

если ввести супернараболические (субнараболические) функции, аналогичные по своим свойствам обобщенным супергармоническим (субгармоническим) функциям (см. [4]).

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1923, Bd 18, № 1/2, S. 42—54; [2] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957.

Л. И. Камынин, Е. Д. Соломенцев.

ВЕРХНЯЯ ГРАНЬ СЕМЕЙСТВА ТОПОЛОГИЙ, т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь, на множестве S — топология ξ, наименьшая из всех топологий на множестве S, содержащих каждую топологию заданного семейства (см. *Сравнение топологий*). П р е д б а з у т о п о л о г и и ξ образует семейство всех подмножеств множе-

ства S, открытых хотя бы в одной топологии семейства $\mathfrak{M}$.

Семейство всех возможных топологий на множестве S с определенной выше операцией взятия верхней грани любого подсемейства и минимальным элементом — тривиальной топологией — есть *полная решетка*. В. г. с. т. наз. также индуктивным пределом семейства топологий.

Полезна следующая интерпретация В. г. с. т. Пусть

$$T=\Pi\{(S,\ \mathscr{T}):\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$$

— *тихоновское произведение* всех топологич. пространств, возникающих от наделения множества S различными топологиями из семейства $\mathfrak{M}$. Через S^* обозначим диагональ этого произведения, т. е. множество всех постоянных отображений $\mathfrak{M}$ в S (или, что то же самое, множество всех *нитей* $\{S:\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$, для к-рых $S_{\mathscr{T}}=S_{\mathscr{T}'}$, при всех $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'\in\mathfrak{M}$). Множество S^* находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством S, к-рое осуществляется при проектировании множества T на любой сомножитель. Если наделить S^* топологией, индуцированной из пространства T, и перенести эту топологию посредством указанного естественного соответствия на S, то получим верхнюю грань семейства — $\mathfrak{M}$. Эта интерпретация В. г. с. т. позволяет понять, что верхняя грань любого семейства хаусдорфовых топологий есть хаусдорфова топология, верхняя грань любого семейства вполне регулярных топологий есть вполне регулярная топология. Аналогичные утверждения для семейств регулярных, нормальных и паракомпактных топологий неверны. Но верхняя грань счетного семейства метризуемых топологий (со счетной базой) есть метризуемая топология (со счетной базой). Диагональ S^* не замкнута, как правило, в T, и потому верхняя грань двух бикомпактных топологий обычно не является бикомпактной.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968.

А. В. Архангельский.

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИ — характеристики множеств на прямой. Верхняя грань нек-рого множества действительных чисел — наименьшее число, ограничивающее сверху это множество. Нижняя грань данного множества — наибольшее число, ограничивающее его снизу. Более подробно: пусть задано нек-рое подмножество X действительных чисел. Число β наз. его верхней гранью (в. г.) и обозначается $\sup X$ (от латинского слова supremum — наивысшее), если для каждого числа $x\in X$ выполняется неравенство $x\leqslant\beta$, и каково бы ни было $\beta'<\beta$ существует такое $x'\in X$, что $x'>\beta'$. Число α наз. нижней гранью (н. г.) множества X и обозначается $\inf X$ (от латинского слова infimum — наинизшее), если для каждого $x\in X$ выполняется неравенство $x\geqslant\alpha$, и каково бы ни было $\alpha'>\alpha$ существует такое $x'\in X$, что $x'<\alpha'$.

Примеры:

$$\inf[a,\ b)=a,\ \sup[a,\ b]=b,$$
$$\inf(a,\ b)=a,\ \sup(a,\ b)=b;$$

если множество X состоит из двух точек a и b, $a<b$, то

$$\inf X=a,\ \sup X=b.$$

Эти примеры показывают, в частности, что в. г. (н. г.) может как принадлежать этому множеству (напр., в случае отрезка $[a, b]$), так и не принадлежать ему (напр., в случае интервала (a, b)). Если в нек-ром множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно, очевидно, и является в. г. (н. г.) этого множества.

В. г. (н. г.) не ограниченного сверху (снизу) множества наз. символ $+\infty$ (соответственно символ $-\infty$).

Если N — множество натуральных чисел: $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$, то

$$\inf N=1, \ \sup N=+\infty.$$

Если $\mathfrak{N}$ множество всех целых чисел, положительных и отрицательных, то

$$\inf \mathfrak{N}=-\infty, \ \sup \mathfrak{N}=+\infty.$$

Всякое непустое множество действительных чисел имеет и притом единственную в. г. (н. г.) конечную или бесконечную. При этом всякое ограниченное сверху непустое множество имеет конечную в. г., а всякое ограниченное снизу — конечную н. г.

Иногда в. г. (н. г.) множества наз. его точной верхней (нижней) гранью, понимая в этом случае под термином в. г. (н. г.) множества любое число, ограничивающее его сверху (снизу). Реже, вместо термина в. г. (н. г.) множества, в том или ином из вышеуказанных смыслов, употребляется термин верхняя (нижняя) граница множества. В. г. (н. г.) функции, принимающей действительные значения, в частности последовательности действительных чисел, называют в. г. (н. г.) множества ее значений.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ. 2 изд., т. 1, М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЕС — то же, что *весовая функция*.

ВЕС топологического пространства — наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью открытой *базы* топологич. пространства. В., наряду с мощностью, — важнейший инвариант топологич. пространства. *П. С. Александров.*

ВЕС представления ρ алгебры Ли в векторном пространстве — отображение α алгебры Ли L в ее поле определения k, для к-рого существует такой ненулевой вектор x пространства V, что

$$(\rho(h)-\alpha(h)\,1)^{n_{x,\,h}}\,x=0$$

для всех $h\in L$ и некоторого целого $n_{x,\,h}>0$ (вообще говоря, зависящего от x и h), где 1 обозначает тождественное преобразование V. В этом случае говорят также, что α — вес L-модуля V, определяемого представлением ρ. Множество всех векторов $x\in V$, удовлетворяющих указанному условию, вместе с нулем образует подпространство V_α, наз. весовым подпространством веса α (или, соответствующим весу α). Если $V=V_\alpha$, то V наз. весовым пространством, или весовым модулем над L, веса α.

Если V — конечномерный весовой модуль над L веса α, то контрагредиентный модуль (см. *Контрагредиентное представление*) V^* является весовым веса $-\alpha$; если V и W — весовые модули над L весов α и β соответственно, то их тензорное произведение $V\otimes W$ является весовым модулем веса $\alpha+\beta$. Если L — нильпотентная алгебра Ли, то весовое подпространство V_α веса α в V является подмодулем L-модуля V. Если, кроме того,

$$\dim_k V<\infty,$$

а $\rho(L)$ — расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований модуля V, то V разлагается в прямую сумму конечного числа весовых L-подмодулей разных весов:

$$V=V_\sigma\oplus V_\delta\oplus\ldots\oplus V_\tau$$

(весовое разложение V относительно L). Если L — нильпотентная подалгебра конечномерной алгебры Ли M, рассматриваемой как L-модуль относительно присоединенного представления ad_M алгебры M, и $\mathrm{ad}_M L$ является расщепляемой алгеброй Ли линейных

преобразований M, то соответствующее весовое разложение M относительно L:

$$M = M_\alpha \oplus M_\beta \oplus \ldots \oplus M_\gamma$$

наз. разложением Фиттинга M относительно L, веса α, β, ..., γ наз. корнями, а пространства M_α, M_β, ..., M_γ — корневыми подпространствами M относительно L. Если, кроме того, задано представление ρ алгебры M в конечномерном векторном пространстве V, для которого $\rho(L)$ — расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований V, и

$$V = V_\sigma \oplus V_\delta \oplus \ldots \oplus V_\tau$$

— соответствующее весовое разложение V относительно L, то $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) \subseteq V_{\alpha+\sigma}$, когда $\alpha+\sigma$ есть вес V относительно L, и $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) = 0$ в противном случае. В частности, если $\alpha + \beta$ корень, то $[M_\alpha, M_\beta] \subseteq M_{\alpha+\beta}$, в остальных случаях $[M_\alpha, M_\beta] = 0$. Если характеристика поля k равна нулю, то веса σ, δ, ..., τ и корни α, β, ..., γ являются линейными функциями на L, обращающимися в нуль на коммутанте алгебры L.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970. *В. Л. Попов.*

ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ, вес,— функциональный множитель, позволяющий получить конечность нормы заданного типа для функции, у к-рой указанная норма (или полунорма) без этого множителя бесконечна. Понятие В. ф. играет большую роль в вопросах приближения функции (в частности, на бесконечных промежутках), в проблеме моментов, в теории вложения функциональных пространств (см. *Весовое пространство*), в задачах о продолжении функций и в теории дифференциальных уравнений. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО, весовой класс, пространство с весом,— пространство функций, имеющих конечную норму (или полунорму) с нек-рым функциональным множителем — весом. При этом норма (полунорма) функции наз. в этом случае весовой нормой (полунормой), а вес наз. также весовой функцией нормы (полунормы). Введение веса позволяет расширять и сужать обычные невесовые функциональные нормированные и полунормированные пространства, состоящие из функций, имеющих бесконечную обычную безвесовую норму (полунорму). Напр., В. п. $C_\varphi(E)$ (где φ — весовая функция), норма в к-ром определяется формулой

$$\| f \|_{C_\varphi} = \sup_{x \in E} | \varphi(x) f(x) |,$$

при соответствующем выборе функции φ может быть как шире, так и уже пространства $C(E)$ с обычной нормой

$$\| f \|_C = \sup_{x \in E} | f(x) |.$$

Так, в пространство $C_x(0, 1)$ с нормой

$$\| f \|_{C_x} = \sup_{0 < x < 1} | xf(x) |$$

входят нек-рые неограниченные функции, и оно содержит в себе пространство $C(0, 1)$ ограниченных на интервале $(0, 1)$ функций в качестве собственного подпространства. Наоборот, пространство $C_{1/x}(0, 1)$ с нормой

$$\| f \|_{C_{1/x}} = \sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1}{x} f(x) \right|$$

содержится в пространстве $C(0, 1)$ как собственное подпространство. Другой пример: полунормированное пространство с весовой полунормой $\sqrt{D_\alpha(u)}$, где $u = u(x, y)$ и

$$D_\alpha(u) = \iint_{r \leqslant 1} (1 - r)^\alpha \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy,$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, при $\alpha>0$ содержит в себе как собственное подпространство пространство функций с безвесовой полунормой $\sqrt{D_0(u)}$, а при $\alpha<0$ содержится в нем как собственное подпространство.

Наиболее часто рассматривается случай, когда весовая функция стремится к нулю или к бесконечности при приближении к заданному многообразию, к-рое может вырождаться в точку, в частности в бесконечно удаленную. В. п. естественным образом возникают как в теории функций при изучении обычных (невесовых) функциональных пространств, так и в приложениях теории функций, напр. к теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Основным вопросом при изучении В. п. является получение для них *вложения теорем*. В теоремах вложения одного типа устанавливается оценка нормы функции через ее норму в другом В. п., причем в обеих нормах фигурирует одна и та же область задания функции. К теоремам такого типа относятся теоремы об эквивалентности норм в В. п., в частности теоремы о нормах, определяемых с помощью преобразования Фурье — Бесселя. Сюда же относятся оценки в соответствующих пространствах весовых норм младших производных, в частности самой функции через (весовые) нормы старших производных. С помощью этих теорем можно, напр., определить с каким весом суммируема функция в данной области, если все ее старшие производные принадлежат данному В. п. В теоремах вложения другого типа даются оценки тех или иных норм следов функций на многообразиях меньшего числа измерений через их весовые нормы.

Важный класс В. п. составляют пространства функций, у к-рых абсолютные величины всех их производных до какого-то порядка суммируемы в определенной степени с весом степенного характера. В этом случае вложения В. п. изучены наиболее полно. Напр., пусть В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ состоит из функций f, имеющих на n-мерном евклидовом пространстве E^n все обобщенные производные $D^k_0 f$, $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, до порядка l включительно, такие, что для них конечна величина (являющаяся нормой):

$$|f,\ W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)|=$$

$$=\sum_{|k|=l}|(1+|x|)^{-\alpha}D^l f,\quad L_p(E^n)|+|f,\quad L_p(Q^n)|,$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in E^n$, $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, Q^n — единичный n-мерный шар в E^n, $1\leqslant p\leqslant\infty$, α — действительное число, $|k|=k_1+\ldots+k_n$. Тогда справедлива теорема вложения: если $\alpha>(n/p)-1$, $0\leqslant k\leqslant l$, то

$$W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)\longrightarrow W^{l-k}_{p,\,\alpha+k}(E^n|\infty).$$

При малых $\alpha>0$ (т. е. при так наз. слабом вырождении) В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ имеют свойства, близкие к свойствам безвесовых пространств: если $0\leqslant\alpha\leqslant(n/p)-1$, то при любом $\varepsilon>0$ справедливо вложение

$$W^1_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)\longrightarrow W^0_{p,\,\frac{n+\varepsilon}{p}}(E^n|\infty).$$

Из этого вложения при $\alpha=0$ следует, напр., что *Дирихле интеграл*

$$D(f)=\int\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\overset{+}{E}{}^n$$

(где $\overset{+}{E}{}^n=\{x:x_n>0\}$ — полупространство), не будучи полуограниченным снизу как функционал над пространством функций, принадлежащих $L_2(\overset{+}{E}{}^n)$ и обращающихся в нуль на гиперплоскости $E^{n-1}=\{x:x_n=0\}$, будет полуограничен снизу над соответствующим В. п.

Если $0\leqslant\alpha<(n/p)-1$, то для всякой функции из В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ существует такой многочлен сте-

пени не выше $l-1$, что разность между ним и самой функцией стремится к нулю, когда точка стремится к бесконечности по радиусам.

Теоремы вложения о следах для В. п. являются обобщением прямых и обратных теорем вложения для обычных функциональных пространств и изучены достаточно полно для весов, имеющих порядок степени расстояния от точки области до границы области.

Теоремы вложения для В. п. применяются прежде всего в теории вырождающихся эллиптич. уравнений; они дают возможность точно сформулировать граничные задачи, указать, в зависимости от степени вырождения, какие части границы освобождаются от задания граничных условий, позволяют получить необходимые и достаточные условия (в терминах свойств граничных значений) для разрешимости ряда краевых задач; они играют важную роль при доказательстве существования и единственности решения краевых задач в соответствующем В. п. и устойчивости этого решения в смысле интеграла энергии при вариации граничных значений. В случае же неограниченных областей В. п. используются и для теории равномерно эллиптич. уравнений.

Теоремы вложения для В. п. нашли свое непосредственное применение при решении задач о наилучшем продолжении функции (или систем функций) с многообразия на все пространство таким образом, что продолженная функция бесконечно дифференцируема на дополнении к многообразию. Наилучшее продолжение здесь понимается в смысле минимального порядка роста производных при приближении точки к данному многообразию. Глобальная гладкость заданной на многообразии продолжаемой функции определяет (при достаточно гладком многообразии) максимально возможную глобальную гладкость продолжаемой функции; поэтому, начиная с нек-рого порядка, производные продолженной функции будут иметь конечную норму лишь с нек-рым весом, т. е. принадлежать соответствующему В. п.

Лит.: [1] Никольский С. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 63—114; [2] Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М., в сб.: Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, с. 87—109; [3] Кудрявцев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—181; [4] Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, в сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, с. 38—63. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — конечномерное пространство V, удовлетворяющее условию: если L — *Ли алгебра* над полем F, а ρ — ее представление в V, то существует такая функция α: $L \to F$, что для любых $x \in V$, $l \in L$

$$x\,(l^{\rho} - \alpha\,(l)\,1)^k = 0$$

при нек-ром целом $k>0$. Функция α наз. в е с о м. Тензорное произведение $\rho_1 \otimes \rho_2$ представлений ρ_1, ρ_2 алгебры L в В. п. V_1, V_2, принадлежащих весам α_1, α_2, соответственно, является представлением L в пространстве $V_1 \otimes V_2$, к-рое также оказывается В. п. и принадлежит весу $\alpha_1+\alpha_2$. При переходе от представления ρ к контраградиентному представлению ρ^* пространство V заменяется на сопряженное пространство V^*, а вес α переходит в вес $-\alpha$. *Е. Н. Кузьмин.*

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ н е л и н е й н ы х у р а в н е н и й — явление перехода нек-рого решения нелинейного уравнения в несколько решений (или полное его исчезновение) при малых изменениях параметров. Более точно, пусть нелинейное уравнение

$$F(x,\ \lambda) - 0 \qquad (*)$$

с (не обязательно числовым) параметром λ имеет при фиксированном значении λ_0 решение x_0. Тогда при значениях λ, близких к λ_0, уравнение $(*)$ может иметь несколько (более одного) решений $x(\lambda)$, близких к x_0. В этих случаях говорят, что происходит в е т в л е-

ние решения x_0, а пара (x_0, λ_0) наз. точкой ветвления уравнения (*).

Пример: Уравнение $x^2-\lambda=0$, где x и λ — комплексные переменные, имеет точку ветвления $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$, ибо существует двузначное решение $x=\sqrt{\lambda}$, т. е. решение $x=0$ (при $\lambda=0$) разветвляется при малых $\lambda\neq 0$ на два малых нетривиальных решения.

Современная теория В. р. основывается на идеях А. М. Ляпунова [1] и Э. Шмидта [2] и наиболее развита для нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Пусть E_1 и E_2 — комплексные банаховы пространства, $x\in E_1$, λ — комплексное переменное, а $F(x, \lambda)$ — нелинейный оператор, непрерывный вместе с *Фреше производной* $F_x(x, \lambda)$ в окрестности Ω точки (x_0, λ_0), отображающий Ω в окрестность нуля пространства E_2 и такой, что $F(x_0, \lambda_0)=0$, а $F_x(x_0, \lambda_0)\equiv B$ — *Фредгольма оператор*.

Задача состоит в том, чтобы найти в шаре $\|x-x_0\|<r$ достаточно малого радиуса r все решения уравнения (*), непрерывные при $|\lambda-\lambda_0|<\rho$, где ρ также достаточно мало. Иными словами, это есть задача локального продолжения решения x_0 по параметру λ. Если существует обратный оператор B^{-1}, то задача имеет единственное решение $x(\lambda)$, причем $x(\lambda_0)=x_0$. Если же B^{-1} не существует, то нуль-пространство $N(B)$ оператора B имеет размерность $n\geqslant 1$. В этом случае задача может быть сведена к аналогичной конечномерной задаче. Пусть через P обозначен *проектор* E_1 на $N(B)$, а через $I-Q$ — проектор E_2 на область значений оператора B, где I — тождественный оператор. Уравнение (*) может быть записано в виде системы

$$\left.\begin{aligned}(I-Q)\,F(x_0+u+v,\ \lambda)=0,\\ QF(x_0+u+v,\ \lambda)=0,\end{aligned}\right\}$$

где $u=(I-P)(x-x_0)$, $v=P(x-x_0)$. Из первого уравнения системы определяется неявный оператор $u=f(v, \lambda)$. В результате его подстановки во второе уравнение системы получается уравнение

$$QF(x_0+f(v,\ \lambda)+v,\ \lambda)=0$$

для определения v; оно наз. уравнением разветвления. Полное решение задачи о нахождении в шаре $\|v\|<r$ достаточно малого радиуса r всех решений $v(\lambda)$ уравнения разветвления, непрерывных при $|\lambda-\lambda_0|<\rho$ (где ρ достаточно мало), приводит к полному решению исходной задачи, ибо всякое ее решение представимо в виде

$$x(\lambda)=x_0+v(\lambda)+f[v(\lambda),\ \lambda],$$

где v — нек-рое решение уравнения разветвления.

Пусть $F(x, \lambda)$ — *аналитический оператор* в Ω. Выбор базисов в n-мерных подпространствах $PE_1=N(B)$ и QE_2 позволяет записать уравнение разветвления в виде системы

$$\mathscr{L}_i(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \lambda)=0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

$\mathscr{L}_i$, $i=1, \ldots, n$ — аналитич. функции в точке $(0, \ldots, 0, \lambda_0)$, причем все частные производные $\partial\mathscr{L}_i/\partial\xi_j$ обращаются в нуль в этой точке. Исследование этой системы может осуществляться при помощи теории исключения, метода *Ньютона диаграммы* и др. методов (см. [3] — [5]). При $n=1$ полный анализ осуществляется методом диаграммы Ньютона. Применительно к исследованию уравнения разветвления, а значит и исходной задачи, возможны лишь следующие три случая: а) задача не имеет решений; б) задача имеет конечное число решений и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням разности $\lambda-\lambda_0$; в) задача имеет конечное число семейств решений, каждое из к-рых зависит от конечного числа свободных малых

параметров, и, быть может, конечное число решений, указанных в б).

Для того чтобы имел место случай б), достаточно, чтобы x_0 было изолированным решением уравнения $F(x, \lambda_0)=0$. В случае б) решения удобно искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$x(\lambda) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k (\lambda - \lambda_0)^{k/p},$$

где x_k — коэффициенты, подлежащие определению, а возможные значения p могут быть предварительно найдены с помощью уравнения разветвления. Подстановка такого ряда в (*) приводит к рекуррентной системе для нахождения $x_1, x_2, \ldots$. При этом получаются задачи вида $Bx_k = H(x_1, \ldots, x_{k-1})$ и каждое x_k определяется с точностью до n произвольных постоянных, к-рые определяются из требований разрешимости последующих уравнений. Все полученные ряды сходятся в нек-рой окрестности точки λ_0. Оценка снизу радиуса окрестности может быть получена с помощью построения мажорант (см. [6]).

Для того чтобы имел место случай в), необходимо, чтобы x_0 было неизолированным решением уравнения $F(x, \lambda_0)=0$. Здесь применение метода неопределенных коэффициентов может привести к расходящимся рядам (формальным решениям). Если задача инвариантна относительно непрерывной группы линейных операторов в E_1, то в ряде случаев использование групповых соображений позволяет уменьшить число уравнений и неизвестных в уравнении разветвления и тем самым упростить задачу или даже свести ее к случаю б) (см. [7], [8]).

Уравнение (*) может иметь также решения, определенные лишь при $\lambda=\lambda_0$. Эти решения возможны только тогда, когда x_0 — неизолированное решение уравнения $F(x, \lambda_0)=0$; они находятся при помощи уравнения разветвления при $\lambda=\lambda_0$. Определение всех его многопараметрич. семейств решений приводит к определению всех решений уравнения (*) с $\lambda=\lambda_0$.

В случае вещественных пространств E_1 и E_2 уравнение разветвления изучается в комплексной области, а затем отбираются вещественные решения. Нек-рые из них могут оказаться определенными в полуокрестностях точки λ_0.

Изложенная методика частично применима также в случаях, когда $F(x, \lambda)$ — достаточно гладкий оператор, B — *нётеров оператор*, а параметр λ — элемент еще одного банахова пространства E (точки ветвления могут заполнять в E линии и поверхности). Этим же способом исследуются нек-рые близкие задачи: задача отыскания больших решений (уравнение (*) может иметь решения $x(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \lambda_0$), задача ветвления собственных значений и собственных элементов линейных операторов и др. (см. [3]). Частный случай, когда

$$E_1 = E_2, \quad F(x, \lambda) \equiv x - \Phi(x, \lambda), \quad \Phi(0, \lambda) \equiv 0$$

исследовался также топологическими, вариационными методами и методами, использующими конусы в банаховом пространстве. В этом круге вопросов значительную роль играет понятие точки *бифуркации*. Встречаются также задачи о ветвлении решений, не укладывающиеся в описанную выше схему. Это, напр., задачи для дифференциальных уравнений с вырождением (см. [9], [10]) и задачи о длинных и уединенных волнах (см. [11]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч., т. 4, М., 1959; [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; 4 Вайнберг М. М., Треногин В. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 2; [5] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [6] Ахмедов

К. Т., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 135—53; [7] Юдович В. И., «Прикл. матем. и механ.», 1967, т. 31, в. 1, с. 101—11; [8] Логинов Б. В., Треногин В. А., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 1; [9] Ахмедов К. Т., там же, 1957, т. 115, № 1; [10] Сидоров Н. А., «Дифференц. уравнения», 1967, т. 3, № 9; [11] Тер-Крикоров А. М., Треногин В. А., там же, т. 3, № 3.

В. А. Треногин.

ВЕТВЛЕНИЯ ИНДЕКС — сумма $V=\sum(k-1)$ порядков *ветвления точек* компактной римановой поверхности S, рассматриваемой как n-листная поверхность наложения над римановой сферой, распространенная на все конечные и бесконечно удаленные точки ветвления S. В. и. связан с родом g и числом листов n поверхности S:

$$V=2(n+g-1).$$

См. также *Риманова поверхность*.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА, особая точка многозначного характера,— *изолированная особая точка* a аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z такая, что *аналитическое продолжение* к.-л. элемента функции $f(z)$ вдоль замкнутого пути, охватывающего a, приводит к новым элементам $f(z)$. Точнее, a наз. В. т., если существуют: 1) кольцо $V=\{z;\ 0<|z-a|<\rho\}$, в к-ром $f(z)$ аналитически продолжается по любому пути; 2) точка $z_1\in V$ и к.-л. элемент функции $f(z)$, представленный степенным рядом

$$\Pi(z_1;\ r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z-z_1)^\nu$$

с центром z_1 и радиусом сходимости $r>0$, аналитич. продолжение к-рого вдоль окружности $|z-a|=|z_1-a|$, проходимой один раз, напр. в положительном направлении, приводит к новому элементу $\Pi'(z_1;\ r')$, отличающемуся от $\Pi(z_1;\ r)$. Если после нек-рого минимального числа $k>1$ таких обходов снова получается исходный элемент $\Pi(z_1;\ r)$, то это же самое будет иметь место для всех элементов *ветви аналитической функции* $f(z)$, определяемой в V элементом $\Pi(z_1;\ r)$. В таком случае a является В. т. конечного порядка $k-1$ для указанной ветви. В проколотой окрестности V В. т. a конечного порядка эта ветвь представима в виде обобщенного ряда Лорана, или ряда Пюизё:

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu(z-a)^{\nu/k},\quad z\in V. \tag{1}$$

Если $a=\infty$ — бесконечно удаленная В. т. конечного порядка, то в нек-рой окрестности $V'=\{z;\ |z|>\rho\}$ данная ветвь $f(z)$ представима в виде аналога ряда (1):

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu z^{-\nu/k},\quad z\in V'. \tag{2}$$

Поведение *римановой поверхности* R функции $f(z)$ над В. т. конечного порядка a характеризуется тем, что над a соединяются вместе k листов той ветви $f(z)$, к-рая определяется элементом $\Pi(z_1;\ r)$. При этом поведение других ветвей R над a может быть совершенно иным.

Если в ряде (1) или (2) среди коэффициентов b_ν с отрицательными индексами ν имеется лишь конечное число отличных от нуля, то a — *алгебраическая точка ветвления*, или алгебраическая особая точка. Такая В. т. конечного порядка характеризуется также тем, что при любом стремлении $z\to a$ в V или V' значения всех элементов ветви, определяемой $\Pi(z_1;\ r)$, стремятся к определенному конечному или бесконечному пределу.

Пример: $f(z)=\sqrt[k]{z}$, $k>1$ — натуральное число, $a=0,\ \infty$.

Если в ряде (1) или (2) имеется бесконечно много ненулевых коэффициентов b_ν с отрицательными индексами ν, то В. т. конечного порядка a относится к классу трансцендентных В. т. Пример: $f(z)=\exp(1/\sqrt[k]{z})$, $k>1$ — натуральное число, $a=0$.

Наконец, если ни при каком числе последовательных обходов нельзя возвратиться к исходному элементу, то a наз. *логарифмической точкой ветвления*, или В. т. бесконечного порядка, и также относится к трансцендентным В. т. Пример: $f(z)=\operatorname{Ln} z$, $a=0, \infty$. Над логарифмич. В. т. соединяются бесконечно много листов той ветви $f(z)$, к-рая определяется элементом $\Pi(z_1; r)$.

В случае аналитич. функции многих комплексных переменных $f(z)$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 2$, точка a пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n$ наз. В. т. порядка m, $1\leqslant m\leqslant\infty$, если она является В. т. порядка m, вообще говоря, многолистной *голоморфности области* функции $f(z)$. В отличие от случая $n=1$, при $n\geqslant 2$ В. т., как и другие *особые точки аналитических функций* многих комплексных переменных, не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962, ч. 1, гл. 2. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА минимальной поверхности — особая точка минимальной поверхности, в к-рой первая квадратичная форма поверхности обращается в нуль; тем самым фактически В. т. возможна лишь на обобщенной минимальной поверхности. Своим названием эта особая точка обязана тому факту, что в ее окрестности строение обобщенной минимальной поверхности подобно строению римановой поверхности функции $w=z^n$, $n\geqslant 2$, над точкой $z=0$, т. е. там обобщенная минимальная поверхность имеет многолистную ортогональную проекцию на нек-рую плоскую область, в к-рой проекция самой В. т. является внутренней точкой с единственным прообразом. В окрестности В. т. ($u=0$, $v=0$) координаты (x, y, z) минимальной поверхности представимы в виде

$$x+iy=aw^m+O(|w|^{m+1}),$$

$$z=\operatorname{Re}(bw^{m+n})+O(|w|^{m+n+1}),\quad w=u+iv,$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$ — две комплексные постоянные, $m\geqslant 2$ и $n\geqslant 1$ — целые числа, соответственно называемые порядком и индексом В. т., u и v — внутренние изотермич. координаты.

На основании этого представления получена теорема: если числа $m+n$ и m взаимно простые, то минимальная поверхность имеет $(m-1)(m+n)$ различных линий самопересечения, исходящих из В. т. с определенными направлениями, причем все соседние направления образуют между собой равные углы.

Различают два вида В. т. — фальшивые В. т. и истинные (-нефальшивые). Фальшивые В. т. представляют собой особенность отображения, определяющего поверхность, и от нее можно избавиться перепараметризацией (напр., если $r=r(w)$ — регулярная минимальная поверхность, то обобщенная минимальная поверхность $r=r(w^2)$ будет иметь в точке $w=0$ фальшивую В. т.). Истинная В. т. представляет собой реальную особенность самой поверхности, и у нее есть следующее важное свойство: в окрестности истинной В. т. поверхность можно изменить так, что новая поверхность, совпадая с исходной вне деформированной окрестности, будет иметь меньшую площадь по сравнению с исходной поверхностью. Теория обобщенных минимальных поверхностей с В. т. послужила основой для общей теории вложений с ветвлениями, развитой для широкого класса двумерных поверхностей в R^n, $n\geqslant 3$. *И. Х. Сабитов.*

ВЕТВЬ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — результат *аналитического продолжения* данного элемента

аналитич. функции, представленного степенным рядом

$$\Pi(a;\ r)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

с центром a и радиусом сходимости $r>0$, вдоль всевозможных путей, принадлежащих данной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $a\in D$. Таким образом, В. а. ф. определяется элементом $\Pi(a;\ r)$ и областью D. Для вычисления применяются только о д н о з н а ч н ы е, или р е г у л я р н ы е, В. а. ф., которые существуют не для всех областей D, принадлежащих области существования *полной аналитической функции*. Напр., в разрезанной комплексной плоскости $D=\mathbb{C}\setminus\{z=x;\ -\infty\leqslant x\leqslant 0\}$ многозначная аналитич. функция $w=\operatorname{Ln} z$ допускает регулярную В. а. ф.

$$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z,\quad |\arg z|<\pi,$$

— главное значение логарифма, а в кольце $D=\{z;\ 1<|z|<2\}$ выделение регулярной В. а. ф. $w=\operatorname{Ln} z$ невозможно.

Лит.: [1] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 1, гл. 3, ч. 3, гл. 4; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС — *случайный процесс*, описывающий широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением к.-л. объектов (напр., частиц в физике, молекул в химии, особей к.-л. популяции в биологии и т. п.). Основным математич. предположением, выделяющим класс В. п., является предположение независимости размножения частиц друг от друга.

Однородный во времени В. п. $\mu(t)$ с однотипными частицами определяется как *марковский процесс* со счетным числом состояний 0, 1, 2, ..., переходные вероятности $P_{ij}(t)$ к-рого удовлетворяют дополнительному у с л о в и ю в е т в л е н и я:

$$P_{ij}(t)=\sum_{j_1+\ldots+j_i=j} P_{1j_1}(t)\,P_{1j_2}(t)\ \ldots\ P_{1j_i}(t). \quad (1)$$

Состояния 0, 1, 2, ... в В. п. интерпретируются как числа частиц. Вероятность $P_{ij}(t)$ равна вероятности

$$\mathsf{P}\{\mu(t+t_0)=j\mid \mu(t_0)=i\}$$

того, что i частиц за время t превращаются в j частиц. Основным аналитич. аппаратом В. п. являются *производящие функции*

$$F(t;\ s)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu(t)=n\mid\mu(0)=1\}\,s^n. \quad (2)$$

Из условия ветвления (1) вытекает равенство

$$F(t+\tau;\ s)=F(t;\ F(\tau;\ s)). \quad (3)$$

В В. п. с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м (в. п. с д. в.) t принимает целые неотрицательные значения, и из (3) следует, что $F(t;\ s)$ есть t-кратная итерация функции $F(s)=F(1;\ s)$. Такой процесс иногда наз. п р о ц е с с о м Г а л ь т о н а — В а т с о н а. В В. п. с непрерывным временем (в. п. с н. в.) предполагается, что $t\in[0,\ \infty)$, и существует правая производная

$$\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(s).$$

Из (3) следует, что $F(t;\ s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t}=f(F(t;\ s)) \quad (4)$$

и начальному условию $F(0,\ s)=s$.

Если $A=F'(1)$ и $a=f'(1)$ конечны, то математич. ожидание $\mathsf{E}\mu(t)$ числа частиц $\mu(t)$ (при условии $\mu(0)=1$) равно A^t для в. п. с д. в. и равно e^{at} для в. п. с н. в. В зависимости от значения параметров A или a В. п. подразделяются на д о к р и т и ч е с к и е ($A<1$, $a<0$), к р и т и ч е с к и е ($A=1$, $a=0$) и н а д к р и т и ч е с к и е ($A>1$, $a>0$). Основным свойством,

определяющим эту классификацию, является поведение $\mathsf{E}\mu(t)$ при $t \to \infty$.

Ниже исключаются из рассмотрения тривиальные случаи $F(s) \equiv s$ и $f(s) \equiv 0$, когда

$$\mathsf{P}\{\mu(t) = 1 \mid \mu(0) = 1\} \equiv 1.$$

Вероятность вырождения равна 1 в докритич. и критич. В. п. и меньше 1 в надкритич. В. п. Если $\mathsf{E}\mu(t) \ln \mu(t) < \infty$, то в докритич. В. п. вероятность продолжения процесса $\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}$ при $t \to \infty$ асимптотически ведет себя как $K\mathsf{E}\mu(t)$, где K — положительная константа. В критич. В. п. с конечным $\mathsf{E}\mu^2(t)$ при $t \to \infty$ имеет место асимптотика

$$\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\} \sim \frac{2}{\mathsf{D}\mu(t)},$$

где $\mathsf{D}\mu(t) \sim Bt$ в в. п. с д. в. и $\mathsf{D}\mu(t) \sim bt$ в в. п. с н. в., $B = F''(1)$, $b = f''(1)$. Более детальное изучение асимптотич. поведения распределения $\mu(t)$ при $t \to \infty$ показывает, что условный закон распределения

$$S_t(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}\{\mu(t) \mid \mu(t) > 0\}} \leqslant x \mid \mu(t) > 0\right\} \qquad (5)$$

при $t \to \infty$ слабо сходится к предельному распределению $S(x)$, если конечны нек-рые моменты $\mu(t)$. В докритич. В. п. предельный закон $S(x)$ дискретен, а в остальных случаях абсолютно непрерывен. Особенно интересен случай критич. В. п., для к-рого предельный закон $S(x)$ показательный

$$S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0. \qquad (6)$$

Распределение (6) является предельным также и для В. п., близких к критическим. Точнее, если рассматривать класс производящих функций $F(s)$ или $f(s)$ с ограниченной 3-й производной $F'''(1)$, $f'''(1)$ и с $F''(1) \geqslant B_0 > 0$, $f''(1) \geqslant b_0 > 0$, то

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ A \to 1}} S_t(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0,$$

где $S_t(x)$ определяется формулой (5). Явления, возникающие при $t \to \infty$ в В. п., близких к критическим, наз. п е р е х о д н ы м и.

Другой моделью В. п. является *Беллмана — Харриса процесс*, в к-ром каждая частица имеет случайное время жизни с функцией распределения $G(t)$. В конце жизни частица оставляет потомство численности n с вероятностью q_n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1.$$

Времена жизни и численности потомства разных частиц независимы. Пусть в начальный момент $t=0$ была одна частица нулевого возраста. Тогда производящая функция $F(t; s)$ числа частиц $\mu(t)$ в момент t, определяемая формулой (2), удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$F(t; s) = \int_0^t h(F(t-u; s))\, dG(u) + s(1 - G(t)), \qquad (7)$$

где

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n.$$

В частном случае, когда $G(t)$ — вырожденная функция распределения, процесс Беллмана — Харриса есть в. п. с д. в.; когда же $G(t)$ — показательная функция распределения, получается в. п. с н. в. В общем случае процесс Беллмана — Харриса — это немарковский В. п.

Другое усложнение В. п. связано с зависимостью частиц от положения в пространстве. Пусть, напр., частицы независимо друг от друга совершают броуновское движение в r-мерной области G с поглощающей

границей ∂G. Частица, находящаяся внутри области G, за время $\Delta t \to 0$ с вероятностью

$$p_n \Delta t + o(\Delta t), \quad n \neq 1,$$

превращается в n частиц, к-рые начинают независимо друг от друга блуждать по броуновским траекториям из точки их рождения. Пусть $\mu_{xt}(A)$ равно числу частиц в множестве A в момент t, если в начальный момент 0 была одна частица в точке $x \in G$. Производящий функционал

$$H(t, x, s(\cdot)) = \mathsf{E} \exp\left[\int_G \ln s(y)\, \mu_{xt}(dy)\right]$$

удовлетворяет квазилинейному параболич. уравнению

$$\Delta H + f(H) = 0 \qquad (8)$$

с начальным условием $H(0, x, s(\cdot)) = s(x)$ и граничным условием $H(t, x, s(\cdot))|_{x \to \partial G} = 0$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, а $f(s) = \sum_n p_n s^n$, $p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n$.

В общем случае В. п. предполагается, что размножающиеся частицы характеризуются к.-л. параметрами, к-рые можно интерпретировать как возраст, положение частицы в пространстве, тип, размер или энергию частицы и т. п. Изучение таких процессов ведется с помощью производящих функций или функционалов, для к-рых выводятся нелинейные дифференциальные или интегральные уравнения, обобщающие уравнения (4), (7), (8). Можно дать следующее общее описание таких моделей В. п. Пусть в нек-ром фазовом пространстве X независимо друг от друга по закону марковского процесса блуждают частицы. Предполагается, что случайное время жизни частицы есть марковский момент, зависящий от ее траектории. В конце своей жизни частица производит новые частицы, к-рые по к.-л. вероятностному закону распределяются по фазовому пространству X. Новые частицы эволюционируют независимо друг от друга аналогичным образом. В пространстве целочисленных мер, определяемых численностями частиц в подмножествах X, так построенный В. п. является марковским. Однако В. п. часто рассматриваются в более простых редуцированных пространствах. В этом случае многие из них становятся немарковскими.

В большей части приведенных выше моделей сохраняет смысл подразделение процессов на докритические, критические и надкритические В. п. При этом в более сложной обстановке сохраняются многие свойства, установленные для простых В. п., описываемых уравнением (4). В частности, в критич. процессах, как правило, в качестве предельного распределения для (5) (при соответствующей нормировке) возникает показательное распределение (6).

В. п. находят применение при расчетах различных реальных биологич., генетич., физич., химич. или технич. процессов. В реальных процессах часто нарушается условие независимости размножения различных частиц и, наоборот, при размножении имеется взаимодействие частиц. Так обстоит дело во многих биологич. процессах размножения, в процессах распространения эпидемий (см. *Эпидемии процессы*), в бимолекулярных химич. реакциях и т. п. Однако начальные стадии развития таких процессов можно рассчитывать с помощью соответственно подобранных моделей В. п. Это делается в тех случаях, когда в среде имеется не очень много активных частиц, к-рые при малых концентрациях почти не встречаются друг с другом, а изменения состояния системы происходят при встречах этих активных частиц с частицами среды. В процессах эпидемии, напр., такими «активными частицами» можно считать больных индивидуумов. В генетике с помощью В. п. можно рассчитывать, напр., явления, связанные с му-

тациями. *Ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц* может служить моделью при расчетах цепных реакций; *ветвящийся процесс с диффузией* частиц — моделью нейтронных процессов в ядерных реакторах. Явления, возникающие в ливнях космич. лучей, также могут изучаться с помощью В. п. В телефонии расчет нек-рых систем с ожиданием сводится к моделям В. п.

См. также *Ветвящийся процесс со случайной средой*, *Ветвящийся процесс с иммиграцией*, *Ветвящихся процессов регулярность*.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching Processes, B.— Hdlb., N. Y., 1972. *Б. А. Севастьянов.*

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ДИФФУЗИЕЙ — модель ветвящегося процесса, в к-ром размножающиеся частицы диффундируют в к.-л. области G. Пусть область G r-мерна, ее граница ∂G — поглощающая, и в самой области частицы независимо друг от друга совершают броуновское движение. Каждая частица в области G за время $\Delta t \to 0$ независимо от других частиц с вероятностью $p_n \Delta t + o(\Delta t)$, $n \neq 1$, превращается в n частиц, к-рые независимо друг от друга начинают свою эволюцию из точки их рождения. Пусть

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

— производящая функция $\{p_n\}$, $p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n$, $\mu_{xt}(A)$ — число частиц в множестве $A \subseteq G$ в момент t, если в начальный момент была одна частица в точке $x \in G$. Производящий функционал

$$H(t;\ x,\ s(\cdot)) = \mathsf{E} \exp\left[\int_G \ln s(y)\, \mu_{xt}(dy)\right]$$

удовлетворяет квазилинейному параболич. уравнению

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} + f(H) = 0$$

с начальным условием

$$H(0,\ x,\ s(\cdot)) = s(x)$$

и граничным условием

$$H(t,\ x,\ s(\cdot))\,|_{x \to \partial G} = 0.$$

Обозначим $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ собственные значения, $\varphi_1(x) > 0$ — соответствующую λ_1 собственную функцию задачи

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(x)\,|_{x \to \partial G} = 0.$$

При $t \to \infty$ имеет место асимптотика

$$\mathsf{E}\mu_{xt}(G) \sim K e^{(a-\lambda_1)t} \varphi_1(x),$$

в соответствии с к-рой процесс наз. докритическим при $a < \lambda_1$, критическим при $a = \lambda_1$ и надкритическим при $a > \lambda_1$. При $a \leqslant \lambda_1$ В. п. с д. вырождается с вероятностью 1, а при $a > \lambda_1$ с положительной вероятностью $\mu_{xt}(G) \to \infty$ при $t \to \infty$. В зависимости от критичности В. п. с д. имеют место предельные теоремы, аналогичные теоремам для ветвящихся процессов без диффузии.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971. *Б. А. Севастьянов.*

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВОЗРАСТА — модель ветвящегося процесса, в к-ром время жизни частицы является произвольной неотрицательной случайной величиной, а число потомков частицы зависит от ее возраста в момент превращения. В модели с однотипными частицами каждая частица имеет случайную продолжительность жизни τ с функцией распределения

$$\mathsf{P}\{\tau \leqslant t\} = G(t).$$

В конце жизни частица превращается в k частиц нулевого возраста с вероятностью $p_k(u)$, если превраще-

ние произошло, когда частица достигла возраста u. Пусть $\mu(t)$ — число частиц в момент времени t. Производящая функция $F(t, x)$ распределения вероятностей $\mu(t)$ для процесса, начавшегося с одной частицы нулевого возраста, удовлетворяет уравнению

$$F(t, x) = \int_0^t h(u, F(t-u, x))\, dG(u) + x(1-G(t)), \quad (*)$$

где

$$h(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(u)\, x^k.$$

Положим

$$a(u) = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=1}, \quad b(u) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big|_{x=1},$$

$$A = \int_0^{\infty} a(u)\, dG(u), \quad B = \int_0^{\infty} b(u)\, dG(u).$$

В. п. с з. от в. наз. *докритическим, критическим* или *надкритическим*, если соответственно $A<1$, $A=1$ и $B>0$, $A>1$. Поведение процесса при $t \to \infty$ существенно зависит от критичности процесса. Докритич. и критич. процессы вырождаются с вероятностью 1, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=0\} = 1.$$

Для рассматриваемых процессов получены [1] асимптотич. формулы моментов $\mu(t)$, необходимые и достаточные условия вырождения, условия существования и единственности решения уравнения (*), асимптотич. формулы при $t \to \infty$ для

$$Q(t) = \mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}$$

и найдены предельные распределения. В критич. случае при $t \to \infty$:

$$Q(t) \sim \frac{2\int_0^{\infty} u\, a(u)\, dG(u)}{Bt},$$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}(\mu(t) \mid \mu(t)>0)} < x \,\middle|\, \mu(t)>0\right\} \longrightarrow 1-e^{-x}, \quad x>0.$$

В случае, когда $h(u, x)$ не зависит от u, В. п. с з. от в. — *Беллмана — Харриса процесс.* Имеются обобщения описанной модели на процессы с несколькими типами частиц, а также на процессы с предположением, что частица может в течение жизни порождать новые частицы несколько раз (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] его же, «Теория вероят. и ее примен.», 1964, т. 9, № 4, с. 577—94; [3] Mode C. J., Multitype Branching Processes, N. Y., 1971.

В. П. Чистяков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ИММИГРАЦИЕЙ — модель ветвящегося процесса (с дискретным или непрерывным временем, с одним или несколькими типами частиц и т. д.), в к-рой новые частицы могут появляться не только при делении частиц, но и в результате иммиграции из какого-то «внешнего источника». Напр., пусть

$$X_{t,i},\ Y_t,\ t = 0, 1, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots,$$

— независимые случайные величины с производящими функциями

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{X_{t,i}=k\}\, s^k,$$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{Y_t = k\}\, s^k$$

соответственно; тогда ветвящийся *Гальтона—Ватсона процесс* с иммиграцией можно задать соотношениями ($\mu(t)$ — число частиц): $\mu(0)=0$ и

$$\mu(t+1) = X_{t,1} + \ldots + X_{t,\mu(t)} + Y_t, \quad t = 0, 1, \ldots$$

(величина $X_{t,i}$ интерпретируется как размер потомства i-й частицы t-го поколения, величина Y_t—как число

частиц, иммигрирующих в t-е поколение). Производящие функции

$$H_t(s) = \mathsf{E}\left\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0) = 0\right\}$$

определяются рекуррентными соотношениями

$$H_0(s) \equiv 1, \quad H_{t+1}(s) = G(s)\, H_t(F(s)).$$

Соответствующая ветвящемуся процессу Гальтона—Ватсона с иммиграцией цепь Маркова $\mu(t)$ возвратна, если $\mathsf{E}X_{t,i} < 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$ или $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$ и $B = \mathsf{D}X_{t,i} > 2C = 2\mathsf{E}Y_t$, и невозвратна, если $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$ и $B < 2C$ или $\mathsf{E}X_{t,i} > 1$. Для эргодичности цепи Маркова $\mu(t)$, т. е. для того чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t) = k\} = p_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

необходимо и достаточно (см. [3]), чтобы

$$\int_0^1 \frac{1 - G(s)}{F(s) - s}\, ds < \infty$$

(это условие выполняется, в частности, если $\mathsf{E}X_{t,i} < 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$). Если $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$, $B > 0$, $C < \infty$, то (см. [4]):

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\Gamma\left(2CB^{-1}\right)} \int_0^x y^{2CB^{-1}-1} e^{-y}\, dy, \quad x \geqslant 0.$$

Если $A = \mathsf{E}X_{t,i} > 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$, то (см. [5]) существует такая последовательность чисел $c_t \downarrow 0$, $c_t/c_{t+1} \to A$, что

$$\mathsf{P}\left\{\exists \lim_{t\to\infty} \mu(t)\, c_t \in (0, \infty)\right\} = 1.$$

Для В. п. с и., в к-рых иммиграция происходит только при $\mu(t) = 0$, т. е.

$$\mu(t+1) = X_{t,1} + \ldots + X_{t,\mu(t)} + \delta_{0,\mu(t)} Y_t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, при $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$, $1 < \mathsf{E}X_{t,i}^2 < \infty$ и $0 < \mathsf{E}Y_t < \infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\ln(1+\mu(t))}{\ln t} \leqslant x\right\} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Лит.: [1] Зубков А. М., «Теория вероят. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 179—88; [2] Pakes A. G., «J. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 13, № 3, p. 277—90; [3] Foster J. H., Williamson J. A., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1971, Bd 20, № 3, S. 227—35; [4] Seneta E., «J. Roy. Statist. Soc.», 1970, v. 32, № 1, p. 149—52; [5] его же, «Math. Biosci.», 1970, v. 7, № 1, p. 9—14; [6] Foster J. H., «Ann. Math. Statistics», 1971, v. 42, № 5, p. 1773—6.

А. М. Зубков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ — модель ветвящегося процесса, являющаяся частным случаем марковского процесса со счетным множеством состояний. Состояние ветвящегося процесса описывается случайным вектором

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)),$$

k-я компонента к-рого $\mu_k(t)$ показывает, что в момент t имеется $\mu_k(t)$ частиц типа T_k. Основное свойство, выделяющее ветвящиеся процессы из марковских, состоит в том, что частицы, существующие в момент t_1, в любой следующий момент t_1+t, $t>0$, дают потомство независимо друг от друга. При этом производящие функции

$$F_k(t, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathsf{E}\left(x_1^{\mu_1(t)}, \ldots, x_n^{\mu_n(t)} \mid \mu_k(0) = 1;\ \mu_i(0) = 0,\ i \neq k\right)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$F_k(t+\tau, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= F_k(t, F_1(\tau, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(\tau, x_1, \ldots, x_n)) \quad (*)$$

и начальным условиям

$$F_k(0, x_1, \ldots, x_n) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Уравнениям $(*)$ удовлетворяют процессы с дискретным и с непрерывным временем.

В случае дискретного времени матрица математич. ожиданий

$$A(t) = \| A_{ij}(t) \|,$$
$$A_{ij}(t) \quad \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=\ldots=x_n=1},$$

является t-й степенью матрицы $A = A(1)$: $A(t) = A^t$. Если матрица A неразложима и непериодична, то она имеет простое положительное характеристич. число λ, к-рое больше модулей остальных характеристич. чисел. В этом случае при $t \to \infty$

$$A_{ij}(t) = u_i v_j \lambda^t + o(\lambda^t),$$

где $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ — правый и левый собственные векторы матрицы A, соответствующие λ. Ветвящиеся процессы с неразложимой матрицей A наз. д о к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda < 1$, н а д к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda > 1$, и к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda = 1$ и хотя бы одна из функций $F_k(1, x_1, \ldots, x_n)$ нелинейна. Для процессов с непрерывным временем понятие критичности вводится аналогично.

Асимптотич. свойства ветвящегося процесса существенно зависят от критичности. Докритич. и критич. процессы вырождаются с вероятностью 1. Асимптотические при $t \to \infty$ формулы для вероятности

$$Q_k(t) = \mathsf{P}\{\mu_1(t) + \ldots + \mu_n(t) > 0 \mid \mu_k(0) = 1; \mu_i(0) = 0,\ i \neq k\}$$

и теоремы о предельных распределениях числа частиц [2] аналогичны соответствующим результатам для процессов с одним типом частиц (см. *Ветвящийся процесс*). Изучены асимптотич. свойства процессов, близких к критическим ($t \to \infty$, $\lambda \to 1$) (см. [3]). Изучаются также процессы с разложимой матрицей математич. ожиданий (см. [4]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 1, с. 7—10; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Чистяков В. П., «Теории вероят. и ее примен.», 1972, т. 17, № 4, с. 669—78; [4] Ogura J., «J. Math. Kyoto Univ.», ser. A, 1975, v. 15, № 2, p. 251—302.

В. П. Чистяков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС СО СЛУЧАЙНОЙ СРЕДОЙ — неоднородный по времени ветвящийся процесс, в к-ром неоднородность имеет случайный характер. Пусть $\overline{\xi} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ — стационарная последовательность случайных величин (значение ξ_t интерпретируется как состояние «среды» в момент времени t) и каждому возможному состоянию среды ξ сопоставлено распределение вероятностей $\{p_k(\xi)\}$ числа потомков одной частицы:

$$p_k(\xi) \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi) = 1,$$

$$F_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi)\, s^k.$$

Для построения траектории $\{\mu(0), \mu(1), \ldots\}$ В. п. со с. с. фиксируют значение $\mu(0) = m$ и траекторию $\overline{\xi}$ состояний среды и при каждом $t = 0, 1, \ldots$ определяют $\mu(t+1)$ как сумму $\mu(t)$ независимых случайных величин, имеющих распределение $\{p_k(\xi_t)\}$. Такое усложнение ветвящегося *Гальтона—Ватсона процесса* довольно естественно, если, напр., рассматривать В. п. со с. с. как модель биологич. популяции.

Свойства В. п. со с. с. аналогичны свойствам обычных ветвящихся процессов. Напр., производящая функция распределения $\mu(t)$ при условии, что $\mu(0) = 1$, имеет вид

$$\mathsf{E}\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0) = 1\} = \mathsf{E}_{\overline{\xi}} F_{\xi_0}\left(F_{\xi_1}\left(\ldots\left(F_{\xi_{t-1}}(s)\right)\ldots\right)\right) \quad (*)$$

(для ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона, т. е. при $\mathsf{P}\{\xi_t \equiv 0\} = 1$, в правой части (*) стоит t-кратная итерация $F_0(s)$). В. п. со с. с. делятся на докритиче-

ские, критические и надкритические; «критич. параметром» является (см. [1]) величина

$$\rho = \mathsf{E}_{\xi_0} \ln \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(\xi_0) = \mathsf{E}_{\xi_0} \ln F'_{\xi_0}(1)$$

(для обычных ветвящихся процессов «критич. параметром» является математич. ожидание числа потомков одной частицы). Если $\rho<0$, то В. п. со с. с. наз. докритическим, и для случайной величины

$$q(\bar{\xi}) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=0 \mid \mu(0)=1, \bar{\xi}\}$$

вероятности вырождения В. п. со с. с. при фиксированной траектории $\bar{\xi}$ — справедливо соотношение

$$\mathsf{P}\{q(\bar{\xi}) = 1\} = 1.$$

Имеет место аналог предельной теоремы для докритического ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона: для почти всех реализаций последовательности $\bar{\xi}$ существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1,\ \mu(t)>0,\ \bar{\xi}\} = p_k^*(\bar{\xi}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(\bar{\xi}) = 1.$$

Если $\rho=0$, то В. п. со с. с. наз. критическим, тогда

$$\mathsf{P}\{q(\bar{\xi}) = 1\} = 1$$

и для почти всех реализаций $\bar{\xi}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1,\ \mu(t)>0,\ \bar{\xi}\} = 0.$$

При $\rho>0$ В. п. со с. с. наз. надкритическим; в этом случае

$$\mathsf{P}\{q(\bar{\xi}) < 1\} = 1$$

и при нек-рых дополнительных условиях для почти всех $\bar{\xi}$ существует неотрицательная случайная величина

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{F'_{\xi_0}(1)\dots F'_{\xi_{t-1}}(1)}, \quad \mathsf{E}W = 1.$$

Лит.: [1] Athreya K. B., Ney P., Branching processes, B.—Hdlb.—N.Y., 1972.

А. М. Зубков.

ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛЯРНОСТЬ — свойство ветвящегося процесса, обеспечивающее конечность числа частиц в любой момент времени. Вопрос о В. п. р. сводится, как правило, к вопросу о единственности решения нек-рого дифференциального или интегрального уравнения. Напр., в ветвящемся процессе с непрерывным временем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t} = f(F(t,\ s))$$

с начальным условием $F(0, s)=s$ имеет единственное решение $F(t, s)$ тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon>0$ расходится интеграл

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{f(x)}.$$

В ветвящемся *Беллмана—Харриса процессе* производящая функция $F(t; s)$ числа частиц есть решение нелинейного интегрального уравнения

$$F(t;\ s) = \int_0^t h(F(t-u;\ s))\, dG(u) + s(1-G(t)), \quad (*)$$

где $G(t)$ — функция распределения времени жизни частиц, $h(t)$ — производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы. Если при некоторых t_0, c_1, $c_2>0$ и целом $h\geqslant 1$ для всех $0\leqslant t\leqslant t_0$ выполняются неравенства

$$c_1 t^n \leqslant G(t) \leqslant c_2 t^n,$$

то единственность решения уравнения (*) имеет место тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = h(\varphi) - 1$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) - 1,\ \varphi^{(r)}(0) = 0,\ r = 1,\ \ldots,\ n-1,$$

имеет единственное решение

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1.$$

Для регулярности ветвящегося процесса, описываемого уравнением (*), необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-1/n}(1-h(1-x))^{1/n}}$$

расходился.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

Б. А. Севастьянов.

ВЕЩЕСТВЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. В отличие от комплексных аналитич. пространств, структурные пучки В. а. п. могут не быть *когерентными пучками*. В. а. п. наз. когерентным, если его структурный пучок когерентен. Все вещественные аналитич. многообразия (т. е. гладкие В. а. п.) являются когерентными В. а. п.

Пусть V_a — росток в точке a вещественного аналитич. подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда определен росток в точке a комплексного аналитич. подмножества $\tilde{V}_a$ пространства $\mathbb{C}^n$, обладающий следующими эквивалентными свойствами: а) $\tilde{V}_a$ есть пересечение всех ростков комплексных аналитич. множеств, содержащих V_a; б) если $\mathcal{O}_{V_a}$ — аналитич. алгебра ростка V_a, то $\mathcal{O}_{V_a} \otimes \mathbb{C}$ есть аналитич. алгебра ростка $\tilde{V}_a$. Росток $\tilde{V}_a$ наз. комплексификацией ростка V_a, а V_a — вещественной частью ростка $\tilde{V}_a$. Аналогично для всякого когерентного В. а. п. X можно построить комплексификацию $\tilde{X}$, являющуюся комплексным аналитич. пространством. При этом X будет обладать в $\tilde{X}$ фундаментальной системой окрестностей, являющихся *Штейна пространствами*.

Теория когерентных В. а. п. аналогична теории комплексных пространств Штейна. Глобальные сечения всякого *когерентного аналитического пучка* модулей F на когерентном В. а. п. X порождают модули ростков его сечений в любой точке пространства X, и все группы $H^q(X, F)$ равны нулю при $q \geqslant 1$.

Для всякого конечномерного когерентного В. а. п. $(x, \mathcal{O}_x)$ существует морфизм

$$f = (f_0, f_1) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$$

такой, что f_0 — собственное взаимно однозначное отображение пространства X на когерентное подпространство в $\mathbb{R}^n$, причем f - вложение в гладких точках пространства X. В частности, всякое (хаусдорфово и счетное в бесконечности) вещественное аналитич. многообразие изоморфно вещественному аналитич. подмногообразию в $\mathbb{R}^n$. Для приведенного когерентного В. а. п. X множество классов изоморфных вещественно аналитич. главных расслоений со структурной вещественной группой Ли G, допускающей комплексификацию, и базой X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов изоморфных топологич. главных расслоений с той же структурной группой G.

Лит.: [1] Espaces analytiques, Buc., 1971, p. 149—57.

Д. А. Пономарев.

ВЕЩЕСТВЕННОЕ НОРМИРОВАНИЕ — мультипликативное нормирование поля (или кольца) со значения-

ми нормы в поле действительных чисел (см. также *Абсолютное значение*).

ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО — то же, что *действительное число*.

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ — соответствие между элементами двух множеств, при к-ром каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества, причем разным элементам первого множества соответствуют разные элементы второго и каждый элемент второго множества поставлен в соответствие некоторому элементу первого. В. о. с. обладает свойством симметричности (отображение, обратное В. о. с., является В. о. с.) и транзитивности (произведение В. о. с. является В. о. с.). Если каждой точке x ориентированной прямой поставить в соответствие ее расстояние до нек-рой фиксированной точки O (взятое со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от точки O, и со знаком минус — в противоположном случае), то получится В. о. с. между точками прямой и действительными числами. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА — целые числа, не имеющие общих (простых) делителей. *Наибольший общий делитель* В. п. ч. a и b равен единице, это принято обозначать $(a, b)=1$. Если a и b взаимно просты, то существуют такие числа u и v, $|u|<|b|$, $|v|<a$, что $au+bv=1$.

Понятие взаимной простоты может быть введено также для многочленов и вообще для элементов любого *евклидова кольца*.

ВЗАИМНОСТИ ЗАКОНЫ — ряд утверждений, касающихся связи между символами степенных или норменных вычетов.

Простейшим проявлением В. з. является следующий факт, известный еще П. Ферма (P. Fermat). Простыми делителями чисел x^2+1 могут быть лишь число 2 и простые числа, лежащие в арифметич. прогрессии $1+4k$. Другими словами, сравнение

$$x^2+1\equiv 0 \pmod p$$

по простому модулю $p>2$ разрешимо в том и только в том случае, когда $p\equiv 1 \pmod 4$. С помощью символа квадратичного вычета $\left(\frac{a}{p}\right)$ (*Лежандра символа*) последнее утверждение может быть выражено следующим образом:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

В более общем случае вопрос о разрешимости сравнения

$$x^2\equiv a \pmod p \qquad (*)$$

решается с помощью *Гаусса закона взаимности*:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{8}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

где p и q — различные нечетные простые числа, а также двух дополнений к этому закону

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Из этих соотношений для символов Лежандра следует, что простые числа p, для к-рых сравнение (*) при фиксированном a разрешимо, укладываются ровно в половину приведенных классов вычетов по модулю $4|a|$.

К. Гаусс (C. Gauss) справедливо придавал большое значение указанному В. з. и дал несколько его доказательств, основанных на совершенно различных идеях [1]. Из закона взаимности Гаусса и его дальнейшего обобщения — В. з. для *Якоби символа* — следует, в частности, что тип разложения простого числа p

в квадратичном расширении $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определяется вычетом p по модулю $4|d|$.

Закон взаимности Гаусса обобщается на сравнения вида

$$x^n \equiv a \pmod{p}, \quad n > 2.$$

Однако при этом происходит переход от арифметики целых рациональных чисел к арифметике целых чисел расширения K конечной степени m поля рациональных чисел. Кроме того, для обобщения В. з. на вычеты n-й степени нужно предполагать, что рассматриваемое расширение содержит примитивный корень ζ степени n из 1. При таком предположении для простых дивизоров $\mathfrak{P}$ поля K, не делящих n, имеет место сравнение

$$N_{\mathfrak{P}} \equiv 1 \pmod{n},$$

где $N_{\mathfrak{P}}$ — норма дивизора $\mathfrak{P}$, равная числу классов вычетов максимального порядка этого поля по модулю $\mathfrak{P}$. Аналог символа Лежандра определяется при помощи сравнения

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{P}}\right) \equiv \zeta^k \equiv a^{\frac{N_{\mathfrak{P}}-1}{n}} \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Символ степенного вычета $\left(\frac{a}{b}\right)$ для пары целых чисел a и b, аналогичный символу Якоби, определяется по формуле

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \prod \left(\frac{a}{\mathfrak{P}_i}\right)^{m_i},$$

если $(b)=\prod \mathfrak{P}_i^{m_i}$ — разложение главного дивизора (b) на простые сомножители и если b взаимно просто с an.

В. з. для $n=4$ в поле $\mathbb{Q}(i)$ был установлен К. Гауссом [2], для $n=3$ в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ — Г. Эйзенштейном [3]. Общий В. з. для символа степенного вычета в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ простой степени n был установлен Э. Куммером [4]. Формула Куммера для регулярного простого числа n имеет вид

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \zeta^{l^1(a)\,l^{n-1}(b) - l^2(a)\,l^{n-2}(b) + \ldots - l^{n-1}(a)\,l^1(b)},$$

где a, b — целые числа поля $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$,

$$a \equiv b \equiv 1 \pmod{(\zeta-1)},$$

$$l_i(a) = \left[\frac{d^i \log f(e^u)}{du^i}\right]_{u=0}$$

и $f(t)$ — многочлен степени $n-1$ такой, что

$$a = f(\zeta), \quad f(1) = 1.$$

Следующий этап в изучении общих В. з. связан с работами Д. Гильберта [5], [6], выяснившего их локальный аспект. Д. Гильберт для нек-рых случаев установил В. з. в виде формулы произведения для его символа норменного вычета

$$\prod_{\mathfrak{P}} \left(\frac{a, b}{\mathfrak{P}}\right) = 1.$$

Он подметил также аналогию этой формулы с теоремой о вычетах алгебраич. функций — простые точки $\mathfrak{P}$ с символом норменного вычета $\neq 1$ соответствуют точкам ветвления на римановой поверхности.

Дальнейший прогресс в изучении В. з. связан с именами Ф. Фуртвенглера [7], Т. Такаги [8], Э. Артина [9], Х. Хассе [10]. Наиболее общая форма В. з. была получена И. Р. Шафаревичем [11].

Как и закон взаимности Гаусса, общие В. з. тесно связаны с задачей изучения законов разложения простых дивизоров $\mathfrak{P}$ заданного поля алгебраич. чисел k в его

алгебраич. расширениях K/k с абелевой Галуа группой. В частности, теория полей классов, решающая эту задачу, может быть обоснована (см. [12]), исходя из закона взаимности Шафаревича.

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 1 — Disquisitiones arithmeticae, Gött., 1870; [2] его же, Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio prima et secunda, в кн.: Werke, Bd 2, Gött., 1863, S. 65, 93; [3] Eisenstein G., «J. Math.», 1844, Bd 27; [4] Kummer E., «Ber. K. Akad. Wiss. Berlin», 1850; [5] Hilbert D., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1897, Bd 4, S. 175—546; [6] его же, там же, 1899, Bd 6, № 1, S. 88—94; [7] Furtwängler Ph., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 1—31; 1912, Bd 72, S. 346—86; 1913, Bd 74, S. 413—29; [8] Takagi T., «J. Colloid Science», 1920, v. 41, t. 9; [9] Artin E., «Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.», 1928, Bd 5; [10] Hasse H., «Math. Ann.», 1933, Bd 107, № 5, S. 731—60; [11] Шафаревич И. Р., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3 (25), с. 165; [12] Лапин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 4, с. 335—78; [13] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [14] Фаддеев Д. К., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 131—40.

С. А. Степанов.

ВЗАИМНЫЕ ЯДРА — две функции $K(x, s)$ и $K_1(x, s)$ действительных переменных x, s (или, вообще, точек P, Q евклидова пространства), определенные на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ и удовлетворяющие условию:

$$K_1(x, s)+K(x, s)=$$
$$=\int_a^b K(x, t)\,K_1(t, s)\,dt=\int_a^b K_1(x, t)\,K(t, s)\,dt.$$

Взаимное с $K(x, s)$ ядро $K_1(x, s)$, когда оно существует, является ядром резольвенты интегрального *Фредгольма уравнения*:

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x).$$

А. Б. Бакушинский.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Шрёдингера представлением* и с *Гейзенберга представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. Квантовую систему с учетом взаимодействия между ее частями (в квантовой механике) или составляющими ее различными полями (в квантовой теории поля) можно описать в представлении Шрёдингера с помощью *Шрёдингера уравнения*:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_S(t)}{\partial t}=H\psi_S(t)=(H_0+H_1)\,\psi_S(t). \qquad (1)$$

Предполагается, что полный гамильтониан H разделяется на гамильтониан свободных (невзаимодействующих) частей или полей H_0 и гамильтониан взаимодействия H_1. Гамильтонианы H_0 и H_1 являются некоммутирующими (иначе задача становится тривиальной, так как разбиение гамильтониана H на H_0 и H_1 теряет смысл) функциями операторов, соответствующих различным свободным полям и не зависящих от времени t в представлении Шрёдингера. Унитарное преобразование

$$\psi_S(t)=e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\,\Phi_I(t) \qquad (2)$$

осуществляет переход к В. п., где волновая функция удовлетворяет уравнению:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_I(t)}{\partial t}=H_1(t)\Phi_I(t), \qquad (3)$$

т. е. зависимость $\Phi_I(t)$ от t определяется гамильтонианом взаимодействия в представлении

$$H_1(t)=e^{+i\frac{H_0}{\hbar}t}\,H_1e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}. \qquad (4)$$

При этом среднее значение оператора A в представлении Шрёдингера

$$\overline{A}\equiv\overline{A}_S=\psi_S^*(t)\,A_S\psi_S(t)=\Phi_I^*(t)\,e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\,A_Se^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\,\Phi_I(t) \qquad (5)$$

можно также понимать как среднее значение по волновым функциям $\Phi_I(t)$ от оператора A_I в В. п.

$$A_I(t) = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}. \quad (6)$$

В В. п. операторы, соответствующие физическим динамич. величинам, зависят от времени согласно (6) как операторы в представлении Гейзенберга для свободных полей, а изменение волновых функций с течением времени t определяется эффектами взаимодействия между полями. При описании поведения квантовой системы с течением времени t В. п. позволяет выделить зависимость от гамильтониана свободных полей H_0, к-рую обычно легко определить, и сосредоточить внимание на исследовании уравнений (3) и (4), содержащих всю информацию о взаимодействии между полями. Особенно удобно использовать В. п. в случае, когда H_1 содержит нек-рый малый параметр и соответствующие решения можно искать по теории возмущений в виде рядов по степеням этого малого параметра.

Свойство инвариантности средних значений (5), к-рые должны быть наблюдаемыми и иметь тем самым физич. смысл относительно унитарных преобразований (2) и (6), означает эквивалентность В. п. и представлений Шрёдингера и Гейзенберга. *В. Д. Кукин.*

ВЗВЕШЕННОЕ СРЕДНЕЕ — величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ суть n величин, взятых с весами $p_1, \ldots, p_n$ соответственно.

ВИВИАНИ КРИВАЯ, окно Вивиани, — линия пересечения сферы радиуса R и кругового цилиндра радиуса $R/2$, образующая к-рого проходит через центр сферы. Часть шара, находящаяся внутри цилиндра, наз. телом Вивиани. В. к. названа по имени В. Вивиани (V. Viviani, 17 в.). *Е. В. Шикин.*

ВИД в логике — интуиционистский аналог понятия множества, точно сформулированное условие, выделяющее часть объектов из уже определенной совокупности объектов исследования. Существенно, что условие, задающее В., понимается при этом интуиционистски, так что, напр., двойное отрицание условия не обязательно эквивалентно самому этому условию. Над В. естественным образом определяются операции, аналогичные нек-рым операциям над множествами, такие, как объединение, пересечение и другие, однако в силу интуиционистской специфики понимания (см. *Интуиционизм*) свойства этих интуиционистских операций отнюдь не всегда совпадают со свойствами соответствующих классич. операций. Напр., в интуиционистской теории В. неверно, что для всякого В. дополнение к его дополнению совпадает с самим В.

При построении теории В. обычные парадоксы избегаются с помощью требования, чтобы члены В. были определены независимо от определения самого В. Такие интуиционистские теории, как интуиционистская арифметика, интуиционистский математич. анализ, могут быть построены вообще без употребления понятия «В.», но в более абстрактных областях интуиционистской математики (теория доказательств, семантика, интуиционистский функциональный анализ) разработка теории В. является актуальной задачей.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965. *А. Г. Драгалин.*

ВИЕТА ТЕОРЕМА о корнях — теорема, устанавливающая соотношения между корнями и коэффициентами многочлена. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с коэффициентами из нек-рого поля и старшим коэффициентом 1. Над полем, содержащим все корни $f(x)$

(напр., над полем разложения для $f(x)$), многочлен $f(x)$ разлагается на линейные множители:

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где α_i — корни $f(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$. В. т. устанавливает справедливость соотношений (формулы Виета):

$$a_0=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$
$$a_1=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-2}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$a_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Ф. Виет нашел эту зависимость для всех n, однако с оговоркой на положительность корней (см. [1]); в общем виде В. т. установлена А. Жираром [2].

Лит.: [1] Viète F., Opera mathematica..., Lugduni Batavorum, 1646, p. 123, 158; [2] Girard A., Invention nouvelle en Algèbre..., Amst., 1629.

В. Н. Ремесленников.

ВИЛКОКСОНА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* однородности двух выборок $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$. Элементы выборок предполагают взаимно независимыми с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно; проверяемая гипотеза $F(x)=G(x)$. В. к. основан на *ранговой статистике*

$$W=s(r_1)+\ldots+s(r_m), \qquad (*)$$

где r_j — ранги случайных величин Y_j в общем вариационном ряду X_i и Y_j, а функция $s(r)$, $r=1, \ldots, n+m$, определяется заранее фиксированной подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n+m \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(n+m) \end{pmatrix},$$

где $s(1), \ldots, s(n+m)$ — одна из возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n+m$. Выбор подстановки осуществляется так, чтобы мощность В. к. для заданной альтернативы была наибольшей. Распределение статистики W зависит лишь от объемов выборок и не зависит от выбора подстановки (если справедлива гипотеза однородности). При $n\to\infty$ и $m\to\infty$ случайная величина W распределена асимптотически нормально. Вариант В. к. этого типа предложен впервые Ф. Вилкоксоном (F. Wilcoxon, 1945) для выборок равного объема и был основан на статистике (*) специального вида при $s(r)\equiv r$ (см. *Суммы рангов критерий, Манна — Уитни критерий*). См. также *Ван дер Вардена критерий, Ранговый критерий.*

Лит.: [1] Wilcoxon F., «Biometrics», 1945, v. 1, p. 80—83; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1965; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

А. В. Прохоров.

ВИЛЬСОНА ТЕОРЕМА: для каждого простого числа p число $(p-1)!+1$ делится на p. Теорема впервые сформулирована Э. Варингом (E. Waring, 1770) и принадлежала, по его словам, Дж. Вильсону (J. Wilson), доказал ее Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1771). Из В. т. следует критерий простоты числа: натуральное число $n>1$ тогда и только тогда является простым, когда

$$(n-1)!+1\equiv 0 \pmod n.$$

Практическое использование В. т. для определения простоты числа нецелесообразно из-за быстрого роста факториала.

Лит.: [1] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959; [3] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

Н. И. Климов.

ВИНЕРА ИНТЕГРАЛ — абстрактный интеграл лебеговского типа по множествам бесконечномерного функционального пространства от функционалов, определенных на этих множествах. В. и. введен Н. Винером (N. Wiener) в 20-х гг. 20 в. в связи с вопросами броуновского движения (см. [1], [2]).

Пусть C_0 — векторное пространство непрерывных функций $x(t)$, определенных на [0, 1] и таких, что $x(0)=0$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

Квазиинтервалом этого пространства наз. множество

$$Q=\{x(t)\in C_0,\quad a_i<x(t_i)\leqslant b_i,\ 0=t_0<t_1<\ldots<t_n\leqslant 1\}$$

(a_i и b_i могут равняться, соответственно, $-\infty$ и $+\infty$, но тогда знак $\leqslant$ заменяется на $<$). Примером квазиинтервала может служить все пространство

$$C_0=\{x(t),\ -\infty<x(1)<+\infty\}.$$

Мерой Винера квазиинтервала Q наз. число

$$\mu_W(Q)=\frac{1}{\sqrt{\pi^n\prod_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})}}\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}e^{-L_n}dx_1\ldots dx_n,$$

где

$$L_n=\sum_{j=1}^n\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{t_j-t_{j-1}}$$

и $x_j=x(t_j)$. Эта мера распространяется до σ-аддитивной меры, определенной на борелевском теле множеств, порожденном квазиинтервалами (по-прежнему наз. мерой Винера). Пространство C_0 измеримо в смысле меры Винера и $\mu_W(C_0)=1$.

Пусть $F(x)$ — функционал, определенный на C_0 и измеримый относительно меры μ_W. Интеграл

$$\int_{C_0}F(x)\,d\mu_W$$

лебеговского типа наз. интегралом Винера, или интегралом по мере Винера от функционала $F(x)$. Если $E\subset C_0$ измеримо, то

$$\int_E F(x)\,d\mu_W=\int_{C_0}F(x)\,\chi_E(x)\,d\mu_W,$$

где $\chi_E(x)$ — характеристич. функция множества E.

В. и. обладает рядом свойств обычного интеграла Лебега. В частности, ограниченный и измеримый на множестве E функционал интегрируем по мере Винера на этом множестве и если, кроме того, функционал $F(x)$ непрерывен и неотрицателен, то

$$\int_{C_0}F(x)\,d\mu_W=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi^n\prod_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{F_n(x_1,\ldots,x_n)}{e^{L_n}}\,dx_1\ldots dx_n,$$

где $F_n(x_1,\ldots,x_n)$ — значение функционала F на ломаной с вершинами в $(t_i,\ x_i=x(t_i))$.

Вычисление В. и. даже для сравнительно простых функционалов представляет значительную трудность. Иногда эту задачу удается свести к нахождению решения некоторого дифференциального уравнения (см. [1]).

Существует метод приближенного вычисления В. и. путем аппроксимации его конечномерными *Стилтьеса интегралами* высокой кратности.

Лит.: [1] Ковальчик И. М., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 1, с. 97—134; [2] Шилов Г. Е., там же, в. 2, с. 99—120.

В. И. Соболев.

ВИНЕРА МЕРА, винеровская мера,— *вероятностная мера* μ_W, определенная на пространстве $C[0,\ 1]$ непрерывных числовых функций $x(t)$, заданных на отрезке [0, 1], следующим образом. Пусть $0<t_1<\ldots<t_n\leqslant 1$ — произвольный набор точек из [0, 1], $A_1,\ \ldots,\ A_n$ — борелевские множества на прямой. Пусть $C(t_1,\ \ldots,\ t_n,\ A_1,\ \ldots,\ A_n)$ обозначает множество функций $x(t)$ из $C[0,\ 1]$, для к-рых $x(t_k)\in A_k$, $k=1,\ \ldots,\ n$.

Тогда

$$\mu_W(C(t_1, \ldots, t_n; A_1, \ldots, A_n)) =$$
$$= \int_{A_1} p(t_1, x_1)\, dx_1 \int_{A_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1)\, dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{A_n} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})\, dx_n, \qquad (*)$$

где

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}.$$

С помощью теоремы о продолжении меры можно, исходя из равенства (*), определить значение меры μ_W на всех борелевских множествах пространства $C[0, 1]$.

А. В. Скороход.

ВИНЕРА ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА: если $x \in L^1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье функции x не обращается в нуль, а y — функция из $L^\infty(-\infty, \infty)$ такая, что свертка $(x*y)$ стремится к нулю при $t \to \infty$, то для любой $z \in L^1(-\infty, \infty)$ свертка $(z*y)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Установлена Н. Винером [1]. Эта теорема обобщена на случай любой коммутативной локально компактной некомпактной группы G: если x — суммируемая относительно *Хаара меры* функция на G и преобразование Фурье функции x не обращается в нуль на группе характеров $\hat{G}$ группы G, а функция y принадлежит пространству $L^\infty(G)$ и свертка $(x*y)$ стремится к нулю на бесконечности на G, то свертка $(z*y)$ стремится к нулю на бесконечности на G для всех суммируемых функций на G.

Эта теорема основана на регулярности *групповой алгебры* коммутативной локально компактной группы и на возможности спектрального синтеза в групповых алгебрах для замкнутых идеалов, принадлежащих лишь конечному числу регулярных максимальных идеалов [3].

Лит.: [1] Wiener N., «Ann. Math.», 1932, v. 33, p. 1—100; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [3] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972.

А. И. Штерн.

ВИНЕРА — ХОПФА МЕТОД — метод решения функционального уравнения вида:

$$A(\lambda)\Phi_+(\lambda) + B(\lambda)\Phi_-(\lambda) + C(\lambda) = 0, \qquad (1)$$

где $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ — заданные функции комплексного переменного λ, аналитические в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$, причем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ отличны от нуля в этой полосе; функции $\Phi_+(\lambda)$ и $\Phi_-(\lambda)$ — неизвестные функции комплексного переменного λ, стремящиеся к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и подлежащие определению, причем $\Phi_+(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$, а $\Phi_-(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$. Уравнение (1) выполняется в общей полосе аналитичности $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$.

Основой В.—Х. м. являются следующие две теоремы.

1) Функция $F(\lambda)$, аналитическая в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ и равномерно стремящаяся к нулю при $|\lambda| \to \infty$, представима в этой полосе в виде суммы:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) + F_-(\lambda),$$

где $F_+(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$, а $F_-(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$.

2) Функция $F(\lambda)$, аналитическая и отличная от нуля в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ и равномерно стремящаяся в этой полосе к единице при $|\lambda| \to \infty$, представима в данной полосе в виде произведения:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) \cdot F_-(\lambda), \qquad (2)$$

где $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$ аналитичны и отличны от нуля, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ и $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$. Представление (2) часто наз. факторизацией функции $F(\lambda)$.

Основная идея В.—Х. м. заключается в возможности факторизации функции $L(\lambda)=A(\lambda)/B(\lambda)$, т. е. в возможности представления

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}=\frac{L_+(\lambda)}{L_-(\lambda)}. \qquad (3)$$

Используя (3), уравнение (1) можно переписать в виде:

$$L_+(\lambda)\,\Phi_+(\lambda)-L_-(\lambda)\,\Phi_-(\lambda)+L_-(\lambda)\,\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=0.$$

Поскольку $L_-(\lambda)C(\lambda)/B(\lambda)$ аналитична в полосе, то

$$L_-(\lambda)\,\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=D_+(\lambda)+D_-(\lambda). \qquad (4)$$

Используя (4), получают окончательно уравнение (1) в виде:

$$L_+\Phi_++D_+=-D_--L_-\Phi_-. \qquad (5)$$

Левая часть выражения (5) представляет собой функцию, аналитическую в $\operatorname{Im}\lambda>\tau_-$, а правая функцию, аналитическую в $\operatorname{Im}\lambda<\tau_+$. Так как они имеют общую полосу аналитичности, где выполняется условие (5), то существует единственная целая функция $P(\lambda)$, совпадающая, соответственно, с левой и правой частями (5) в областях их аналитичности. Отсюда

$$\Phi_+(\lambda)=\frac{P(\lambda)-D_+(\lambda)}{L_+(\lambda)},\quad \Phi_-(\lambda)=\frac{-P(\lambda)-D_-(\lambda)}{L_-(\lambda)},$$

т. е. решение уравнения (1) определено с точностью до целой функции. Если степень роста функций $L(\lambda)$ и $D(\lambda)$ ограничена на бесконечности, то $P(\lambda)$ будет многочленом. Тогда искомые функции определяются с точностью до постоянных, к-рые вычисляются из дополнительных условий.

В. - Х. м. был разработан в [1] для решения интегральных уравнений специального вида (см. *Винера — Хопфа уравнение*). В дальнейшем он нашел широкое применение в различных задачах математич. физики (см. также [2]).

Лит.: [1] Wiener N., Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, «Sitz. Akad. Wiss.», B., 1931; [2] Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1962. *В. И. Дмитриев.*

ВИНЕРА — ХОПФА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$u(x)-\int_0^\infty k(x-s)\,u(s)\,ds=f(x),\quad 0\leqslant x<\infty. \qquad (1)$$

Уравнения такого типа часто возникают в задачах математич. физики, напр. в теории переноса излучения (проблема Милна), в теории дифракции (дифракция на полуплоскости, задача береговой рефракции).

Впервые исследования уравнения (1) были проведены в работах [1] и [2], где был развит метод факторизации (см. *Винера—Хопфа метод*). Именно идея факторизации явилась решающей для построения теории интегральных уравнений вида (1). В.—Х. у. в предположении четности и экспоненциального убывания ядра $k(x)$ рассматривались в [3].

Формальная схема решения В. - Х. у. состоит в следующем. Пусть

$$v(x)=\begin{cases}u(x) & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

$$n(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ -\int_0^x k(x-s)\,u(s)\,ds & \text{при } x<0,\end{cases}$$

тогда уравнение (1) можно записать на всей бесконечной прямой:

$$v(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)\,v(x)\,ds=f(x)+n(x),\quad -\infty<x<\infty. \qquad (2)$$

Если выполнены условия, при к-рых существует пре-

образование Фурье всех функций, входящих в уравнение (2):

$$V(\lambda)=\int_0^\infty u(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^\infty k(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$N(\lambda)=\int_{-\infty}^0 n(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

то с помощью преобразования Фурье уравнение (2) сводится к функциональному уравнению

$$[1-K(\lambda)]V(\lambda)=F(\lambda)+N(\lambda), \qquad (3)$$

где $V(\lambda)$ и $N(\lambda)$ — неизвестные функции. Метод Винера — Хопфа позволяет решить уравнение (3) для определенного класса функций. При этом обязательно должно выполняться условие: $1-K(\lambda)\neq 0$. Для несимметричного ядра в теории уравнения (1) особую роль играет индекс уравнения:

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d_\lambda[1-K(\lambda)]. \qquad (4)$$

Если $K(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ и $1-K(\lambda)\neq 0$, то: при $\nu=0$ неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение; при $\nu>0$ однородное уравнение (1) имеет ν линейно независимых решений; при $\nu<0$ неоднородное уравнение (1) либо не имеет решения, либо имеет единственное решение при условии:

$$\int_0^\infty f(x)\,\psi_k(x)\,dx=0,\ \ k=0,\ 1,\ \ldots,\ |\nu|-1,$$

где $\psi_k(x)$ — линейно независимые решения транспонированного однородного уравнения (1)

$$\psi(x)-\int_0^\infty k(x-s)\,\psi(s)\,ds=0.$$

Лит.: [1] Wiener N., Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, «Sitz. Akad. Wiss.», B., 1931; [2] Hopf E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Camb., 1934; [3] Фок В. А., «Матем. сб.», 1944, т. 14, № 1—2, с. 3—50; [4] Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1962. *В. И. Дмитриев.*

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС — однородный *гауссовский процесс* $X(t)$ с независимыми приращениями. В. п. служит одной из математич. моделей для процесса броуновского движения. Простым преобразованием В. п. может быть превращен в «стандартный» В. п. $X(t)$, $t\geqslant 0$, для к-рого

$$X(0)=0,\ \mathsf{E}(X(t)-X(s))=0,$$
$$\mathsf{D}[X(t)-X(s)]=t-s,\ \ s\leqslant t;$$

при таких средних значениях и дисперсиях приращений это единственный непрерывный с вероятностью 1 процесс с независимыми приращениями. Ниже под В. п. будет пониматься именно этот процесс.

В. п. $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, определяется также как гауссовский случайный процесс с нулевым математич. ожиданием и корреляционной функцией

$$B(s,\ t)=\min(s,\ t).$$

В. п. $X=X(t)$, $t\geqslant 0$, может быть определен как однородный *марковский процесс* с переходной функцией

$$P(t,\ x,\ \Gamma)=\int_\Gamma p(t,\ x,\ y)\,dy,$$

где переходная плотность $p(t,\ x,\ y)$ есть фундаментальное решение параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

и описывается формулой

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}.$$

Переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ инвариантна относительно преобразований сдвига в фазовом пространстве:

$$P(t, x+y, \Gamma) = P(t, x, \Gamma - y),$$

где $\Gamma - y$ обозначает множество $\{z : z+y \in \Gamma\}$.

В. п. является непрерывным аналогом *случайного блуждания* частицы, к-рая в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$ (кратные Δt) в результате случайного воздействия каждый раз независимо от предшествующих обстоятельств смещается на величину $\Delta X(t)$ ($\mathsf{E}\Delta X(t) = 0$, $\mathsf{D}\Delta X(t) = \Delta t$); точнее, если при $\Delta t = 1/n$

$$X(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta X\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - m)\Delta X\left(\frac{m}{n}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

— случайная траектория движения такой частицы на отрезке $[0, 1]$ (здесь $\Delta t = 1/n$, $m = [nt]$ — целая часть nt, $X(t) = nt\Delta X(0)$ при $0 \leqslant t < 1/n$), а P_n — соответствующее распределение вероятностей в пространстве непрерывных функций $x - x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то распределение вероятностей P траектории В. п. $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является предельным (в смысле слабой сходимости) для распределений P_n при $n \to \infty$: $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$.

Как функция со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ всех случайных величин X, $\mathsf{E}X^2 < \infty$, в к-ром скалярное произведение определено формулой

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \mathsf{E}X_1X_2,$$

В. п. $X = X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, допускает следующее каноническое представление:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \varphi_k(t),$$

где z_k — независимые гауссовские величины:

$$\mathsf{E}z_k = 0, \ \mathsf{D}z_k = \frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^2},$$

$$\varphi_k(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\, t\right], \ k = 0, 1, \ldots,$$

— собственные функции оператора B, определенного формулой:

$$B\varphi(t) = \int_0^1 B(s, t)\, \varphi(s)\, ds$$

в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ всех интегрируемых с квадратом (относительно лебеговской меры) функций $\varphi = \varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Для почти всех траекторий В. п. имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{h \to \infty} \frac{X(h)}{\sqrt{2h \ln \ln \frac{1}{h}}} = 1, \ X(0) = 0,$$

— закон повторного логарифма;

$$\lim_{h \to +0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta - h} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2h \ln \frac{\delta}{h}}} = 1,$$

что характеризует модуль непрерывности на отрезке $[0, h]$;

$$\lim_{h \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta X(kh)|^2 = \delta,$$

$$h = \delta/n, \ \Delta X(t) = X(t+h) - X(t).$$

В применении к В. п. вида $X_1(t) = tX\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 \leqslant t < \infty$, закон повторного логарифма записывается в форме:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1.$$

Характер смещения броуновской частицы за конечное время t может быть описан с помощью распределения

вероятностей максимума $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$:

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)\geqslant x\right\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty e^{-u^2/2t}\,du,$$

$0\leqslant x<\infty$, t фиксировано, $0\leqslant t<\infty$, а также с помощью распределения времени τ первого достижения броуновской частицей фиксированной точки $x>0$:

$$\mathsf{P}\{\tau_x\geqslant t\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2}\,du,$$

$0\leqslant t<\infty$, x фиксировано, $0\leqslant x<\infty$ (закономерности В. п. остаются без изменения при преобразовании фазового пространства $x\to -x$). Совместное распределение точки максимума τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, и самого максимума $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$ имеет плотность вероятности

$$p(s,x)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\,\frac{x}{s}\,e^{-x^2/2s},$$
$$0\leqslant s\leqslant t,\ 0\leqslant x<\infty,$$

а отдельно взятая точка τ (с вероятностью 1 имеется лишь один максимум на отрезке $0\leqslant s\leqslant t$) распределена по *арксинуса закону*:

$$\mathsf{P}\{\tau\leqslant s\}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}},\ 0\leqslant s\leqslant t,$$

с плотностью вероятности

$$p(s)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}},\ 0\leqslant s\leqslant t.$$

Из приведенных выше формул легко выводятся следующие характерные свойства В. п. Броуновская траектория является нигде не дифференцируемой, причем при выходе из к.-л. точки x эта траектория за сколь угодно малое время δ с вероятностью 1 бесконечно много раз пересекает «уровень» x (возвращаясь в исходную точку); с течением времени t броуновская траектория обходит все точки x, точнее $\tau_x<\infty$, с вероятностью 1 (при этом вероятное значение τ_x для больших x имеет порядок x^2); рассматриваемая на фиксированном отрезке $[0,\ t]$, эта траектория имеет тенденцию достигать экстремальных значений вблизи концевых точек $s=0$ и $s=t$.

Для В. п. как марковского однородного процесса существует инвариантная мера $Q(dx)$:

$$Q(A)\equiv\int Q(dx)\,P(t,x,A),$$

к-рая в силу упомянутого выше свойства инвариантности переходной функции $P(t,\ x,\ A)$ совпадает с лебеговской мерой на прямой: $Q(dx)=dx$. Время $T(A)$, проведенное броуновской частицей в множестве A за промежуток от 0 до T, таково, что с вероятностью 1

$$\frac{T(A_1)}{T(A_2)}\longrightarrow\frac{Q(A_1)}{Q(A_2)}\ \text{ при }\ T\longrightarrow\infty$$

для любых ограниченных борелевских множеств A_1 и A_2.

Аналогом В. п. $X=X(t)$ для векторного параметра $t=(t_1,\ldots,t_n)$ являются случайные поля, введенные П. Леви (P. Lévy, см. [3]).

Лит.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Lévy P., Prossesus stochastiques et mouvément brownien, 2 éd., P., 1965; [4] Павлов В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 4.

Ю. А. Розанов.

ВИНОГРАДОВА ГИПОТЕЗЫ — ряд гипотез относительно центральных проблем аналитической теории чисел, высказанных в разное время И. М. Виноградовым [1] — [3].

Гипотезы о распределении степенных вычетов и невычетов. Одной из самых старых и знаменитых из них является гипотеза о том,

что расстояние между соседними квадратичными невычетами $\mathrm{mod}\ p$ есть величина порядка p^{ε}.

Гипотезы об оценках тригонометрических сумм. Одной из них является гипотеза о том, что

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant P^{1-\rho(n)},$$

где

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x, \quad \alpha_r=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,\ q)=1,$$

$|\theta|\leqslant 1$, $P^{0,25}<q<P^{r-0,25}$, r — одно из чисел $2,\ldots,n$ и $\rho(n)$ имеет порядок $n^{-1-\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве решений диофантовых уравнений. Одной из них является гипотеза о том, что число решений системы уравнений

$$x_1^{n_1}+\ldots+x_r^{n_1}=y_1^{n_1}+\ldots+y_r^{n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n_m}+\ldots+x_r^{n_m}=y_1^{n_m}+\ldots+y_r^{n_m},$$

$1\leqslant x_i,\ y_i<P$, $i=1,\ldots,r$, $1\leqslant n_1<\ldots<n_m=n$, при постоянном n будет величиною порядка

$$p^{2r-k},\ k=n_1+\ldots+n_m,$$

при всех $r\geqslant r_0$, где r_0 имеет порядок $k^{1+\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве целых точек в областях на плоскости и пространстве. Одной из них является гипотеза о том, что число целых точек в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ выражается формулой

$$\frac{4}{3}\pi R^3+O\left(R^{1+\varepsilon}\right).$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 3—13; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Избранные труды, М., 1952. *А. А. Карацуба.*

тригонометрич. суммы, к-рая состоит в следующем. Пусть дана сумма

$$W=\sum_u\sum_v \psi_1(u)\,\psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv},$$

где переменные суммирования u и v пробегают значения целых чисел (не обязательно последовательные) в количестве, соответственно, U и V, $A<u<2A$, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ — произвольные комплекснозначные функции. Тогда

$$|W|^2\leqslant B\sum_{A<u\leqslant 2A}\left|\sum_v \psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv}\right|^2,$$

где u пробегает последовательные целые числа интервала $(A,\ 2A]$ (сглаживание),

$$B=\sum_u|\psi_1(u)|^2.$$

В. м. оценок сумм Вейля. Оцениваются суммы

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, причем $\alpha_{n+1},\ldots,\ \alpha_1$ — действительные числа. При $Y=[P^{1-1/4n^2}]$ будет

$$S=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i f(x+y)}+2\vartheta Y=$$
$$=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i v}+2\vartheta Y=Y^{-1}W+2\vartheta Y,$$

где $\mathfrak{A}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+A_n(y)x^n+\ldots+A_1(y)+A_0(y)$, а буквой W обозначена двойная сумма по x и y, и $|\theta|\leqslant 1$. Далее, обозначив $\mathfrak{B}$ выражение

$$\alpha_{n+1}x^{n+1}+(A_n(y)+B_n)\,x^n+\ldots+(A_1(y)+B_1)\,x$$

$$|W|\leqslant\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|+Y_n P^{1-1/4n^2},$$

при любых $B_n,\ldots,B_1$ из области

$$|B_n|\leqslant L_n=P^{-n-1/4n^2},$$
$$|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1}=P^{-n+1-1/4n^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|B_1|\leqslant L_1=P^{-1-1/4n^2}.$$

При любом целом $k\geqslant 1$:

$$|W|^{2k}\leqslant 2^k Y^{2k-1}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\int_{|B_n|\leqslant L_n}\cdots\int_{|B_1|\leqslant L_1}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|dB_n\ldots dB_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k}\leqslant$$
$$\leqslant 2^k Y^{2k-1}G(Y)\int_0^1\ldots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|^{2k}d\gamma_n\ldots d\gamma_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k},$$

где $\mathfrak{C}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\gamma_n x^n+\ldots+\gamma_1 x$, а $G(Y)$ — максимальное число совпадений точек с координатами

$$\{A_n(y)+B_n\},\ \{A_n(y)+B_{n-1}\},\ \ldots,\ \{A_1(y)+B_1\},$$

причем фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а y меняется в пределах от 1 до Y, и

$$|B_n|\leqslant L_n,\ |B_{n-1}|\leqslant L_{n-1},\ \ldots,\ |B_1|\leqslant L_1.$$

При определенных арифметич. свойствах коэффициентов $\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_2$ многочлена $f(x)$ для величины $G(Y)$ можно получить оценку $G(Y)\leqslant Y^{0,9}$. Кроме того, последний интеграл не превосходит числа решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=y_1^n+y_2^n+\ldots+y_k^n,\\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_k^{n-1}=y_1^{n-1}+y_2^{n-1}+\ldots+y_k^{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \end{cases}$$
$$1\leqslant x_1,\ \ldots,\ y_k\leqslant P.$$

Для оценки числа решений этой системы используется *Виноградова теорема* о среднем, к-рая является основной в В. м. оценок сумм Вейля (см. *Виноградова оценки*).

В. м. оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Оцениваются суммы

$$S'=\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i f(p)},$$

ВИНОГРАДОВА ИНТЕГРАЛ — кратный интеграл вида

$$\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1|S|^{2k}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

где

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\left(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n\right)},$$

являющийся средним значением степени $2k$ модуля тригонометрич. суммы. Теорема Виноградова о величине этого интеграла — теорема о среднем — лежит в основе оценок сумм Вейля (см. *Виноградова метод*, *Виноградова теорема* о среднем). *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА МЕТОД — новый метод оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*). В. м. позволяет получить очень точные оценки для широкого класса тригонометрич. сумм, в к-рых переменная суммирования пробегает значения последовательных целых чисел, последовательных простых чисел и т. д., что, в свою очередь, дает возможность решить целый ряд классич. проблем аналитич. теории чисел (распределение дробных долей широкого класса функций, распределение простых чисел в натуральном ряде, аддитивные проблемы, частными случаями к-рых являются проблемы Варинга и Гольдбаха, и др.).

Различают две части В. м.: метод оценок *Вейля сумм* и метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами. Обе части метода используют основную идею И. М. Виноградова — идею сглаживания двойной три-

что расстояние между соседними квадратичными невычетами $\bmod p$ есть величина порядка p^{ε}.

Гипотезы об оценках тригонометрических сумм. Одной из них является гипотеза о том, что

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant P^{1-\rho(n)},$$

где

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x, \quad \alpha_r=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1,$$

$|\theta|\leqslant 1$, $P^{0,25}<q<P^{r-0,25}$, r — одно из чисел $2,\ldots, n$ и $\rho(n)$ имеет порядок $n^{-1-\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве решений диофантовых уравнений. Одной из них является гипотеза о том, что число решений системы уравнений

$$x_1^{n_1}+\ldots+x_r^{n_1}=y_1^{n_1}+\ldots+y_r^{n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n_m}+\ldots+x_r^{n_m}=y_1^{n_m}+\ldots+y_r^{n_m},$$

$1\leqslant x_i, y_i<P$, $i=1,\ldots, r$, $1\leqslant n_1<\ldots<n_m=n$, при постоянном n будет величиною порядка

$$p^{2r-k}, \quad k=n_1+\ldots+n_m,$$

при всех $r\geqslant r_0$, где r_0 имеет порядок $k^{1+\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве целых точек в областях на плоскости и пространстве. Одной из них является гипотеза о том, что число целых точек в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ выражается формулой

$$\frac{4}{3}\pi R^3+O(R^{1+\varepsilon}).$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 3—13; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Избранные труды, М., 1952. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ИНТЕГРАЛ — кратный интеграл вида

$$\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 |S|^{2k}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

где

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n)},$$

являющийся средним значением степени $2k$ модуля тригонометрич. суммы. Теорема Виноградова о величине этого интеграла — теорема о среднем — лежит в основе оценок сумм Вейля (см. *Виноградова метод*, *Виноградова теорема* о среднем). *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА МЕТОД — новый метод оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*). В. м. позволяет получить очень точные оценки для широкого класса тригонометрич. сумм, в к-рых переменная суммирования пробегает значения последовательных целых чисел, последовательных простых чисел и т. д., что, в свою очередь, дает возможность решить целый ряд классич. проблем аналитич. теории чисел (распределение дробных долей широкого класса функций, распределение простых чисел в натуральном ряде, аддитивные проблемы, частными случаями к-рых являются проблемы Варинга и Гольдбаха, и др.).

Различают две части В. м.: метод оценок *Вейля сумм* и метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами. Обе части метода используют основную идею И. М. Виноградова — идею сглаживания двойной тригонометрич. суммы, к-рая состоит в следующем. Пусть дана сумма

$$W=\sum_u\sum_v \psi_1(u)\,\psi_2(v)\, e^{2\pi i\alpha uv},$$

где переменные суммирования u и v пробегают значения целых чисел (не обязательно последовательные) в количестве, соответственно, U и V, $A<u<2A$, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ — произвольные комплекснозначные функции. Тогда

$$|W|^2\leqslant B\sum_{A<u\leqslant 2A}\left|\sum_v \psi_2(v)\, e^{2\pi i\alpha uv}\right|^2,$$

где u пробегает последовательные целые числа интервала $(A, 2A]$ (сглаживание),

$$B=\sum_u |\psi_1(u)|^2.$$

В. м. оценок сумм Вейля. Оцениваются суммы

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, причем $\alpha_{n+1},\ldots, \alpha_1$ — действительные числа. При $Y=[P^{1-1/4n^2}]$ будет

$$S=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i f(x+y)}+2\vartheta Y=$$
$$=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i v}+2\vartheta Y=Y^{-1}W+2\vartheta Y,$$

где $\mathfrak{A}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+A_n(y)x^n+\ldots+A_1(y)+A_0(y)$, а буквой W обозначена двойная сумма по x и y, и $|\theta|\leqslant 1$. Далее, обозначив $\mathfrak{B}$ выражение

$$\alpha_{n+1}x^{n+1}+(A_n(y)+B_n)\,x^n+\ldots+(A_1(y)+B_1)\,x$$

$$|W|\leqslant\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|+Y_n P^{1-1/4n^2},$$

при любых $B_n,\ldots, B_1$ из области

$$|B_n|\leqslant L_n=P^{-n-1/4n^2},$$
$$|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1}=P^{-n+1-1/4n^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|B_1|\leqslant L_1=P^{-1-1/4n^2}.$$

При любом целом $k\geqslant 1$:

$$|W|^{2k}\leqslant 2^k Y^{2k-1}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\int_{|B_n|\leqslant L_n}\ldots\int_{|B_1|\leqslant L_1}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right| dB_n\ldots dB_1+2^k(Y_n P^{1-1/4n^2})^{2k}\leqslant$$
$$\leqslant 2^k Y^{2k-1} G(Y)\int_0^1\ldots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|^{2k} d\gamma_n\ldots d\gamma_1+2^k(Y_n P^{1-1/4n^2})^{2k},$$

где $\mathfrak{C}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\gamma_n x^n+\ldots+\gamma_1 x$, а $G(Y)$ — максимальное число совпадений точек с координатами

$$\{A_n(y)+B_n\},\ \{A_n(y)+B_{n-1}\},\ \ldots,\ \{A_1(y)+B_1\},$$

причем фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а y меняется в пределах от 1 до Y, и

$$|B_n|\leqslant L_n,\ |B_{n-1}|\leqslant L_{n-1},\ \ldots,\ |B_1|\leqslant L_1.$$

При определенных арифметич. свойствах коэффициентов $\alpha_{n+1},\ldots, \alpha_2$ многочлена $f(x)$ для величины $G(Y)$ можно получить оценку $G(Y)\leqslant Y^{0,9}$. Кроме того, последний интеграл не превосходит числа решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=y_1^n+y_2^n+\ldots+y_k^n,\\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_k^{n-1}=y_1^{n-1}+y_2^{n-1}+\ldots+y_k^{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \end{cases}$$
$$1\leqslant x_1,\ \ldots,\ y_k\leqslant P.$$

Для оценки числа решений этой системы используется *Виноградова теорема* о среднем, к-рая является основной в В. м. оценок сумм Вейля (см. *Виноградова оценки*).

В. м. оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Оцениваются суммы

$$S'=\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i f(p)},$$

где $f(p)=\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p, \alpha_n, \ldots, \alpha_1$ – действительные числа. Пусть $D=\Pi_{p<H}$, где $H\leqslant p^{0,25}$. С помощью известного свойства функции Мебиуса S' сводится к небольшому числу сумм (это число не превосходит $\frac{\ln P}{\ln H}$) вида

$$W_S=\sum_{d_1\backslash D}\ldots\sum_{d_s\backslash D}\sum_{m_1>0}\ldots\sum_{m_s>0}\mu(d_1)\ldots\mu(d_s)\times$$
$$\times e^{2\pi i f(m_1\ldots m_s d_1\ldots d_s)},$$

где $m_1\ldots m_s d_1\ldots d_s\leqslant P$. В кратной сумме W_s переменные $m_1,\ldots, m_s$ пробегают сплошные интервалы суммирования. Те суммы W_s, в к-рых интервал суммирования хотя бы по одной переменной m длинный, оцениваются с помощью В. м. оценок сумм Вейля. В противном случае длинным будет интервал суммирования по одной из переменных суммирования d, $d\backslash D$. Тогда применяется следующая лемма И. М. Виноградова, к-рая вместе с идеей сглаживания двойных сумм является основной в В. м. оценок тригонометрич. сумм с простыми числами.

Лемма. Пусть $0\leqslant\sigma\leqslant 1/3$ и D – произведение всех простых чисел, не превосходящих x^σ, тогда все делители d числа D, не превосходящие x, можно распределить среди менее чем x^ε совокупностей со следующими свойствами:

а) числа d, принадлежащие одной совокупности, обладают одним и тем же числом β простых сомножителей и, следовательно, одним и тем же значением $\mu(d)=(-1)^\beta$;

б) одна из совокупностей, к-рая наз. простейшей, состоит из одного числа $d=1$. Для каждой из остальных совокупностей имеется свое φ такое, что все числа этой совокупности удовлетворяют условию

$$\varphi<d\leqslant\varphi^{1+\varepsilon_1},\ \varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon);$$

в) для всякой совокупности, отличной от простейшей, при любом U с условием $0\leqslant U\leqslant\varphi$ существуют две совокупности чисел d: числа d' и d'' с отвечающими им числами φ' и φ'', к-рые удовлетворяют условиям

$$U<\varphi'\leqslant Ux^\sigma,\quad \varphi'\varphi''=\varphi,$$

такие, что при нек-ром натуральном B все числа выбранной совокупности, каждое B раз получим, если из всех произведений $d'd''$ выберем лишь удовлетворяющие условию $(d',\ d'')=1$.

Применяя пункт в) этой леммы с надлежащим значением U, получают

$$W_s=\sum_u\sum_v\psi_1(u)\,\psi_2(v)\,e^{2\pi i f(uv)},$$

где переменные u и v пробегают длинные интервалы суммирования. Из этой леммы может быть выведена оценка И. М. Виноградова тригонометрич. суммы с простыми числами (см. *Виноградова оценки*).

Если $F(x)$ в определенном смысле хорошо приближается многочленом, то В. м. позволяет оценивать суммы вида

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i F(x)},\ S'=\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i F(p)}$$

(см. [2], [4]). Кроме того, В. м. позволяет оценивать суммы вида

$$\sum_{p\leqslant P}\chi(p+a),\ \sum_{1\leqslant n\leqslant N}\mu(n)\,\chi(n+a)$$

и т. п. Это дает возможность решать проблемы распределения степенных вычетов, первообразных корней и др. в последовательностях вида $p+a$, где $a>0$ – фиксированное целое число, а p принимает значения последовательных простых чисел (см. [3], [5]). О применениях В. м. в аналитич. теории чисел см. [1], [2], [4], [5], [6].

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] его же, Избранные труды, М., 1952; [3] его же, «Изв. АН СССР, Сер. матем.», т. 30, № 3, 1966, с. 481—96; [4] Карацуба А. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 241—55; 1973,

т. 122, с. 257—61; [5] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [6] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1974. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ОЦЕНКИ — название нескольких теорем И. М. Виноградова. Наиболее известными из них являются следующие.

а) В. о. сумм характеров (см. *Дирихле характер*). Если χ — неглавный характер mod D, то при $N>0$, $M\geqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+M}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{D}\log D.$$

б) В. о. сумм Вейля (см. *Вейля сумма*). Пусть n — постоянное число с условием $n\geqslant 12$ и пусть $\nu=1/n$. Пусть далее точки n-мерного пространства разбиты на два класса — точки класса 1 и точки класса 2. Точкой класса 1 наз. точка

$$\left(\frac{a_n}{q_n}+z_n,\ \ldots,\ \frac{a_1}{q_1}+z_1\right),$$

где первые слагаемые — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q, не превосходящее p^{ν}, а вторые слагаемые удовлетворяют условию

$$|z_s|\leqslant p^{-s+\nu}.$$

Точкой класса 2 наз. точка, не являющаяся точкой класса 1. Тогда, если положить

$$\rho=\frac{1}{8n^2(\log n+0{,}5\log\log n+1{,}3)},$$

то для точек класса 2 при $m\leqslant P^{2\rho}$ будет выполняться

$$|T_m|=\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x)}\right|\ll P^{1-\rho}.$$

Если же положить

$$\delta_s=z_s p^s,\ \delta_0=\max(|\delta_n|,\ \ldots,\ |\delta_1|),$$

то для точек класса 1 при $m\leqslant P^{4\nu^2}$ будет выполняться

$$|T_m|\ll P(m,Q)^{\nu}Q^{-\nu+\varepsilon}$$

или также

$$|T_m|\ll PQ^{-\nu+\varepsilon}\delta_0^{-\nu},\ \text{если}\ \delta_0\geqslant 1.$$

в) В. о. тригонометрических сумм с простыми числами. Пусть $\varepsilon\leqslant 0{,}001$. И пусть, в обозначениях теоремы б), точки n-мерного пространства разбиты на классы следующим образом.

К классу $1a$ отнесены точки, удовлетворяющие условиям

$$Q\leqslant e^{u\varepsilon},\ \delta_0\leqslant e^{u\varepsilon},\ \text{где}\ u=\log P.$$

К классу $1b$ отнесены точки, не являющиеся точками класса $1a$ и удовлетворяющие условиям

$$Q\leqslant P^{0{,}2\nu},\ \delta_0\leqslant P^{\nu}.$$

Наконец, к классу 2 отнесены все остальные точки.

Если положить для точек класса $1a$

$$\Delta=u^{9\varepsilon}Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon'},\ \mu=(m,Q)^{0{,}5\nu},$$

или также

$$\Delta=u^{9\varepsilon}\delta_0^{-0{,}5\nu},\ \mu=m^{-0{,}5\nu},\ \text{если}\ \delta_0\geqslant 1;$$

для точек класса $1b$, взяв $\varepsilon=2\varepsilon'$, положить

$$\Delta=Q^{-0{,}5+\varepsilon_3},\ \mu=(m,Q)^{0{,}5\nu},\ \text{если}\ Q>e^{u\varepsilon},$$

$$\Delta=Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon_3}\delta_0^{-0{,}5\nu+\varepsilon_3},\ \mu=1,\ \text{если}\ \delta_0>e^{u\varepsilon}$$

(при $Q>e^{u\varepsilon}$, $\delta_0>e^{u\varepsilon}$ можно брать любую из указанных пар значений Δ и μ); и, наконец, для точек класса 2 положить

$$\Delta=P^{-\rho_1},\ \rho_1=\frac{1}{17n^2(2\log n+\log\log n+2{,}9)},\ \mu=1,$$

то при $m\leqslant\Lambda^{-2}$ всегда будет выполняться

$$\left|\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p)}\right|\ll\frac{P}{u}\Delta\mu.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ТЕОРЕМА о среднем — теорема об оценке сверху величины *Виноградова интеграла*:

$$J_b = J_{b,n}(P) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \right|^{2b} d\alpha_n \ldots d\alpha_1.$$

J_b среднее значение тригонометрич. суммы. Формулируется следующим образом. Если при целом неотрицательном t положить

$$D_t = (20n)^{\frac{n(n+1)}{2} t}, \quad b_t = nt \left[\frac{n(n+1)}{4} + 1 \right],$$

то при $l > 0$ и целом $b \geqslant b_l$ будет выполняться

$$J_b = J_{b,n}(P) < D_l P^{2b - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l}.$$

Оценка J_b, даваемая В. т., предельно точна. В. т. является основной в *Виноградова методе* оценок *Вейля сумм*. Кроме того, из нее был получен целый ряд результатов, близких к наилучшим, в классич. проблемах теории чисел (см. *Варинга проблема*, *Гильберта — Камке проблема*, *Распределение дробных долей* многочлена).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА — ГОЛЬДБАХА ТЕОРЕМА — теорема о представлении всех достаточно больших нечетных чисел суммой трех простых. Эта теорема является следствием асимптотич. формулы для числа $I(N)$ решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в простых числах, доказанной И. М. Виноградовым в 1937:

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right),$$

где N — нечетное, $r = \log N$,

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \setminus N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) > 0{,}6.$$

См. *Виноградова метод*, *Гольдбаха проблема*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ — пространственная кривая, расположенная на поверхности круглого цилиндра (цилиндрическая В. л.; рис. 1) или круглого

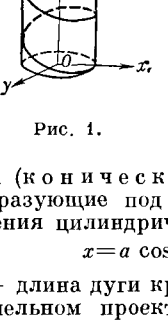


Рис. 1.

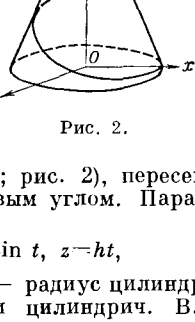


Рис. 2.

конуса (коническая В. л.; рис. 2), пересекающая все образующие под одинаковым углом. Параметрич. уравнения цилиндрич. В. л.:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht,$$

где t — длина дуги кривой, a — радиус цилиндра. При параллельном проектировании цилиндрич. В. л. на плоскость, параллельную образующим цилиндра, по-

лучается синусоида. Во всех точках цилиндрич. В. л. кривизна и кручение имеют постоянную величину. Главные нормали цилиндрич. В. л. пересекают ось цилиндра под прямым углом. Длина отрезка В. л. между двумя последовательными точками ее встречи с какой-либо образующей паз. в и т к о м В. л., а длина соответствующего отрезка образующей — ш а г о м В. л. Параметрич. уравнения конич. В. л.:

$$x = ce^{mt}\cos t, \quad y = ce^{mt}\sin t, \quad z = ce^{mt}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где t — длина дуги кривой, α — угол между осью конуса и его образующей, $m = \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$, φ — угол между касательной к В. л. и образующей конуса. Параллельная оси конуса проекция конич. В. л. на плоскость, перпендикулярную оси конуса, есть логарифмич. спираль с полюсом в проекции вершины конуса. Кривизна и кручение конич. В. л. сохраняют постоянное отношение во всех точках.

Различают п р а в о- или л е в о з а к р у ч е н н ы е В. л., т. е. при возрастании координаты z В. л. идет по направлению или против направления движения часовой стрелки. О б о б щ е н н а я В. л.— линия на цилиндре (произвольном), к-рая каждую из образующих цилиндра пересекает под постоянным углом. В. л. являются частным случаем *откоса линии*.

Лит.: [1] Б ю ш г е н с С. С., Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1940; [2] Б л я ш к е В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957.

Е. В. Шикин.

ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, описываемая плоской кривой L, к-рая, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно совершает равномерное поступательное перемещение вдоль этой же оси. Если L лежит в плоскости оси вращения z и определяется уравнением $z = f(u)$, то радиус-вектор В. п. есть

$$r = \{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u) + hv\},\quad h = \text{const},$$

ее линейный элемент

$$ds^2 = (1 + f'^2)\,du^2 + 2hf'\,du\,dv + (u^2 + h^2)\,dv^2.$$

В. п. изгибается в поверхность вращения так, что винтовые линии, образующие поверхность, накладываются на параллели (т е о р е м а Б у р а). Если $f = \text{const}$, то В. п. есть *геликоид*. Если $h = 0$, то В. п. есть *вращения поверхность*.

И. Х. Сабитов.

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются операции над в и н т а м и — упорядоченными парами коллинеарных векторов (r, r^0), приложенных началами к одной точке. Вектор r наз. в е к т о р о м в и н т а; ось, определенная этим вектором,— о с ь ю в и н т а, r^0 — м о м е н т о м в и н т а, а число p в равенстве $r^0 = pr$ наз. п а р а м е т р о м в и н т а.

В В. и. рассматриваются операции сложения винтов, умножения на число, скалярного и винтового умножения и др. При этом операции В. и. сводятся к операциям над комплексными векторами вида

$$r + \omega r^0,$$

где $\omega^2 = 0$; комплексное число $|r|e^{\omega p}$ наз. к о м п л е к с н ы м м о д у л е м в и н т а; число $\alpha + \omega\alpha^0$ наз. к о м п л е к с н ы м у г л о м между винтами (α — угол между осями, а α^0 — расстояние между ними). Все формулы В. и. идентичны формулам векторного исчисления, если модуль вектора заменить комплексным модулем винта, а обыкновенный угол между прямыми — комплексным углом.

Например, скалярное произведение двух винтов равно произведению их комплексных модулей на косинус комплексного угла между ними ($\cos(\alpha + \omega\alpha^0) = \cos\alpha - \omega\alpha^0\sin\alpha$); винтовое произведение двух винтов есть винт, ось которого перпендикулярна осям сомножителей, вектор имеет направление векторного произведения векторов сомножителей, а комплексный

модуль равен произведению комплексных модулей этих винтов на синус комплексного угла между осями сомножителей ($\sin(\alpha+\omega\alpha^0)=\sin\alpha+\omega\alpha^0\cos\alpha$). Аналогично устанавливается соответствие между формулами векторного анализа и формулами винтового анализа, в к-ром фигурируют комплексные скалярные функции и винт-функции винтового аргумента.

В. и. применяется в механике, где произвольные перемещения твердого тела или произвольная система сил, действующих на тело, могут быть выражены винтами (см. [4]), в геометрии в теории линейчатых поверхностей (см. [3], [5]).

Теория винтов возникла в начале 19 в. после появления работ Л. Пуансо (L. Poinsot), М. Шаля (M. Chasles), А. Мёбиуса (A. Möbius), Ю. Плюккера (J. Plücker), первый капитальный труд по теории винтов принадлежит Р. Боллу [1]. Собственно В. и. было построено А. П. Котельниковым [2].

Лит.: [1] Ball R., A Treatise on the Theory of the Screws, Dublin, 1876; [2] Котельников А. П., Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., М.—Л., 1935; [4] Дименберг Ф. М., Винтовое исчисление и его приложения к механике, М., 1965; [5] Зейлигер Д. Н., Комплексная линейчатая геометрия, Л.—М., 1934.

А. Б. Иванов.

ВИРИАЛА ТЕОРЕМА — теорема, согласно к-рой усредненная по бесконечному интервалу времени кинетич. энергия $\overline{T}$ механич. системы равна усредненному по тому же интервалу вириалу сил, т. е.

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{r}_i}, \qquad (1)$$

где N — число материальных точек системы, $\boldsymbol{F}_i$ — сила, действующая на i-ю точку системы, а $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор этой точки. Черта над соответствующей функцией означает усреднение этой функции по бесконечному интервалу времени.

В. т. была установлена Р. Клаузиусом (R. Clausius) в 1870 и является следствием уравнений движения механич. системы при условии, что движение системы происходит в ограниченной области пространства с ограниченными по модулю скоростями точек. В случае потенциальности сил, действующих на точки системы, соотношение (1) принимает вид

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{(\boldsymbol{r}_i\nabla_i)\,U}\,. \qquad (2)$$

При дополнительном требовании об однородности ν-й степени потенциальной энергии относительно координат точек из (2) следует практически важное соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергиями системы:

$$\overline{T}=\frac{\nu}{2}\,\overline{U}\,. \qquad (3)$$

Напр., для линейного гармонического осциллятора ($U\sim r^2$, $\nu=2$) $\overline{T}=\overline{U}$; а для точки, движущейся в поле тяготения Ньютона ($U\sim 1/r$, $\nu=-1$), $\overline{T}=-\overline{U}/2$.

В. т. используется в механике, статистич. механике и атомной физике (напр., для вывода уравнений состояния и определения постоянных межмолекулярных взаимодействий). В. т. в виде (2) и (3) имеет место и в квантовой механике (с соответствующими обобщениями операции усреднения и др. понятий, используемых в (2) и (3)).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973; [2] Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1963; [3] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Ольховский И. И., Курс теоретической механики для физиков, 2 изд., М., 1974.

И. И. Ольховский.

ВИРИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, вириальный ряд,— ряд в правой части уравнения состояния газа:

$$\frac{Pv}{kT}=1+\sum_{1\leqslant i\leqslant\infty}\frac{B_{i+1}(T)}{v^i},$$

где P — давление, T — температура, v — удельный объем, k — постоянная Больцмана. Член ряда, содержащий k-й вириальный коэффициент B_k, характеризует отклонение газа от идеальности, связанное с взаимодействием групп из k молекул. B_k выражаются через неприводимые групповые интегралы b_k:

$$B_k=\frac{k-1}{k}\sum\frac{(k-2+\sum n_j)!}{(k-1)!}(-1)^{\sum n_j}\prod_j\frac{(jb_j)^{n_j}}{n_j!};$$

суммирование идет по всем натуральным n_j, $j\geqslant 2$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{2\leqslant j\leqslant k}(j-1)\,n_j=k-1.$$

В частности,

$$B_2=-b_2,\quad B_3=4b_2^2-2b_3;\quad b_2=\frac{1}{2!\,V}\int\int f_{12}d^3q_1d^3q_2,$$

$$b_3=\frac{1}{3!\,V}\int\int\int(f_{31}f_{21}+f_{32}f_{31}+f_{32}f_{21}+f_{21}f_{32}f_{31})\,d^3q_1d^3q_2d^3q_3,$$

где

$$f_{ij}=\exp\left[-\frac{\oint(|q_i-q_j|)}{kT}\right]-1,$$

V — объем газа; интегрирование распространяется на весь объем, занятый газом. Существует правило, позволяющее с помощью f_{ij} записывать b_j для любого j. После упрощений оказывается:

$$B_3=-\frac{1}{3}\int\int f_{12}f_{13}f_{23}d^3q_1d^3q_2.$$

Фактически удается вычислить лишь первые вириальные коэффициенты.

Рядом по степеням v^{-1} с коэффициентами, выраженными через b_j, могут быть представлены s-частичные равновесные корреляционные функции, что приводит, в частности, к простому способу получения уравнения состояния (см. [3]).

Существует квантовомеханический аналог В. р.

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1952; [2] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960; [3] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [4] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

И. П. Павлоцкий.

ВИРТУАЛЬНО-АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЕТЬ — *сеть* на поверхности V_2 евклидова пространства, к-рая при нек-ром изгибании f: $V_2\to V_2^*$ переходит в *асимптотическую сеть* поверхности V_2^*. Существование сопряженной В.-а. с. характеризует *Фосса поверхность*.

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ВИТАЛИ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ ($n=2,3,\ldots$) задана на n-мерном параллелепипеде $D_n=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$. Введем обозначения

$$\Delta_{h_k}(f;x)=f(x_1,\ldots,x_k+h_k,\ldots,x_n)-$$

$$-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n),\ k=1,\ldots,n,$$

$$\Delta_{h_1\ldots h_k}(f;x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\ldots h_{k-1}};x),\quad k=2,\ldots,n.$$

Пусть Π — произвольное разбиение параллелепипеда гиперплоскостями $x_s=x_s^{(r_s)}$, $x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)}$, $x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)}$, $x_s^{(0)}=a_s$, $x_s^{(l_s)}=b_s$, $r_s=0,1,\ldots,l_s$, $s=1,2,\ldots,$

n на n-мерные параллелепипеды. Обозначим через $V(f)$ точную верхнюю грань сумм вида

$$\sum_{r_1=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} \left| \Delta_{\substack{(r_1) \\ h_1 \cdots h_n}}^{(r_n)} (f; x_1^{(r_1)}, \ldots, x_n^{(r_n)}) \right|, \quad (*)$$

взятую по всевозможным разбиениям П. Если $V(f)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию Витали на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $V(D_n)$ или просто через V. Этот класс был определен Дж. Витали [1]. Позже это же определение вариации было предложено А. Лебегом [2] и М. Фреше [3]. Действительнозначная функция $f(x)$, заданная на D_n, принадлежит классу $V(D_n)$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где функции f_1 и f_2 таковы, что для каждой из них суммы вида (*), взятые без знака модуля, неотрицательны [4] (аналог *Жордана разложения* функции ограниченной вариации одного переменного). С помощью функций класса $V(D_n)$ вводится многомерный интеграл Стилтьеса. В частности, для любой непрерывной на D_n функции $g(x)$ и любой функции $f(x)$ из класса $V(D_n)$ существует интеграл $\int_{D_n} g(x)\, df(x)$ (см. [3], с. 143).

Лит.: [1] Vitali G., «Atti Accad. sci. Torino», 1908, v. 43, p. 75—92; [2] Lebesgue A., «Ann. Ecol. Norm. super.», 1910, ser. 3, v. 27, p. 361—450; [3] Frechet M., «Nouv. anniv.», 1910, ser. 4, t. 10, p. 241—56; [4] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921; [5] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954. *Б. И. Голубов.*

ВИТАЛИ ТЕОРЕМА — 1) В. т. о покрытии. Если система замкнутых множеств $\{F\}$ является покрытием Витали (см. ниже) множества $A\subset\mathbb{R}^n$, то из $\{F\}$ можно выделить не более чем счетную последовательность попарно непересекающихся множеств $\{F_i\}$, $i=1, 2, 3, \ldots$, такую, что

$$m_e\left[A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right]=0,$$

где m_e — внешняя мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Покрытием Витали множества $A\subset\mathbb{R}^n$ наз. система $\{E\}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ такая, что для любого $x\in A$ существует последовательность $\{E_n\}$ из $\{E\}$, удовлетворяющая условиям:

1) $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$;

2) $\delta_n=\delta(E_n)\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$,

где $\delta(E_n)$ — диаметр E_n;

3) $\inf\limits_n \left[\sup \frac{m_e E_n}{ml}\right]=\alpha>0$,

где sup берется по всем I — кубам с гранями, параллельными координатным плоскостям, содержащим E_n, и m_e — внешняя мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ (этот sup наз. параметром регулярности E_n).

Теорема была доказана Дж. Витали [1] в случае, когда $\{F\}$ состоит из кубов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Условие, что $\{F\}$ есть покрытие Витали множества A, а не покрытие в обычном смысле, существенно для справедливости В. т. Это условие не может быть опущено, даже если $\{F\}$ есть система сегментов и каждому $x\in A$ соответствует последовательность $\{F_n\}$ из $\{F\}$ с центром в x и диаметрами, стремящимися к нулю.

Лит.: [1] Vitali G., «Atti Accad. sci. Torino», 1908, v. 43, p. 75—92; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *И. А. Виноградова.*

2) В. т. о равномерной сходимости последовательности голоморфных функций: пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ голоморфных функций в области D комплексной плоскости z равномерно ограничена и сходится на множестве

E, обладающем предельной точкой в D; тогда последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри D к регулярной функции, т. е. равномерно сходится на любом компактном множестве $K \subset D$. Получена Дж. Витали [1].

Компактности принцип позволяет усилить В. т., заменив в ее условии требование равномерной ограниченности в D требованием равномерной ограниченности внутри D, т. е. на любом компактном множестве $K \subset D$. Имеются также обобщения В. т. для *нормальных семейств* мероморфных функций, для семейств квазианалитич. функций и для семейств голоморфных функций многих комплексных переменных; в последнем случае, однако, на множество $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$ необходимо наложить дополнительные ограничения, напр., что E содержит внутренние точки в $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Vitali G., «Rend. del R. Ist. Lombardo», 2 ser., 1903, v. 36, p. 772; «Ann. mat. pura ed appl.», 3 ser., 1904, v. 10, p. 73; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967, гл. 4; [3] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.—Л., 1936; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. Д. Соломенцев.*

ВИТТА ВЕКТОР — элемент алгебраич. конструкции, впервые предложенной Э. Виттом в 1936 [1] в связи с описанием неразветвленных расширений полей p-адических чисел. Позже В. в. были применены при изучении алгебраических многообразий над полем положительной характеристики (см. [3]), а также в теории коммутативных алгебраических групп (см. [4], [5]) и в теории формальных групп (см. [6]). Пусть A — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Векторами Витта с компонентами в A наз. бесконечные последовательности $a=(a_0, a_1, \ldots)$, $a_i \in A$, к-рые складываются и перемножаются по следующим правилам:

$$(a_0, a_1, \ldots) \dotplus (b_0, b_1, \ldots) = (S_0(a_0, b_0),\ S_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \ldots),$$

$$(a_0, a_1, \ldots) \times (b_0, b_1, \ldots) = (M_0(a_0, b_0),\ M_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \ldots),$$

где S_n, M_n — многочлены от переменных $X_0, \ldots, X_n$, $Y_0, \ldots, Y_n$ с целыми коэффициентами, однозначно определяемые условиями

$$\Phi_n(S_0, \ldots, S_n) = \Phi_n(X_0, \ldots, X_n) + \Phi_n(Y_0, \ldots, Y_n),$$
$$\Phi_n(M_0, \ldots, M_n) = \Phi_n(X_0, \ldots, X_n) \cdot \Phi_n(Y_0, \ldots, Y_n);$$

здесь

$$\Phi_n = Z_0^{p^n} + pZ_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n Z_n$$

— многочлены, $n \in N$, p — простое число. В частности,

$$S_0 = X_0 + Y_0; \quad S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i};$$

$$M_0 = X_0 Y_0, \quad M_1 = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + pX_1 Y_1.$$

В. в. с введенными выше операциями образуют кольцо, наз. кольцом векторов Витта и обозначаемое $W(A)$. Для любого натурального n определено также кольцо $W_n(A)$ усеченных векторов Витта длины n. Элементы этого кольца являются конечными наборами $a=(a_0, \ldots, a_{n-1})$, $a_i \in A$, с операциями сложения и умножения, приведенными выше. Канонич. отображения:

$$R: W_{n+1}(A) \to W_n(A), \quad R((a_0, \ldots, a_n)) = (a_0, \ldots, a_{n-1}),$$
$$T: W_n(A) \to W_{n+1}(A), \quad T((a_0, \ldots, a_{n-1})) = (0, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

являются гомоморфизмами. Сопоставление $A \to W(A)$ (соответственно $A \to W_n(A)$) определяет ковариантный функтор из категории коммутативных колец с единицей в категорию колец. Этот функтор представим кольцом многочленов $Z[X_0, \ldots, X_n, \ldots]$ (соответственно $Z[X_0, \ldots, X_{n-1}]$), на к-ром определена структура кольцевого объекта. Спектр $\operatorname{Spec} Z[X_0, \ldots, X_n, \ldots]$ (соответственно $\operatorname{Spec} Z[X_0, \ldots, X_{n-1}]$) наз. схемой Витта

(соответственно усеченной схемой Витта) и является кольцевой схемой [3].

Каждый элемент $a \in A$ определяет В. в.

$$a^{\tau} = (a, 0, 0, \ldots) r \in W(A),$$

наз. представлением Тейхмюллера элемента a. Если $A = k$ — совершенное поле характеристики $p > 0$, то $W(k)$ является полным кольцом дискретного нормирования характеристики нуль с полем вычетов k и максимальным идеалом $pW(k)$. При этом каждый элемент $\omega \in W(k)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \omega_0^{\tau} + p\omega_1^{\tau} + p^2\omega_2^{\tau} + \ldots,$$

где $\omega_i \in k$. Наоборот, каждое такое кольцо A с полем вычетов $k = A/pA$ канонически изоморфно кольцу $W(k)$. Представление Тейхмюллера позволяет построить канонический мультипликативный гомоморфизм $k \to W(k)$, расщепляющий отображение

$$W(k) \longrightarrow W(k)/p \simeq k.$$

Если $k = F_p$ — простое поле из p элементов, то $W(F_p)$ есть кольцо целых p-адических чисел Z_p.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine und angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 176–240; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Серр Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [5] Demazure M., Gabriel P., Groupes algebriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [6] Dieudonne J., «Math. Ann.», 1957, Bd 134, S. 114–33.

И. В. Долгачев.

ВИТТА КОЛЬЦО поля k, кольцо типов квадратичных форм над k,— кольцо $W(k)$ классов невырожденных квадратичных форм на конечномерных векторных пространствах над k по следующему отношению эквивалентности: форма f_1 эквивалентна форме f_2 ($f_1 \sim f_2$) тогда и только тогда, когда для некоторых нейтральных квадратичных форм g_1 и g_2 ортогональная прямая сумма форм f_1 и g_1 изометрична ортогональной прямой сумме f_2 и g_2. Операции сложения и умножения в $W(k)$ индуцируются взятием ортогональной прямой суммы и тензорного произведения форм.

Пусть характеристика поля k отлична от 2. Тогда определение эквивалентности форм равносильно следующему: $f_1 \sim f_2$ тогда и только тогда, когда анизотропные формы f_1^a и f_2^a, соответствующие f_1 и f_2 (см. *Витта разложение*), изометричны. Класс эквивалентности формы f наз. ее типом и обозначается $[f]$. В. к., или кольцо типов квадратичных форм, есть ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Единицей кольца $W(k)$ является тип формы (1). [Здесь через $(a_1, \ldots, a_n)$ обозначается квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_i x_i^2$.] Нулем служит тип нулевой формы ранга нуль, содержащий также все нейтральные формы. Противоположным к типу $[f]$ является тип $[-f]$.

Аддитивная группа кольца $W(k)$ наз. группой Витта поля k, или группой типов квадратичных форм над k. Типы квадратичных форм вида (a), где a — элемент мультипликативной группы $k^{\times}$ поля k, порождают кольцо $W(k)$. Причем $W(k)$ полностью определяется в этих образующих соотношениями:

$$(a)(b) = (ab),$$
$$(a) + (b) = (a+b) + ((a+b)ab),$$
$$(a)^2 = 1,$$
$$(a) + (-a) = 0.$$

В. к. можно описать как кольцо, изоморфное факторкольцу целочисленного группового кольца

$$\mathbb{Z}[k^{\times}/(k^{\times})^2]$$

группы $k^\times/(k^\times)^2$ по идеалу, порожденному элементами

$$\overline{1}\dotplus(-\overline{1}) \text{ и } \overline{1}\dotplus\overline{a}-\overline{1}-\overline{a}-(\overline{1}\dotplus\overline{a})\,\overline{a},\ (a\in k^\times),$$

где $\overline{x}$ - смежный класс элемента x по подгруппе $(k^\times)^2$.

В ряде случаев В. к. вычисляется явно: напр., если k — квадратично (в частности, алгебраически) замкнутое поле, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; если k - вещественно замкнутое поле, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}$ (изоморфизм осуществляется сопоставлением типу $[f]$ сигнатуры формы f); если k пифагорово поле (т. е. сумма любых двух квадратов в k является квадратом) и не вещественно, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}\,2\mathbb{Z}$; если k конечное поле, то кольцо $W(k)$ изоморфно либо кольцу вычетов $\mathbb{Z}\,4\mathbb{Z}$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t]/(t^2-1)$; если k — полное локальное поле и его поле классов $\overline{k}$ имеет характеристику, отличную от 2, то

$$W(k)\simeq W(\overline{k})[t]/(t^2-1).$$

Расширение $k'|k$ поля k определяет гомоморфизм колец Витта φ: $W(k)\to W(k')$, при котором $[(a_1,\ldots,a_n)]\mapsto[(a_1,\ldots,a_n)]$. Если расширение конечно и имеет нечетную степень, то φ — мономорфизм, а если, кроме того, оно является *Галуа расширением* с группой G, то действие группы G продолжается на $W(k)$ и

$$\varphi(W(k))=W(k')^G.$$

Общие свойства В. к. описываются теоремой Пфистера:

1) для любого поля k периодическая подгруппа $W_t(k)$ группы $W(k)$ 2-примарна;

2) если k — вещественное поле, а k_p — его пифагорово замыкание (т. е. наименьшее пифагорово поле, содержащее k), то точна последовательность

$$0\longrightarrow W_t(k)\longrightarrow W(k)\longrightarrow W(k_p)$$

(при этом, если $W_t(k)=0$, то поле k - пифагорово);

3) если $\{k_\alpha\}$ — семейство всех вещественных замыканий поля k, то точна последовательность

$$0\longrightarrow W_t(k)\longrightarrow W(k)\longrightarrow\prod W(k_\alpha)$$

в частности,

4) если k — не вещественное поле, то группа $W(k)$ периодическая.

Ряд других результатов относится к мультипликативной теории форм. В частности, пусть m — множество типов квадратичных форм на четномерных пространствах. Тогда m является двусторонним идеалом в $W(k)$ и $W(k)/m\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, идеал m содержит все делители нуля кольца $W(k)$, множество нильпотентных элементов кольца $W(k)$ совпадает с множеством элементов конечного порядка идеала m и является радикалом Джекобсона и первичным радикалом кольца $W(k)$. Кольцо $W(k)$ конечно тогда и только тогда, когда поле k не вещественно, а группа $k^\times/(k^\times)^2$ конечна; кольцо $W(k)$ нетерово тогда и только тогда, когда группа $k^\times/(k^\times)^2$ конечна. Если k — не вещественное поле, то m является единственным простым идеалом кольца $W(k)$. Если же k — вещественное поле, то множество простых идеалов кольца $W(k)$ является дизъюнктным объединением идеала m и семейств простых идеалов, соответствующих упорядочениям p поля k:

$$P=\{[(a_1,\ldots,a_n)]\mid\sum\operatorname{sgn}_p a_i=0\},$$

$$P_l=\{[(a_1,\ldots,a_n)]\mid\sum\operatorname{sgn}_p a_i\equiv 0\bmod l\},$$

где l пробегает множество простых чисел, а $\operatorname{sgn}_p a_i$ означает знак элемента a_i при упорядочении p.

Если k — кольцо с инволюцией, то конструкция, аналогичная конструкции В. к., приводит к понятию группы Витта кольца с инволюцией.

С более широкой точки зрения кольцо (группа) Витта является одним из первых примеров K-функторов (см.

Алгебраическая К-теория), которые играют важную роль в унитарной алгебраической K-теории.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine u. angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 31—44; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Lorenz F., Quadratische Formen über Körpern, B. [u. a.], 1970; [5] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B.—Gött.— Hdlb., 1963; [6] Lam T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Massachusets, 1973; [7] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B. [u. a.], 1973.

А. В. Михалев, А. И. Немытов, В. Л. Попов.

ВИТТА РАЗЛОЖЕНИЕ векторного пространства – разложение пространства в прямую сумму трех подпространств, обладающих определенными свойствами. Точнее, пусть V — векторное пространство над полем k характеристики, отличной от двух, наделенное метрич. структурой с помощью симметрической или знакопеременной *билинейной формы* f. Прямое разложение

$$V=N_1+N_2+D$$

наз. В. р. пространства V, если N_1 и N_2 вполне изотропны, а D неизотропно и ортогонально N_1+N_2 относительно f. В. р. играет важную роль в изучении структуры формы f и в вопросах классификации билинейных форм.

Пусть f — невырожденная билинейная форма и V — конечномерно. Тогда любое максимальное вполне изотропное подпространство в V может быть включено в В. р. пространства V в качестве N_1 (или N_2). Для всякого В. р. $\dim N_1=\dim N_2$ и для любого базиса $v_1^{(1)},\ldots,v_n^{(1)}$ в N_1 существует такой базис $v_1^{(2)},\ldots,v_n^{(2)}$ в N_2, что $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)})=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера). Для любых двух В. р.

$$V=N_1+N_2+D=N_1'+N_2'+D'$$

условие $\dim N_i=\dim N_i'$, $i=1, 2$, необходимо и достаточно для того, чтобы существовал такой метрич. автоморфизм φ пространства V, что

$$\varphi(N_1)=N_1',\quad \varphi(N_2)=N_2',\quad \varphi(D)=D'.$$

Невырожденная билинейная симметрическая или знакопеременная форма f на V наз. нейтральной, если V конечномерно и обладает В. р. с $D=0$. Симметрическая форма в этом случае наз. гиперболической формой, а V — гиперболическим пространством. Ортогональная прямая сумма нейтральных форм нейтральна. Матрица нейтральной формы (в описанном выше базисе $v_1^{(1)},\ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)},\ldots, v_n^{(2)}$ пространства $V=N_1+N_2$) имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline \varepsilon E_n & 0 \end{array}\right\|,$$

где E_n — единичная матрица порядка n, а $\varepsilon=1$ для симметрической формы и -1 для знакопеременной. Нейтральные формы изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг. Класс нейтральных симметрических билинейных форм является нулем (т. е. нейтральным элементом по сложению) в *Витта кольце* поля k. Нейтральные формы и только они имеют индекс Витта, равный $\frac{1}{2}\dim V$. Знакопеременная форма на конечномерном пространстве нейтральна.

Если f — невырожденная симметрическая билинейная форма на конечномерном пространстве V и $V=N_1+N_2+D$ — В. р., в котором $\dim N_1=\dim N_2$ и равно индексу Витта формы f, то сужение f на D является определенной, или анизотропной, билинейной формой, т. е. такой, что $f(v, v)\neq 0$ для любого ненулевого $v\in D$. Эта форма не зависит (с точностью до изометрии) от выбора В. р. на V. В множестве определенных билинейных форм можно ввести

операцию сложения, превращающую его в абелеву группу — группу Витта поля k (см. *Витта кольцо*).

Пусть $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ — такие базисы в N_i, $i=1, 2$, что $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)})=\delta_{ij}$, объединяя эти базисы с произвольным базисом в D, получают базис в V, в к-ром матрица формы f имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{Vmatrix}.$$

Для симметрических билинейных форм существует ортогональный базис в V, т. е. такой, в к-ром матрица формы диагональна. Если поле k алгебраически замкнуто, то найдется даже ортонормированный базис (базис, в к-ром матрица формы является единичной), поэтому невырожденные симметрические билинейные формы конечного ранга над k изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг. В общем случае классификация таких форм существенно зависит от арифметич. свойств поля k.

Изучение и классификация вырожденных симметрических и знакопеременных билинейных форм сводится к изучению невырожденных форм (сужение формы на подпространство, дополнительное к ядру формы).

Все изложенное допускает обобщение на случай ε-эрмитовых форм над телом, обладающих свойством (T) (см. *Витта теорема*), а также на случай симметрических билинейных форм, ассоциированных с квадратичной формой, без ограничений на характеристику поля.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [4] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *В. Л. Попов.*

ВИТТА ТЕОРЕМА: всякая изометрия между двумя подпространствами F_1 и F_2 конечномерного векторного пространства V, определенного над полем k характеристики, отличной от двух, и наделенного метрич. структурой с помощью невырожденной симметрической или кососимметрической *билинейной формы* f, может быть продолжена до метрич. автоморфизма всего пространства V. Впервые эта теорема получена Э. Виттом [1].

В. т. может быть доказана и в более широких предположениях на k и f (см. [2], [3]). А именно, утверждение теоремы остается в силе, если k — тело, V — левый конечномерный k-модуль, а f — невырожденная *ε-эрмитова форма* (относительно нек-рого фиксированного инволютивного антиавтоморфизма σ тела k), удовлетворяющая условию: для всякого $v \in V$ найдется такой элемент $\alpha \in k$, что

$$f(v, v)=\alpha+\varepsilon\alpha^{\sigma}$$

(свойство (T)). Свойство (T) выполняется, напр., когда f — эрмитова форма и характеристика k отлична от двух, или когда f знакопеременная форма. В. т. справедлива также, если k — поле, а f — симметрическая билинейная форма, ассоциированная с невырожденной *квадратичной формой* Q на V. Из В. т. следует, что группа метрич. автоморфизмов пространства V транзитивно переставляет вполне изотропные подпространства одинаковой размерности и что все максимальные вполне изотропные подпространства в V имеют одну и ту же размерность (индекс Витта формы f). Другое следствие В. т.: классы изометрии невырожденных симметрических билинейных форм конечного ранга над k относительно взятия ортогональной прямой суммы образуют моноид с сокращением; каноническое отображение этого моноида в его *Гротендика группу* инъективно. Группа $\mathrm{WG}(k)$ наз. группа-

пой Витта — Гротендика $WG(k)$ поля k; тензорное произведение форм индуцирует на ней структуру кольца, к-рое наз. кольцом Витта — Гротендика поля k (см. [7]).

О других приложениях В. т. см. *Витта разложение*, *Витта кольцо*.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 31—44; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [6] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [7] Милнор Дж., «Математика», 1974, т. 15, в. 4, с. 3—27.

В. Л. Попов.

ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО — вихревая нить, имеющая вид тора малого поперечного сечения. Общие формулы, определяющие скорости частиц жидкости по вихрям, дают возможность представить потенциал скоростей $\varphi(z, r)$ и функцию Стокса тока $\psi(z, r)$ течения, возникающего в неограниченной жидкости от вихревого кольца, в виде интегралов, содержащих функции Бесселя нулевого и 1-го порядка:

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2} a\varkappa \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) J_1(ka)\, dk,$$

$$\psi(z, r) = -\frac{1}{2} a\varkappa r \int_0^\infty e^{-kz} J_1(kr) J_1(ka)\, dk.$$

В этих формулах, пригодных для $z>0$, a — радиус кольца, $\varkappa$ — напряженность вихревого кольца. Координата z отсчитывается от плоскости кольца, находящегося в движении. Под влиянием скоростей, им же самим создаваемых в жидкости, кольцо перемещается в направлении оси Oz с постоянной скоростью c, определяемой следующей приближенной формулой:

$$c = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{8\varepsilon}{a} - \frac{1}{4}\right],$$

где ε — радиус поперечного сечения В. к. Для нескольких В. к. функции φ и ψ представляются в виде суммы соответствующих функций каждого кольца.

Лит.: [1] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Л. Н. Сретенский.

ВИХРЬ, ротор, векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ — векторная «вращательная составляющая» этого поля. Если $\boldsymbol{a}(M)$ — поле скоростей частиц движущейся непрерывной среды, то В. равен половине угловой скорости частицы. В. обозначается $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (иногда — $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$). В декартовых прямоугольных координатах x, y, z В. определяется выражением:

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},$$

где $u(M)$, $v(M)$, $w(M)$ — компоненты $\boldsymbol{a}(M)$.

Линия в пространстве, в каждой точке к-рой в данный момент времени В. лежит на касательной прямой, наз. вихревой линией. Всякая поверхность, на к-рой расположено семейство вихревых линий, зависящее от одного параметра, наз. вихревой поверхностью. Частным, но весьма важным примером вихревых поверхностей являются вихревые трубки, к-рые образуются вихревыми линиями, выходящими из всех точек какой-нибудь замкнутой кривой. Если эта кривая бесконечно мала, то образующаяся вихревая поверхность наз. вихревой нитью. Вихревые поверхности наз. также вихревыми слоями, считая слой как бы состоящим из геометрич. поверхности с нанесенной на ней обкладкой из вихревых линий. При пересечении вихревого слоя скорости частиц жидкости испытывают тангенциальный разрыв, пропорциональный В. в соответствующей точке.

Основная теорема Гельмгольца в гидродинамике заключается в том, что если объемные силы имеют потенциал, то при течении однородной, идеальной несжимае-

мой жидкости или баротропного газа частицы среды, расположенные в нек-рый момент времени на вихревой линии, будут и во все последующее время располагаться на вихревой линии. Таким образом, с течением времени сохраняются вихревые поверхности и, в частности, вихревые трубки и нити. Каждая вихревая трубка может быть охарактеризована нек-рым числом, наз. напряженностью трубки, и равным потоку вектора В. через произвольным образом проведенное сечение трубки. Это число не зависит от формы поперечного сечения, так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0$. Оно означает, что вихревая трубка может быть либо замкнутой (*вихревое кольцо*), либо иметь начало и конец на границах жидкости. С течением времени напряженность вихревой трубки в идеальной жидкости не меняется.

Перечисленные свойства вихревых трубок, найденные Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz), получают исключительно простое доказательство с помощью введенного У. Томсоном (W. Thomson) понятия о циркуляции Г скорости v по замкнутому контуру (L):

$$\Gamma=\oint_{(L)} |\,v\,| \cos(\widehat{v\,ds})\,ds,$$

где ds — элемент дуги контура L. Изучение свойств циркуляции скорости приводит к теореме Лагранжа о сохранении с течением времени безвихревого движения.

Основной задачей теории В. является определение поля скоростей движения жидкости по заданному полю векторов В. Если область, занятая жидкостью, безгранична во всех направлениях и если область (D), занятая В., ограничена замкнутой вихревой поверхностью, то поле скоростей находится с помощью вектор-потенциала

$$\mathbf{\Pi}=\frac{1}{4\pi}\int\int\int_{(D)}\frac{\operatorname{rot} v}{r}\,d\tau,$$

по формуле:

$$v=\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}.$$

Если же задача состоит в определении скоростей по вихрям в ограниченном пространстве, то решение весьма сложно вследствие необходимости рассматривать интегральные уравнения с особыми ядрами. Полное решение этой задачи в [6], [7].

Для важного частного случая плоскопараллельных движений:

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y),\ w=w(x,\ y)$$

две компоненты α, β В. равны нулю, а третья компонента γ представляет собой весь В., к-рый в данном случае перпендикулярен к плоскости XOY. В пересечении вихревой нити с плоскостью XOY образуется маленькая площадка, наз. вихревой точкой. При наличии в жидкости нескольких вихревых точек возникает движение самих точек благодаря тем скоростям, какие возбуждают в жидкости эти точки. Уравнения движения вихревых точек имеют вид канонич. уравнений механики.

Лит.: [1] Аппель П., Руководство теоретической (рациональной) механики, пер. с франц., т. 3, М., 1911; [2] Вилля Г., Теория вихрей, пер. с франц., Л.—М., 1936; [3] Lichtenstein L., Grundlagen der Hydromechanik, B., 1929; [4] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964; [5] Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., М.—Л., 1947; [6] Гюнтер Н. М., «Изв. АН СССР», 6 сер., 1926, т. 20, № 13—14, с. 1323—48; № 15—17, с. 1503—1532; [7] его же, «Ж. Ленингр. Физ.-матем. об-ва», 1926, т. 1, в. 1, с. 12—36.

Л. Н. Сретенский.

ВКБ-МЕТОД — асимптотический метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (и Джефриса) решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2}-q(t)\,x=0, \qquad (1)$$

с малым параметром $\varepsilon>0$ при старшей производной. Для построения приближенных решений волнового

уравнения Шрёдингера в квантовой механике этот метод был введен в 1926 Л. Бриллюэном (L. Brillouin), Г. Вентцелем (G. Wentzel) и Х. Крамерсом (H. Kramers), а также Х. Джефрисом (H. Jeffreys) (подробный историч. очерк и библиографию см. в [5], [6]). Для ВКБ-м. используются и другие названия: «приближение Лиувилля — Грина», «метод фазового интеграла», «квазиклассическое приближение», а также любые комбинации из букв W, K, B (и J).

Пусть $I=[a,\ b]$, $q(t)\in\mathbb{C}^\infty(I)$ и $\operatorname{Re}\sqrt{q(t)}\geqslant 0$ при $t\in I$ или $q(t)<0$ при $t\in I$. Тогда существуют решения уравнения (1) такие, что при $\varepsilon\to+0$ равномерно по $t\in I$

$$x_j(t,\ \varepsilon)\approx w_j(t,\ \varepsilon)\,(1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_{kj}(t)),\quad j=1,\ 2,$$

причем

$$w_{1,\,2}(t,\ \varepsilon)=q^{-1/4}(t)\exp\left(\pm\varepsilon^{-1}\int_a^t\sqrt{q(\tau)}\,d\tau\right). \quad (2)$$

Главный член асимптотич. разложения (2) обычно наз. ВКБ-приближением.

Пусть $I=[0,\ +\infty)$, предыдущие условия на $q(t)$ выполнены и

$$\int_0^\infty\left(|q'(t)|^2\,|q(t)|^{-5/2}+|q''(t)|\,|q(t)|^{-3/2}\right)dt<\infty.$$

Тогда существуют решения уравнения (1) такие, что $x_j(t,\ \varepsilon)=w_j(t,\ \varepsilon)(1+\varepsilon\varphi_j(t,\ \varepsilon))$, $j=1,\ 2$, где $|\varphi_j(t,\ \varepsilon)|\leqslant C$ при $t\in I$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, если $\varepsilon_0>0$ достаточно мало, и $\varphi_j(t,\ \varepsilon)\to 0$ при $t\to+\infty$, $\varepsilon>0$.

Точка t_0 наз. точкой поворота уравнения (1), если $q(t_0)=0$. ВКБ-приближение непригодно в точках поворота. Были получены асимптотич. формулы, справедливые в окрестностях точек поворота (см. [1], [4]). Главный член асимптотики выражается через бесселевы функции.

В ряде задач (задача на собственные значения, задача о рассеянии) для уравнения (1) требуется знать асимптотику решений только на концах интервала, т. е. не нужно находить асимптотику в точках поворота. Если $q(t)$ — аналитич. функция, то можно, вообще говоря, продолжить ВКБ-формулы с одного конца интервала I на другой через комплексную плоскость $\mathbb{C}(t)$ (строгое обоснование дано в [2]). Для целых функций $q(t)$ оказывается, что ВКБ-приближение (2) пригодно в нек-рых областях комплексной плоскости $\mathbb{C}(t)$, ограниченных линиями Стокса (т. е. линиями уровня $\operatorname{Re}\int\sqrt{q(t)}\,dt=\text{const}$, проходящими через точки поворота). Получены асимптотич. формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1), пригодные во всей комплексной плоскости, за исключением окрестностей точек поворота (см. [2]).

О ВКБ-приближении для уравнений с частными производными см. [5], [6], [8] — [10].

Лит.: [1] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [2] Евграфов М. А., Федорюк М. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, № 1, с. 3—50; [3] Федорюк М. В., Добавление к книге В. Вазова [1], с. 406—33; [4] Дородницын А. А., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, № 6, с. 3—96; [5] Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (Метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [6] Фрёман Н., Фрёман П. У., ВКБ-приближение, пер. с англ., М., 1967; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963; [8] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [9] его же, Операторные методы, М., 1973; [10] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.

М. В. Федорюк.

ВКЛЮЧЕНИЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ — включение *суммируемости полей*, соответствующих этим методам. Если A и B — два метода суммирования, определенные на множестве M рядов (или последова-

тельностей), A^* и B^* — их поля суммируемости и $A^* \subset B^*$, то говорят, что метод B включает метод A и обозначают символом $A \subset B$. Методы A и B наз. равносильными и обозначают $A=B$, если каждый из них включает другой. Равносильные методы имеют одно и то же поле суммируемости. Метод B сильнее метода A, если B включает A, но не равносилен ему. Если поле суммируемости метода совпадает с множеством всех сходящихся рядов, то метод наз. равносильным сходимости. Иногда рассматривают В. м. с. не на всем множестве их определения, а лишь на некотором его подмножестве.

Для *Чезаро методов суммирования* (C, k) имеет место включение $(C, k_1) \subset (C, k_2)$ при $k_2 \geqslant k_1 > -1$, *Абеля метод суммирования* сильнее всей совокупности методов Чезаро (C, k) при $k > -1$, *Рисса метод суммирования* (R, n, k) равносилен Чезаро методу суммирования (C, k) $(k \geqslant 0)$, Абеля метод суммирования равносилен сходимости на множестве рядов, члены к-рых a_n удовлетворяют условию $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. В приведенных примерах методы суммирования являются одновременно и совместными (см. *Совместность методов суммирования*), хотя в общем в случае В. м. с. не предполагает их совместности. Однако, если A и B — регулярные матричные методы и $A \subset B$ на множестве ограниченных последовательностей, то A и B совместны на этом множестве (теорема Мазура — Орлича — Брудно). В литературных источниках иногда требование совместности методов налагают при самом определении включения.

В. м. с., определенных на множестве рядов с действительными членами, наз. полным, если включение полей суммируемости сохраняется и при пополнении их рядами, суммируемыми к $+\infty$ и $-\infty$. Напр., *Гёльдера метод суммирования* (H, k) вполне включает метод Чезаро (C, k).

В. м. с. для специальных видов суммируемости (напр., для абсолютной суммируемости, сильной суммируемости и др.) определяется аналогичным образом.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кан Г. Ф., Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Mazur S., Orlicz W., «C. r. Acad. sci.», 1933, t. 196, p. 32—4; [5] Брудно А. Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 191—247; [6] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.

И. И. Волков.

ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ ПРИНЦИП — метод подсчета числа $N(a_1' a_2' \dots a_r')$ объектов, не обладающих ни одним из данных свойств $a_1, a_2, \dots, a_r$, по следующей формуле:

$$N(a_1' a_2' \dots a_r') = N - \sum_{i=1}^{r} N(a_i) + \sum_{i,j=1, i<j}^{r} N(a_i a_j) - \dots + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r), \quad (1)$$

где a_i' означает отсутствие свойства a_i, N — число всех объектов, $N(a_i)$ — число объектов, обладающих свойством a_i, $N(a_i a_j)$ — число объектов, обладающих одновременно свойствами a_i и a_j, и т. д. (см., напр., [3]). Из В. и и. п. вытекает формула для подсчета числа объектов, обладающих точно m свойствами из $a_1, a_2, \dots, a_r$, $m=0, 1, \dots, r$:

$$e_m = \sum_{i=0}^{r-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} s_{m+i}, \quad (2)$$

где $s_0 = N$, $s_k = \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k})$, причем здесь суммирование производится по всем k-наборам $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ таким, что $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$, $k=1, \dots, r$, т. е.

$s_1 = \sum_i N(a_i)$, $s_2 = \sum_{i,j, i \neq j} N(a_i a_j)$, $\dots$, $s_r = N(a_1 a_2 \dots a_r)$.

Иногда метод подсчета e_m по формуле (2) также наз. В. и и. п. Этот принцип находит применение при

решении комбинаторных и теоретико-числовых задач (см., напр., [1]). Так, если дано натуральное число a и натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$ такие, что $(a_i, a_j)=1$ при $i \neq j$, то число целых чисел k таких, что $0<k \leqslant n$ и не делящихся на a_i, $i=1, 2, \ldots, N$, равно по (1):

$$n-\sum_{1 \leqslant i \leqslant N}\left[\frac{n}{a_i}\right]+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant N}\left[\frac{n}{a_i a_j}\right]- \\ -\ldots+(-1)^N\left[\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_N}\right].$$

При помощи В. и и. п. решается также задача о беспорядках (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *С. А. Рукова.*

ВЛАДИМИРОВА ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП — вариационный принцип для стационарного односкоростного однородного уравнения переноса

$$(\bar{\Omega}, \nabla\psi)+\Sigma(x)\psi= \\ =\lambda\int_{|\bar{\Omega}'|=1}\theta(x, \mu_0)\,\psi(\bar{\Omega}', x)\,d\bar{\Omega}'; \quad \mu_0=(\bar{\Omega}', \bar{\Omega}), \quad (1)$$

с граничным условием

$$\psi|_{x \in \Gamma}=0, \quad (\bar{\Omega}, \bar{n})<0, \quad (2)$$

где Γ — граница выпуклой ограниченной области G. При условии, что индикатриса рассеяния $\theta(x, \mu_0)$ есть четная функция от μ_0, переход к новой неизвестной функции

$$u=[\psi(\bar{\Omega}, x)+\psi(-\bar{\Omega}, x)]/2$$

приводит задачу (1), (2) к самосопряженной форме. В полученной задаче В. в. п. для наименьшего собственного значения λ_1 состоит в том, что λ_1 есть минимум функционала

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_{\Gamma}|(\bar{\Omega}, \bar{n})|\,u^2(\bar{\Omega}, x)\,d\bar{\Omega}\,dS_x+ \\ +\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_G\frac{1}{\Sigma(x)}(\bar{\Omega}, \nabla u)^2\,dx\,d\bar{\Omega}+ \\ +\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_G\Sigma(x)\,u^2(\bar{\Omega}, x)\,dx\,d\bar{\Omega}$$

на множестве функций $u(\bar{\Omega}, x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_{|\bar{\Omega}'|=1}\int\theta(x, \mu_0)\,u(\bar{\Omega}', x)\,dx\,d\bar{\Omega}'\,d\bar{\Omega}=1.$$

Соответствующая (неотрицательная) собственная функция реализует минимум функционала [3]. В этом вариационном принципе соответствующие граничные условия являются естественными. Аналогично формулируются вариационные принципы для высших собственных значений и для неоднородной задачи.

В. в. п. впервые получен В. С. Владимировым [1]. Из В.в.п. были выведены наилучшие граничные условия в методе сферических гармоник. В. в. п., в комбинации с конечно разностными методами, широко используется в численных расчетах задач нейтронной физики.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М., 1961; [2] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961; [3] Дэвисон Б., Теория переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1960. *Ю. Н. Дрожжинов.*

ВЛАДИМИРОВА МЕТОД — один из наиболее точных численных методов решения кинетич. уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах, основанный на интегрировании вдоль характеристик. Предложен в 1952 В. С. Владимировым для решения интегродифференциальных кинетич. уравнений в случае сферически симметричных реакторов. Идея В. м. может быть изложена на примере задачи о расчете подкритического реактора с источником нейтронов. Для одномерной сфе-

рически симметричной геометрии в односкоростном случае кинетич. уравнение для потока нейтронов $\varphi(r, \mu)$ (где r — радиус, $0 \leqslant r \leqslant R$, μ — косинус угла между вектором скорости нейтрона и радиусом) имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma(r)\varphi = \frac{\Sigma_s(r)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(r, \mu')\, d\mu' + f(r) \quad (1)$$

с граничным условием

$$\varphi(R, \mu) = 0 \text{ для } \mu \leqslant 0, \quad (2)$$

означающим, что на внешнюю границу $r = R$ системы снаружи ($\mu \leqslant 0$) нейтроны не падают, причем $\Sigma(r)$, $\Sigma_s(r)$, $f(r)$ — заданные кусочно непрерывные функции от r. Замена

$$x = r\mu; \quad y = r\sqrt{1-\mu^2} \quad (3)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \Sigma\psi(x, y) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f, \quad (4)$$

где $\psi(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2};\ \cos \operatorname{arc\,tg}\, y/x)$. Это уравнение легко решается как обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка и

$$\psi(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{x} \left[\frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f\right] e^{-\int_{x'}^{x} \Sigma\, dx''} dx'. \quad (5)$$

Для каждой характеристики $y = y_i$ дифференциальной части кинетич. уравнения (1) выбирается своя система узлов $x_{ki} = \sqrt{r_k^2 - y_i^2}$, где r_k — выбранная сетка по радиусу. Решение уравнения (5) проводится методом последовательных приближений, начиная с заданного начального приближения функции:

$$Q(r) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f. \quad (6)$$

При этом

$$\varphi(r_k, \mu_{ki}) = \psi(x_{ki}, y_i)$$

(где $\mu_{ki} = x_{ki}/r_k$) легко найти при помощи (5) во всех узлах сетки после того, как интегралы в (5) будут заменены суммами и будет получено выражение, связывающее значения φ и Q в двух соседних точках на характеристике. Чтобы получить значение $Q(r)$ в следующем приближении, необходимо вычислить $\int_{-1}^{+1} \varphi d\mu$, что делается с помощью квадратурной формулы, использующей точки окружности $x^2+y^2 = r_k^2$. Скорость сходимости последовательных приближений определяется размерами и физич. характеристиками реактора.

Задача на собственные значения (определение критич. параметров реактора) решается аналогично.

В. м. обобщается на многоскоростные и многомерные задачи и легко программируется для ЭВМ. В отличие от *Карлсона метода*, В. м. использует переменную сетку по μ для разных r, что позволяет увеличивать точность расчета на границе реактора с вакуумом (вблизи $r = R$) по сравнению с областями вблизи $r = 0$, где поток нейтронов близок к изотропному.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

В. А. Чуянов.

ВЛАСОВА КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — кинетическое уравнение для заряженных частиц, в к-ром взаимодействие между частицами описывается через самосогласованное электромагнитное поле. В. к. у. имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad}_r f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}]\right) \operatorname{grad}_v f_\alpha = 0, \quad (1)$$

где $f_\alpha(t, r, v)$ — функция распределения, а индекс α означает сорт частиц. Самосогласованное электромагнитное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ определяется из уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

в к-рых плотности зарядов и токов вычисляются через функции распределения:

$$\left.\begin{aligned} \rho(t, \boldsymbol{r}) &= \sum\nolimits_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, d^3v, \\ \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r}) &= \sum\nolimits_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\, d^3v. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В. к. у. может быть получено из *Лиувилля уравнения* для функции распределения всех частиц данного сорта α, если пренебречь корреляциями частиц и предположить, что многочастичная функция распределения есть произведение одночастичных функций распределения.

Система уравнений (1) — (3), предложенная А. А. Власовым [1], широко используется в физике плазмы. Наиболее разработана линейная теория, основанная на линеаризации уравнений (1) — (3). Она применяется для исследования малых колебаний и устойчивости плазмы [5]. Интенсивно развивается квазилинейная теория, позволяющая рассматривать нелинейные эффекты.

Лит.: [1] Власов А. А., «Ж. экспер. и теор. физики», 1938, т. 8, вып. 3, с. 291; [2] его же, Теория многих частиц, М.—Л., 1950; [3] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.—Л., 1946; [4] Силин В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [5] Силин В. П., Рухадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.

Д. П. Костомаров.

ВЛИЯНИЯ ОБЛАСТЬ точки M (множества A точек M) — множество $B(M)$ (соответственно $B(A)$) всех тех точек, в к-рых решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений изменяется при изменении его в точке M (соответственно A). В простейших случаях линейных дифференциальных уравнений с частными производными В. о. не зависит от решения; для большинства нелинейных задач В. о. зависит как от самого решения, так и от характера возмущений. В этом случае рассматриваются бесконечно малые возмущения. Для гиперболических уравнений В. о. точки M есть внутренность характеристического коноида (см. *Характеристическое многообразие*), проведенного через точку M; для уравнений параболических и эллиптических типов В. о. точки M, как правило, есть область определения решения.

Б. Л. Рождественский.

ВЛОЖЕНИЕ КАТЕГОРИЙ — ковариантный *функтор* F из категории C в категорию C', инъективный на классе морфизмов категории C.

ВЛОЖЕНИЕ КОЛЬЦА — мономорфизм кольца в некоторое другое кольцо; кольцо R вкладывается в кольцо L, если R изоморфно подкольцу кольца L. Наиболее подробно изучались условия вложения ассоциативного кольца в (ассоциативное) тело и произвольного кольца в кольцо с делением. Начало этим исследованиям положила работа А. И. Мальцева [1], в которой был построен пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Долгое время оставалась открытой следующая проблема Мальцева: будет ли вложимо в тело каждое ассоциативное кольцо без делителей нуля, полугруппа ненулевых элементов к-рого вложима в группу? Эта проблема была решена отрицательно в 1966 (см. [2], с. 354). Квадратная матрица A порядка $n \times n$ над ассоциатив-

ным кольцом R наз. неполной, если она представима в виде $A=BC$, где B, C — матрицы порядков $n\times r$ и $r\times n$ соответственно и $r<n$. Пусть

$$A=(a, a_2, \ldots, a_n),\ B=(b, a_2, \ldots, a_n)$$

— квадратные матрицы порядка $n\times n$ над R, у к-рых совпадают все столбцы, кроме, возможно, первого. Тогда матрица

$$C=(a+b, a_2, \ldots, a_n)$$

наз. детерминантной суммой матриц A и B относительно первого столбца. Аналогично определяется детерминантная сумма квадратных матриц одинаковых порядков относительно произвольного столбца (строки). Ассоциативное кольцо R с 1 вложимо в тело тогда и только тогда, когда оно не имеет делителей нуля и никакая скалярная матрица aE с ненулевым элементом a по диагонали не может быть представлена в виде детерминантной суммы конечного числа неполных матриц ([2], с. 349). Класс ассоциативных колец, вложимых в тела, не является конечно аксиоматизируемым (т. е. его нельзя задать конечным числом аксиом) [3]. Известен ряд достаточных условий вложения ассоциативного кольца в тело. Наиболее важными из них являются следующие. Пусть R — ассоциативное кольцо без делителей нуля, полугруппа ненулевых элементов к-рого удовлетворяет условию Ope (см. *Вложение полугруппы*). Тогда кольцо R вложимо в тело ([4], с. 293). Групповая алгебра упорядоченной группы вложима в тело (теорема Мальцева — Неймана, см. [4], с. 294). Произвольная область свободных правых (левых) идеалов (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) вложима в тело ([2], с. 351).

Кольцо R вложимо в кольцо с делением тогда и только тогда, когда оно не содержит делителей нуля. Пусть R, L — кольца, ∞ — символ, $\infty\notin L$. Отображение φ: $R\to\{L, \infty\}$ наз. T-гомоморфизмом; если: 1) множество $\varphi^{-1}(L)$ есть кольцо и отображение φ на этом множестве есть кольцевой гомоморфизм; 2) из $\varphi(ab)\neq\infty$, $\varphi(a)=\infty$ следует $\varphi(b)=0$; 3) из $\varphi(ab)\neq\infty$, $\varphi(b)=\infty$ следует $\varphi(a)=0$. T-гомоморфизм поля есть не что иное, как специализация (или точка) поля. Кольцо с делением L наз. свободным T-расширением кольца R, если: L содержит R и порождается (как кольцо с делением) кольцом R, а любой T-гомоморфизм кольца R в некоторое кольцо с делением S можно продолжить до T-гомоморфизма L в S. Каждое кольцо без делителей нуля обладает свободным T-расширением ([4], с. 301).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 686—691; [2] Кон П. М., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [3] Cohn P. M., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1974, v. 6, p. 147—148; [4] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968. *Л. А. Бокуть.*

ВЛОЖЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ в группу — мономорфизм полугруппы в группу. Полугруппа S вкладывается в группу G, если S изоморфна подполугруппе группы G. Необходимые и достаточные условия В. п. в группу были найдены А. И. Мальцевым [1] (см. также [3], с. 286). Эти условия представляют собой бесконечную систему условных тождеств (*квазитождеств*), среди к-рых, в частности, имеются следующие:

$$ap=aq\to p=q,\ pa=qa\to p=q$$

(законы сокращения);

$$ap=bq,\ ar=bs,\ cp=dq\to cr=ds,$$

где a, b, c, d, p, q, r, s — элементы полугруппы. Класс полугрупп, вложимых в группы, нельзя охарактеризовать конечным числом условных тождеств [2]. Известен ряд достаточных условий В. п. в группу. Наиболее важными из них являются следующие. Если S — полугруппа с сокращением и для любых элементов a, b полугруппы S найдутся элементы x, $y\in S$ та-

кие, что $ax=by$ (условие Оре), то полугруппа S вложима в группу. Если S — полугруппа с сокращением, в к-рой из равенства $ab=cd$ всегда следует, что либо $a=cx$, либо $c=ax$ для нек-рого элемента $x\in S$, то полугруппа S вложима в группу [4]. Известны достаточные условия В. п., сформулированные на языке теории графов (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6 (48), с. 331—36; [2] его же, там же, 1940, т. 8(50), с. 251—64; [3] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Doss R., «Bull. Sci. Math.», 1948, v. 72, p. 139—150; [5] Адян С. И., Труды матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 85, с. 1—123.

Л. А. Бокутъ.

ВЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ — теоретико-множественное включение $V\subset W$ линейного нормированного пространства V в линейное нормированное (полунормированное) пространство W, при к-ром для любого $x\in V$ справедливо неравенство

$$\|x\|_W\leqslant C\|x\|_V$$

с постоянной C, не зависящей от $x\in V$. При этом $\|x\|_W$ — есть норма (полунорма) элемента x в пространстве W, а $\|x\|_V$ — норма (полунорма) элемента x в V.

Тождественный оператор, действующий из пространства V в пространство W и ставящий в соответствие элементу $x\in V$ тот же элемент как элемент пространства W, наз. оператором вложения пространства V в пространство W. Оператор вложения всегда ограничен. Если оператор вложения есть *вполне непрерывный оператор*, то В. ф. п. наз. компактным. Факт В. ф. п. устанавливается *вложения теоремами*.

Пример. Пусть E — измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве с конечной мерой mes E и пусть $L_p(E)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, есть пространство Лебега измеримых функций, суммируемых по E в степени p, с нормой

$$\|x\|_p=\left[\int_E|x(t)|^p\,dt\right]^{1/p}.$$

Тогда при $p\geqslant q$ справедливо В. ф. п. $L_p(E)\to L_q(E)$ и

$$\|x\|_q\leqslant(\text{mes }E)^{1/q-1/p}\|x\|_p.$$

Л. П. Купцов.

ВЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, относящиеся к циклу вопросов, посвященных изучению неравенств между нормами одной и той же функции, принадлежащей к разным классам (нормированным пространствам). Обычно речь идет о двух классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}$ есть часть $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_1$), и при этом выполняется неравенство

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_1}\leqslant C\|f\|_{\mathfrak{M}}$$

для всех $f\in\mathfrak{M}$, где C — константа, не зависящая от f, а $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_1}$ — нормы соответственно в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$. При указанных условиях говорят, что имеет место вложение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_1$ или, что $\mathfrak{M}$ вкладывается в $\mathfrak{M}_1$, и пишут $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}_1$. Исследования, связанные с В. т., составляют раздел теории функций, но главные направления в них развиваются под влиянием краевых задач математической физики, в частности прямых вариационных методов. В связи с этим в течение последних трех десятилетий создана стройная теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных.

К числу задач, решаемых В. т., относятся, напр., следующие. Пусть известно, что функция f имеет частные производные порядка l, вообще говоря, обобщенные (см. *Обобщенная производная*), интегрируемые в p-й степени на данной области Ω n-мерного пространства R_n. Спрашивается: 1) какое гарантированное число непрерывных производных имеет эта функция на Ω? 2) если область Ω имеет достаточно гладкую границу Γ, то можно ли в том или ином смысле определить след $\varphi(x)$ функции f в точках $x\in\Gamma$, т. е. предельные значения $f(u)$, когда u приближается к x, и какими га-

рантированными дифференциальными свойствами обладает этот след? При этом часто надо знать эти свойства настолько точно, чтобы наличие таковых у функции φ, заданной на Γ, влекло возможность продолжения φ с Γ на Ω так, чтобы продолженная функция имела на Ω обобщенные производные порядка l, интегрируемые в p-й степени. Из фактов, приводимых ниже, будет видно, что указанные пределы (понимаемые в смысле сходимости почти всюду) определения следа φ функции f и продолжения φ могут сопровождаться неравенствами между нормами f на Ω и Γ, к-рые и применяются в теории краевых задач.

Многомерная теория вложений классов дифференцируемых функций возникла в 30-х гг. 20 в. в работах С. Л. Соболева в связи с решением задач математич. физики. Ему принадлежат основные В. т. для классов $W_p^l(\Omega)$ (*Соболева пространств*), играющих важную роль в анализе. Функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит $W_p^l(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $l=0,\ 1,\ldots$, если она определена на Ω и для нее конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{W_p^l(\Omega)},\qquad 1\leqslant p\leqslant\infty,\ l=0,\ 1,\ \ldots, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\|f\|_{L_p(\Omega)}&=\left(\int_\Omega|f(x)|^p dx\right)^{1/p},\\ \|f\|_{W_p^l(\Omega)}&=\sum_{|k|=l}\|D^k f\|_{L_p(\Omega)},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и сумма распространена на всевозможные (обобщенные по Соболеву) частные производные

$$D^k f=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \tag{3}$$

$$k=(k_1,\ \ldots,\ k_n),\ |k|=\sum_{j=1}^n k_j,$$

порядка $|k|=l$.

Основная теорема С. Л. Соболева (с дополнениями В. И. Кондрашова и В. П. Ильина) для случая $\Omega=R_n$:

при условиях $1\leqslant m\leqslant n$, $1<p<q<\infty$,

$0\leqslant k=l-n/p+m/q$ справедливо вложение

$$W_p^l(R_n)\longrightarrow W_q^{[k]}(R_m), \tag{4}$$

где $[k]$ — целая часть k.

При $m<n$ это означает, что функция $f\in W_p^l(R_n)$ имеет след (см. ниже) на любой координатной гиперплоскости R_m размерности m,

$$f|_{R_m}=\varphi\in W_q^{[k]}(R_m)$$

и

$$\|f\|_{W_q^{[k]}(R_m)}\leqslant C\,\|f\|_{W_p^l(R_n)},$$

где C не зависит от f (см. [6], [7]).

Функция f, заданная на R_n, имеет след на R_m, где R_m есть m-мерное (координатное) подпространство точек $x=(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0)$ с фиксированными $x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0$, если f можно видоизменить на нек-ром множестве n-мерной меры нуль так, чтобы для видоизмененной функции, к-рая снова обозначается через f, имело место

$$\|f(x_1,\ \ldots,x_m,x_{m+1}^0,\ \ldots,x_n^0)-f(x_1,\ \ldots,x_m,x_{m+1},\ \ldots,x_n)\|\xrightarrow[L_p(R_m)]{}0 \tag{5}$$

$$x_j\longrightarrow x_j^0\quad(j=m+1,\ \ldots,n).$$

Если $\mathfrak{M}$ есть множество функций f, заданных на R_n, то задача описания свойств следов этих функций на подпространство $R_m\,(1\leqslant m<n)$ наз. п р о б л е м о й с л е д о в для класса $\mathfrak{M}$.

Теорема (4) является окончательной в терминах классов $W_p^l(\Omega)$. Дальнейшее ее улучшение возможно лишь путем введения новых классов.

В одномерном случае $n=m=1$, где проблема следов не возникает, теорема (4) принадлежит Г. Харди и Дж. Литлвуду (G. Hardy, J. Littlewood).

Следующим этапом в развитии этой теории являются теоремы вложения С. М. Никольского для обобщенных гёльдеровых классов (см. *Гёльдерово пространство*) (H-классов). Эти классы образуют шкалу с непрерывно меняющимися параметрами, характеризующими гладкость функций. Они анизотропны в том смысле, что принадлежащие к ним функции обладают, вообще говоря, разными дифференциальными свойствами по разным направлениям. Пусть Ω_η есть множество точек $x\in\Omega$, удаленных от границы Ω больше чем на $\eta>0$, и пусть $r=(r_1,\ldots,r_n)$ — положительный вектор $(r_j>0;$ $j=1,\ldots,n)$, $r_j=r_j^*+\alpha_j$, r_j^* — целое и $0<\alpha_j\leqslant 1$.

Функция п р и н а д л е ж и т к л а с с у $f\in H_p^r(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, если $f\in L_p(\Omega)$ и для любого $j=1,\ldots,m$ существует обобщенная частная производная

$$D_j^{r_j^*} f=\frac{\partial^{r_j^*} f}{\partial x_j^{r_j^*}},\tag{6}$$

удовлетворяющая неравенству

$$\left\|\Delta_{jh}^2\left(D_j^{r_j^*} f\right)\right\|_{L_p(\Omega_{2|h|})}\leqslant M\,|h|^{\alpha_j},\tag{7}$$

где Δ_{jh}^2 — вторая разность функции по переменной x_j с шагом h и M — константа, не зависящая от h.

Класс $H_p^r(\Omega)$ образует банахово пространство, если ввести норму

$$\|f\|_{H_p^r(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+M_f,$$

где M_f — наименьшая константа M, при к-рой выполняются неравенства (7). Для $r_1=\ldots=r_n=r$ соответствующий (изотропный) класс обозначается через H_p^r. При целом l класс H_p^l близок к классу Соболева W_p^l с точностью до $\varepsilon>0$ в том смысле, что

$$H_p^{l+\varepsilon}(R_n)\longrightarrow W_p^l(R_n)\longrightarrow H_p^{l-\varepsilon}(R_n).\tag{8}$$

Справедливы теоремы вложения (С. М. Никольский)

$$H_p^r(R_n)\longrightarrow H_q^\rho(R_m),\tag{9}$$

где $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $1\leqslant m\leqslant n$, $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)$,

$$\rho_j-\varkappa r_j\quad(j=1,\ldots,m),$$

$$\varkappa=1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^m\frac{1}{r_j}-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^n\frac{1}{r_j}>0;$$

$$H_p^r(R_n)\rightleftarrows H_p^\rho(R_m),\tag{10}$$

где $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant m<n$, $\rho_j=\varkappa r_j$, $j=1,\ldots,m$,

$$\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^n\frac{1}{r_j}>0$$

(см. [5]).

Теорема (9) является анизотропным аналогом теоремы (4), но имеет то преимущество, что верхние (векторные) индексы r, ρ фигурирующих в ней классов могут изменяться непрерывно. Кроме того, она полностью охватывает случаи $p=1$, ∞. Однако при $\varkappa=0$ она, в отличие от (4), неверна. В одном случае ($n-m=1$) при r и ρ не целых она доказана Г. Харди и Дж. Литлвудом.

Частный случай теоремы (9) при $p=q$ записан еще раз в виде вложения (10) с верхней стрелкой. Оно гласит: функция $f\in H_p^r(R_n)$ имеет след $f|_{R_m}=\varphi$ на R_m и при этом

$$\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(R_m)}\leqslant C\,\|f\|_{H_p^r(R_n)}, \tag{11}$$

где C не зависит от f. Но справедливо и обратное утверждение, выражаемое нижней стрелкой, к-рое надо понимать в следующем смысле: каждая определенная на R_m функция $\varphi\in H_p^{\rho}(R_m)$ может быть продолжена на все пространство R_n так, что полученная функция $f(x)$ (со следом на R_m, равным φ) принадлежит к $H_p^r(R_n)$ и выполняется неравенство (обратное к (11)):

$$\|f\|_{H_p^r(R_n)}\leqslant C_1\,\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(R_m)},$$

где C_1 не зависит от φ.

Взаимно обратные вложения (10) полностью решают проблему следов для H-классов и при этом в терминах H-классов.

Теорема (9) носит транзитивный характер, заключающийся в том, что переход

$$H_p^r(R_n)\longrightarrow H_{p'}^{\rho'}(R_m)\longrightarrow H_{p''}^{\rho''}(R_{m''}) \tag{12}$$

от первого класса в цепи (12) ко второму, а затем от второго к третьему, где параметры $\boldsymbol{\rho}'$, $\boldsymbol{\rho}''$ вычисляются по указанным в (9) формулам, может быть заменен одним переходом от первого класса к третьему при непосредственном вычислении $\boldsymbol{\rho}''$ по тем же формулам.

В дальнейшем (см. далее [14]) была решена проблема следов для W-классов, вообще анизотропных. Это привело к введению нового семейства классов дифференцируемых функций многих переменных $B_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}(R_n)$, зависящих от векторного параметра $\boldsymbol{r}$ и двух скалярных параметров p, θ, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant p,\ \theta\leqslant\infty$. Во всей полноте это семейство определил О. В. Бесов, изучивший также его основные свойства.

Функция f принадлежит классу $W_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)$, где $\boldsymbol{l}=(l_1,\ldots,l_n)$ — целый вектор, если для нее имеет смысл конечная норма

$$\|f\|_{W_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{w_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\|f\|_{w_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}=\sum_{j=1}^n\|D_j^{l_j}f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Функция f принадлежит классу $B_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}(\Omega)$, где $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_n)$ — произвольный, не обязательно целый вектор, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant\theta<\infty$, $r_j>0$, если для нее конечна норма

$$\|f\|_{B_p^{\boldsymbol{r}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{b_p^{\boldsymbol{r}}(\Omega)},$$

$$\|f\|_{b_p^{\boldsymbol{r}}(\Omega)}=$$

$$=\sum_{j=1}^n\left\{\int_0^{\infty}t^{-\theta\alpha_j-1}\left\|\Delta_{f_j^*t}^2f\left(\frac{r_j^*}{x_j}\right)\right\|_{L_p(\Omega_{2t})}^{\theta}dt\right\}^{1/\theta},$$

где числа r_j^* и α_j определены выше.

Естественно считать, что класс $B_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}$ при $\theta=\infty$ совпадает с классом $H_p^r(B_{p\infty}^{\boldsymbol{r}}=H_p^r)$. Обычно пишут еще $B_p^r\theta$ вместо $B_{p\theta}^r$, когда $r_1=\ldots=r_n=r$ и $B_p^r=B_{pp}^r$, $B_p^{\boldsymbol{r}}=B_{pp}^{\boldsymbol{r}}$. Для любых указанных p, θ, $\boldsymbol{r}$ классы $B_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}$ суть банаховы пространства.

Теоремы вложения (9), (10) верны, если в них заменить H на B. Имеют место также взаимно обратные вложения

$$W_p^r(R_n)\rightleftarrows B_p^{\varkappa r,m}(R_m), \tag{14}$$

где r — целое, $1<p<\infty$, $r^m=(r_1, \ldots, r_m, 0, \ldots, 0)$, $\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j}>0$, полностью решающие проблему следов для W-классов, что не мешает выполняться взаимно обратным вложениям, выраженным полностью на языке B-классов:

$$B_{p\theta}^{r}(R_n) \rightleftarrows B_{p\theta}^{\varkappa r, m}(R_m). \tag{15}$$

Классы B_2^r, соответствующие значениям параметров $p=\theta=2$, принято еще обозначать через $W_2^r(B_2^r = W_2^r)$. При $p=2$ вложения (14) записываются еще и так

$$W_2^r(R_n) \rightleftarrows W_2^{\varkappa r, m}(R_m). \tag{16}$$

Естественными продолжениями W-классов являются классы, в определении к-рых фигурирует понятие дробной производной по Лиувиллю (см. *Дробное интегрирование и дифференцирование*).

Употребляя терминологию обобщенных функций, можно задать основной класс Λ функций так, что построенный над ним класс Λ' обобщенных функций будет обладать следующими свойствами: 1) $L_p(R_n)\subset\Lambda'$ при любом конечном $p\geqslant 0$; 2) при любом $l>0$, не обязательно целом, имеет смысл операция

$$D_j^l f = (\widehat{x_j^l \tilde{f}},\ f)\in\Lambda', \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ означают соответственно прямое и обратное *Фурье преобразование* $\psi\in\Lambda'$; 3) если l — целое и функция $f\in L_p(R_n)$ имеет обобщенную по Соболеву производную $D_j^l f\in L_p(R_n)$, то для нее имеет место равенство (17).

При дробных l на бесконечно дифференцируемых финитных функциях операция (17) совпадает с операцией дробного дифференцирования по Лиувиллю. Естественно называть $D_j^l f$ при нецелом l д р о б н о й п р о и з в о д н о й от f порядка l по x_j.

Если теперь задан произвольный вектор $l=(l_1, \ldots, l_n)$, то можно ввести пространство $L_p^l(R_n)$, $1\leqslant p<\infty$, совпадающее с $W_p^l(R_n)$ при целых l, заменив в (13) W на L.

Если $l=l_1=\ldots=l_n$, то положим $L_p^l=L_p^l$. Семейство классов $L_p^l(R_n)$, $l>0$, $1\leqslant p<\infty$, может рассматриваться как естественное расширение семейства $W_p^l(R_n)$ на дробное l, «естественное» потому, что с точки зрения интересующего нас круга идей классы L_p^l обладают «всеми достоинствами и недостатками классов W_p^l». Если в формуле (4) (где $[k]$ можно заменить на k), или (8) (где l может быть дробным), или в (14), (16) (где r может быть дробным) заменить W на L, то они останутся верными. Верной также останется формула (9), если в ней заменить H на L даже при более широком условии $\varkappa\geqslant 0$, однако в предположении, что $1<p<q<\infty$.

В дальнейшем продолжается применение аппарата обобщенных функций, но теперь уже составляющих пространство S'. Для любого действительного числа ρ имеет смысл операция (Бесселя — Макдональда):

$$J_\rho f=\widehat{(1+|x|^2)^{-\rho/2}\tilde{f}},\ f\in S',\ |x|^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2,$$

обладающая свойствами: $J_0 f=f$, $J_{r+\rho}=J_r J_\rho$, $J_{-2l}=(1-\Delta)^l$, $l=0, 1, \ldots$, где $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

Изотропный класс $L_p^\rho=L_p^\rho(R_n)$, $1<p<\infty$, может быть определен еще как совокупность функций f, представимых в виде $f=J_\rho\varphi$, где функции φ пробегают

пространство $L_p - L_p(R_n)$ ($L_p^\rho = J_\rho(L_p)$), при этом, с точностью до эквивалентности,

$$\| f \|_{L_p^\rho} = \| \varphi \|_{L_p}.$$

Это определение класса L_p^ρ годится и для отрицательных ρ, но в этом случае L_p^ρ есть совокупность, вообще говоря, обобщенных функций ($L_p^\rho \subset S'$). В частности, $L_p^0 = L_p$.

Операция J_ρ может служить средством и для определения классов $B_{p\theta}^r(B_{p\infty}^r = H_p^r)$. Именно, будем называть обобщенную функцию f регулярной в смысле L_p или принадлежащей к S_p', если найдется такое $\rho > 0$, что $J_\rho f \in L_p$. Всякую функцию $f \in B_{p\theta}^r - B_{p\theta}^r(R_n)$, $1 \leqslant \rho$, $\theta \leqslant \infty$, $B_{p\infty}^r = H_p^r$, можно определить как регулярную в смысле L_p функцию, представимую рядом

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(x),$$

слабо сходящимся к f (в смысле S'), где q_0 имеет *спектр* (носитель $\tilde{q}_0$) в Δ_0, а q_s при $s \geqslant 1$ имеет спектр в $\Delta_{s+1} \setminus \Delta_{s-1}$ и

$$\Delta_s = \{x;\ |x_j| \leqslant 2^s;\ j = 1, \ldots, n\},$$

и при этом

$$\| f \|_{B_{p\theta}^r} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} \| q_s \|_{L_p}^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty.$$

В частности,

$$\| f \|_{H_p^r} = \| f \|_{B_{p\infty}^r} = \sup_s (2^{sr} \| q_s \|_{L_p}).$$

Это определение класса $B_{p\theta}^r$ автоматически распространяется на случай $r \leqslant 0$, и тогда функции f, входящие в эти классы, будут, вообще говоря, обобщенными ($f \in S'$). При этом $J_r(B_p^0) = B_p^r$, $-\infty < r < \infty$.

Существуют и другие эквивалентные определения отрицательных классов $B_{p\theta}^r$, основанные на принципе интерполяции функциональных пространств. Приведенное определение носит конструктивный характер — каждый заданный параметрами r, p, θ класс определяется независимо, при этом можно конструктивно определить линейные операции, при помощи к-рых по данной функции $f \in S_p'$ определяется функция q_s (экспоненциального типа 2^{s+1} при $s \geqslant 1$ и типа 1 при $s = 0$).

Справедлива теорема вложения:

$$\Lambda_p^r(R_n) \longrightarrow \Lambda_q^{r-(1/p-1/q)n}(R_n)$$

типа теоремы (4), но с $n - m$, верная при любом действительном r для $\Lambda = L$, $1 < p < q < \infty$ или для $\Lambda = B$, $1 \leqslant p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$ или для $\Lambda = H$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

С другой стороны, при $r - (n - m)/p - 0$ произвольная функция $f \in \Lambda_p^r(R_n)$, вообще говоря, не имеет следа на R_m ($m < n$), если не налагать на нее дополнительных условий.

Выше были сформулированы В. т. для классов функций, определенных на всем n-мерном пространстве R_n (см. [5]). Но для приложений важно иметь подобные теоремы для возможно общих областей $\Omega \subset R_n$. В настоящее время выяснена геометрич. структура областей Ω, для к-рых верны указанные теоремы вложения для W-, B- и H-классов, где надо заменить R_n, R_m соответственно на Ω, $R_m \cap \Omega$. Для изотропных классов $W_p^r(\Omega)$, $B_{p\theta}^r(\Omega)$ область Ω должна удовлетворять условию конуса или, что равносильно, граница ее должна удовлетворять локально условию Липшица. Для анизотропных же классов $W_p^{\bar{r}}(\Omega)$, $B_{p\theta}^{\bar{r}}(\Omega)$ область Ω должна удовлетворять условию $\bar{r}$-рога или изогнутого конуса (*конуса*

условие) и это условие является в известном смысле необходимым (см. [2]).

Для приложений важна еще проблема о следах на m-мерных многообразиях S_m.

Для изотропных классов W, H, B эта проблема решена полностью (см. [2], [16]), если S_m достаточно много раз дифференцируемо при $r=r_1=\ldots=r_n$, в (14), (15) и (16) можно заменить R_m на S_m, а в (19), кроме того, можно заменить H на B. В случае кусочно гладких S_m этот вопрос тоже в ряде случаев решен до конца ([16], [22]), условия, решающие проблему, выражаются, с одной стороны, указанными выше взаимно обратными вложениями на отдельных гладких кусках S_m, а с другой — специальными дополнительными условиями на поведение функций соответствующих классов на стыках этих гладких кусков. Существенно продвинута также проблема следов для анизотропных классов ([9], [21]). Здесь возникают особые затруднения характеристики следа в точках S_m, касательные плоскости к к-рым параллельны осям координат.

Остановимся еще на одной задаче. Пусть функция

$$f \in \Lambda_p^r(R_n) = \Lambda_p^r,$$

где Λ_p^r означает один из рассмотренных выше классов. Спрашивается, какие она имеет частные смешанные производные $D^k f$ и каковы их свойства? Положительный ответ на этот вопрос зависит от величины

$$\varkappa = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{r_j}.$$

Именно, если $f \in \Lambda_p^r$, то существует частная производная $D^k f$, принадлежащая к пространству $\Lambda_p^{\varkappa r}$ при условии, что $\varkappa > 0$. В случае же пространств L_p^r это условие можно расширить, считая $\varkappa \geqslant 0$ (см. [5]).

Приведем еще характерную теорему, к-рую естественно назвать теоремой об ослабленной компактности и к-рая имеет применение в теории прямых методов вариационного исчисления.

Из бесконечного множества $\mathfrak{M}$ функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\| f \|_{\Lambda_p^r(R_n)} \leqslant K,$$

где K — заданная константа, а Λ — один из рассмотренных выше классов, можно выделить последовательность $\{f_m\}$ функций и указать такую функцию f_0 с нормой

$$\| f_0 \|_{\Lambda_p^r(R_n)} \leqslant K,$$

что какова бы ни была ограниченная область $G \subset R_n$ и вектор $\varepsilon > 0$

$$\| f_m - f_0 \|_{\Lambda_p^{r-\varepsilon_{(G)}}} \longrightarrow 0, \quad m \longrightarrow \infty,$$

(см. [5]). В этой формулировке R_n может быть заменено на область Ω, если она имеет достаточно хорошую границу. Выше были рассмотрены только характерные классы функций и связанные с ними теоремы вложения, наиболее часто встречающиеся в приложениях. В современных исследованиях большое внимание [2] уделяется классам более общим, где роль исходных частных производных $D^k f$, $D_j^p f$ играют более или менее произвольные дифференциальные операторы.

Изучаются еще так наз. весовые классы, характерным примером к-рых является класс $W_{p\alpha}^r(\Omega)$, определяемый следующим образом. Пусть $\rho(x)$ есть расстояние от точки x до границы Γ области $\Omega \subset R_n$. Функция f принадлежит к $W_{p\alpha}^r(\Omega)$, $r>0$, $1 \leqslant p < \infty$, если для

нее конечна норма (см. [4], [12])

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)},$$

где

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \left\| \frac{D^k f}{\rho^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Приведем только один результат. Пусть Γ_m — достаточно гладкая граница m измерений; тогда

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \rightleftarrows H^{r+\alpha-(n-m)/p}_p(\Gamma),$$

если $r+\alpha-(n-m)p>0$, $\alpha<(n-m)/p$, $1<p<\infty$.

Пример. Использование В. т. полностью решает вопрос об условиях на граничную функцию, при к-рых применим *Дирихле принцип*. Именно, понимая частные производные в обобщенном смысле и считая для простоты, что поверхность Γ (граница трехмерной области) ограничена и дважды дифференцируема, задаем на Ω функцию $f_0 \in W^1_2(\Omega)$. Для нее *Дирихле интеграл* $D(f_0)<\infty$ и, кроме того, по В. т.

$$W^1_2(\Omega) \rightleftarrows W^{1/2}_2(\Gamma) = B^{1/2}_2(\Gamma)$$

f_0 имеет след на Γ (факт существования следа у f_0 устанавливался при помощи более грубых В. т.). Обозначив через $\mathfrak{M}$ класс функций $f \in W^1_2(\Omega)$, имеющих тот же след на Γ, что и f_0, $f|_\Gamma = f_0|_\Gamma = \varphi$, можно сформулировать принцип Дирихле следующим образом: минимум $D(f)$ среди функций $f \in \mathfrak{M}$ достигается для единственной функции и к тому же гармонической на Ω. Из приведенной В. т. следует, что принцип Дирихле применим тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{M}$ не пуст, т. е. когда граничная функция $\varphi \in B^{1/2}_2(\Gamma)$.

При обосновании принципа Дирихле сначала доказывается существование и единственность функции $u \in \mathfrak{M}$, а также тот факт, что u есть обобщенное решение задачи Дирихле, а затем при помощи специального метода последовательно устанавливается, что обобщенное решение принадлежит классам $W^l_2(\omega)$, где $l=2, 3, \ldots$, а $\omega \subset \Omega$ - произвольный замкнутый шар. В частности, из того факта, что $u \in W^4_2(\omega)$, на основании В. т.

$$W^4_2(\omega) \longrightarrow H^4_2(\omega) \rightarrow H^{5}_{\infty\ 2}(\omega)$$

(см. [2] и [5]) при $n=m=3$, $p=2$, $q=\infty$, $r_1=r_2=r_3=4$) заключаем, что функцию u можно видоизменить на множестве трехмерной меры нуль так, чтобы полученная функция была дважды непрерывно дифференцируема на Ω. После этого легко доказывается, что u — гармоническая.

Приведенный пример может быть значительно обобщен на нек-рые функционалы, в к-рые входят частные производные разных порядков, возведенные в степень, вообще не равную 2 ($p \neq 2$), и тогда появляется необходимость применения В. т. для более общих классов, вообще говоря, анизотропных.

Лит.: [1] Сб. дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, с. 38—63; [2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974; [3] Буренков В. И., Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных во всем пространстве, в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1965, М., 1966; [4] Никольский С. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5,с. 63—114; [5] его же, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [6] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950· [7] его же, Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [8] Бесов О. В., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 42—81; [9] Бугров Я. С., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 5, с. 1007 -26; [10] Ильин В. П., «Докл. АН СССР», 1954, т. 96, № 5, с. 905 -8; [11] Кондрашов В. И., там же, 1945, т. 48, с. 563—6; [12] Кудрявцев Л. Д., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—182; [13] Лизоркин П. И., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, № 3, с. 514—17; [14] его же, «Матем. сб.»,

1963, т. 60, в. 3, с. 325—53; [15] Никольский С. М., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 244—78; [16] его же, «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 2, с. 261—326; 1957, т. 43, в. 7, с. 127—44; [17] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1935, т. 3, № 7, с. 291—4; [18] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, в. 1, с. 39—72; 1938, т. 4, в. 3, с. 471—97; [19] Слободецкий Л. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, в. 2, с. 243—6; [20] Успенский С. В., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 282—303; [21] его же, «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 4, с. 750—2; [22] Яковлев Г. Н., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 325—49; [23] Gagliardo E., «Rend Semin. matem. in-ta di Padova», 1957, t. 27, p. 284—305; [24] Hardy G. H., Lilttlewood J. E., «Math. Z.», 1928, Bd 28, № 4, S. 612—34; [25] Lions J. L., Magenes E., Problemes aux limites non homogénes et applications, P., 1968, v. 1—2.

С. М. Никольский.

ВМОРОЖЕННОСТИ ИНТЕГРАЛ — интеграл уравнения индукции магнитного поля в предельном случае идеально проводящей среды. Физический смысл В. и. заключается в том, что при перемещении жидкости силовые линии магнитного поля перемещаются вместе с ее частицами.

При движении идеально проводящей среды напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\right)-\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\,,\,\nabla\right)\boldsymbol{v},$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{v}$ — скорость среды, а изменение элемента длины $d\boldsymbol{l}$ силовой линии магнитного поля уравнением

$$\frac{d}{dt}\,d\boldsymbol{l}=(d\boldsymbol{l},\,\nabla)\,\boldsymbol{v}.$$

Векторы $\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{l}$ — коллинеарны:

$$\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}=\text{const}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Справедливо равенство, наз. интегралом вмороженности,

$$\frac{\boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}_0}{\rho}=\frac{\boldsymbol{H}_0}{\rho_0}\,d\boldsymbol{l},$$

где индекс «0» относится к величинам в начальный момент времени.

Следствием В. и. является независимость от времени потока магнитного поля через любую поверхность, охватываемую контуром из жидких частиц.

Лит.: [1] Каулинг Т., Магнитная гидродинамика, пер. с англ., М., 1959; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1959; [3] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962.

А. П. Фаворский.

ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — основная операция *внешней алгебры* тензоров, определенных в n-мерном векторном пространстве V над полем K.

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — базис V, a и b — p- и q-формы:

$$a=a^{i_1\ldots i_p}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p},$$
$$b=b^{j_1\ldots j_q}e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_p}.$$

Внешнее произведение форм a и b есть $(p+q)$-форма c, получающаяся альтернацией тензорного произведения $a\otimes b$. Форма c обозначается $a\wedge b$; она имеет кососимметрические координаты

$$c^{k_1\ldots k_{p+q}}=\frac{1}{p!\,q!}\,\delta^{k_1\ldots\ldots\ldots k_{p+q}}_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}\,a^{i_1\ldots i_p}b^{j_1\ldots j_q},$$

где $\delta^{k_1\ldots k_{p+q}}_{i_1\ldots j_q}$ — компоненты обобщенного *Кронекера символа*. Аналогично определяется В. п. ковариантных тензоров.

Основные свойства В. п.:

1) $(ka)\wedge b=a\wedge(kb)=k(a\wedge b)$, $k\in K$, — однородность,

2) $(a+b)\wedge c=a\wedge c+b\wedge c$ — дистрибутивность,

3) $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ — ассоциативность.

4) $a\wedge b=(-1)^{pq}b\wedge a$; если характеристика поля K отлична от двух, то для формы a нечетной валентности $a\wedge a=0$.

В. п. s векторов наз. р а з л о ж и м ы м s-в е к т о р о м. Каждый *поливектор* размерности s есть линейная комбинация разложимых s-векторов. Компоненты разложения являются $s\times s$-минорами $n\times s$-матрицы (a_j^i), $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant s$, коэффициентов векторов $a_1, \ldots, a_s$. При $s=n$ их В. п. имеет вид:

$$\alpha_n = a_1\wedge a_2\wedge \ldots \wedge a_n = \det(a_j^i)\, e_1\wedge \ldots \wedge e_n.$$

Над полями характеристики, отличной от двух, равенство $a_1\wedge \ldots \wedge a_s=0$ необходимо и достаточно для линейной зависимости векторов $a_1, \ldots, a_s$. Ненулевой разложимый s-вектор α_s определяет в V s-мерное ориентированное подпространство A, параллельное векторам $a_1, \ldots, a_s$, и *параллелотоп*, лежащий в A и образованный векторами $a_1, \ldots, a_s$, выходящими из одной точки (этот параллелотоп обозначается через $[a_1, \ldots, a_s]$). Условия $a\in A$ и $\alpha_s\wedge a=0$ эквивалентны.

Лит. см. при статье *Внешняя алгебра*. *Л. П. Купцов.*

ВНЕШНИХ ФОРМ МЕТОД — см. *Картана метод внешних форм*.

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА, а л г е б р а Г р а с с м а н а, векторного пространства V над полем k — ассоциативная алгебра над k, операция в к-рой обозначается знаком $\wedge$, порождающими элементами к-рой являются $1, e_1, \ldots, e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, а определяющие соотношения имеют вид

$$e_i\wedge e_j = -e_j\wedge e_i \ (i,\ j=1,\ \ldots,\ n),\ e_i\wedge e_i=0,$$
$$1\wedge e_i = e_i\wedge 1 = e_i \ (i=1,\ \ldots,\ n),\ 1\wedge 1=1.$$

В. а. не зависит от выбора базиса и обозначается $\wedge V$. Подпространство $\wedge^r V$ ($r=0, 1, \ldots$) в $\wedge V$, порожденное элементами вида $e_{i_1}\wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, наз. r-й в н е ш н е й с т е п е н ь ю п р о с т р а н с т в а V. Имеют место равенства: $\dim \wedge^r V = C_n^r$, $r=0, \ldots, n$, $\wedge^r V=0$, $r>n$. Кроме того, $v\wedge u=(-1)^{rs}u\wedge v$, если $u\in\wedge^r V$, $v\in\wedge^s V$. Элементы пространства $\wedge^r V$ наз. r-в е к т о р а м и; их можно понимать также как кососимметрические r раз контравариантные тензоры в V (см. *Внешнее произведение*).

r-векторы тесно связаны с r-мерными подпространствами в V: линейно независимые системы векторов $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_r$ из V порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда r-векторы $x_1\wedge \ldots \wedge x_r$ и $y_1\wedge \ldots \wedge y_r$ пропорциональны. Этот факт был одним из отправных пунктов в исследованиях Г. Грассмана [1], к-рый ввел В. а. как алгебраич. аппарат для описания порождения многомерных подпространств одномерными. С помощью В. а. легко строится теория определителей. В. а. может быть определена и для более общих объектов, а именно, для унитарных модулей M над коммутативным кольцом A с единицей (см. [4]). r-я внешняя степень $\wedge^r M$, $r>0$, модуля M определяется как фактормодуль r-й тензорной степени этого модуля по подмодулю, порожденному элементами вида $x_1\otimes \ldots \otimes x_r$, где $x_i\in M$ и $x_j=x_k$ для нек-рых $j\neq k$. В. а. для M определяется как прямая сумма $\wedge M = \bigoplus_{r\geqslant 0}\wedge^r M$, где $\wedge^0 M=A$, с естественно введенным умножением. В случае конечномерного векторного пространства это определение совпадает с первоначальным. В. а. модуля находит применение в теории модулей над кольцом главных идеалов (см. [5]).

Г р а с с м а н о в ы м и (или п л ю к к е р о в ы м и) к о о р д и н а т а м и r-мерного подпространства L в n-мерном пространстве V над k наз. координаты r-вектора в V, соответствующего L, к-рый определен с точностью до пропорциональности. С помощью грассмановых координат множество всех r-мерных подпространств в V естественным образом вкладывается в проективное пространство размерности C_n^r-1 и оказывается там алгебраич. многообразием (наз. *Грассмана многообразием*). Этот метод позволяет построить целый

ряд важных примеров проективных алгебраич. многообразий [6].

В форме исчисления внешних *дифференциальных форм* В. а. используется в качестве одного из основных формализмов в дифференциальной геометрии (см. [8], [7]). В терминах В. а. формулируются многие важные результаты алгебраич. топологии.

Например, если G — конечномерное H-пространство (например, группа Ли), то алгебра $H^*(G, k)$ когомологий пространства G с коэффициентами в поле k характеристики нуль является В. а. с образующими нечетных степеней. Если G — односвязная компактная группа Ли, то В. а. (над кольцом целых чисел) является также кольцо $K^*(G)$, изучаемое в *K-теории*.

Лит.: [1] Grassmann H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke, Bd 1, Tl. 1—2, Lpz., 1894—96; [2] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 2 изд., М., 1956; [3] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [5] его же, Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1968; [6] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954; [7] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948; [8] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

А. Л. Онищик.

ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ — краевые задачи (к. з.) для эллиптич. уравнений с частными производными соответственно в конечной (внутренней) D^+ и бесконечной (внешней) D^- областях, на к-рые данная замкнутая гладкая поверхность S, гомеоморфная сфере, разделяет евклидово пространство $\mathbb{R}^3$.

Основное отличие внешней к. з. от внутренней состоит в том, что в ней необходимо дополнительно к краевому условию потребовать от решения определенного поведения на бесконечности, обеспечивающего единственность решения и являющегося естественным с точки зрения физического происхождения данной задачи.

Напр., в случае внешней к. з. для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ (функция f предполагается достаточно гладкой и финитной) достаточно потребовать, чтобы решение $u(M)$ было регулярным на бесконечности, т. е. чтобы

$$\lim_{r\to\infty} u(M) = 0, \quad r = |OM|. \tag{1}$$

В случае внешней к. з. для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в бесконечной плоской области $D^- \subset \mathbb{R}^2$ условие регулярности на бесконечности сводится к требованию, чтобы решение $u(M)$ было ограниченным на бесконечности:

$$u(M) = 0(1), \quad r\to\infty. \tag{2}$$

В случае внешней к. з. для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = f$, $k^2 > 0$, требование регулярности на бесконечности оказывается недостаточным для выделения единственного решения и применяется так наз. *излучения условие*. Для области D^- в $\mathbb{R}^3$:

$$u(M) = O(r^{-1}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} \pm iku = O(r^{-1}), \quad r\to\infty, \tag{3}$$

и для $D^- \subset \mathbb{R}^2$:

$$u(M) - O(r^{-1/2}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} \pm iku = O(r^{-1/2}), \quad r\to\infty, \tag{4}$$

причем знаки здесь выбираются в зависимости от условий задачи и выбора *главного фундаментального решения*. О других условиях на бесконечности см. *Предельного поглощения принцип*, *Предельной амплитуды принцип*.

Пусть теперь рассматриваются к. з. для линейного эллиптич. уравнения общего вида

$$Lu \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (5)$$

в областях D^+ и D^- евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, выделяемых замкнутой гладкой гиперповерхностью S, гомеоморфной сфере в $\mathbb{R}^n$, причем функции a_{ik}, b_i, c и f предполагаются достаточно гладкими, f — финитная. Условия регулярности на бесконечности типа (1) или (2) будут достаточны во внешних к. з. соответственно при $n\geqslant 3$ или $n=2$ в тех случаях, когда для оператора L выполняется принцип максимума и существует одно единственное главное фундаментальное решение; в частности, для этого необходимо $c\leqslant 0$; см. [1], [2], [3]. Вопрос о применимости условия излучения, принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды в общем виде нельзя считать полностью изученным (1977).

Кроме условий на бесконечности, внешняя и внутренняя к. з. могут отличаться условиями существования решения. Напр., в случае внутренней *Неймана задачи* для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в конечной области $D^+\subset\mathbb{R}^3$ необходимое условие существования решения имеет вид

$$\int_S \psi(M)\,dS = 0,$$

где $\psi(M)$ — заданная граничная функция в условии Неймана $\partial u/\partial n=\psi(M)$. Однако для внешней задачи Неймана в бесконечной области $D^-\subset\mathbb{R}^3$ это условие уже не является необходимым.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [3] Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М.—Л., 1950; [4] его же, Методы потенциала в теории, упругости, М., 1963; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

ВНЕШНЯЯ МЕРА — неотрицательная функция множества, обозначаемая μ^*, заданная на счетно аддитивном классе множеств, содержащем вместе с множеством любое его подмножество и обладающая свойствами: монотонности, т. е.

$$\mu^*(X)\leqslant\mu^*(Y), \text{ если } X\subset Y;$$

счетной полуаддитивности, т. е.

$$\mu^*\left(\bigcup_i X_i\right)\leqslant\sum_i \mu^*(X_i);$$

$\mu^*(\phi)=0$, где ϕ — пустое множество.

В. м., заданная на всех подмножествах метрич. пространства, наз. В. м. в смысле Каратеодори, или метрической В. м., если

$$\mu^*(X\cup Y)=\mu^*(X)+\mu^*(Y),$$

как только $\rho(X, Y)>0$, где $\rho(X, Y)$ — расстояние между множествами X и Y. По данной В. м. может быть выделен класс измеримых множеств, на к-рых μ^* становится мерой.

В. м., в частности, возникают при построении продолжения меры с кольца R на порожденное им σ-кольцо.

В классич. теории *Лебега меры* (см. [1]) внешняя мера множества определяется как нижняя грань мер открытых множеств, содержащих данное множество, а внутренняя мера множества — как верхняя грань мер замкнутых множеств, содержащихся в заданном множестве.

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

В. А. Скворцов.

ВНЕШНЯЯ НОРМАЛЬ выпуклой поверхности — вектор, перпендикулярный *опорной пло-*

скости и направленный в то полупространство, определяемое опорной плоскостью, к-рое не содержит точек поверхности. *Е. В. Шихин.*

ВНЕШНЯЯ ФОРМА степени r, внешняя r-форма, — однородный элемент степени r *внешней алгебры* $\wedge V$ векторного пространства V, т. е. элемент r-й внешней степени $\wedge^r V$. Выражение «внешняя форма степени r на пространстве V» обычно обозначает кососимметрическую r-линейную функцию (или кососимметрический r раз ковариантный тензор) на V. Прямая сумма пространств кососимметрических r-линейных функций на V, $r=0, 1, \ldots$, снабженная *внешним произведением*, есть алгебра, изоморфная внешней алгебре $\wedge V^*$.

Под В. ф. иногда понимают также внешнюю дифференциальную форму, см. *Дифференциальная форма.* *А. Л. Онищик.*

ВНУТРЕННЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f: X \to Y$ топологич. пространства X в топологич. пространство Y такое, что образ любого открытого в X множества U открыт в Y, а прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$ вполне несвязен (т. е. не содержит связных компонент, отличных от точки).

Пусть F отображает нек-рую *риманову поверхность* R на сферу S^2, тогда гомеоморфизм $T: M \to R$ ориентированной поверхности M индуцирует отображение

$$\tilde{F} = F \circ T: M \to S^2,$$

топологически эквивалентное F. Для топологич. эквивалентности аналитич. функции F и нек-рого отображения $\tilde{F}$ необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{F}$ было внутренним отображением (тогда существует гомеоморфизм T такой, что $\tilde{F} = F \circ T$) (теорема Стоилова).

Локальная структура В. о. $\tilde{F}: M \to \mathbb{R}^2$ описывается следующим образом: для любой точки $a \in M$ существуют окрестность $U(a)$ и гомеоморфизмы $T_1: B \to U(a)$ единичного круга $B = \{z \in \mathbb{R}^2, |z| < 1\}$ на $U(a)$ и $T_2: \tilde{F}(U(a)) \to B$ такие, что $T_2 \circ \tilde{F} \circ T_1 = z^n$.

Лит.: [1] Стоилов С., Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964.
В. А. Зорич.

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ — колебания поверхности раздела двух или нескольких тяжелых жидкостей разных плотностей. При непрерывном распределении плотности жидкости под В. в. понимают колебания поверхностей равной плотности.

Пусть на поверхности бесконечно глубокой тяжелой жидкости плотности ρ_2 покоится слой жидкости плотности $\rho_1 < \rho_2$ и глубины h. На открытой поверхности жидкости и на поверхности раздела двух жидкостей могут возникнуть потенциальные стоячие волны длины $\lambda = 2\pi/k$ двух видов. Частота σ колебаний волн первого вида определяется формулой:

$$\sigma^2 = gk,$$

частота колебаний волн второго вида определяется формулой:

$$\sigma^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kh}.$$

При данной длине волн второго вида частота их колебаний мала для небольшой разности плотностей. Амплитуда колебаний поверхности раздела во много раз превосходит амплитуду колебаний открытой поверхности, будучи равной

$$\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} e^{kh}. \qquad (*)$$

Прогрессивные волны, возникающие от колебаний первого вида, имеют скорость распространения

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Скорость распространения прогрессивных волн, возникающих из стоячих волн второго вида, значительно меньше:

$$c^2 - \frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2 \operatorname{cth}\frac{2\pi h}{\lambda}}.$$

Амплитуда прогрессивных волн второго вида для поверхности раздела значительно превосходит амплитуду волн, распространяющихся по открытой поверхности. Отношение этих амплитуд дается формулой (*).

Лит.: [1] Краусс В., Внутренние волны, пер. с нем., Л., 1968.

Л. Н. Сретенский.

ВНУТРЕННИЙ АВТОМОРФИЗМ группы G — автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = g^{-1}xg$$

для некоторого фиксированного элемента $g \in G$. Совокупность всех В. а. группы G образует нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов G, эта подгруппа изоморфна $G/Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Автоморфизмы, не являющиеся внутренними, наз. внешними.

Употребляются также понятия внутренний автоморфизм моноида (полугруппы с единицей) и внутренний автоморфизм кольца (ассоциативного с единицей), вводимые аналогично с помощью обратимых элементов.

В. Н. Ремесленников.

ВНУТРЕННИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР относительно поверхности Σ_m — дифференциальный оператор $L(u)$, обладающий тем свойством, что для любой функции, для к-рой он определен, его значение в точке $M \in \Sigma_m$ может быть вычислено лишь по значениям этой функции на гладкой поверхности Σ_m, заданной в пространстве E_n, $m<n$. В. д. о. может быть вычислен с помощью производных в направлениях l, к-рые лежат в касательном к поверхности Σ_m многообразии. Если ввести такие координаты, что на Σ_m:

$$x_{m+1} = x^0_{m+1},\ \ldots,\ x_n = x^0_n,$$

то оператор $L(u)$, если он внутренний относительно Σ_m, после надлежащих преобразований не будет содержать производных по переменным $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (так наз. выводящих производных). Напр., оператор

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

есть В. д. о. относительно любой гладкой поверхности, составленной из прямых $x-x_0=y-y_0=z-z_0$, а также относительно любой из этих прямых. Если оператор $L(u)$ является В. д. о. относительно поверхности Σ_{n-1}, то Σ_{n-1} наз. *характеристикой* дифференциального уравнения $L(u)=0$.

Иногда оператор наз. внутренним по отношению к поверхности Σ_m, если в точках этой поверхности старший порядок выводящих производных ниже порядка оператора.

Б. Л. Рождественский.

ВНУТРЕННИХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — метод в теории функций комплексного переменного, используемый при решении экстремальных задач на классах однолистных и многолистных аналитич. функций. Преимущества В. в. м. связаны с тем, что при выводе лежащих в его основе вариационных формул не делается предположений о поведении варьируемых функций на границе области D их задания, а сами вариационные формулы являются следствием единообразного изменения функций класса на внутренних подмножествах из D. Для однолистных функций в круге $E=\{z : |z|<1\}$, В. в. м. был предложен М. Шиффером [1] и, в более усовершенствованной и развитой форме, Г. М. Голузиным [2]. В применении к классу S функций $f(z)=z+$

$+c_2z^2+\ldots$, голоморфных и однолистных в E, ими была установлена основная вариационная формула:

$$f_*(z;\lambda)=f(z)+\lambda f(z)\sum_{k=1}^{n}\left[2A_kH^2(z_k)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_k)}+\right.$$
$$\left.+A_kK(z,z_k)+\overline{A}_kK\left(z,\frac{1}{\overline{z}_k}\right)\right]+\gamma(z;\lambda),$$

где

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad K(z,\zeta)=H(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+1,$$

z_k ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$; $n=1,\ 2,\ldots$) — фиксированные точки в круге E, A_k — произвольные комплексные постоянные, а $\gamma(z;\lambda)/\lambda$ при $\lambda\to 0$, $\lambda>0$, стремится к нулю равномерно относительно z внутри E. Иными словами, в классе S, не образующем к.-л. линейного пространства, для каждой функции $f(z)$ указывается однопараметрическое семейство $f_*(z;\lambda)$, $\lambda>0$, функций этого же класса такое, что на любом замкнутом множестве в E разложение $f_*(z;\lambda)$ по степеням λ дается записанной выше формулой. Аналогичные формулы (с оценкой порядка малости остаточного члена внутри соответствующей области) имеют место и для других классов аналитич. функций.

Характерной чертой В. в. м. является возможность, исходя из вариационных формул, получить для граничных или экстремальных функций дифференциальное уравнение. Его исследование с использованием аналитич. теории дифференциальных уравнений приводит к важным качественным результатам, а в ряде случаев — к полному решению экстремальной проблемы.

В. в. м. нашел успешное применение в задачах о неналегающих областях; он стал составной частью так наз. *вариационно-параметрического метода* (см. [3]).

Лит.: [1] Schiffer M., «Amer J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 341—60; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1946, т. 19 (61), в. 2, с. 203—36; [3] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

И. А. Александров.

ВНУТРЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА в топологическом пространстве Y — совокупность *внутренних точек* множества X. Обозначается обычно $\mathrm{Int}\,X$. Всегда $\mathrm{Int}\,X=X\setminus[Y\setminus X]=X\setminus \mathrm{Fr}X$, где $\mathrm{Fr}X$ — граница множества X. В. м. равна также объединению всех подмножеств множества X, открытых во всем пространстве. В. м. наз. иногда ядром.

С. М. Сирота.

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий те свойства поверхности и фигур на ней, к-рые зависят лишь от длин кривых, лежащих на поверхности, и тем самым могут быть определены без обращения к объемлющему пространству. К В. г. регулярных поверхностей относятся такие понятия, как, напр., угол между кривыми, площадь области, полная (или гауссова) кривизна поверхности, *геодезическая кривизна* кривой, *Леви-Чивита связность*. Термин «В. г.» употребляется и в более общей ситуации для обозначения структуры (обычно *метрики* или *связности*), индуцированной в топологич. пространстве его отображением в другое пространство, априори наделенное аналогичной структурой.

Возможность рассматривать объекты В. г. как свойства самой поверхности, безотносительно к погружению ее в пространство, привела к исследованию абстрактных пространств с *внутренней метрикой*, свойства к-рых сходны с В. г. поверхностей (см. *Риманово пространство*, *Выпуклая поверхность*, *Двумерное многообразие ограниченной кривизны*). Наряду с внутренним подходом возможно выделение классов погруженных поверхностей и подмногообразий по их внешнегеометрич. свойствам. Сравнение этих двух подходов составляет проблему *изометрических погружений* и вложений. В ряде важных случаев оба подхода приводят к одним

и тем же классам метрик. Напр., любая риманова метрика (класса C^r, $r>3$) может рассматриваться как В. г. нек-рого подмногообразия евклидова пространства достаточно большой размерности, любая полная двумерная внутренняя метрика неотрицательной кривизны — как В. г. выпуклой поверхности в E^3. Классич. пример противоположной ситуации представляет *Гильберта теорема* о несуществовании регулярного изометрич. погружения плоскости Лобачевского в E^3. Термин «В. г.», отнесенный к подобного рода абстрактным пространствам, обретает смысл только в противопоставлении внешней геометрии в рамках к.-л. определенной теории. Выяснение связей между В. г. поверхностей и ее внешней геометрии составляет одну из наиболее трудных и содержательных задач геометрии. Сюда наряду с проблемой изометрич. погружений относятся, напр., следующие вопросы: *изгибание* поверхностей, *бесконечно малые изгибания*, однозначная определенность поверхности ее метрикой, влияние гладкости метрики на гладкость поверхности. Рассматривались также соотношения между внешней и В. г. при суперпозиции погружений (кривые на поверхности, минимальные подмногообразия сфер).

Основы В. г. созданы К. Гауссом (C. Gauss) (см. [1]). Они развиты в многомерном случае Б. Риманом (B. Riemann) (см. [2]), а в нерегулярном случае А. Д. Александровым (см. [3]).

Лит.: [1] Гаусс К., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Риман Б., О гипотезах, лежащих в основании геометрии, пер. с нем., там же, с. 309—11; [3] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948. *Ю. Д. Бураго.*

ВНУТРЕННЯЯ ГРАНИЦА области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — множество $\partial D \setminus \partial(C\overline{D})$, где ∂D — граница D, $\partial(C\overline{D})$ — граница дополнения замкнутой области $\overline{D}$. *Е. Д. Соломенцев.*

ВНУТРЕННЯЯ МЕТРИКА — метрика ρ, при к-рой любые две точки x, y метрич. пространства соединимы спрямляемой кривой $\gamma(x, y)$ и

$$\rho(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y)),$$

где s_ρ — длина кривой в метрике ρ. Риманова метрика всегда В. м. Если в пространстве с метрикой ρ любые две точки соединимы спрямляемой кривой, то равенство

$$\rho^*(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y))$$

определяет В. м.; это равенство служит определением индуцированной В. м. ρ^* на многообразии, погруженном в метрич. пространство.

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948. *Ю. Д. Бураго.*

ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА множества в топологическом пространстве — точка, входящая в данное множество вместе с нек-рым открытым множеством, ее содержащим. Если x - В. т. множества A, то A наз. окрестностью точки x в широком смысле. *С. М. Сирота.*

ВОГНУТАЯ ФУНКЦИЯ — функция, противоположная по знаку *выпуклой функции*.

ВОГНУТЫЙ И ВЫПУКЛЫЙ ОПЕРАТОРЫ — нелинейные операторы в полуупорядоченных пространствах, являющиеся аналогами вогнутых и выпуклых функций действительного переменного.

Нелинейный оператор A, положительный на конусе K в банаховом пространстве, наз. вогнутым (точнее, u_0-вогнутым на K), если:

1) для каждого ненулевого $x \in K$ выполнены неравенства

$$\alpha(x)u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta(x)u_0,$$

где u_0 — нек-рый фиксированный ненулевой элемент из K, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — положительные скалярные функции;

2) для каждого такого $x \in K$, что

$$\alpha_1(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x)u_0,\ \alpha_1 > 0,\ \beta_1 > 0,$$

справедливы соотношения

$$A(tx) \geqslant (1+\eta(x,\ t))tA(x),\ 0<t<1, \qquad (*)$$

где $\eta(x,\ t)>0$.

Аналогично, оператор A наз. в ы п у к л ы м (точнее, u_0-выпуклым на K), если выполнены условия 1) и 2), но неравенство (*) заменено противоположным, и функция $\eta(x,\ t)<0$.

Типичным примером является интегральный оператор Урысона

$$A[x(t)] = \int_G k(t,\ s,\ x(s))\,ds,$$

вогнутость и выпуклость к-рого обеспечивается соответственно вогнутостью и выпуклостью скалярной функции $k(t,\ s,\ u)$ по переменному u. Вогнутость оператора означает, что он содержит лишь «слабые» нелинейности значения оператора на элементах конуса растут «медленно» при росте норм элементов. Выпуклость же оператора означает, как правило, что он содержит «сильные» нелинейности. В соответствии с этим уравнения с вогнутыми операторами и уравнения с выпуклыми операторами обладают рядом различий; так, первые близки по своим свойствам к соответствующим скалярным уравнениям, для вторых же такой близости нет: напр., для них, как правило, неверна теорема о единственности положительного решения.

Лит.: [1] Красносельский М. А., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975.

М. И. Войцеховский.

ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ — квантовомеханическая система, состоящая из ядра массы M с зарядом $+Ze$ и одного электрона массы m с зарядом $-e$, взаимодействующих по закону Кулона, т. е. притягивающихся друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ядром и электроном. В частном случае при $Z=1$, когда ядром является протон, В. а. — обычный атом водорода. К В. а. можно отнести мезоатом (μ-мезон в кулоновском поле ядра) и позитроний (система, состоящая из электрона и позитрона). Задача о В. а. — точно решаемый пример общей задачи двух тел в механике (как в классической, так и в квантовой) и является квантовомеханич. аналогом класс. проблемы Кеплера в теории движения двух масс под действием сил всемирного тяготения. После выделения движения центра инерции квантовомеханич. задача о В. а. сводится в нерелятивистском приближении к решению *Шрёдингера уравнения* для частицы с приведенной массой $m_0 = mM/(m+M)$, движущейся в поле центральных сил с кулоновским потенциалом:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta_r + V(r) - E\right\}\psi(r) = 0; \qquad V(r) = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (*)$$

Удовлетворяющие физич. условиям ограниченности волновых функций $\psi(r)$ решения (*) существуют: а) при $E_n = -Z^2e^4m/2\hbar^2n^2$ и целом $n \geqslant 1$ (дискретный спектр энергий E); б) при любом $E>0$ (непрерывный спектр энергий). Решения, принадлежащие дискретному спектру, соответствуют стационарным связанным состояниям электрона в В. а. и обладают так наз. «случайным вырождением», т. е. состояния с различными квантованными значениями орбитального момента $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, а не только его проекции m_l ($-l \leqslant m_l \leqslant l$; m_l целое) на нек-рую ось (обычное вырождение), обладают одинаковой энергией E_n. «Случайное вырождение» является следствием того, что в частном случае кулоновского потенциала уравнение Шрёдингера (*) инвариантно не только относительно группы ортогональных преобразований $O(3)$, что справедливо для

любого потенциала центральных сил, но и относительно преобразований более широкой группы O (4). Решения непрерывного спектра соответствуют ионизованным состояниям В. а., т. е. несвязанным состояниям электрона, и вырождены с бесконечной кратностью возможны состояния со всеми целыми значениями $l \geqslant 0$ и всеми целыми значениями m_l при данном l, $-l \leqslant m_l \leqslant l$.

Релятивистские эффекты в В. а.: зависимость массы от скорости и спиновые свойства электрона и ядра, можно учесть при использовании вместо уравнения Шрёдингера (*) релятивистского *Дирака уравнения* для электрона в поле кулоновского потенциала ядра.

Учет релятивистских эффектов и спина электрона дает поправки к E_n, к-рые зависят от l и полного момента j электрона, определяемого через l и спин электрона, и тем самым снимает случайное вырождение уровней энергии В. а. и определяет так наз. тонкую структуру дискретного спектра уровней энергии В. а. Учет спина ядра и связанного с ним магнитного момента, взаимодействующего с движущимся вокруг ядра электроном, а также учет конечных размеров ядра и возможного квадрупольного момента и других высших мультипольных моментов ядра дает дополнительные поправки к E_n, определяющие так наз. сверхтонкую структуру уровней энергии В. а.

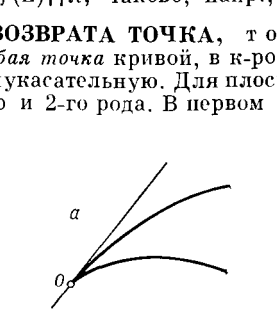
Лит.: [1] Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1965.

В. Д. Кукин.

ВОЗВРАТА РЕБРО — один из типов *особенностей дифференцируемых отображений* многообразия в евклидово пространство. В простейшем случае отображения f поверхности M в трехмерное евклидово пространство E^3 В. р. характеризуется тем, что представляет собой гладкую кривую L, пересечение некоторой окрестности к-рой $f(L) \subset E^3$ с любой плоскостью π, перпендикулярной касательной к L, является кривой с *возврата точкой* $p \in f(L) \cap \pi$; таково, напр., В. р. на псевдосфере.

М. И. Войцеховский.

ВОЗВРАТА ТОЧКА, точка заострения,— *особая точка* кривой, в к-рой две ее ветви имеют общую полукасательную. Для плоской кривой различают В. т. 1-го и 2-го рода. В первом случае обе ветви лежат по



одну сторону от полукасательной (рис., *а*), а во втором случае — по разные стороны (рис., *б*).

А. Б. Иванов.

ВОЗВРАТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ рекуррентная последовательность, — последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая соотношению вида

$$a_{n+p} + c_1 a_{n+p-1} + \ldots + c_p a_n = 0,$$

где $c_1, \ldots, c_p$ — постоянные. Это соотношение позволяет вычислить один за другим члены последовательности, если известны первые p членов. Классич. примером В. п. является последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\ldots$ ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$). Возвратный ряд — степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ с коэффициентами, образующими В. п. Такой ряд изображает всегда рациональную функцию. *БСЭ-3*

ВОЗВРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

в к-ром коэффициенты, равноудаленные от начала и конца, равны между собой: $a_i = a_{n-i}$. В. у. степени $2n$

можно привести к уравнению n-й степени, положив $z=x\pm\frac{1}{x}$.

БСЭ-3

ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИНЦИП, в и р т у а л ь н ы х с к о р о с т е й п р и н ц и п,— дифференциальный *вариационный принцип классической механики*, выражающий наиболее общие условия равновесия механических систем, стесненных идеальными связями.

Согласно В. п. п. механич. система находится в равновесии в нек-ром положении тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ заданных активных сил на всяком возможном перемещении, выводящем систему из рассматриваемого положения, равна нулю или меньше нуля:

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \leqslant 0, \qquad (*)$$

в любой момент времени.

Возможными (виртуальными) перемещениями системы наз. элементарные (бесконечно малые) перемещения $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ точек системы, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями. Если связи являются удерживающими (двусторонними), то возможные перемещения обратимы, и в условии (*) следует брать знак равенства; если же связи — неудерживающие (односторонние), то среди возможных перемещений имеются необратимые. При движении системы под действием активных сил связи действуют на точки системы с нек-рыми силами реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ (пассивные силы), в определении к-рых предполагается полностью учтенным механич. действие связей на систему (в том смысле, что связи возможно заменять вызванными ими реакциями) (аксиома освобождаемости). Связи наз. идеальными, если сумма элементарных работ их реакций $\Sigma_\nu \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место для обратимых возможных перемещений, а знаки равенства или больше нуля — для необратимых перемещений. Положения равновесия системы — такие положения $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t_0)$, в к-рых система будет оставаться все время, если она помещена в эти положения с нулевыми начальными скоростями $\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = 0$; при этом предполагается, что уравнения связей удовлетворяются при любом t значениями $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t_0)$ и $\boldsymbol{v}_\nu = 0$. Активные силы в общем случае предполагаются заданными функциями $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{r}_\mu) \in C^1$, а в условии (*) следует считать $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu(t_0), 0)$.

В условии (*) содержатся все уравнения и законы равновесия систем с идеальными связями, благодаря чему можно сказать, что вся статика сводится к одной общей формуле (*).

Закон равновесия, выражаемый В. п. п., впервые был установлен Гвидо Убальди (Guido Ubaldi) на рычаге и на движущихся блоках или полиспастах. Г. Галилей (G. Galilei) установил его для наклонных плоскостей и рассматривал этот закон как общее свойство равновесия простых машин. Дж. Валлис (J. Wallis) положил его в основание статики и из него вывел теорию равновесия машин. Р. Декарт (R. Descartes) свел всю статику к единому принципу, к-рый, по существу, совпадает с принципом Галилея. И. Бернулли (J. Bernoulli) первый понял большую общность В. п. п. и его полезность при решении задач статики. Ж. Лагранж [1] выразил В. п. п. в общей форме и тем самым свел всю статику к единой общей формуле; он дал доказательство (не вполне строгое) В. п. п. для систем, стесненных двусторонними (удерживающими) связями. Общая формула статики для равновесия любой системы сил и разработанный Ж. Лагранжем метод применения этой формулы были систематически им использованы для вывода общих свойств равновесия системы тел и решения различных проблем статики, включая задачи равновесия несжимаемых, а также сжимаемых и упругих жидкостей. Ж. Лагранж считал В. п. п. основным принципом для всей механики. Строгое доказательство В. п. п., а также

распространение его на односторонние (неудерживающие) связи было дано Ж. Фурье [2], М. В. Остроградским [3].

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, М. –Л., 1950); [2] Fourier J., «J. de l'École Polytechnique», 1798, t. II, p. 20; [3] Остроградский М. В., Лекции по аналитической механике, Собр. соч., т. 1, ч. 2, М.—Л., 1946.

В. В. Румянцев.

ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ — отображение f в системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(x,\ t). \tag{1}$$

Обычно возмущение предполагается малым в к.-л. смысле, напр.,

$$\frac{|f(x,\ t)|}{|x|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to 0. \tag{2}$$

Решение $\varphi(t)$ линейной системы с возмущением (1) и решение $\Psi(t)y_0$ линейной системы

$$\dot{y} = A(t)\,y \tag{3}$$

с одним и тем же начальным значением y_0 при $t = t_0$ связаны соотношением

$$\varphi(t) = \Psi(t)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(\tau)\,f(\varphi(\tau),\ \tau)\,d\tau\right),$$

наз. формулой вариации постоянных, где $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы (3).

А. М. Ляпунов (см. [1]) доказал асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (1) (см. *Асимптотически устойчивое решение*), если соотношение (2) справедливо равномерно по t, а матрица $A(t)$ постоянна и все действительные части ее собственных значений отрицательны; если же хоть одна из них положительна, то тривиальное решение неустойчиво.

Исследование периодического решения φ системы $\dot{x} = P(x,\ t)$, описывающей колебательный процесс, преобразованием $x = \varphi(t) + y$ приводится в общем случае к исследованию линейной системы с возмущениями, правая часть к-рой периодична по t (см. [3]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [2] Былов Б. Ф. [и др.], Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

Л. Э. Рейзинь.

ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕОРИЯ — комплекс методов исследования различных задач, используемый во многих разделах математики, механики, физики и техники. Здесь с общей точки зрения излагаются основные идеи В. т.

В. т. основана на возможности приближенного описания исследуемой системы с помощью нек-рой специальным образом выбираемой «идеальной» системы, допускающей корректное и полное изучение. Одним из признаков применимости В. т. в одной из ее форм, определяемой спецификой конкретной задачи, для к-рой В. т. разрабатывается, является условие того, что уравнения, описывающие исследуемый процесс, содержат в явной или неявной форме малый параметр (или несколько таких параметров). При этом требуется, чтобы при нулевом значении малого параметра уравнения допускали точное решение, и таким образом проблема сводится к нахождению асимптотики наилучшего приближения к истинному решению с точностью до $\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \ldots$.

1) В. т. впервые была предложена для решения проблем небесной механики, связанных с изучением движения планет в солнечной системе. Удаленность планет друг от друга и малая величина их массы в сравнении с массой Солнца позволяют пренебрегать гравитационным взаимодействием планет между собой и рассматривать их движение (в первом приближении) по орбитам Кеплера, определяемым из уравнений *двух тел задачи* — планеты и Солнца.

Существенное уточнение астрономич. данных сформулировало проблему учета влияния других планет на движение одной из них вокруг Солнца. Так возникла классическая *трех тел задача*, причем, напр., при изучении системы Луна — Земля — Солнце в качестве малого параметра выбиралось отношение масс Луны и Земли. Начиная с трудов Ж. Лагранжа (J. Lagrange), П. Лапласа (P. Laplace) было выдвинуто представление о том, что постоянные величины, характеризующие движение планеты вокруг Солнца, ввиду влияния движения других планет как бы «возмущаются» и претерпевают изменения, зависящие от времени; отсюда идет и наименование «теория возмущений».

В. т. занимала внимание классиков Ж. Лагранжа, П. Лапласа, С. Пуассона (S. Poisson), К. Гаусса (C. Gauss) и в результате их работ оказалось возможным проводить вычисления с чрезвычайно большой точностью. Триумфом В. т. явилось открытие планеты Нептун (1848) Дж. Адамсом (J. Adams) и У. Леверье (U. Le Verrier) из анализа отклонений в движении планеты Уран.

Трудности первоначально разработанных методов В. т. были обусловлены наличием в получающихся разложениях членов, содержащих время t вне знака синуса или косинуса. Вклад таких членов в ряд В. т. существен лишь за длительные промежутки времени (порядка столетий), но и в этом случае невозможно строгое описание планетных движений в схеме В. т. — приемлемым является только первое приближение. Появление так наз. секулярных членов обусловлено зависимостью частоты движения (обращения) исследуемой планеты от соответствующих частот других планет. Учет такого рода зависимости и приводит к возникновению в решениях как секулярных (вида At^n), так и смешанных (вида $Bt\cos(\omega t+\varphi)$) членов. Напр., соотношение

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1 \qquad (1)$$

в схеме В. т. допускает следующее разложение по $\varepsilon(\varepsilon\ll 1)$:

$$\sin\omega t=\sin\omega_0 t+\varepsilon\omega_1 t\cos\omega_0 t+\ldots, \qquad (2)$$

смешанный член в к-ром появляется в результате разложения колебания с частотой (1) по колебаниям с частотой ω_0.

Создание специальных методов В. т., устраняющих секулярные члены, т. е. позволяющих представить решение в чисто тригонометрич. виде, связано с работами Линдштедта (Lindstedt), П. Гульдина (P. Guldin), Ш. Делоне (Ch. Delaunay), Б. Болина (B. Bohlin), С. Ньюкома (S. Newcomb). В предложенном ими подходе частоты уже не разлагаются по малым параметрам, т. е. в соответствующие разложения входят не частоты нулевого приближения, а нек-рым образом переопределенные (в терминах современной теоретич. физики — ренормированные) частоты. В результате каждый отдельный член ряда В. т. по степеням малого параметра представляет собой сходящееся выражение. Вопрос о сходимости ряда В. т. в целом остается открытым из-за появления так наз. малых знаменателей (малых делителей), образующихся при интегрировании в каждом приближении В. т. выражений вида $\exp\{i\Sigma_j\omega_j n_j t+\varphi\}$, где $\{\omega_j\}$ — набор частот, отвечающих различным движениям. В случае почти соизмеримых частот сумма в показателе экспоненты может быть малой и тогда после соответствующего интегрирования возникают члены ряда В. т., знаменатели к-рых малы, что и приводит к расходящимся выражениям ряда В. т. В частности, для двух частот ω_1 и ω_2, отношение к-рых является иррациональным числом, $(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ можно подобрать так, чтобы соответствующий ряд В. т. расходился.

При изучении с общей математич. точки зрения проблемы малых знаменателей А. Пуанкаре (H. Poincaré)

и А. М. Ляпуновым была предложена методика построения специального вида периодич. решений, эффективная не только в задачах небесной механики, но и в теории дифференциальных уравнений в целом.

Существенный вклад в решение проблемы малых делителей был сделан в работах [4], [5], [6]. Метод последовательных канонич. замен переменных позволяет «понизить» порядок возмущения и с помощью достигаемой усиленной сходимости (так наз. сверхсходимости) «преодолеть» расходимость ряда В. т. из-за малых знаменателей, возникающих в каждом порядке В. т., надлежащим выбором канонич. преобразования.

2) В В. т. для задач небесной механики развито асимптотич. интегрирование дифференциальных уравнений только в случае консервативных систем. Дальнейший прогресс В. т. связан с развитием теории колебаний, в особенности с созданием теории нелинейных колебаний.

Важную роль сыграли (выполненные в развитие работ Ж. Лагранжа) исследования Б. Ван дер Поля (B. Van der Pol) по уравнениям типа Рэлея с малым параметром ε:

$$\frac{d^2J}{dt^2} - \varepsilon\left(\frac{dJ}{dt} - \frac{1}{3}\left(\frac{dJ}{dt}\right)^3\right) + J = 0. \qquad (3)$$

Частным случаем уравнения (3) является *Ван дер Поля уравнение*.

Для решения уравнения

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (4)$$

в первом приближении Б. Ван дер Поль предложил без должного математич. обоснования метод «медленно меняющихся коэффициентов», аналогичный одному из методов, применявшихся еще Ж. Лагранжем в небесной механике. Этот метод основан на представлении решения уравнения (4) в виде функции гармонич. колебаний, амплитуда и фаза к-рых — медленно меняющиеся функции параметра t.

Общая теория нелинейных колебаний была разработана в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. При этом были преодолены принципиальные математич. трудности и дано распространение В. т. на общие неконсервативные системы. Развитые в этих работах новые асимптотич. методы нелинейной механики позволяют получать решения в высших приближениях В. т. в математически обоснованной схеме, причем наряду с периодич. решениями допускали строгое рассмотрение квазипериодич. режима.

Идея асимптотич. методов теории возмущений Крылова — Боголюбова становится наглядной при рассмотрении уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right), \qquad (5)$$

описывающего нелинейные колебания системы с одной степенью свободы.

К правильной формулировке асимптотич. метода можно прийти, исходя из физич. соображений о характере колебательного процесса. Так, при полном отсутствии нелинейности, т. е. при $\varepsilon = 0$, колебания, описываемые уравнением (5), будут чисто гармоническими с постоянной амплитудой и равномерно вращающейся фазой. В случае, если $\varepsilon \neq 0$, т. е. в случае наличия нелинейного возмущения, естественно ожидать появления в решении уравнения (5) обертонов, зависимости мгновенной частоты от амплитуды и, наконец, систематич. увеличения или уменьшения амплитуды колебания в связи с притоком или поглощением энергии возмущающими силами.

Принимая во внимание все эти физич. соображения, естественно решение уравнения (5) искать в виде ряда

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \qquad (6)$$

в к-ром $u_i(a, \psi)$, $i = 1, 2, \ldots$, — периодич. функции угла

ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots,\\ \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Таким образом, задача сводится к подбору соответствующих выражений для функций $u_i(a, \psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$, $i = 1, 2, \dots$, так, чтобы выражение (6), в к-рое вместо a и ψ будут подставлены функции времени, определенные из системы (7), являлось решением исходного уравнения (5). Причем накладываются нек-рые дополнительные условия, обеспечивающие отсутствие в решении (6) секулярных членов.

Ограничиваясь в формальном ряде (6) первыми членами, приходят к m-му приближению, обладающему свойством асимптотичности в том смысле, что при фиксированном m и $\varepsilon \to 0$ выражение (6) стремится к точному решению уравнения (5); уравнения первого приближения совпадают с уравнениями Ван дер Поля. Проблема оценки погрешности m-го приближения не вызывает особенных трудностей. Аналогичным образом решается задача в случае N степеней свободы.

Если интерпретировать формулу (6) не как решение уравнения (5), а как формулу замены переменных, то можно получить точные выражения для производных по времени от амплитуды a и фазы ψ.

Как известно (см. [8], [9]) во многих случаях дифференциальные уравнения, описывающие колебательные процессы и содержащие «малый» параметр, могут быть приведены к так наз. стандартной форме:

$$\frac{dX_s}{dt} = \varepsilon X_s(t, x_1, \dots, x_n);\ s = 1, 2, \dots, n, \qquad (8)$$

где ε — малый положительный параметр. Большое число задач физики и техники приводится к этому виду. Для системы дифференциальных уравнений вида (8) разработан особый метод аппроксимации, названный м е т о д о м у с р е д н е н и я. Согласно методу усреднений, эти уравнения для достаточно малых значений ε на конечном интервале посредством замены переменных

$$x_i = \xi_i + \varepsilon X_i$$

приводятся к усредненным уравнениям:

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \varepsilon X_{s,0}(\xi_1, \dots, \xi_n),\ s = 1, 2, \dots, n,$$

где $X_{s,0}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_s(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

Применяя метод усреднения, можно получить, напр., ряд критериев о существовании и устойчивости автоколебательных режимов.

Были установлены [13] при весьма общих условиях оценки разности $|X_i - \varepsilon_i|$ на временном интервале длины L/ε. Кроме того, можно установить соответствие и в таких свойствах решений общих систем, к-рые зависят от их поведения на бесконечном интервале. Таким образом были доказаны теоремы о существовании и устойчивости квазипериодич. решений.

3) При изучении нелинейных колебательных систем можно не приводить соответствующую систему уравнений к «стандартной форме», а работать непосредственно с исходными дифференциальными уравнениями для системы гармонич. вибраторов, подверженных слабому нелинейному воздействию. При этом наряду с общими решениями для такой системы можно получить и частные решения с помощью замены переменных специального вида.

Такой подход был использован Н. Н. Боголюбовым для нек-рых задач статистич. механики, связанных с

вычислением функций распределения s частиц ($s=1, 2, \ldots, N$) для систем многих взаимодействующих частиц. Малым параметром в задачах статистич. механики может служить как малая константа взаимодействия, так и малая плотность частиц в системе. В одном из этих приближений можно выразить высшие s-частичные функции распределения через функции распределения одной частицы. При этом уже в первом приближении В. т. можно получить из системы кинетич. уравнений известные уравнения Больцмана, а также уравнения Ландау, Власова и Боголюбова — Ленарда — Балеску, широко применяемые в теории плазмы.

Следует отметить, что перечисленные методы развиты в применении к уравнениям с малым параметром, входящим в них регулярным образом (не при старшей производной). В то же время, напр., уравнение Ван дер Поля в форме Рэлея в случае больших ε автоматически сводится к уравнению, в к-ром малый параметр стоит перед старшей производной. Для задач такого типа, требующих особого подхода, развиты мощные методы исследования (см. [14], [15], [16], [17]).

Именно задачи с малым параметром при старшей производной типичны для проблем статистич. механики и гидродинамики. Примером может служить Навье — Стокса уравнение в предположении малых коэффициентов вязкости и теплопроводности, имеющее в качестве нулевого приближения уравнения идеальной жидкости Эйлера. Поиск наилучшего приближения в данной задаче усложнен указанным условием.

4) Большое значение методы В. т. имеют в области квантовой механики, где, такие как и в классической, точные решения получены лишь в задаче двух тел, формально сводимой к задаче одного тела во внешнем потенциальном поле. Здесь используются две формы В. т.: одна для стационарных состояний, другая для расчета вероятностей переходов из одного стационарного состояния в другое в схеме метода матрицы рассеяния. В. т. формулируется в квантовой механике как задача на собственные значения для линейного самосопряженного оператора вида:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

где ε — малый параметр, причем известно решение задачи на собственные значения для «невозмущенного» оператора H_0, т. е. задана полная система собственных функций $\{\psi_n^{(0)}\}$ и собственных значений E_n^0 и требуется найти спектр оператора H.

В предположении малости ε волновые функции

$$\psi_n = \sum_m C_m \psi_m^{(0)}$$

и собственные значения энергии E_n могут быть найдены в виде рядов

$$C_m = C_m^{(0)} + C_m^{(1)} + C_m^{(2)} + \ldots,$$
$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots$$

по степеням возмущения ε. Тогда для возмущения n-состояния В. т. дает следующий результат:

$$C_m^{(0)} = 0, \quad m \neq n; \quad C_n^{(0)} = 1;$$

$$C_m^{(1)} = \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \; m \neq n; \; C_n^{(1)} = 0;$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{V_{mk} V_{kn}}{\left(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}\right)\left(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right)} - \frac{V_{nn} V_{mn}}{\left(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right)^2}, \quad m \neq n;$$

$$C_n^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{\left(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right)^2}; \; \ldots;$$

$$E_n^{(1)} = V_{nn}; \quad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}; \; \ldots$$

Здесь V_{mn} — матричный элемент оператора возмущения, определяемый согласно правилу ($\hat{V}=\varepsilon H_1$):

$$V_{mn}=\int \overset{*}{\psi}{}_m^{(0)}\hat{V}\psi_n^{(0)}\,dq,$$

где dq — элемент объема.

Условие применимости В. т. к таким задачам:

$$|V_{mn}|\ll|E_n^{(0)}-E_m^{(0)}|$$

нарушается в случае вырождения уровня энергии невозмущенной системы: вырожденному уровню энергии $E_n^{(0)}$ отвечает s состояний $\{\psi_{nj}^{(0)}\}$, $j=1, 2, \ldots, s$ (s — кратность вырождения). В этом случае применяется нек-рая модификация В. т.: вначале учитывают влияние возмущения на вырожденные состояния, а влияние других уровней рассматривается как малое возмущение; строятся линейные комбинации s функций вырожденного состояния, причем для коэффициентов $C_r^{(0)}$ построенной комбинации получены уравнения вида

$$E_n^{(1)}C_r^{(0)}=\sum_{r'=1}^{s}V_{rr'}C_{r'}^{(0)}, \qquad (9)$$

где

$$V_{rr'}=\int \psi_{nr}^{(0)}\hat{V}\psi_{nr'}^{(0)}\,dq.$$

Поправка к энергии $E_n^{(1)}$ находится из секулярного уравнения системы (9). Решения $\{E_{n,p}^{(1)}\}$, $p=1, \ldots, s$ этого уравнения s-й степени представляют в (9) и находят $\{C_{r,p}^{(0)}\}$ и волновую функцию:

$$\psi_{n,\,p}\quad\sum_{r=1}^{s}C_{r,\,p}^{(0)}\psi_{n,\,r},$$

соответствующую энергии

$$E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}$$

после снятия вырождения. Поправки следующего порядка находят методами обычной В. т.

В нестационарном случае задача В. т. ставится в терминах вероятностей перехода из состояния $\psi_n^{(0)}$ в состояние $\psi_m^{(0)}$. В. т. может применяться в гейзенберговском, шрёдингеровском представлениях или же в представлении взаимодействия.

В квантовой механике есть также принципиально другого типа задачи о нахождении так наз. *рассеяния матрицы* двух или нескольких частиц. В особенности такие задачи важны для квантовой электродинамики, где имеется малый параметр — постоянная тонкой структуры.

Проблема вычисления вероятностей перехода сводится к исследованию гамильтониана вида:

$$H=H_0+H_1,$$

где H_0 — свободный гамильтониан, а H_1 — гамильтониан взаимодействия, к-рый по предположению включается в «отдаленном прошлом» ($t\to-\infty$) и выключается в «отдаленном будущем» ($t\to+\infty$).

В представлении взаимодействия Шрёдингера уравнение имеет вид:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(H_0+H_1)\,\psi.$$

Посредством замены переменных

$$\psi=e^{-iH_0t}\varphi$$

можно получить для состояния φ уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=H_1(t)\,\varphi,$$

где

$$H_1(t)=e^{iH_0t}H_1(0)\,e^{-iH_0t}.$$

Связь между начальными состояниями φ_{in}, описывающими «входящие» частицы, и конечными состояниями φ_{out}, описывающими «выходящие» частицы, формули-

руется в терминах так наз. оператора рассеяния S, определяемого соотношением вида:

$$\varphi_{\text{out}} = S\varphi_{\text{in}}.$$

Формально решение уравнения (10) можно построить методом последовательных приближений в виде разложения по степеням малости взаимодействия:

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt + \\ + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t')\,dt' + \dots .$$

В квантовой теории поля справедлива аналогичная формула, в к-рую вместо $H_1(t)$ входит соответствующая плотность лагранжиана, причем используется представление S-оператора через T-произведение:

$$S(t) = T\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H(t_1)\dots H(t_n)\}.$$

Действие оператора хронологического упорядочения T определяется правилами:

$$T\{H(t_1)H(t_2)\} = \begin{cases} H(t_1)\,H(t_2); & t_1 > t_2, \\ H(t_2)\,H(t_1); & t_2 > t_1, \end{cases}$$

причем это T-произведение формально не определено для совпадающих аргументов. Для преодоления такого рода трудностей, возникающих в методе В. т. в квантовой теории поля, созданы специальные методы регуляризации. Релятивистски инвариантная В. т. используется для вычисления так наз. S-матрицы, элементы к-рой определяют вероятности переходов между квантовыми состояниями различных полей под влиянием взаимодействия между ними.

Лит.: [1] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, P., t. 1—3, 1892 -97; Пуанкаре А., Избр. труды, т. 1—3, М., 1971—74; [2] Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., М., 1966; [3] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [4] Колмогоров А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [7] Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М., в кн.: Збірник праць з нелінійної механіки, К., 1937, с. 55—112; [8] их же, Введение в нелинейную механику, К., 1937; [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 5 изд., М., 1974; [10] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969; [11] Челомей В. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 110, № 3; [12] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969; [13] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [14] Дородницын А. А. «Прикл. матем. и мех.», 1947, т. 11; [15] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1948, т. 22, с. 193—204; [16] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 607; [17] Мищенко Е. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 607; «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 627; [18] Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, 5 изд., М., 1976; [19] Боголюбов Н. Н., Лекції з квантової статистики, К., 1949; [20] его же, Избранные труды, т. 2, К., 1970; [21] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [22] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [23] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М., 1969; [24] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.

Н. Н. Боголюбов (мл.).

ВОЗРАСТА ТЕОРИЯ — приближенное описание замедления нейтронов при упругом рассеянии их на ядрах среды. В. т. применима к определению пространственного распределения нейтронов различных энергий лишь в средах, не содержащих легких ядер (допустимы массовые числа $M \gg 2$, т. е. исключаются, напр., водород и дейтерий). В. т. предполагает, что в течение замедления нейтроны теряют энергию не дискретно, а непре-

рывно, и заменяет реальное поведение большого числа отдельных нейтронов нек-рыми средними, что верно лишь при малом разбросе энергий нейтронов в любой заданный момент после выхода их из источника. Это предположение позволяет ввести в качестве независимого переменного возрастную функцию и, используя возрастное приближение, получить возрастное уравнение

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

в диффузионном приближении, совпадающее по форме с уравнением теплопроводности. Возрастное уравнение есть *параболического типа уравнение*, описывающее замедление нейтронов. При этом неизвестная функция q есть плотность замедления, т. е. число нейтронов в единице объема, пересекающих в единицу времени (при замедлении) данное значение энергии. Под возрастной функцией, играющей роль независимого переменного τ, понимается символический возраст нейтронов, равный времени замедления нейтронов (хронологич. возрасту), умноженному на средний за время замедления коэффициент диффузии. Корень квадратный из возраста тепловых нейтронов наз. длиной замедления теплового нейтрона. Физич. смысл возраста — это есть $^1/_6$ среднего квадрата расстояния, на к-рое смещается нейтрон за время от момента его выхода из точечного источника (возраст $\tau=0$) до рассматриваемого момента (соответствующего возрасту τ). Возрастное приближение, к-рое вместе с диффузионным приближением приводит к возрастному уравнению В. т., представляет собой переход от точных энергетич. операторов, описывающих замедление нейтронов, к приближенным.

Пространственное распределение нейтронов, обусловленное их диффузией в процессе замедления, определяет вероятность потери нейтронов для ядерного реактора и влияет на его критич. размеры.

Лит.: [1] Глесстон С. и Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1954.

В. А. Чуянов.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n<x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. строго возрастающими, а термин «В. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n \leqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также неубывающими. Всякая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная сверху имеет бесконечный предел, равный $+\infty$.

Л. Д. Кудрявцев.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $f(x)$, определенная на нек-ром числовом множестве E, что из условия

$$x'<x'',\ x'\in E,\ x''\in E$$

следует:

$$f(x')<f(x'').$$

Иногда такие функции наз. строго возрастающими, а термин «В. ф.» применяется к функциям, удовлетворяющим для указанных x' и x'' лишь условию

$$f(x')\leqslant f(x'')$$ (неубывающие функции).

У всякой строго В. ф. обратная функция является однозначной и также строго возрастающей. Если x_0 - правосторонняя (соответственно, левосторонняя) *предельная точка* множества E, $f(x)$ - неубывающая функция и множество $\{y: y=f(x),\ x>x_0,\ x\in E\}$ ограничено снизу (соответственно $\{y: y=f(x),\ x<x_0,\ x\in E\}$ ограничено сверху), то при $x\to x_0+0$ (соответственно, при $x\to x_0-0$), $x\in E$, у функции $f(x)$ существует конечный предел; если же указанное множество не ограничено снизу (со-

ответственно, сверху), то $f(x)$ имеет бесконечный предел, равный $-\infty$ (соответственно, $+\infty$).

Л. Д. Кудрявцев.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

описывающее различные колебательные процессы и процессы распространения волн. Для В. у., являющегося уравнением гиперболич. типа, обычно ставятся две задачи: *Коши задача* и смешанная задача.

Классич. решением задачи Коши, описывающей распространение волн в n-мерном евклидовом пространстве E^n, наз. функцию $u(x, t)$, к-рая: непрерывно дифференцируема в $(n+1)$-мерном полупространстве $(x \in E^n, t \geqslant 0)$; дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет В. у. в полупространстве $(x \in E^n, t > 0)$; удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, +0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Классич. решением смешанной задачи, описывающей колебания ограниченного объема $G \subset E^n$, наз. функцию $u(x, t)$, к-рая: непрерывно дифференцируема в замкнутом цилиндре $(x \in \bar{G}, t \geqslant 0)$; дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет В. у. в открытом цилиндре $(x \in G, t > 0)$; удовлетворяет для $x \in G$ начальным условиям

$$u(x, +0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x)$$

и удовлетворяет к.-л. краевому условию на «боковой» поверхности указанного цилиндра.

Классич. решение задачи Коши для достаточно гладких $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дается так наз. *Пуассона формулой*, к-рая при $n=1$ переходит в *Д'Аламбера формулу*. В случае, когда в правой части В. у. вместо нуля стоит заданная функция $f(x, t)$, это уравнение наз. неоднородным В. у. и решение его дается так наз. *Кирхгофа формулой*. Смешанная задача для В. у. решается методом Фурье, методом конечных разностей и методом преобразования Лапласа.

Наряду с изучением указанных задач в приведенной выше классич. постановке рассматриваются вопросы существования и единственности классич. решений, понимаемых в более слабом смысле (см. [4]), а также обобщенных решений как задачи Коши, так и смешанной задачи (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [3] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [4] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2 (92), с. 97 -154; [5] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962. *Ш. А. Алимов.*

ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР — вектор $k = (k_1, \ldots, k_m)$, входящий в выражение

$$a \exp\left(i \sum_{j=1}^{m} k_j x_j - i\omega t\right), \qquad (*)$$

где a и ω — постоянные, t — время.

Физически $(*)$ обычно интерпретируется как плоская волна частоты ω, распространяющаяся в направлении вектора k с длиной волны $\lambda = 2\pi/|k|$. Многие линейные однородные уравнения и системы уравнений с частными производными (в число к-рых входят важнейшие уравнения математич. физики, напр. *Максвелла уравнения*, *Волновое уравнение*) допускают решения в виде $(*)$.

В. М. Бабич.

ВОЛНЫ на поверхности жидкости — отклонения поверхности жидкости от равновесного состояния, распространяющиеся под действием сил, стремящихся восстановить это состояние. В зависимости от

природы восстанавливающих равновесие сил: поверхностного натяжения или тяжести, В. на поверхности жидкости подразделяются соответственно на капиллярные и гравитационные В.

Теория гравитационных В. наиболее полно развита для потенциальных движений жидкости и особенно для плоскопараллельных движений; объемные силы, приложенные к частицам жидкости, суть силы тяжести. Определение потенциала скорости волнового движения требует интегрирования уравнения Лапласа: $\Delta\varphi = 0$ при граничных условиях особого вида. Вдоль всей поверхности жидкости, уравнение к-рой $\xi = f(x, y; t)$ может быть найдено после решения задачи, давление постоянно. Это приводит на основании известного интеграла уравнений гидродинамики к первому граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\operatorname{grad}\varphi|^2 - gz = \text{const}, \qquad (1)$$

к-рое должно соблюдаться при $z = \xi$. Второе граничное условие следует из того, что во все время движения поверхность жидкости состоит из одних и тех же частиц. Именно, при $z = \xi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial t}. \qquad (2)$$

Кроме этих условий, должно быть удовлетворено требование обтекания поверхности твердых тел, находящихся в потоке. Одновременно с граничными условиями должны удовлетворяться начальные условия, к-рые состоят в том, что при $t = 0$ частицы жидкости должны иметь предписываемые им начальные скорости, а поверхность жидкости — выбранную для нее начальную форму. Это равноценно заданию потенциала скоростей при $t = 0$ как функции x, y, z и заданию функции $f(x, y; t)$ при $t = 0$.

Главная трудность задачи состоит в том, что все перечисленные условия необходимо должны выполняться на поверхности $\xi = f(x, y; t)$, уравнение к-рой может быть найдено лишь после решения самой задачи. В этом отношении задачи теории В. имеют много общего с задачами теории струй и фигур равновесия вращающейся жидкости.

Почти полная невозможность решения задач теории В. с точным соблюдением указанных граничных условий привела к возникновению теории бесконечно малых В. В этой теории предполагается, что скорости частиц жидкости и отклонения поверхности жидкости от равновесного горизонтального уровня есть величины малые. В этом предположении граничные условия (1) и (2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - g\xi = \text{const}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0.$$

Вместе с тем допускается возможность заменить в частных производных потенциала скоростей переменное $z = \xi$ нулем. При таком допущении граничное условие для функции φ получает вид:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0,$$

уравнение волновой поверхности — вид:

$$\xi = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}.$$

Основные результаты, полученные в теории бесконечно малых В., дали возможность разобрать многие важные задачи геофизики и выяснить, напр., законы распространения приливных В. на поверхности Мирового океана. Теория бесконечно малых В. нашла приложение к решению задач об образовании В. движущимися судами и дала возможность построить гидродинамич. теорию качки судов на волнении. Широкое применение методов теории функций комплексного переменного по-

зволило решить ряд весьма сложных задач о распространении В. в бассейнах переменной глубины и рассмотреть вопросы, связанные с дифракцией и отражением В. от плавающих тел.

Теория В. конечной амплитуды развита в работах А. И. Некрасова (см. [3]), к-рые дали возможность найти вид периодических В. в предположениях плоской задачи с точным удовлетворением граничных условий (1) и (2). Определение соответствующего потенциала скоростей было сведено к отысканию функции, устанавливающей конформное отображение области, занятой одной В., на круг или на область, ограниченную двумя концентрич. окружностями. Эта функция находится из решения нек-рого нелинейного интегрального уравнения.

С развитием теории нелинейных граничных задач и интегральных уравнений теория В. конечной амплитуды обогатилась новыми результатами. В частности, было дано доказательство существования одиночной В. и предельной волны Стокса с угловой точкой на ее профиле. В теории стоячих В. конечной амплитуды, то есть периодических собственных колебаний поверхности жидкости, существуют лишь приближенные решения, основанные на применении переменных Лагранжа.

Определение стоячих и установившихся В. на поверхности трехмерного потока представляет трудную задачу даже при отыскании ее приближенного решения.

Лит.: [1] Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., М.—Л., 1947; [2] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964; [3] Некрасов А. И., Собр. соч., т. 1, М., 1961, с. 358—439; [4] Стокер Дж. Дж., Волны на воде, пер. с англ., М., 1959; [5] Теория поверхностных волн, сб. переводов, М., 1959. *Л. Н. Сретенский.*

ВОЛЬТЕРРА ОПЕРАТОР — линейный вполне непрерывный оператор V, действующий в банаховом пространстве, спектр к-рого состоит из нулевой точки. Напр., линейный интегральный оператор Вольтерра в пространстве функций, суммируемых с квадратом на $[a, b]$, имеет вид

$$Vy = \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Нелинейным интегральным оператором Вольтерра наз. оператор вида

$$Vy = \int_a^x K(x, s, \varphi(s))\,ds.$$

Название по имени В. Вольтерра (V. Volterra), изучавшего соответствующие такому оператору интегральные *Вольтерра уравнения*. *А. Б. Бакушинский.*

ВОЛЬТЕРРА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение вида

$$\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (1)$$

(линейное интегральное В. у. I рода) или вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (2)$$

(линейное интегральное В. у. II рода). Здесь x, s, a — действительные числа, λ (вообще говоря) — комплексный параметр, $\varphi(s)$ — неизвестная функция, $f(x)$, $K(x, s)$ — заданные функции, суммируемые с квадратом соответственно на отрезке $[a, b]$ и в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$. При этом функция $f(x)$ наз. свободным членом В. у., а функция $K(x, s)$ — ядром В. у.

В. у. могут рассматриваться как частный вид *Фредгольма уравнений*, когда ядро $K(x, s)$, задаваемое на квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, обращается в нуль в треугольнике $a \leqslant x < s \leqslant b$. В. у. II рода без свободного члена наз. однородным В. у. Выражение

$$\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

определяет интегральный оператор, действующий в L_2; он наз. *Вольтерра оператором.*

Впервые уравнения вида (2) были систематически рассмотрены В. Вольтерра [1], [2]. Частный вид В. у. (1) — *Абеля интегральное уравнение*, был впервые рассмотрен Н. Х. Абелем (N. H. Abel). Основной результат теории В. у. II рода состоит в следующем. При любом комплексном $\lambda \neq \infty$ существует, и притом единственное, суммируемое с квадратом решение В. у. II рода. Это решение может быть получено методом последовательных приближений, т. е. как предел сходящейся в среднем квадратическом последовательности:

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds + f(x), \qquad (3)$$

φ_0— производная, суммируемая с квадратом. В случае непрерывного ядра $K(x, s)$ и $f \in C([a, b])$ эта последовательность сходится равномерно на $[a, b]$ к единственному непрерывному решению.

Относительно В. у. I рода справедливы следующие утверждения. Если $f(s)$ и $K(x, s)$ дифференцируемы, $K(x, x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, и если $K(x, x)$ и $K'_x(x, s)$ суммируемы с квадратом соответственно на $[a, b]$ и на $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, то В. у. I рода эквивалентно В. у. II рода, полученному дифференцированием из В. у. I рода и имеющему вид

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)} \varphi(s)\, ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

Если $K(x, x) = 0$ по крайней мере в одной точке, решение В. у. I рода требует более сложного исследования. Если же $K(x, x) \equiv 0$, то (при нек-рых условиях) операцию дифференцирования можно повторить. В случае, когда дифференцирование невозможно или не приводит к В. у. II рода, можно, вообще говоря, указать только тривиальный критерий разрешимости. Именно, В. у. (1) разрешимо тогда и только тогда, когда f принадлежит области значений интегрального оператора Вольтерра левой части. Решение В. у. (1) в этом случае может быть получено, напр., при помощи регуляризующего алгоритма (см. *Регуляризация*).

Для практич. приложений В. у. II рода весьма важно уметь хотя бы приближенно вычислить его решение, напр., при помощи последовательных приближений. Однако обычно более удобны методы другого типа, один из к-рых заключается в следующем. Пусть f и K — непрерывные функции. Отрезок $[a, b]$ разбивается точками деления x_i на N равных частей, причем $x_0 = a$, $x_N = b$. Для того чтобы найти приближенно $\varphi(x_i)$, интеграл по отрезку заменяется квадратурной суммой, напр. при помощи формулы прямоугольников с узлами $x_0, \ldots, x_{i-1}$:

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s)\, \varphi(s)\, ds \approx \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi(x_j)\, \frac{b-a}{N}.$$

Для получения $\varphi(x_i)$ используется рекуррентное соотношение:

$$\varphi(x_i) = \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi(x_j) + f(x_i), \qquad (4)$$
$$\varphi(x_0) = f(a).$$

Значения приближенного решения в точках из $[a, b]$, лежащих между точками деления, могут быть найдены, напр., при помощи соотношения:

$$\varphi(x) \simeq \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{i-1} K(x, x_j)\, \varphi(x_j) + f(x), \qquad (5)$$
$$x_{j-1} < x \leqslant x_j.$$

Это приближенное решение при $N \to \infty$ сходится равномерно к точному решению В. у. II рода.

Возможны многочисленные модификации приведенного метода.

Все сказанное выше справедливо также для В. у., у к-рых ядро $K(x, s)$ есть матрица размера $r\times r$, а φ и f суть r-мерные вектор-функции.

Уравнением Вольтерра, или обобщенным уравнением Вольтерра, наз. также более общее интегральное уравнение вида:

$$\varphi(P)-\lambda\int_{D(P)}K(P,\ Q)\varphi(Q)\,dQ=f(P), \qquad (6)$$

если последовательные приближения вида (3) сходятся в том или ином смысле (напр., равномерно или в среднем) на области определения функций φ и f при $\lambda\neq\infty$. Здесь P и Q — точки n-мерного евклидова пространства, $D(P)$ — область интегрирования, вообще говоря, зависящая от точки P, и $D(P)\subseteq D$ при любом P. Примером может служить уравнение:

$$\varphi(x,\ y)-\lambda\int_a^x\int_a^b K(x,\ y,\ \xi,\ \eta)\varphi(\xi,\ \eta)\,a\xi\,d\eta=f(x,\ y).$$

Если функция $K(x, y, \xi, \eta)$ суммируема с квадратом при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$, $a\leqslant\eta\leqslant b$, а $f(x, y)$ суммируема с квадратом при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, то последовательность (3) сходится в среднем квадратическом при $\lambda\neq\infty$. Обобщенное В. у. I рода обычно не удается свести к В. у. II рода, хотя такие случаи возможны.

Дальнейшим обобщением В. у. вида (2) и (6) служит линейное операторное уравнение:

$$\varphi-\lambda A\varphi=f, \qquad (7)$$

где φ и f — элементы банахова пространства E, λ — комплексный параметр, A — линейный *вполне непрерывный оператор*. Это уравнение наз. операторным уравнением Вольтерра, а оператор A — оператором Вольтерра, или абстрактным оператором Вольтерра, если оператор $(I-\lambda A)$ обратим в E при любом $\lambda\neq\infty$. В этом случае последовательность вида: $\varphi_0\in E$ — произвольное, $\varphi_{n+1}=\lambda A\varphi_n+f$, сходится по норме пространства E к решению уравнения (7). В современной теории операторов Вольтерра и В. у. установлены глубокие связи между абстрактным и обычным интегральным операторами Вольтерра.

Нелинейными уравнениями Вольтерра наз. иногда В. у., в к-рых произведение $K(x, s)\varphi(s)$ заменено нек-рой нелинейной (относительно $\varphi(s)$) функцией $K(x, s, \varphi(s))$. Уравнения такого типа часто встречаются в теоретических и прикладных исследованиях. Так, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения может быть легко сведена к задаче решения нелинейного В. у. Применение теории потенциала к краевым задачам для уравнений параболич. типа сводит эти краевые задачи к обобщенному В. у. Для нелинейных В. у. при тех или иных предположениях относительно $K(x, s, \varphi(s))$ может быть доказана сходимость последовательных приближений вида (3) на отрезке $[a, a+\Delta a]$, где Δa достаточно мало. Для приближенного решения нелинейных В. у. применяется рекуррентное соотношение (4); нужно только заменить $K(x_i, x_j)\varphi(x_j)$ на $K(x_i, x_j, \varphi(x_j))$. В случае, когда $K(x, s, \varphi(s))$ не зависит от x, этот метод совпадает с методом Эйлера.

Лит.: [1] Volterra V., «Rend. Accad. Lincei», 1896, t. 5, p. 177—185, 289—300; [2] его же, «Ann. di math.», 1897, (2), t. 25, p. 139—187; [3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1967; [5] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [6] Тихонов А. Н., «Бюллетень Моск. ун-та» (А), 1938, т. 1, в. 8, с. 1—25. *А. Б. Бакушинский.*

ВОЛЬТЕРРА ЯДРО — функция (матрица-функция) $K(s, t)$ двух действительных переменных s, t такая, что или $K(s, t)\equiv 0$ при $a\leqslant s<t\leqslant b$ или $K(s, t)\equiv 0$ при $a\leqslant t<s\leqslant b$. Если такая функция является ядром линейного интегрального оператора, действующего в пространстве

$L_2(a, b)$ и сама квадратично суммируема в треугольнике, в к-ром она отлична от нуля, то порожденный ею оператор является интегральным *Вольтерра оператором*.

А. Б. Бакушинский.

ВОЛЬФОВИЦА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, определяющее нижнюю границу для математич. ожидания квадрата отклонения статистич. оценки от истинного значения параметра, полученного методом *последовательного анализа*. В. н. является аналогом *Рао — Крамера неравенства* для выборок постоянного объема. Получено Дж. Вольфовицем (J. Wolfowitz).

И. В. Романовский.

ВОРОНОГО МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования* последовательности; определяется числовой последовательностью $\{p_n\}$ и обозначается символом (W, p_n). Последовательность $\{s_n\}$ суммируется методом (W, p_n) к числу S, если

$$\frac{s_0p_n + s_1p_{n-1} + \ldots + s_np_0}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n} \longrightarrow S.$$

В частности, при $p_0=1$, $p_k=0$, $k\geqslant 1$, суммируемость последовательности методом (W, p_n) к числу S означает, что эта последовательность сходится к S. При $p_k=1$, $k\geqslant 0$ получается *Чезаро метод суммирования*. Если $p_0>0$, $p_k\geqslant 1$, $k\geqslant 1$, то метод (W, p_n) является *регулярным методом суммирования* тогда и только тогда, когда $p_n:(p_0+p_1+\ldots+p_n)\to 0$. Два любых регулярных метода (W, p_n) и (W, p''_n) совместны (см. *Совместность методов суммирования*).

В. м. с. был впервые введен Г. Ф. Вороным [1] и был переоткрыт в 1919 Н. Э. Нёрлундом (N. E. Nörlund). Поэтому иногда в зарубежных источниках методы (W, p_n) наз. методами Нёрлунда и обозначаются (N, p_n) или $N(p_n)$.

Лит.: [1] Вороной Г. Ф., в кн.: Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей, СПБ, 1902, с. 60—61; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951, с. 88—121.

Ф. И. Харшиладзе.

ВОРОНОГО ТИПЫ РЕШЕТОК — типы *точечных решеток* n-мерного евклидова пространства E^n, введенные Г. Ф. Вороным в 1908 (см. [1]) в связи с задачей о параллелоэдрах.

Множество точек ε в E^n наз. (r, R)-системой, если в нем нет точек ближе чем на фиксированном расстоянии $r>0$ друг от друга, и всякий шар радиуса, большего чем фиксированное R, содержит хотя бы одну точку из ε. Пусть D — выпуклый многогранник области Дирихле точки из системы ε, т. е. области точек пространства, к-рые отстоят от какой-либо точки системы не дальше, чем от всех других ее точек. Области Дирихле точек (r, R)-системы ε попарно не имеют общих внутренних точек, покрывают все пространство (т. е. образуют разбиение) и смежны целыми гранями (т. е. составляют нормальное разбиение). С той же системой ε можно связать дуальное к $\{D\}$ тоже нормальное разбиение $\{L\}$ на многогранники L (вписанные в сферы), каждый из к-рых есть выпуклая оболочка точек системы ε, соответствующих всем D, сходящимся в вершине разбиения $\{D\}$.

Две n-мерные точечные решетки относятся к одному типу Вороного, когда их разбиения $\{L\}$ аффинны друг другу. Если репер таков, что при любых достаточно малых изменениях его метрич. параметров (скалярных квадратов a_{ii} и скалярных произведений a_{ik} $(i\neq k)$ его векторов) разбиение решетки, построенной на измененном репере, получается из разбиения $\{L\}$ решетки, построенной на исходном репере тем же аффинным преобразованием, к-рое переводит исходный репер в измененный репер, то репер наз. примитивным или общим. Для этого необходимо и достаточно, чтобы разбиение $\{L\}$ для исходного репера было симплициальным. Точка M пространства E^N параметров

a_{ik} (где $N=n(n+1)/2$), соответствующая такому реперу тоже наз. о б щ е й. Полная линейно связная область Δ, содержащая общую точку, в к-рой разбиения $\{L\}$ для всех ее точек получаются из разбиения $\{L\}$ для решетки, построенной на репере, соответствующем точке M, теми же аффинными преобразованиями, при помощи к-рых реперы, соответствующие этим точкам, получаются из репера, соответствующего точке M, наз. о б л а с т ь ю т и п а т о ч к и M. Г. Ф. Вороной доказал, что в E^N область Δ имеет вид выпуклого многогранного угла (гоноэдра) с вершиной в начале координат и с конечным числом граней и что для любого заданного n существует лишь конечное число ψ неэквивалентных областей Δ. Он дал также алгорифм для их нахождения (см. [1]). Для $n=1, 2, 3, 4$ число ψ равно соответственно 1, 1, 1, 3. Г. Ф. Вороной доказал также, что самое общее (т. е. не обязательно разбиение Дирихле) нормальное разбиение E^n на одинаковые выпуклые и параллельно расположенные многогранники, сходящиеся по $n+1$ в вершинах (примитивные параллелоэдры), есть аффинный образ разбиения $\{D\}$ для решетки, и свел, таким образом, изучение этих параллелоэдров к теории квадратичных форм. Для непримитивных параллелоэдров (т. е. в случае, когда в нек-рых вершинах сходится больше чем $n+1$ параллелоэдр) вопрос о возможности их аффинно преобразовать в область D решетки для произвольного n пока (1977) открыт. Известно только его положительное решение для $n=2, 3, 4$ (см. [2]).

Примитивная область D для двумерной решетки есть выпуклый шестиугольник с центром симметрии, вписанный в круг, и обратно. В случае трехмерной решетки это нек-рый 14-гранник, комбинаторно такой же, как кубооктаэдр с восмью шестиугольными и шестью четырехугольными гранями, грани к-рого имеют центры симметрии, и такой, что отрезки, идущие из его центра в центры граней, перпендикулярны к граням, и обратно. Непримитивная область D при $n=2$ — прямоугольник, а при $n=3$ — или додекаэдр с четырьмя шестиугольными и восмью параллелограмматич. гранями, или параллелограмматич. додекаэдр, или прямая шестиугольная призма с основанием — примитивным двумерным D, или прямоугольный параллелепипед. Для $n=4$ имеется 3 примитивных D разных В. т. р. и 49 непримитивных. При переходе к $n=5$ происходит скачок — для $n=5$ уже 221 различных примитивных D (см. [4]). Этот результат был получен введением нового понятия C-т и п а р е ш е т к и: в один C-тип относят те решетки, у к-рых аффинны друг другу не сами разбиения $\{L\}$, а лишь их одномерные остовы.

Лит.: [1] В о р о н о й Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, с. 239—368; [2] Д е л о н е Б. Н., «Изв. АН СССР, 7 сер., Отд. физ.-матем. наук», 1929, № 1, с. 79—110; № 2, с. 147—64; [3] е г о ж е, «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 102—64; [4] Р ы ш к о в С. С., Б а р а н о в с к и й Е. П., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1975, т. 137, с. 1—133.

Б. Н. Делоне.

ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел теории вероятностей, описывающий широкий круг явлений, связанных с отказом и восстановлением элементов какой-либо системы. Основные понятия в В. т. — понятия процесса восстановления и уравнения восстановления. П р о ц е с с в о с с т а н о в л е н и я описывается с помощью классич. схемы сумм независимых случайных величин следующим образом. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых, неотрицательных, одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Пусть $\zeta_0=0$, $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $n\geqslant 1$. Процесс восстановления N_t определяется следующим образом

$$N_t=\max\{n:\zeta_n\leqslant t\}. \qquad (1)$$

Если ξ_i интерпретировать как длительности работы к.-л. последовательно заменяемых элементов, то слу-

чайная величина N_t равна числу замен (или восстановлений) этих элементов за время t. При исследовании N_t большую роль играет функция восстановления $H(t) = \mathsf{E}N_t$. Эта функция удовлетворяет уравнению восстановления:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-u)\,dF(u). \qquad (2)$$

В случае, когда $F(t) = 1 - e^{-\rho t}$, $t \geqslant 0$, имеет место важный частный случай процесса восстановления — *пуассоновский процесс*, в к-ром

$$\mathsf{P}\{N(t) = k\} = \frac{(\rho t)^k}{k!} e^{-\rho t}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

и $H(t) = \rho t$.

Процесс восстановления N_t и уравнение восстановления (2) имеют большое значение при исследовании различных задач как прикладного, так и теоретич. характера в теории массового обслуживания, в теории надежности, в теории запасов, в теории *ветвящихся процессов* и т. п. Значительное количество результатов в В. т. связано с изучением асимптотических при $t \to \infty$ свойств функции восстановления $H(t)$. В элементарной теореме восстановления утверждается, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m}, \qquad (3)$$

где $m = \mathsf{E}\xi_i$. Д. Блэкуэлл (D. Blackwell, 1948) доказал (см. [1]), что в случае, если распределение ξ_i не сосредоточено на к.-л. арифметич. решетке вида $\{0, d, 2d, \ldots\}$, $d > 0$, то при любом $h > 0$

$$\lim_{t \to \infty} [H(t+h) - H(t)] = \frac{h}{m}. \qquad (4)$$

Имеются многочисленные результаты, обобщающие и уточняющие (3) и (4) в различных направлениях. С помощью результатов типа (3) и (4) изучаются асимптотич. свойства решения $X(t)$ уравнения типа восстановления

$$X(t) = K(t) + \int_0^t X(t-u)\,dF(u),$$

в к-ром свободный член $K(t)$ есть нек-рая функция, отличная от $F(t)$ и удовлетворяющая тем или иным условиям.

Из определения (1) вытекает соотношение

$$\mathsf{P}\{N_t \geqslant n\} = \mathsf{P}\{\zeta_n \leqslant t\}. \qquad (5)$$

Поскольку предельные теоремы для сумм ζ_n независимых слагаемых хорошо изучены, то соотношение (5) позволяет получать предельные теоремы для числа восстановлений N_t.

Имеется большое количество обобщений изложенной выше схемы. Одно из таких обобщений, связанное с полумарковскими процессами, дает так наз. марковский процесс восстановления, в к-ром система имеет какое-то количество состояний и времена работы отдельных элементов являются случайными величинами, зависящими от состояний системы до и после момента восстановления.

Лит.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967. *Б. А. Севастьянов.*

ВПИСАННАЯ ЛОМАНАЯ — линия L, состоящая из конечного числа n прямолинейных отрезков A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, концы к-рых A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ расположены на данной плоской или пространственной линии Γ, причем точки A_i берутся в порядке возрастания параметра на кривой. Напр., частным случаем В. л. при $n = 2$ является вписанный угол. См. также *Вписанные и описанные фигуры*. *М. И. Войцеховский.*

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ. Многоугольник наз. вписанным в выпуклую кривую, а кривая — описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на кривой (рис. 1).

Многоугольник наз. о п и с а н н ы м вокруг выпуклой кривой, а кривая — в п и с а н н о й (в н е в п и с а н н о й) в многоугольник, если каждая сторона многоугольника (или ее продолжение) касается кривой. В качестве кривой чаще всего рассматривается окружность. Так, напр., всякий треугольник имеет одну описанную окружность и четыре вписанных, из к-рых три являются вневписанными (рис. 2).

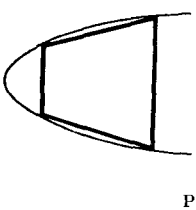


Рис. 1.

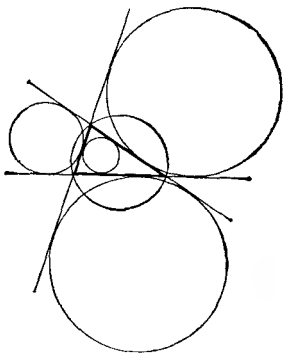


Рис. 2.

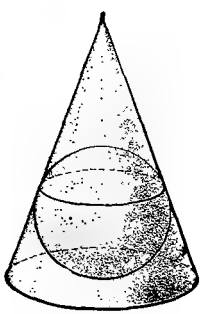


Рис. 3.

В. и о. ф. рассматриваются и в пространстве. В этом случае вместо многоугольника рассматривается многогранник, а вместо выпуклой линии — выпуклая поверхность, чаще всего сфера. Иногда говорят также о конусе, вписанном в сферу, о сфере, вписанной в конус (рис. 3) и т. п.

Лит.: [1] П е р е п е л к и н Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1—2, М.—Л., 1948—49. *А. Б. Иванов.*

ВПИСАННЫЙ УГОЛ — угол, вершина к-рого лежит на плоской кривой, а стороны являются хордами этой кривой. Если кривая есть окружность, В. у. равен половине соответствующего центрального угла.

ВПОЛНЕ АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ м н о ж е с т в а (в анализе) — обычно *счетно аддитивная функция*.

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — подмногообразие M^n риманова пространства V^N такое, что *геодезические линии* M^n являются одновременно геодезическими в V^N. В. г. м. характеризуется тем, что *вторая квадратичная форма*, соответствующая любому нормальному к M^n вектору, обращается в нуль (что равносильно равенству нулю всех нормальных кривизн M^n). *М. И. Войцеховский.*

ВПОЛНЕ ДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА — полная решетка, в к-рой для любых ее элементов a_i, b_i, $i \in I$, таких, что $a_i \geqslant b_j$, при $i \neq j$ имеет место равенство

$$(\bigcap_{i \in I} a_i) \bigcap (\bigcup_{i \in I} b_i) = \bigcup_{i \in I} (a_i \bigcap b_i).$$

Всякая В. д. р. является дедекиндовой. Если в универсальной алгебре конгруэнции перестановочны, то решетка конгруэнций этой алгебры вполне дедекиндова [1].

Лит.: [1] D w i n g e r Ph., «Proc. Neder. Ac.», 1958, ser. A, v. 61, p. 70—76. *О. А. Иванова.*

ВПОЛНЕ ЗАМКНУТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f : X \to Y$, обладающее следующим свойством: для любой точки $y \in Y$ и всякого такого конечного семейства $\{O_1, \ldots, O_s\}$ открытых подмножеств пространства X, что $f^{-1}y \bigcup_{i=1}^{s} O_i$, множество

$\{y\} \cup (\cup_{i=1}^{s} f^{\#} O_i)$ открыто. При этом через $f^{\#} O_i$ обозначается *малый образ* множества O_i относительно отображения f. Всякое В. з. о. замкнуто. Для всякого В. з. о. $f : X \to Y$ нормального пространства X справедливо неравенство $\dim X \leqslant \max\{\dim Y, \dim f\}$. Поэтому с помощью В. з. о. удается выделить достаточно широкие классы бикомпактов с несовпадающими размерностями dim и ind. Кроме того, $\dim Y \leqslant \dim X + 1$ независимо от кратности отображения f. Пусть $y \in Y$, $f : X \to Y$ — В. з. о. и $R(f, y)$ — разбиение пространства X, элементами к-рого являются все прообразы $f^{-1}y'$ точек и все точки из $f^{-1}y$. Тогда для регулярного пространства X факторпространство X_f^y пространства X относительно разбиения $R(f, y)$ также является регулярным, это свойство — характеристическое для В. з. о. в классе замкнутых отображений.

В. В. Федорчук.

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\, dx^i = 0, \qquad P_i \in \mathbb{C}^1, \qquad (*)$$

для к-рого через каждую точку нек-рой области в пространстве $\mathbb{R}^n$ проходит $(n-1)$-мерное интегральное многообразие. Необходимым и достаточным условием полной интегрируемости дифференциального уравнения $(*)$ является условие Фробениуса $\omega \wedge d\omega = 0$ ($\wedge$ — знак *внешнего произведения*, см. [1]). Для $n = 3$ это условие принимает вид:

$$P_1\left(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right) + P_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right) + P_3\left(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Иногда вместо уравнения $(*)$ рассматривают систему уравнений (см. [2]):

$$dx^l = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^l(x,\ t)\, dt^j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Условия полной интегрируемости в этом случае принимают вид:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_j^i}{\partial x^l}(x,\ t)\, a_k^l(x,\ t) + \frac{\partial a_j^i}{\partial t^k}(x,\ t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_k^i}{\partial x^l}(x,\ t)\, a_j^l(x,\ t) + \frac{\partial a_k^i}{\partial t^j}(x,\ t),$$

$$i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Семейство интегральных многообразий В. и. д. у. представляет собой *слоение* (см. [3]).

Лит.: [1] Frobenius G., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315; [2] Немыцкий В. В., «Матем. сб.», 1948, т. 23 (65), с. 161—86; [3] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78. *Л. Э. Рейзинь.*

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР, вполне непрерывное отображение,— непрерывный оператор f, действующий из одного *банахова пространства* X в другое пространство Y и переводящий слабо сходящуюся в X последовательность в последовательность, сходящуюся по норме в Y. При этом предполагается сепарабельность пространства X (для Y это требование необязательно; впрочем, область значений В. н. о. всегда сепарабельна). Другими словами, оператор f вполне непрерывен, если он отображает произвольное ограниченное подмножество X в компактное подмножество Y. Класс В. н. о. является важнейшим подклассом совокупности *компактных операторов*, содержащим, в частности, все компактные аддитивные операторы.

Определение (линейных) В. н. о. и простейшие их свойства были в 1904—06 высказаны Д. Гильбертом (см. [1]) для пространств l_2 и L_2 (см. *Гильбертово пространство*) и Ф. Риссом [2] (определение через компактность), а в общем случае — С. Банахом [3] (определение через последовательности). Термин «компактный оператор» становится более употребительным в связи с использова-

нием более общих, чем банаховы, топологических векторных пространств.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen: Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912; [2] Riesz F., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 149, p. 974—77; [3] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warsz., 1932.

М. И. Войцеховский.

ВПОЛНЕ НЕПРИВОДИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество M линейных операторов в локально выпуклом топологическом векторном пространстве E, всюду плотное в алгебре $S(E)$ всех слабо непрерывных линейных операторов в E; при этом $S(E)$ рассматривается в слабой операторной топологии. Понятие В. н. м., введенное первоначально для случая банахова пространства, оказалось полезным в теории представлений групп, главным образом для полупростых групп Ли. Если M есть В. н. м., то оно также топологически неприводимо, т. е. всякое замкнутое подпространство в E, инвариантное относительно M, совпадает с нулем или со всем E. Если M есть В. н. м., то его коммутант в $S(E)$ состоит из операторов, кратных единице. Свойство полной неприводимости равносильно свойству топологич. неприводимости в следующих случаях: 1) $\dim E<\infty$, 2) M — полугруппа унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974.

Д. П. Желобенко.

ВПОЛНЕ НЕСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром всякое подмножество, содержащее более одной точки, несвязно. Равносильное условие: компонента связности любой точки пространства состоит из одной этой точки. Топологич. произведение и топологич. сумма В. н. п., равно как и любое подпространство В. н. п., вполне несвязны. Любой вполне несвязный бикомпакт нульмерен (во всех смыслах). Такие бикомпакты важны, в частности, потому, что они являются стоуновскими пространствами булевых алгебр. Построено В. н. п. (веер Кнастера — Куратовского), лежащее на плоскости и превращающееся в связное пространство после присоединения к нему всего лишь одной точки. Это пространство не нульмерно. Подпространство гильбертова пространства, образованное точками, все координаты к-рых рациональны, вполне несвязно и одномерно. Если в пространстве каждая точка является пересечением всех открыто замкнутых множеств, его содержащих, то это В. н. п. (в частности, вполне несвязны все нульмерные пространства). Однако существует вполне несвязное метрич. пространство со счетной базой, в к-ром не всякая точка является пересечением содержащих ее открыто замкнутых множеств.

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [2] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [4] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968.

А. В. Архангельский, Б. А. Ефимов.

ВПОЛНЕ НЕСОВЕРШЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, не содержащее никакого подмножества, гомеоморфного канторову множеству. Напр., всякое полное сепарабельное несчетное пространство содержит несчетное подпространство, являющееся (вместе с его дополнением) В. н. п. *А. А. Мальцев.*

ВПОЛНЕ НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром для любых двух подмножеств A, B, удовлетворяющих условиям $[A]\cap B=\varnothing$, $A\cap[B]=\varnothing$, имеются дизъюнктные окрестности; здесь $[A]$ и $[B]$ — замыкания множеств A и B, а $\varnothing$ — пустое множество. В. н. п. и только они наследственно нормальны. *Совершенно нормальные пространства* являются В. н. п. Обратное неверно. Существуют также *нормальные пространства*, не являющиеся В. н. п. *В. И. Пономарев.*

ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО в метрическом пространстве — то же, что вполн

не ограниченное подпространство данного метрич. пространства. См. *Вполне ограниченное пространство.*

А. В. Архангельский.

ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — метрическое пространство X, к-рое при любом $\varepsilon>0$ может быть представлено как объединение конечного числа множеств диаметра меньше ε. Равносильное условие: для каждого $\varepsilon>0$ в пространстве X существует конечная ε-сеть, т. е. такое конечное множество A, что каждая точка множества X отстоит от нек-рой точки множества A на расстоянии, меньшем ε. В. о. п. являются те и только те метрич. пространства, к-рые могут быть представлены как подпространства метрич. *бикомпактных пространств.* Метрич. В. о. п., рассматриваемые как топологические, в точности исчерпывают все *регулярные пространства* со счетной базой. Подпространство евклидова пространства является В. о. п. в том и только в том случае, если оно ограничено. Обратное неверно: бесконечное множество, в к-ром расстояние между любыми двумя различными точками равно 1, а также сфера и шар гильбертова пространства являются ограниченными, но не вполне ограниченными метрич. пространствами. О значении понятия В. о. п. свидетельствует теорема: метрич. пространство является *компактом* в том и только в том случае, если оно вполне ограничено и полно. Метрич. пополнение метрич. В. о. п. есть компакт. Образ метрич. В. о. п. при равномерно непрерывном отображении есть В. о. п.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. В. Архангельский.*

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМАЯ МАТРИЧНАЯ ГРУППА — матричная группа G над произвольным фиксированным полем P, все матрицы к-рой одновременным сопряжением посредством нек-рой матрицы над P можно привести к клеточно-диагональному виду, т. е. к виду

$$x=\begin{Vmatrix} d_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & d_m(x) \end{Vmatrix},$$

где $d_i(x)$, $i=1, \ldots, m$, — квадратные матрицы, а на остальных местах стоят нули, причем каждая матричная группа $d_i(G)$ неприводима (см. *Неприводимая матричная группа*). На языке преобразований: группа G линейных преобразований конечномерного векторного пространства V над полем наз. вполне приводимой, если выполнено любое из трех следующих равносильных условий: 1) любое подпространство из V, инвариантное относительно G, имеет прямое дополнение, инвариантное относительно G (см. *Инвариантное подпространство*); 2) V разлагается в прямую сумму минимальных инвариантных относительно G подпространств; 3) V порождается минимальными инвариантными относительно G подпространствами. Всякая конечная матричная группа G над полем, характеристика к-рого не делит порядок G, вполне приводима. Всякая нормальная подгруппа вполне приводимой матричной группы сама вполне приводима.

Лит.: [1] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, Новосибирск, 1967; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962. *Ю. И. Мерзляков.*

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество M линейных операторов в топологическом векторном пространстве E, обладающее тем свойством, что всякое замкнутое подпространство в E, инвариантное относительно M, имеет в E инвариантное дополнение. В гильбертовом пространстве E всякое множество M, симметричное относительно эрмитова сопряжения, есть В. п. м. (в частности, всякая группа унитарных операторов есть В. п. м.). Представление φ алгебры A (группы, кольца и т. д.) наз. вполне приводимым, если множе-

ство $M = \{\varphi(a), a \in A\}$ вполне приводимо. Если A — компактная группа или полупростая связная группа (алгебра) Ли, то всякое представление A в конечномерном векторном пространстве вполне приводимо (п р и н ц и п п о л н о й п р и в о д и м о с т и).

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.
Д. П. Желобенко.

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЙ МОДУЛЬ — модуль A над ассоциативным кольцом R, представимый в виде суммы своих неприводимых R-подмодулей (см. *Неприводимый модуль*). Эквивалентные определения: A является суммой минимальных подмодулей; A изоморфен прямой сумме неприводимых модулей; A совпадает со своим цоколем. Подмодуль и фактормодуль В. п. м. также вполне приводимы. Решетка подмодулей модуля M является решеткой с дополнениями тогда и только тогда, когда модуль M вполне приводим.

Если всякий правый R-модуль над кольцом R вполне приводим, то и всякий левый R-модуль вполне приводим, и обратно; в этом случае R наз. в п о л н е п р и в о д и м ы м к о л ь ц о м, или *классически полупростым кольцом*. Для того чтобы кольцо R было вполне приводимо, достаточно, чтобы оно, рассматриваемое как левый (правый) модуль над собой, было вполне приводимо.

Лит.: [1] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.
О. А. Иванова.

ВПОЛНЕ ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — один из важнейших типов простых полугрупп. Полугруппа S наз. вполне простой (вполне 0-простой — в. 0-п. п), если она идеально проста (0-проста) и содержит п р и м и т и в н ы й и д е м п о т е н т, т. е. ненулевой идемпотент, не являющийся единицей ни для какого ненулевого идемпотента из S. Присоединение нуля к В. п. п. дает в. 0-п. п., поэтому многие свойства В. п. п. можно непосредственно вывести из соответствующих свойств в. 0-п. п.

Полугруппа S будет в. 0-п. п. тогда и только тогда, когда она 0-проста и удовлетворяет одному из следующих условий: S обладает минимальными ненулевыми левыми и правыми идеалами; нек-рая степень любого элемента из S принадлежит подгруппе полугруппы S. В частности, любая периодическая (и, тем более, конечная) 0-простая полугруппа будет в. 0-п. п. Всякая в. 0-п. п. есть 0-бипростая *регулярная полугруппа* и является объединением своих минимальных ненулевых левых(правых) идеалов. Полугруппа S будет В. п. п. тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий: S есть прямоугольная связка (см. *Связка полугрупп*) групп (которые необходимо изоморфны); S регулярная и все ее идемпотенты примитивны. Специальный тип В. п. п.— п р я м о у г о л ь н а я г р у п п а — прямое произведение группы на прямоугольную полугруппу (см. *Идемпотентов полугруппа*). В свою очередь, частным случаем последней является *правая группа* (левая группа). Важное представление в. 0-п. п. дает т е о р е м а Р и с а: полугруппа будет в. 0-п. п. тогда и только тогда, когда она изоморфна регулярной *рисовской полугруппе матричного типа* над группой с присоединенным нулем.

С рассмотрения конечных В. п. п. фактически началось развитие теории полугрупп (см. *Полугруппа*). В. 0-п. п. и В. п. п. часто возникают в различных теоретико-полугрупповых исследованиях и составляют один из наиболее изученных типов полугрупп.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, 2, пер. с англ., М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Kapp K., Schneider H., Completely 0-simple semigroups, N. Y.—Amst., 1969.
Л. Н. Шеврин.

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНАЯ ПОЛУГРУППА — то же, что *клиффордова полугруппа*.

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром всякие два множест-

ва, из к-рых одно замкнуто, а другое состоит лишь из одной точки, функционально отделимы (см. *Отделимости аксиомы*). В. р. п., в к-рых все одноточечные множества замкнуты (т. е. вполне регулярные T_1-пространства), часто наз. тихоновскими пространствами. Они образуют один из важнейших классов топологич. пространств, выделяющийся многими замечательными свойствами и особенно часто встречающийся в приложениях топологии к другим областям математики. Так, напр., пространство всякой топологич. группы является В. р. п., но может не быть нормальным пространством. Все тихоновские пространства являются хаусдорфовыми и могут быть определены как пространства, имеющие (хаусдорфовы) бикомпактные расширения, т. е. как (даже всюду плотные) подпространства бикомпактов. Среди этих расширений данного пространства имеется единственное с точностью до гомеоморфизма максимальное или *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*, к-рое может быть непрерывно отображено на всякое (хаусдорфово) бикомпактное расширение данного пространства так, что каждая его точка отображается в себя.

Прямое определение тихоновских пространств без привлечения действительных чисел и функций основано (см. [3]) на рассмотрении двух сопряженных баз пространства - открытой $\mathfrak{B}$ и замкнутой $\mathfrak{A}$, причем сопряженность этих баз означает, что каждая база состоит из множества, дополнительных к множествам, составляющим другую базу. Такая пара $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\}$ сопряженных баз наз. регулярной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) всякие два дизъюнктные замкнутые множества базы $\mathfrak{A}$ имеют дизъюнктные окрестности, принадлежащие $\mathfrak{B}$; 2) база $\mathfrak{A}$ является *сетью*, т. е. для произвольной точки $x \in X$ и ее произвольной окрестности Ox в базе $\mathfrak{B}$ найдется такой элемент B, что $X \setminus x \supset B \supset X \setminus O(x)$. Для того чтобы T_1-пространство было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало хотя бы одной регулярной парой сопряженных баз (теорема Зайцева).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1970; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973; [5] Зайцев В. И., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем.», 1967, № 3, с. 48—57.

П. С. Александров.

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество P с заданным на нем бинарным отношением $\leqslant$, удовлетворяющим условиям:

1) для любых $x, y \in P$ либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$;
2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;
4) в любом непустом подмножестве $X \subset P$ существует такой элемент a, что $a \leqslant x$ для всех $x \in X$; таким образом В. у. м.—*линейно упорядоченное множество*, удовлетворяющее условию минимальности.

Понятие В. у. м. было введено Г. Кантором [1]. Примером В. у. м. служит естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел. С другой стороны, отрезок действительных чисел $[0, 1]$ с естественным порядком не является В. у. м. Любое подмножество В. у. м. само вполне упорядоченное. Декартово произведение конечного числа В. у. м. вполне упорядочено отношением *лексикографического порядка*. Линейно упорядоченное множество является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножества, антиизоморфного (см. *Антиизоморфизм* частично упорядоченных множеств) множеству натуральных чисел.

Наименьший элемент В. у. м. P наз. нулем (и обозначается 0). Для любого элемента $a \in P$ множество

$$[0, a) = \{x \mid x \in P,\ x < a\}$$

наз. начальным отрезком множества P. Для всякого элемента a, не являющегося наибольшим в P, существует элемент, непосредственно следующий за ним; его принято обозначать $a+1$. Элемент В. у. м., не имеющий непосредственно предшествующего, называется предельным.

Теорема о сравнении. Для любых двух В. у. м. P_1 и P_2 имеет место одна и только одна из следующих ситуаций: 1) P_1 изоморфно P_2, 2) P_1 изоморфно некоторому начальному отрезку множества P_2, 3) P_2 изоморфно начальному отрезку множества P_1.

Принимая в числе аксиом теории множеств *выбора аксиому*, можно доказать, что на всяком непустом множестве можно ввести отношение порядка, превращающее его во В. у. м. (т. е. всякое непустое множество можно вполне упорядочить). Эта теорема, называемая теоремой Цермело, на самом деле эквивалентна аксиоме выбора. Теорема Цермело и теорема о сравнении служат основанием для сравнения множеств по их мощности. *Порядковые типы* В. у. м. наз. трансфинитами, или *трансфинитными числами*.

Лит.: [1] Cantor G., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 51—8; [2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [4] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов, Т. С. Фофанова.*

ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция θ *алгебраической системы* $A=\langle A, \Omega\rangle$, к-рая выдерживает любой эндоморфизм σ этой системы, т. е. из $x\theta y$ следует $\sigma(x)\theta\sigma(y)$ $(x, y\in A)$. В. х. к. алгебраич. системы A образуют по включению полную подрешетку $C_v(A)$ решетки $C(A)$ всех конгруэнций системы A. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие Ω-систем и F — свободная в $\mathfrak{M}$ система счетного ранга, то решетка $C_v(F)$ В. х. к. системы F инверсно изоморфна решетке $L_v(\mathfrak{M})$ всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$. Всякая конгруэнция $\varkappa$ Ω-алгебры A с конечным числом порождающих, имеющая конечный индекс в A (т. е. конечное число смежных классов $a\varkappa$, $a\in A$), содержит В. х. к. θ алгебры A, также имеющую конечный индекс в A.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970. *Д. М. Смирнов.*

ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — подгруппа группы G, инвариантная относительно всех эндоморфизмов группы G. Совокупность всех В. х. п. образует подрешетку в решетке всех подгрупп группы. Коммутант и члены нижнего центрального ряда являются В. х. п. в произвольной группе. Более того, любая *вербальная подгруппа* группы есть В. х. п. Для свободных групп верно и обратное: любая В. х. п. является вербальной.

Лит.: [1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.
В. Н. Ремесленников.

ВРАЩЕНИЕ — частный случай *движения*, при к-ром по крайней мере одна точка пространства остается неподвижной. При В. плоскости неподвижная точка наз. центром вращения, *при* В. пространства неподвижная прямая — осью вращения. В. евклидова пространства наз. собственным (В. 1-го рода), или несобственным (В. 2-го рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет ориентацию пространства.

На плоскости собственное В. выражается аналитически в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.)

$$\tilde{x}=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\quad \tilde{y}=x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Собственное В. на угол φ может быть представлено как произведение двух осевых симметрий с осями, пересекающимися под углом $\varphi/2$. Несобственное В. на плоскости выражается аналитиче-

ски в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.):

$$\tilde{x}=x\cos\varphi+y\sin\varphi,$$
$$\tilde{y}=x\sin\varphi-y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Несобственное В. на плоскости может быть представлено как произведение собственного В. на осевую симметрию.

В случае n-мерного евклидова пространства В. аналитически выражается с помощью ортогональной матрицы, к-рая приводится к канонич. виду:

$$M=\begin{Vmatrix} u_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & u_k & & \\ & & & \varepsilon_p & \\ 0 & & & & -\varepsilon_q \end{Vmatrix},$$

где

$$u_i=\begin{Vmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{Vmatrix}.$$

ε_s — единичная матрица порядка $s(s=p,\ q)$. Возможны следующие случаи:

1) $p=n$ — тождественное преобразование;

2) $q=n$ — В. является центральной симметрией;

3) $p+q=n$ — В. является симметрией относительно p-плоскости (отражением от p-плоскости);

4) M не содержит подматриц ε_p и $-\varepsilon_q$ — В. наз. поворотом вокруг единственной неподвижной точки;

5) M содержит подматрицы u_i и ε_p, но не содержит подматрицу $-\varepsilon_q$ — В. наз. поворотом вокруг p-плоскости;

6) M содержит подматрицы u_i и $-\varepsilon_q$, но не содержит подматрицы ε_p - В. наз. поворотным отражением от $(n-q)$-плоскости.

В. евклидова пространства E_n вокруг данной точки образует группу относительно операции умножения В., изоморфную группе *ортогональных преобразований* векторного пространства R^n или группе ортогональных матриц порядка n над полем R. Группа В. пространства E_n является $n(n-1)$ 2-мерной группой Ли и действует в E_n интранзитивно.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [2] его же, Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Широков П. А., Тензорное исчисление. Алгебра тензоров, 2 изд., Казань, 1961. *В. Т. Базылев.*

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ на плоскости — одна из его гомотопически инвариантных характеристик. Пусть X — векторное поле в области G евклидовой плоскости E^2, θ — угол между X и нек-рым фиксированным направлением; тогда вращением векторного поля X наз. деленное на 2π приращение угла θ при обходе замкнутой ориентированной кривой $L\in E^2$, вдоль к-рой $X\neq 0$. Так, напр., если L — гладкая класса C^2 кривая, то вращение касательного к L (или нормального к L) поля τ (или ν) вдоль L равно деленной на 2π полной *кривизне* L; если X — векторное поле (с возможными изолированными особыми точками) в G с жордановой границей ∂G то В. в. п. на ∂G равно сумме индексов особых точек X в замыкании G. (см. *Особой точки индекс*). При гомотопной деформации L, не проходящей через особые точки X, В. в. п. не изменяется.

Обобщением понятия В. в. п., заданного на n-мерном многообразии M, расположенном в E^N, является *степень отображения* его в $(N-n)$-мерную сферу; она связана с *эйлеровой характеристикой*. См. также *Пуанкаре теорема*, *Кронекера формула*. *М. И. Войцеховский.*

ВРАЩЕНИЙ ИНДИКАТРИСА, диаграмма вращений,— одна из 12 *Дарбу поверхностей*, ассоциированная с *бесконечно малым изгибанием* поверхности, – множество точек пространства, описываемое ра-

диус-вектором $\boldsymbol{y}$, параллельным вектору вращения (мгновенной угловой скорости), определяемому уравнением $d\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{z}$ — вектор скорости бесконечно малого изгибания поверхности с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$. Аналогично вектором перемещений $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{z}\cdot[\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}]$ определяется индикатриса (диаграмма) перемещений.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ВРАЩЕНИЙ МЕТОД, метод Якоби,— метод решения полной проблемы собственных значений эрмитовой матрицы, основанный на подобном преобразовании эрмитовой матрицы к диагональному виду с помощью последовательности плоских вращений. В. м.— итерационный метод, он имеет простую вычислительную схему и всегда сходится, причем скорость сходимости асимптотически квадратичная. Наличие кратных и близких собственных значений у матрицы не вызывает осложнений. В. м. позволяет вычислить собственные значения как с нахождением собственных векторов, так и без них. Система собственных векторов, вычисленная по В. м., ортонормирована.

Идеи В. м. предложены в [1]. В современном виде это один из наиболее развитых и эффективных по реализации на ЭВМ методов решения полной проблемы собственных значений матрицы.

Классический В. м. состоит в построении последовательности матриц $A_0, A_1, A_2, \ldots$, где $A_0=A$ — исходная матрица, $A_k=U_k^*A_{k-1}U_k$, U_k — матрица плоского вращения, аннулирующего максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы A_{k-1}. При этом, если $A_k=\|a_{ij}^{(k)}\|$, $|a_{pq}^{(k-1)}|=\max\limits_{i\neq j}|a_{ij}^{(k-1)}|$, то матрица $U_k=\|u_{ij}^{(k)}\|$ отличается от единичной лишь элементами $u_{pp}^{(k)}$, $u_{qq}^{(k)}$, $u_{pq}^{(k)}$, $u_{qp}^{(k)}$. В действительном случае, когда A — симметрическая матрица,

$$\left.\begin{aligned} u_{pp}^{(k)}=u_{qq}^{(k)}=\cos\varphi;\quad u_{pq}^{(k)}=-u_{qp}^{(k)}=\sin\varphi,\\ \operatorname{tg}2\varphi=\frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)}-a_{qq}^{(k-1)}},\quad |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

В комплексном случае соотношения (*) незначительно усложняются.

Последовательность матриц A_k сходится к диагональной матрице Λ, скорость сходимости асимптотически квадратичная. Диагональные элементы матрицы Λ являются приближенными собственными значениями A, а столбцы матрицы $U^{(k)}=U_1U_2\ldots U_k$ — приближенными собственными векторами.

Реализация описанного варианта В. м. требует выбора максимального по модулю внедиагонального элемента матрицы на каждом шаге. Для выполнения этой операции на ЭВМ требуется значительный объем вычислительной работы.

Существуют другие варианты В. м., более эффективные в этом отношении: циклич. В. м., В. м. с барьером, В. м. с выбором оптимального элемента.

В циклическом В. м. пары индексов (p, q) аннулирующего элемента пробегают циклически все наддиагональные позиции. Недостатком этого процесса является возможность выполнения большого числа неэффективных вращений, аннулирующих малые внедиагональные элементы.

Этот недостаток частично устраняется в барьерном В. м., в к-ром вводится монотонно убывающая к нулю последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, называемых барьерами, и при циклич. просмотре индексов (p, q) аннулируются лишь те внедиагональные элементы, к-рые по модулю меньше α_1. После того, как все внедиагональные элементы стали меньше α_1, барьер α_1

заменяется на барьер α_2 и процесс продолжается. Практич. использование этого варианта В. м. встречает ряд трудностей, связанных с выбором оптимального барьера.

Наиболее эффективным для использования в вычислительной практике является В. м. с выбором оптимального элемента [4]. В этом методе пары индексов (p, q) соответствуют почти максимальному элементу и выбираются так, что p — номер строки с максимальной евклидовой длиной, q — номер столбца максимального по модулю внедиагонального элемента p-й строки. Поскольку на каждом шаге процесса строки матрицы, за исключением p-й и q-й, не меняют длины, то выбор индексов (p, q) существенно не увеличивает общего объема вычислений. Вся теория классич. В. м. полностью переносится на описанную модификацию [2].

Расчетные формулы В. м., реализующие вычисление (*), обеспечивают сходимость процесса В. м. в реальных условиях машинной арифметики и высокую точность как собственных значений, так и собственных векторов [5].

Лит.: [1] Jacobi C. G. J., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 51—94; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [3] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Ким Г. Д., Программа для нахождения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы методом вращений, в сб.: Вычислительные методы и программирование, М., 1962, с. 269—77; [5] Ким Г. Д., в сб.: Численный анализ на ФОРТРАН'е, в. 3, М., 1973, с. 97—113.

Г. Д. Ким.

ВРАЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, описываемая вращением плоской кривой L вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Если L определяется уравнениями $\rho = \rho(u)$, $z = z(u)$, то радиус-вектор В. п. есть $r = \{\rho(u)\cos v,\ \rho(u)\sin v,\ z(u)\}$, где u — параметр кривой L, ρ — расстояние точки поверхности от оси вращения, v — угол поворота. Линейный элемент В. п.:

$$ds^2 = (\rho'^2 + z'^2)\,du^2 + \rho^2\,dv^2.$$

Гауссова кривизна $K = -z'M\rho N^4$, средняя кривизна $H = (z'N^2 - \rho M)/2\rho N^3$, где $M = z'\rho'' - z''\rho'$, $N = \sqrt{\rho'^2 + z'^2}$. Линии $u = \text{const}$ наз. параллелями В. п. и представляют собой окружности, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси вращения, с центрами на этой оси. Линии $v = \text{const}$ наз. меридианами; все они конгруэнтны вращаемой кривой и лежат в плоскостях, проходящих через ось вращения. Меридианы и параллели В. п. являются линиями кривизны и образуют *изотермическую сеть*.

В. п. допускает *изгибание* также в В. п., при к-ром сеть линий кривизны сохраняется и является потому главным основанием изгибания. *Омбилические точки* В. п. расположены на тех широтах, на к-рых центр кривизны меридиана лежит на оси вращения. Произведение радиуса параллели на косинус угла, под к-рым геодезич. линия В. п. пересекает параллель, постоянно вдоль геодезической (теорема Клеро).

Единственная минимальная В. п. — катеноид. Линейчатая В. п. есть однополостный гиперболоид или его вырождения: цилиндр, конус или плоскость. В. п., имеющая более одной оси вращения, есть сфера или плоскость.

И. Х. Сабитов.

ВРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, характеризующие изменение аргумента при конформном отображении. В. т. в классе S функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, дает точные оценки аргумента производной для функций этого класса:

$$|\arg f'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \arcsin |z| & \text{при } |z| \leqslant 2^{-1/2}, \\ \pi + \ln \frac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{при } 2^{-1/2} \leqslant |z| < 1. \end{cases} \quad (*)$$

Здесь рассматривается та ветвь $\arg f'(z)$, к-рая равна нулю при $z = 0$. Верхние и нижние границы для $\arg f'(z)$,

устанавливаемые неравенствами (*), являются точными при любом z из круга $|z|<1$. Эта В. т. получена Г. М. Голузиным (см. [1], [5]; точность неравенств (*) при $2^{-1/2}<|z|<1$ впервые доказана в [2]; полный анализ случаев равенства в этих оценках дается в [3]).

Т е о р е м а м и в р а щ е н и я в классе S наз. также оценки $\arg(f(z)/z)$ и оценки выражений вида

$$\lambda \arg f'(z)-(1-\lambda)\arg\frac{f(z)}{z}, \quad 0<\lambda<1.$$

Простейшими оценками такого рода в классе S являются точные неравенства (рассматриваются соответствующие ветви аргументов):

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z|<1.$$

В. т. имеются и в других классах функций, реализующих однолистное конформное отображение круга или его внешности, и в классах функций, однолистных в многосвязной области (см. [5], [3], *Искажения теоремы*, *Однолистная функция*). В. т. распространены также на случай p-листных функций (см. Добавления в [5], а также *Многолистная функция*).

Лит.: [1] Г о л у з и н Г. М., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), в. 1, с. 127—35; [2] Б а з и л е в и ч И. Е., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), в. 3, с. 283—92; [3] Д ж е н к и н с Д ж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] G r u n s k y H., «Schr. Math. Sem. und Inst. für angew. Math. Univ. Berlin», 1932, Bd 1, S. 95—140; [5] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Г. В. Кузьмина.

ВРЕМЕННО́Й РЯД — первоначально в статистич. литературе ряд наблюдений в различные моменты времени (напр., экономические В. р., метеорологические В. р.). В советской экономич. литературе наряду с термином В. р. употребляется термин р я д д и н а м и к и. С середины 20-х гг. 20 в. В. р. часто означает наблюденную реализацию анализируемого случайного процесса; анализ В. р.—статистич. анализ случайных процессов (см. *Статистические задачи* теории случайных процессов).

И. А. Ибрагимов.

ВРОНСКИАН, о п р е д е л и т е л ь В р о н ь с к о г о,— определитель системы n вектор-функций размерности n

$$\varphi_i(t)=\{\varphi_i^1(t), \ \ldots, \ \varphi_i^n(t)\}, \quad i=1, \ \ldots, \ n, \qquad (1)$$

имеющий вид:

$$W(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))=\begin{vmatrix}\varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_n^1(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^n(t) & \ldots & \varphi_n^n(t)\end{vmatrix}.$$

В. системы n скалярных функций

$$f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t), \qquad (2)$$

имеющих производные до $(n-1)$-го порядка включительно, есть определитель

$$W(f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t))=\begin{vmatrix}f_1(t) & \ldots & f_n(t)\\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

Это понятие было введено Ю. Вроньским [1].

Если вектор-функции (1) линейно зависимы на множестве E, то

$$W(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))\equiv 0, \quad t\in E;$$

если скалярные функции (2) линейно зависимы на множестве E, то

$$W(f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t))\equiv 0, \quad t\in E.$$

Обратные утверждения, вообще говоря, неверны: тождественное обращение В. в нуль на нек-ром множестве не является достаточным условием линейной зависимости n функций на этом множестве.

Пусть вектор-функции (1) суть решения линейной однородной системы n-го порядка $x'=A(t)x$ с непрерывной на интервале I $(n\times n)$-матрицей $A(t)$. Если эти решения составляют фундаментальную систему, то

$$W(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)) \neq 0, \quad t \in I.$$

Если В. этих решений равен нулю хотя бы в одной точке I, то он тождественно равен нулю на I, а функции (1) линейно зависимы. Имеет место формула Лиувилля:

$$W(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)) = W(\varphi_1(\tau),\ \ldots,\ \varphi_n(\tau)) \exp \int_\tau^t \operatorname{Sp} A(s)\, ds, \quad \tau,\ t \in I,$$

где $\operatorname{Sp} A(t)$ — след матрицы $A(t)$.

Пусть функции (2) суть решения линейного однородного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\, y' + p_n(t)\, y = 0$$

с непрерывными на интервале I коэффициентами. Если эти решения составляют фундаментальную систему, то

$$W(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t)) \neq 0, \quad t \in I.$$

Если В. этих решений равен нулю хотя бы в одной точке I, то он тождественно равен нулю на I, а функции (2) линейно зависимы. Имеет место формула Лиувилля:

$$W(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t)) = W(f_1(\tau),\ \ldots,\ f_n(\tau)) \exp\left[-\int_\tau^t p_1(s)\, ds\right], \quad \tau,\ t \in I.$$

Лит.: [1] Hoëne-Wroński J., Réfutation de la théorie des fonctions analitiques de Lagrange, P., 1812; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

Н. Х. Розов.

ВСЕОБЩНОСТИ КВАНТОР — логическая операция, служащая для образования высказываний с помощью оборота «для всех x». В формализованных языках В. к. чаще всего обозначается $\forall x$, $(\forall x)$, (x). Применяются также обозначения (Ax), $\bigwedge\limits_x$, $\bigcap\limits_x$, $\prod\limits_x$.

В. Е. Плиско.

ВСЮДУ ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО A топологического пространства X — множество, определяемое свойством: $[A]=X$, где $[A]$ — замыкание множества A. Другими словами, в любом открытом в X множестве имеется хотя бы одна точка из множества A. Употребляется также термин «плотное множество».

А. А. Мальцев.

ВТОРАЯ АКСИОМА СЧЕТНОСТИ — понятие теоретико-множественной топологии. Топологич. пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, если оно обладает счетной *базой*. Класс пространств, удовлетворяющих В. а. с., выделен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff); к этому классу принадлежат все сепарабельные метрич. пространства. Всякое удовлетворяющее В. а. с. регулярное пространство со счетной базой топологически содержится в *гильбертовом кирпиче* и, следовательно, метризуемо и сепарабельно (П. С. Урысон). Исследование регулярных пространств, удовлетворяющих В. а.с., сводится к рассмотрению более конкретных объектов — подпространств гильбертова кирпича, к-рые тем самым получают прозрачную топологич. характеристику. Еще большую конкретизацию допускают конечномерные пространства со счетной базой.

Б. Э. Шапировский.

ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ — частный случай n-той *вариации функционала* (см. также *Гато вариация*), обобщающий понятие второй производной функции нескольких переменных; используется в вариационном исчислении. Согласно общему определению В. в. в точке x_0 функционала $f(x)$, определенного в нормированном пространстве X, есть

$$\delta^2 f(x_0, h) = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + th)\Big|_{t=0}.$$

При равенстве нулю первой вариации неотрицательность В. в. является необходимым, а строгая положительность

$$\delta^2 f(x_0,\ h) \geqslant \alpha \| h \|^2, \quad \alpha > 0$$

при нек-рых допущениях — достаточным условием локального минимума $f(x)$ в точке x_0.

В простейшей (векторной) задаче классического вариационного исчисления В. в. функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})\, dt; \quad L : [t_0,\ t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(рассматриваемого на векторных функциях класса C^1 с закрепленными краевыми значениями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$) имеет вид:

$$\delta^2 J(x_0,\ h) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A(t)\, \dot{h}(t),\ \dot{h}(t) \rangle + \\ + 2 \langle B(t)\, \dot{h}(t),\quad h(t)_0 \rangle + \langle C(t)\, h(t)_0\, h(t) \rangle)\, dt, \qquad (*)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы с коэффициентами $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x}$ соответственно (производные вычисляются в точках кривой $x_0(t)$). Целесообразно рассматривать функционал от h, определяемый формулой (*), не только в пространстве C^1, но и на более широком пространстве W_2^1 абсолютно непрерывных векторных функций с интегрируемым квадратом модуля производной. В этом случае неотрицательность и строгая положительность В. в. формулируются в терминах неотрицательности и строгой положительности матрицы $A(t)$ (*Лежандра условие*) и отсутствия сопряженных точек (*Якоби условие*), что дает условия слабого минимума в вариационном исчислении.

Для вариационного исчисления в целом было проведено исследование В. в. для экстремалей, не обязательно доставляющих минимум (однако, по-прежнему, при выполнении условия Лежандра, см. [1]). Важнейший результат — совпадение *Морса индекса* В. в. и числа точек, сопряженных с t_0, на интервале (t_0, t_1) (см. [2]).

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965.

В. М. Тихомиров.

ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА поверхности — квадратичная форма от дифференциалов координат на поверхности, к-рая характеризует локальную структуру поверхности в окрестности обыкновенной точки. Пусть поверхность задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\ v),$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности;

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль выбранного направления du/dv смещения из точки M в точку M' (см. рис.);

$$\boldsymbol{n} = \frac{\varepsilon [\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]|}$$

— единичный вектор нормали к поверхности в точке M (здесь $\varepsilon = +1$, если тройка векторов $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n}\}$ правой ориентации, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае). Удвоенная главная линейная часть 2δ отклонения PM' точки M' поверхности от касательной плоскости в ее точке M равна

$$\mathrm{II} = 2\delta = (-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = \\ = (\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n})\, du^2 + 2\, (\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n})\, du\, dv + (\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n})\, dv^2;$$

она и наз. второй основной квадратичной формой поверхности.

Коэффициенты В. к. ф. обычно обозначают через

$$L=(r_{uu},\ n),\ M=(r_{uv},\ n),\ N=(r_{vv},\ n)$$

или в тензорных символах

$$(-dr,\ dn)=b_{11}\,du^2+2b_{12}\,du\,dv+b_{22}\,dv^2.$$

Тензор b_{ij} наз. вторым основным тензором поверхности.

О связи В. к. ф. с другими квадратичными формами поверхности и лит. см. *Квадратичные формы поверхности.*

А. Б. Иванов.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+ \quad (*)$$
$$+\,c(x)\,u(x)=f(x),$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$. В. к. з. для уравнения (*) в области Ω наз. следующая задача: из множества всех решений уравнения (*) требуется выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial N(x)}\right|_{x\in\Gamma}=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция. В. к. з. наз. также *задачей Неймана.*

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [3] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961.

А. К. Гущин.

ВТОРОЕ СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство X'', сопряженное к пространству X', сопряженному к отделимому *локально выпуклому пространству* X, наделенному сильной топологией. Каждый элемент $x\in X$ порождает элемент $F\in X''$ по формуле $F(f)=f(x)$ $(f\in X')$. Если $X''=X$, то пространство X наз. рефлексивным. Если X — *бочечное пространство*, то линейное отображение $\pi: x\to F$ является изоморфным вложением пространства X в пространство X'', наделенное сильной топологией. Вложение π наз. каноническим. Для нормированных пространств π есть изометрическое вложение.

М. И. Кадец.

ВУРФ — упорядоченная совокупность $n+2$ точек n-мерного проективного пространства при $n>1$ и четырех точек при $n=1$. В случае $n>1$ никакие $n+1$ точек В. не принадлежат $(n-1)$-мерному проективному пространству. Два В. на прямой или на коническом сечении равны, если образующие их четверки точек проективны. Над В. производятся операции сложения и умножения. При этом удобно пользоваться В. с тремя одинаковыми точками P_0, P_1, P_∞ — так наз. приведенными В. Таким образом операции над В. сводятся к операциям над точками.

Суммой точек A и B (отличных от P_∞) наз. точка $A+B$, к-рая соответствует P_0 в гиперболич. *инволюции.* Операция сложения коммутативна и ассоциативна. Точка P_0 является нулевым элементом и для каждой точки A имеется противоположная $-A$: $A+(-A)=P_0$.

Произведением точек A и B (отличных от P_0, P_∞) наз. точка $A\times B$, составляющая с P_1 пару в эллиптич. или гиперболич. инволюции. Операция умножения коммутативна и ассоциативна. Точка P_1 является единичным элементом и для каждой точки A имеется обратная ей A^{-1}: $A\times A^{-1}=P_1$.

Лит.: [1] Von Staudt K., Beiträge zur Geometrie der Lage, Nurnberg, 1856, № 2, S. 132—283; [2] Кокстер Х. С. М., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959.

А. Б. Иванов.

ВХОЖДЕНИЕ — *слово* специального вида, несущее в себе полную информацию о расположении одного слова

внутри другого. Точнее, В. в *алфавите* A наз. слово вида $P*Q*R$, где P, Q, R — слова в нек-ром алфавите A, а $*$ не является буквой этого алфавита. В. $P*Q*R$ наз. В. с л о в а Q в слово PQR. Слово Q наз. о с н о в о й этого В., слова P и R наз. его л е в ы м и п р а в ы м к р ы л о м, соответственно. Понятие В. может быть положено в основу системы понятий, удобной для изучения синтаксической структуры слов того или иного типа.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 25—34. *Н. М. Нагорный.*

ВЫБОРА АКСИОМА — одна из аксиом теории множеств, гласящая: для всякого семейства F непустых множеств существует функция f такая, что для всякого множества S из F имеет место $f(S)\in S$ (при этом f наз. ф у н к ц и е й в ы б о р а на F). Для конечных семейств F В. а. выводима из остальных аксиом теории множеств (напр., в системе ZF).

В. а. была явно сформулирована Э. Цермело (E. Zermelo, 1904) и встретила отрицательное отношение со стороны многих математиков. Это объяснялось, во-первых, ее чисто экзистенциальным характером, отличающим ее от остальных аксиом теории множеств, а во-вторых, нек-рыми «неприятными» или даже противоречащими интуиции «здравого смысла» следствиями. Напр., из В. а. вытекает: существование неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел; существование трех разбиений шара B:

$$B=U_1\cup\ldots\cup U_n,$$
$$B=V_1\cup\ldots\cup V_m,$$
$$B=X_1\cup\ldots\cup X_{n+m}$$

таких, что U_i конгруэнтно X_i, $1\leqslant i\leqslant n$, V_j конгруэнтно X_{n+j}, $1\leqslant j\leqslant m$. Таким образом, шар B разбивается на конечное число частей $X_1, \ldots, X_{n+m}$, из к-рых движениями в пространстве можно составить два таких же шара.

Впоследствии обнаружилось много содержательных утверждений, эквивалентных В. а. Таковы, напр., следующие. 1. П р и н ц и п в п о л н е у п о р я д о ч е н и я: на всяком множестве X существует отношение линейного порядка $R\subseteq X\times X$ такое, что любое непустое подмножество $U\subseteq X$ содержит наименьший в смысле отношения R элемент. 2. П р и н ц и п м а к с и м а л ь н о с т и (л е м м а Ц о р н а): если всякое линейно упорядоченное подмножество U частично упорядоченного множества X ограничено сверху, то X содержит максимальный элемент. 3. Всякая нетривиальная решетка с единицей имеет максимальный идеал. 4. Произведение компактных топологич. пространств компактно. 5. Всякое множество X равномощно $X\times X$.

В. а. не вступает в противоречие с остальными аксиомами теории множеств (напр., системы ZF) и логически не выводима из последних при условии их непротиворечивости. В. а. широко используется в классич. математике. Так, В. а. используют следующие утверждения. 1) Каждая подгруппа свободной группы свободна. 2) Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, алгебраич. замыкание произвольного поля. 3) Каждое векторное пространство имеет базис. 4) Эквивалентность двух определений непрерывности функции в точке ($\varepsilon-\delta$-определение и определение через пределы последовательностей). 5) Счетная аддитивность меры Лебега. Причем последние два утверждения вытекают из счетной В. а. (в формулировке аксиомы добавляется условие счетности семейства F). Доказано, что без В. а. утверждения 1) — 5) не выводимы в системе ZF, если ZF непротиворечива.

Была построена модель теории множеств, в к-рой выполняется счетная В. а. и каждое множество чисел измеримо по Лебегу. Эта модель была построена в пред-

положении непротиворечивости системы ZF с аксиомой существования недостижимого кардинала.

Лит.: [1] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Jech T. J., The axiom of choise, Amst.—L., 1973.

В. Н. Гришин.

ВЫБОРА ТЕОРЕМЫ — группа теорем комбинаторики, связанных с выбором элементов из множества, тем или иным способом соответствующих семейству подмножеств этого множества. В. т. обычно используются в качестве теорем существования при решении различных комбинаторных задач. Ниже формулируются нек-рые наиболее важные из В. т. и указываются примеры их применения.

1) Пусть $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — некоторое семейство подмножеств данного множества $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Набор $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}\}$ различных элементов множества T наз. системой различных представителей (с. р. п.) семейства S, если $t_{i_j}\in S_j$, $j=1, 2, \ldots, n$; элемент t_{i_j} наз. представителем множества S_j. Напр., если $T=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и S состоит из $S_1=\{2, 4, 5\}$, $S_2=\{2, 5\}$, $S_3=\{3, 4\}$, $S_4=\{1, 3, 4\}$, то $R=\{5, 2, 3, 4\}$ есть с. р. п. для S, где элемент 5 представляет множество S_1, элемент 2 — множество S_2 и т. д. Если же S составить из множеств $S_1=\{2, 4, 5\}$, $S_2=\{2, 5\}$, $S_3=\{4, 5\}$, $S_4=\{2, 4\}$, то для S не существует с. р. п., так как S_1, S_2, S_3, S_4 вместе содержат только три элемента.

Теорема о системе различных представителей. Семейство $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ тогда и только тогда имеет с. р. п., когда объединение каждых k множеств из S содержит по крайней мере k различных элементов, $k=1, 2, \ldots, n$.

Эта теорема доказана Ф. Холлом [3] (см. также [1], [2]). С ее помощью доказывается теорема о системе общих представителей, также относящаяся к В. т. Пусть

$$T=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_l, \qquad (1)$$

$$T=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_l \qquad (2)$$

суть два разбиения множества T, в к-рых ни одно из составляющих не пусто. Множество $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l}\}$ наз. системой общих представителей (с. о. п.) разбиений (1) и (2), если R является с. р. п. как для семейства $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$, так и для семейства $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$. Напр., если $T=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и

$$T=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4,$$
$$T=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$$

— два разбиения множества T, где $A_1=\{0, 1, 2, 3\}$, $A_2=\{4, 5, 6\}$, $A_3=\{7\}$, $A_4=\{8, 9\}$, $B_1=\{4, 7, 8\}$, $B_2=\{0, 5\}$, $B_3=\{2, 3, 6\}$, $B_4=\{1, 9\}$, то $R=\{0, 6, 7, 9\}$ есть с. о. п. семейств $A=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ и $B=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, так как является с. р. п. и для A, и для B; здесь элемент 0 представляет множества A_1 и B_2, элемент 6 — A_2 и B_3, элемент 7 — A_3 и B_1, элемент 9 — A_4 и B_4.

Теорема о системе общих представителей. Разбиения (1) и (2) имеют с. о. п. тогда и только тогда, когда объединение каждых k множеств из семейства A содержит не более k множеств из семейства B, $k=1, 2, \ldots, l$ (см. [1], [2]).

2) Пусть задана прямоугольная матрица. Линией в матрице наз. как строку, так и столбец этой матрицы.

Теорема Кёнига. Если элементы прямоугольной матрицы — нули и единицы, то минимальное число линий, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, к-рые могут быть выбраны таким образом, чтобы среди них не нашлось двух, расположенных на одной и той же линии.

Эта теорема сформулирована и доказана Д. Кёнигом ([4], с. 240; см. также [1], [2]). Она эквивалентна теореме Холла о с. р. п. Используется, напр., при доказательстве того, что нек-рые матрицы являются линейными комбинациями перестановочных матриц (перестановочная матрица — такая прямоугольная матрица P размера $m\times n$, состоящая из нулей и единиц, что $PP'=I$, где P' — транспонированная матрица P, а I - единичная матрица порядка m; напр., перестановочная квадратная матрица порядка m состоит из m единиц, расположенных так, что никакие две из них не лежат на одной линии). Иными словами, если дана матрица A размера $m\times n$, $m\leqslant n$, элементами к-рой являются неотрицательные действительные числа, причем сумма элементов каждой строки в A равна m', а сумма элементов каждого столбца равна n', то

$$A=c_1P_1+c_2P_2+\ldots+c_tP_t,$$

где каждое P_i есть перестановочная матрица, а коэффициенты c_i — неотрицательные действительные числа (см. [1], [2]). В частности, если квадратная матрица A порядка n, состоящая из нулей и единиц, такова, что суммы элементов по любой строке или любому столбцу равны целому положительному числу k, то

$$A=P_1+P_2+\ldots+P_k,$$

где все P_i — перестановочные матрицы порядка n.

3) Пусть T — конечное множество и $P_r(T)$ — множество всех его подмножеств, содержащих точно r элементов. Пусть

$$P_r(T)=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_l \tag{3}$$

— произвольное упорядоченное разбиение $P_r(T)$ (на l составляющих $A_1, A_2, \ldots, A_l$). Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_l$ — такие целые числа, что

$$1\leqslant r\leqslant q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_l. \tag{4}$$

Если существует такое подмножество, содержащее q_i элементов множества T, что все его подмножества, содержащие точно r элементов, содержатся именно в A_i, то оно наз. (q_i, A_i)-подмножеством множества T.

Теорема Рамсея. Пусть заданы целые числа $q_1, q_2, \ldots, q_l$ и r, удовлетворяющие условию (4). Тогда существует натуральное число $N(q_1, q_2, \ldots, q_l, r)$, обладающее тем свойством, что для любого целого числа $n\geqslant N(q_1, q_2, \ldots, q_l, r)$ справедливо следующее: если даны множество T, состоящее из n элементов, и произвольное упорядоченное разбиение (3) множества $P_r(T)$ на l составляющих $A_1, A_2, \ldots, A_l$, то T содержит (q_i, A_i)-подмножество для некоторого $i=1, 2, \ldots, l$.

Эта теорема доказана Ф. Рамсеем ([5]; см. также [1], [2]). Примером приложения теоремы Рамсея служит следующий результат (см. [6], [1], [2]): для любого заданного целого числа $m\geqslant 3$ существует такое целое число N_m, что среди $n\geqslant N_m$ точек плоскости, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, найдутся m точек, образующих выпуклый m-угольник.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Hall Ph., «J. London Math. Soc.», 1935, v. 10, p. 26—30; [4] König D., Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig, 1936; [5] Ramsey F. P., «Proc. London Math. Soc.», (2), 1930, v. 30, p. 264—286; [6] Erdös P., Szekeres G., «Compositio Mathematica», 1935, v. 2, № 3, p. 463—70. *М. П. Минеев.*

ВЫБОРКА в математической статистике см. *Выборочный метод*, *Генеральная совокупность*.

ВЫБОРОЧНАЯ ГРОЗДЬ — совокупность *выборочных точек*, изображающих в выборочном пространстве все конкретные неразложимые исходы, наблюденные при реализации серии экспериментов.

ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ — дисперсия *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ КВАНТИЛЬ — квантиль функции *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ МЕДИАНА — медиана *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ ТОЧКА — точка *выборочного пространства*, изображающая тот или иной конкретный неразложимый исход отдельного эксперимента.

ВЫБОРОЧНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $X_t = X_t(\omega)$ аргумента t, однозначно соответствующая каждому наблюдению случайного процесса $X_t \in E$, $t \in T$; здесь $\{\omega\} = \Omega$ — множество элементарных событий. Часто используются эквивалентные В. ф. термины «реализация», «траектория». Случайный процесс X_t характеризуется вероятностной мерой в пространстве В. ф. При изучении локальных свойств В. ф. X_t (где $E \subset \mathbb{R}^1$, $T = \mathbb{R}^m$ — евклидово пространство размерности $m = 1, 2, \ldots$) предполагается, что X_t является сепарабельным или находится эквивалентный случайный процесс с заданными локальными свойствами В. ф. Наиболее полно исследованы локальные свойства В. ф. *гауссовских процессов*.

Для стационарных гауссовских случайных процессов (полей) X_t имеет место альтернатива: почти все В. ф. X_t либо непрерывны, либо неограничены на любом интервале. Для t, $s \in T$ определено «расстояние» $d(t, s) = [\mathsf{E}|X_t - X_s|^2]^{1/2}$, $B(t, \delta) = \{s : d(s, t) \leqslant \delta\}$ — «сфера», $N(\delta)$ — минимальное число таких «сфер», покрывающих $T \subset \mathbb{R}^n$, $\sup\limits_{s,\, t \in T} d(s, t) < \infty$. Необходимое и достаточное условие непрерывности В. ф. однородного гауссовского процесса имеет вид

$$\exists q > 1, \ \Sigma q^{-n} \sqrt{\ln N(q^{-n})} < \infty.$$

Если $R(t) = \mathsf{E}X_s X_{t+s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$, $\mathsf{E}X_t = 0$,

выпукла вниз в нек-рой окрестности точки $+0$, то для непрерывности В. ф. X_t необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma S_n^{1/2} < \infty$, где $S_n = F(2^{n+1}) - F(2^n)$. Если $R(t)$ выпукла вниз в окрестности $+0$ и

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^2 \geqslant C/|\ln|t - s||$$

для $|t - s| < \delta$, то почти все В. ф. гауссовского случайного процесса X_t неограничены. Если

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^2 \leqslant C/|\ln|t - s||^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

то почти все В. ф. гауссовского случайного процесса (поля) X_t непрерывны. Для непрерывности В. ф. гауссовского случайного процесса достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} \omega_R(e^{-x^2})\, dx < \infty,$$

где $R(t, s) = \mathsf{E}X_t X_s$,

$$\omega_k(\delta) = \sup[R(t + h_1, s + h_2) - R(t, s)]^{1/2};$$

здесь sup берется по $|h_i| < \delta$, $|t| \leqslant C$, $|s| \leqslant C$. В. ф. X_t, $t \in \mathbb{R}^n$ относят к классу $H(C, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если для всех достаточно малых h_i

$$|X_{t+h} - X_t| \leqslant C \sum_{i=1}^n |h_i|^{\alpha_i},$$

$$C > 0, \ 0 < \alpha_i \leqslant 1, \quad h = (h_1, \ldots, h_n).$$

Если ξ_t — гауссовское случайное поле на единичном кубе I_n^0 в $\mathbb{R}^n$ такое, что для достаточно малых h и $t \in I_n^0$

$$\mathsf{E}|X_{t+h} - X_t|^2 \leqslant C_1 \frac{|h|^{\gamma}}{|\ln|h||}, \quad C_1 > 0, \ 0 < \gamma \leqslant 2,$$

то с вероятностью, равной 1, равномерно по $t \in I_n^0$

$$X_t \in H(C, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

для любого $C > 0$ и $\beta_i < \gamma/2$.

Неубывающая непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, наз. верхней, если для почти всех ω существует $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ такое, что

$$|X_t - X_s| \leqslant (\mathsf{E}|X_t - X_s|^2)^{1/2} \varphi(1/|t - s|)$$

при $|t-s|\leqslant\varepsilon$; $t, s\in\mathbb{R}^n$; $|t|=\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)^{1/2}$. Если X_t — гауссовское случайное поле,

$$\mathsf{E}X_t=0,\quad \mathsf{E}X_tX_s=\frac{1}{2}\left(|t|^{\alpha}+|s|^{\alpha}-|t-s|^{\alpha}\right),\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

то $\varphi(x)$ является верхней тогда и только тогда, когда

$$\int_e^{\infty} t^{n-1}K\left[\varphi(t)\right]dt<\infty,$$

где $K[x]=x^{(1n,\alpha)-1}\exp(-x^2/2)$.

Для того чтобы почти все В. ф. гауссовского случайного процесса были аналитическими в окрестности точки t_0, необходимо и достаточно, чтобы ковариационная функция $R(t, s)$ была аналитической по t и s в окрестности $|t-t_0|<\delta$, $|s-t_0|<\delta$, $\delta>0$.

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [3] Беляев Ю. К., в кн.: Proceeding of the 4 Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, Berk.— Los Ang., 1961, p. 23—33; [4] Островский Е. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 1, с. 40—42; [5] Nisio Makiko, «Nagoya Math. J.», 1969, v. 34, p. 89—104; [6] Dudley R. M., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 3, p. 771—88; [7] Fernique X., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, p. 6058—60; [8] Ядренко М. Й., «Вісник Київського ун-ту. Сер. матем. та механ.», 1967, т. 9, с. 103—12; [9] Kawada Takayuki, «Nagoya Math. J.», 1969, v. 35, p. 109—32; [10] Беляев Ю. К., «Теория вероят. и ее примен.», 1959, т. 4, № 4, с. 437—44; [11] Слуцкий Е. Е., «Giorn. Inst. Ital. Attuari», 1937, v. 8, № 2, p. 3—19; [12] Fernique X., в кн.: Ecole d'Ete de Probabilités de Saint-Flour IV—1974, B.—Hdlb.—N. Y., 1975, p. 1—96 («Lecture Notes in Mathematics», № 480).

Ю. К. Беляев.

ВЫБОРОЧНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА — функционал от *эмпирического распределения*. В. х. используется в качестве статистич. оценок для аналогичных функционалов от теоретич. распределений.

ВЫБОРОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество всех элементарных событий, связанных с нек-рым экспериментом, причем любой неразложимый исход эксперимента представляется одной и только одной точкой В. п. (выборочной точкой). В. п. является абстрактным множеством, на σ-алгебре подмножеств к-рого задается вероятностная мера (см. *Вероятностное пространство*). В русской литературе более распространен термин «пространство элементарных событий».

А. В. Прохоров.

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ — математическое ожидание *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНЫЙ БЛОК, выборочный промежуток, интервал, образованный двумя последовательными членами *вариационного ряда*.

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД — статистический метод исследования общих свойств совокупности к.-л. объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов, взятых на выборку. Математич. теория В. м. опирается на два важных раздела математич. статистики — теорию выбора из конечной совокупности и теорию выбора из бесконечной совокупности. Основное отличие В. м. для конечной и бесконечной совокупностей заключается в том, что в первом случае В. м. применяется, как правило, к объектам неслучайной, детерминированной природы (напр., число дефектных изделий в данной партии готовой продукции не является случайной величиной: это число — неизвестная постоянная, к-рую и надлежит оценить по выборочным данным). Во втором случае В. м. обычно применяется для изучения свойств случайных объектов (напр., для исследования свойств непрерывно распределенных случайных ошибок измерений, каждое из к-рых теоретически может быть истолковано как реализация одного из бесконечного множества возможных результатов).

Выбор из конечной совокупности и его теория являются основой статистич. методов контроля качества и часто применяются в социологич. исследованиях.

Согласно теории вероятностей выборка будет правильно отражать свойства всей совокупности, если выбор производится случайно, т. е. так, что любая из возможных выборок заданного объема n из совокупности объема N (число таких выборок равно $N!/n!(N-n)!$) имеет одинаковую вероятность быть фактически выбранной.

На практике наиболее часто используется выбор без возвращения (бесповторная выборка), когда каждый отобранный объект перед выбором следующих объектов в исследуемую совокупность не возвращается (такой выбор применяется, напр., для определения выигрышных лотерейных билетов, при статистич. контроле качества, а также при демографич. исследованиях). Выбор с возвращением (выборка с повторением) рассматривается обычно лишь в теоретических исследованиях (примером выбора с возвращением их является регистрация числа частиц, коснувшихся в течение данного времени стенок сосуда, внутри которого совершается броуновское движение). Если $n \ll N$, то повторный и бесповторный выборы дают практически эквивалентные результаты.

Свойства совокупности, исследуемые В. м., могут быть качественными и количественными. В первом случае задача выборочного обследования заключается в определении количества M объектов совокупности, обладающих к.-л. признаками (напр., при статистич. контроле часто интересуются количеством M дефектных изделий в партии объема N). Оценкой для M служит отношение mN/n, где m — число объектов с данным признаком в выборке объема n. В случае количественного признака имеют дело с определением среднего значения совокупности $\bar{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N$. Оценкой для $\bar{x}$ является выборочное среднее

$$\bar{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — те значения из исследуемой совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_N$, к-рые принадлежат выборке. С математич. точки зрения первый случай — частная разновидность второго, к-рая имеет место, когда M величин x_i равны 1, а остальные $(N-M)$ равны 0; в этой ситуации $\bar{x}=M/N$ и $\bar{X}=m/n$.

В математич. теории В. м. оценка среднего значения занимает центральное место потому, что она служит основой количественного описания изменчивости признака внутри совокупности, т. к. за характеристику изменчивости обычно принимают дисперсию

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N},$$

представляющую собой среднее значение квадратов отклонений x_i от их среднего значения $\bar{x}$. В случае изучения качественного признака

$$\sigma^2=M(N-M)/N^2.$$

О точности оценок m/n и $\bar{X}$ судят по их дисперсиям

$$\sigma^2_{m/n}=\mathsf{E}\left(\frac{m}{n}-\frac{M}{N}\right)^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2_{\bar{X}}=\mathsf{E}(\bar{X}-\bar{x})^2,$$

к-рые в терминах дисперсии конечной совокупности σ^2 выражаются в виде отношений σ^2/n (в случае выборок с повторением) и $\sigma^2(N-n)/n(N-1)$ (в случае бесповторных выборок). Т. к. во многих практически интересных задачах случайные величины m/n и $\bar{X}$ при $n \geqslant 30$ приближенно подчиняются *нормальному распределению*, то отклонения m/n от M/N и $\bar{X}$ от $\bar{x}$, превышающие по абсолютной величине $2\sigma_{m/n}$ и $2\sigma_{\bar{x}}$ соответственно, могут при $n \geqslant 30$ осуществиться в среднем приблизительно в одном случае из двадцати.

Более полную информацию о распределении количественного признака в данной совокупности можно получить с помощью *эмпирического распределения* этого признака в выборке.

Выбор из бесконечной совокупности. В математич. статистике результаты к.-л. однородных наблюдений (чаще всего независимых) принято наз. выборкой даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию выборки с повторениями или без повторений из конечной совокупности. Напр., результаты измерений углов на местности, подверженные независимым непрерывно распределенным случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной совокупности. Предполагается, что принципиально можно осуществить любое число таких наблюдений. Полученные фактически результаты считают выборкой из бесконечного множества возможных результатов, наз. *генеральной совокупностью*. Понятие генеральной совокупности не является логически безупречным и необходимым. Для решения практич. задач нужна не сама бесконечная генеральная совокупность, а лишь те или иные характеристики, к-рые ей ставятся в соответствие. Эти характеристики с точки зрения теории вероятностей являются числовыми или функциональными характеристиками нек-рого распределения вероятностей, а элементы выборки — случайными величинами, подчиняющимися этому распределению. Такое истолкование позволяет распространить на выборочные оценки общую теорию статистич. оценок (см. *Оценка статистическая*). По этой причине, напр., в вероятностной теории обработки наблюдений понятие бесконечной генеральной совокупности заменяется понятием распределения вероятностей, содержащего неизвестные параметры. Результаты наблюдений трактуются как экспериментально наблюдаемые значения случайных величин, подчиняющихся этому распределению. Цель обработки — вычисление по результатам наблюдений в том или ином смысле оптимальных статистич. оценок для неизвестных параметров распределения.

Выше речь шла о выборочном обследовании одной совокупности к.-л. объектов. Однако практическое применение В. м. часто осуществляется во многих однородных совокупностях (напр., при оценке доли бракованных изделий в нескольких партиях готовой продукции). В этой ситуации объектом изучения является не одно число M, а несколько неизвестных чисел M_1, M_2, ... Пусть, напр., все обследуемые партии готовой продукции содержат N изделий, причем M_1, M_2, ... — количества дефектных изделий в этих партиях, а m_1, m_2, ... - соответствующие количества дефектных изделий, обнаруженные в выборках объема n. Согласно условию так наз. бездефектной приемки партия с номером r передается потребителю, если $m_i=0$, в противном случае она бракуется. Предположим, что контроль изделий сопряжен с их уничтожением, и поэтому потребитель либо получает партию объема $R_i=0$ (при $m_i>0$), либо партию объема $R_i=N-n$ с количеством дефектных изделий $D_i=M_i$ (при $m_i=0$), причем значения R_1, R_2, ... (а, значит, и их сумма) известны, а значение $D_1+D_2+\ldots$ неизвестно. Отношение $(D_1+D_2+\ldots)/(R_1+R_2+\ldots)$ называют долей пропущенного брака, а его математич. ожидание q - средней долей пропущенного брака. Задача математич. статистики заключается в оценке q по значениям R_1, R_2, ..., зафиксированным в результате применения В. м. Если значения M_1, M_2, ... можно трактовать как реализации независимых одинаково распределенных случайных величин с известным законом распределения $\mathsf{P}\{M_i=r\}=p_r$, то согласно *Бейеса формуле* статистич. оценка среднего числа пропущенных дефектных изделий в принятых партиях выражается формулой

$$\tilde{D}=\mathsf{E}\{M \mid m=0\}=\left(\sum_{r=1}^{N-n} r\,\frac{C_{N-r}^{n}}{C_N^n}\,p_r\right)\Big/\mathsf{P}\{m=0\},$$

причем $\tilde{D}\leqslant[(N-n)\,\mathsf{P}\{m=1\}],\ [n\mathsf{P}\{m=0\}]$,

где

$$\mathsf{P}\{m=k\} = \sum_{r=0}^{N-n} \frac{C_r^k C_{N-r}^n}{C_N^n} p_r, \quad k=0,1, \ldots, n.$$

Поэтому оценка

$$\tilde{q}=\tilde{D}/(N-n)$$

средней доли пропущенного брака в принятых партиях удовлетворяет неравенству

$$\tilde{q} \leqslant \mathsf{P}\{m=1\}/(n\mathsf{P}\{m=0\}) \approx s_1/ns_0),$$

где s_0 — число принятых партий, а s_1 — количество тех забракованных партий, в выборках из к-рых обнаружено ровно одно дефектное изделие.

Лит.: [1] Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (*Общая часть*), М., 1955, гл. 5; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966. *Л. Н. Большев.*

ВЫБОРОЧНЫЙ МОМЕНТ — момент *эмпирического распределения*.

ВЫВОД логический — формальный вывод в *исчислении*, содержащем логические правила и имеющем в качестве основных выводимых объектов формулы (интерпретацией к-рых являются *суждения*; см. *Логические исчисления*, *Логико-математические исчисления*). Поскольку обычно такие исчисления снабжаются *семантикой*, то в некоторых случаях под логическим В. понимают содержательное рассуждение, позволяющее от сформулированных аксиом и гипотез (допущений) переходить к новым утверждениям, логически вытекающим из исходных.

При зафиксированных аксиомах и правилах логических переходов (см. *Вывода правило*) говорят, что последовательность формул является выводом (своего последнего члена A) из гипотез $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 0$), если каждый член последовательности либо является аксиомой или одной из гипотез, либо получается из предыдущих формул последовательности по одному из правил. Это записывается в виде $A_1, \ldots, A_n \vdash A$; при этом формула A наз. выводимой из $A_1, \ldots, A_n$. В случае $n=0$ запись $\vdash A$ означает, что A выводимо в рассматриваемом исчислении без к.-л. допущений; применяется также запись $A_1, \ldots, A_n \vdash$, означающая, что «допущения $A_1, \ldots, A_n$ ведут к противоречию» (в большинстве изучавшихся систем $A_1, \ldots, A_n \vdash$ влечет выводимость из этих гипотез любой формулы). Напр., в исчислении, содержащем аксиому $A \supset (B \supset A)$ и правило модус поненс, последовательность A, $A \supset (B \supset A)$, $B \supset A$ является выводом $B \supset A$ из A (т. е. $A \vdash B \supset A$). Свойствами логической выводимости являются: $A \vdash A$; если $\Gamma \vdash \Delta$, то $A, \Gamma \vdash \Delta$; если $A, A, \Gamma \vdash \Delta$, то $A, \Gamma \vdash \Delta$; если $\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta$, то $\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta$; если $\Gamma \vdash A$ и $A, \Gamma' \vdash \Delta$, то $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$ (здесь A и B — формулы, Γ и Γ' — списки формул, Δ — формула или пустое слово). Эти свойства позволяют существенно преобразовывать списки гипотез и, наряду с правилами введения и удаления логических символов (см. *Выводимое правило*), сближают системы со знаком $\vdash$ с *Генцена формальными системами*. Для исчислений, основанных на классич. логике, характерно свойство $\neg\neg A \vdash A$. Для интуиционистской логики (конструктивной логики) в широких предположениях удается доказывать принципы брауэровского понимания выводимости: 1) если $\Gamma \vdash A \vee B$, то имеет место одна из выводимостей $\Gamma \vdash A$ или $\Gamma \vdash B$; 2) если $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, то, для некоторого терма t, $\Gamma \vdash A(t)$ (упомянутые предположения во всяком случае выполнены при пустом Γ). Возможности избавления от допущений, включая переход к выводам без гипотез, регулируются *дедукции теоремой*.

Формирование понятия В. (и систем, в терминах к-рых это понятие получает смысл) знаменовало собой возник-

новение современной математич. логики. Новое, более строгое понимание аксиоматич. метода, при к-ром формализации подлежат не только аксиомы, но и логические средства, открыло возможность математич. определения понятия доказательства и изучения доказательств математич. методами (см. *Доказательств теория*). Понятие формального В. оказалось хорошим приближением к понятию математич. истины (см. *Гёделя теорема о полноте*, *Гёделя теорема о неполноте*). Искусственная формализация понятия логической выводимости в дальнейшем существенно сблизилась с реальными способами содержательного математич. рассуждения (см. *Естественный логический вывод*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Математическая теория логического вывода, сб. переводов, М., 1967. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДА ДЕРЕВО — способ записи *выводов* в *исчислении*, при к-ром над каждым элементом P пишутся те элементы вывода, из к-рых P получен за одно применение *вывода правила*. Напр., имея вывод $P_1, \ldots, P_6$, в к-ром P_1, P_2 и P_4 — аксиомы, P_3 получается за одно применение правила из P_1 и P_2, P_5 — из P_4 и P_3, P_6 — из P_3 и P_5, можно записать его в виде следующего В. д.:

$$\dfrac{\dfrac{P_1,\ P_2}{P_3},\ \dfrac{P_4,\ P_3}{P_5}}{P_6}.$$

Несмотря на большую громоздкость по сравнению с линейной записью, В. д. оказываются во многих случаях удобным аппаратом исследования выводов: по В. д. легко прослеживать зависимости элементов друг от друга; заключенная в В. д. информация полнее описывает ситуацию, чем при линейном упорядочении (и приближается по полноте к информации, заключенной в выводах с анализом). В случае необходимости В. д. тоже снабжается а н а л и з о м, т. е. рядом с каждой чертой пишется номер соответствующего правила (и рядом с аксиомой пишется ее номер). *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДА ПРАВИЛО — способ порождения объектов, называемых з а к л ю ч е н и е м В. п., по множеству объектов, называемых п о с ы л к а м и правила; формулирование В. п. играет решающую роль при описании *исчислений* (часто данное В. п. имеет смысл лишь в контексте данного исчисления). Для исчислений, снабженных *семантикой* (в частности, большинства *логико-математических исчислений*), В. п. сохраняет истинность, т. е. по истинным посылкам позволяет породить лишь истинное заключение; наиболее знаменитый пример такого В. п.— правило *модус поненс*. В большинстве изучавшихся исчислений всякое применение В. п. имеет лишь конечное число посылок (важнейшее исключение — *Карнапа правило*), обычно число посылок данного В. п. остается неизменным для всех его применений. Количество возможных применений данного В. п. бывает, как правило, неограниченным.

Способы формулирования В. п. весьма разнообразны, они зависят от языка исчисления и включают переменные различных типов. Подавляющее большинство используемых В. п. может быть порождено по следующей общей схеме: выбирая алфавит A, не содержащий буквы $\square$, и натуральное число l, называют l - п о с ы л о ч н ы м В. п. нек-рый алгоритм $\mathfrak{A}$ над алфавитом $A \cup \{\square\}$; если $\mathfrak{A}$ применимо к слову $P_0\square P_1\square \ldots \square P_l$ ($P_0, P_1, \ldots, P_l$ — слова в A, а символ $\square$ играет роль запятой), то $P_1, \ldots, P_l$ считаются посылками, а P_0 — заключением нек-рого применения этого В. п. Частным случаем таких В. п. являются нуль-посылочные В. п. (или *аксиом схемы*). В любом исчислении, содержащем лишь правила описанного типа, множество выводимых слов перечислимо. Обычно для В. п. выполнено и более жесткое требование: можно алгоритмически распознать, выводимо ли P_0 из $P_1, \ldots, P_l$ за одно применение правила. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДИМОЕ ПРАВИЛО — метаматематическая теорема (см. *Метатеорема*), позволяющая по конечному числу *выводов* из гипотез $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 0$) утверждать выводимость формулы Δ из гипотез Γ; выводы $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ наз. вспомогательными выводами В. п., заключение $\Gamma \vdash \Delta$ наз. результирующим выводом. В. п. является частным случаем *допустимого правила*. Важнейшие примеры В. п. доставляются *дедукции теоремой*, правилом *приведения к абсурду* и другими правилами введения и удаления логических символов, такими, как правила введения дизъюнкции: $A \vdash A \vee B$ и $B \vdash A \vee B$ (для этих В. п. число вспомогательных выводов равно нулю) и удаления дизъюнкции: из Γ, $A \vdash C$ и Γ, $B \vdash C$ следует Γ, $A \vee B \vdash C$. В ряде случаев В. п. имеют такую структуру: исчисление расширяется и усиливается, и из выводимости в новом исчислении извлекаются следствия о выводимости в исходном. Такие В. п. возникают, в частности, при устранении описательных определений (определений, к-рые моделируют происходящее при построении математич. теорий расширение понятий и обозначений). Разработанный аппарат В. п. служит существенному приближению методов обращения с формальными выводами к содержательным математич. рассуждениям. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДИМОСТЬ — см. *Вывод логический*, *Исчисление*.

ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА на фоне помех — один из разделов статистической теории связи. Математически задачи В. с. суть статистич. задачи теории случайных процессов (см. также *Информации теория*). Ниже приведены нек-рые типичные задачи теории В. с.

Переданный сигнал $s(t)$, случайная или неслучайная функция известной структуры, превращается в принятый сигнал $x(t) = V(s, n)$, где $n(t)$ — случайный процесс (шум), а V (канал связи) — нек-рый оператор, преобразующий пару (s, n) в принятый сигнал x. Чаще всего предполагается, что шум действует на сигнал аддитивно: $x(t) = s(t) + n(t)$. В последней ситуации задачи В. с. следующие.

1) Обнаружение сигнала — проверка гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$ (наличие сигнала) против альтернативы $x(t) = n(t)$ (отсутствие сигнала). Рассматриваются также более сложные варианты исходной гипотезы: $x(t) = s(t) + n(t)$, начиная с нек-рого момента τ — момента появления сигнала. При этом возникает задача оценки τ.

2) Различение сигналов — проверка гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$, $s \in S_1$, против гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$, $s \in S_2$, где S_1 и S_2 — два различных множества сигналов.

3) Фильтрация (восстановление сигнала) — отыскание статистических оценок для значений сигнала $s(t)$ в точке t по реализации $x(t)$, $t \in T$.

См. также *Статистическая гипотеза*, *Случайных процессов фильтрация*.

Лит.: [1] Давенпорт В., Рут В., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [2] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

И. А. Ибрагимов.

ВЫИГРЫША ФУНКЦИЯ — функция, к-рая определена на множестве ситуаций в игре (см. *Игр теория*) и значения к-рой численно характеризуют полезности ситуаций для игрока или коалиции. *Н. Н. Воробьев.*

ВЫМЕТАНИЯ МЕТОД — метод решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения*, развитый А. Пуанкаре (см. [1], [2], а также [4]) и состоящий в следующем. Пусть D — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Gamma = \partial D$ — граница D. Пусть δ_y — мера Дирака, сосредоточенная в точке $y \in D$; $U(x; \delta_y)$ — *ньютонов потенциал* меры δ_y при $n \geqslant 3$ или *логарифмический потенциал* меры δ_y при $n = 2$. Выметанием меры δ_y из области D на границу Γ наз. такая мера β_y на Γ, потенциал к-рой $U(x; \beta_y)$ совпадает вне D с $U(x; \delta_y)$, а внутри D не превосходит $U(x; \delta_y)$; эта мера β_y единственна и совпадает с *гармонической мерой* на Γ

для точки $y \in D$. Аналогично определяется выметание произвольной положительной меры, сосредоточенной на D. Если D — шар, то плотность распределения масс β_y, т. е. производная меры β_y, есть не что иное, как ядро Пуассона (см. *Пуассона интеграл*). Вообще, если граница Γ достаточно гладкая, то мера β_y абсолютно непрерывна и плотность распределения масс β_y совпадает с нормальной производной *Грина функции* для D. При помощи меры β_y решение задачи Дирихле записывается в виде так наз. формулы Валле Пуссена:

$$U(y) = \int_\Gamma f(x)\, d\beta_y(x),$$

где $f(x)$ — заданная на Γ функция.

А. Пуанкаре в первоначальном изложении В. м. указывал сначала геометрич. конструкцию процесса выметания для шара; затем, опираясь на *Гарнака теоремы* и на возможность исчерпания области D последовательностью шаров $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, он строил бесконечную последовательность потенциалов $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, в к-рой каждый потенциал U_{n+1} получается из предыдущего U_n выметанием масс из области $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ на ее границу и к-рая сходится к решению задачи Дирихле для достаточно гладкой области D (подробное исследование условий применимости В. м. см. в [3]).

В современной теории потенциала (см. [5], [6]) проблема выметания трактуется как самостоятельная задача, близкая к задаче Дирихле, причем оказывается возможным рассматривать выметания мер на множества довольно общей природы. Таким образом, в простейшей постановке проблема выметания состоит в нахождении по заданному распределению масс μ внутри замкнутой области $\overline{D}$ такого распределения масс ν на $\Gamma = \partial D$, чтобы вне $\overline{D}$ потенциалы обоих распределений совпадали. Решением этой проблемы выметания меры μ в случае гладкой границы Γ будет абсолютно непрерывная мера ν. Ее плотность, или производная $\nu'(y)$, $y \in \Gamma$, записывается при помощи функции Грина $G(x, y)$ области D в виде

$$\nu'(y) = \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\, d\mu(x), \quad \mu \geqq 0, \quad y \in \Gamma, \qquad (*)$$

где $\partial G/\partial n_y$ — производная от $G(x, y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $y \in \Gamma$. Внутри области D для потенциалов имеет место неравенство $U(x; \nu) \leqslant U(x; \mu)$, т. е. при выметании внутри области потенциал может только убывать. Если $\mu = \delta_x$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in D$, то формула $(*)$ дает $\nu'(y) = \partial G(x, y)/\partial n_y$, т. е. нормальная производная функции Грина есть плотность меры, полученной выметанием единичной массы, сосредоточенной в точке $x \in D$. Обобщая формулу $(*)$, получают выражение выметенной меры $\nu(E)$ любого борелевского множества $E \subset \Gamma$ в случае произвольной области D:

$$\nu(E) = \int \omega(x;\ E,\ D)\, d\mu(x),$$

где $\omega(x; E, D)$ — гармоническая мера множества E относительно области D в точке x.

Если K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$, а μ — ограниченная положительная борелевская мера, то выметанием меры μ на компакт K наз. такая мера ν, сосредоточенная на K, что всюду $U(x; \nu) \leqslant U(x; \mu)$ и квазивсюду на K, т. е. за возможным исключением множества точек внешней емкости нуль, $U(x; \nu) = U(x; \mu)$. Эта постановка проблемы выметания, более общая по сравнению с выметанием из области, распространяется и на потенциалы других видов, напр. на *бесселевы потенциалы*, *Рисса потенциалы*. Рассматриваются также выметания мер на произвольные борелевские множества K.

Близкой к этой постановке является проблема выметания для *супергармонических функций*. Пусть v —

неотрицательная супергармонич. функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Выметанием для функции v на компакт $K \subset \overline{D}$ наз. наибольшая супергармонич. функция B_v^K такая, что: 1) ее ассоциированная мера сосредоточена на K; 2) всюду $B_v^K \leqslant v$; 3) $B_v^K - v$ квазивсюду на K.

В *потенциала теории абстрактной* проблема выметания в обеих постановках получает решение для множеств K в произвольных *гармонических пространствах* X, т. е. в таких локально компактных топологич. пространствах X, к-рые допускают выделение аксиоматически определенного пучка гармонич. функций. Этот аксиоматич. подход позволяет рассматривать проблему выметания для потенциалов, связанных с дифференциальными уравнениями с частными производными более общей природы (см. [7]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Amer. J. Math.», 1890, v. 12, № 3, p. 211—94; [2] его же, Théorie du potentiel Newtonien, P., 1899; [3] La Vallée-Poussin Ch. J. de, Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme, Louvain—P., 1949; [4] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946; [5] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [6] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [7] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

ВЫНУЖДЕНИЯ МЕТОД, форсинг-метод,— особый способ доказательства существования моделей аксиоматич. теорий, предложенный П. Коэном в 1963 для доказательства совместимости отрицания континуум-гипотезы $\neg$CH и других теоретико-множественных предложений с аксиомами системы Цермело — Френкеля ZF (см. [1]). В дальнейшем В. м. был упрощен и модернизирован (см. [2]—[6]); выявилась, в частности, связь этого метода с теорией *булевозначных моделей* (см. [2], [3]) и моделями Крипке (см. [6]).

Центральным понятием В. м. является отношение вынуждения

$$p \Vdash \varphi$$

(«условие p вынуждает формулу φ»).

Определению отношения вынуждения предшествует фиксирование нек-рого языка L и частично упорядоченного множества P вынуждающих условий p с отношением порядка $\leqslant$. Язык L может содержать переменные и константы разных сортов (или типов).

Построение модели ZF, предложенное П. Коэном, в к-рой нарушается континуум-гипотеза, выглядит следующим образом. Множество M наз. транзитивным, если

$$x \in M \longrightarrow x \subseteq M.$$

Пусть M — счетное транзитивное множество, являющееся моделью ZF, и $\lambda \in M$ — ординальное (по Нейману) число, т. е. $\lambda = \{\alpha : \alpha < \lambda\}$. Пусть $A \subseteq \lambda \times \omega_0$ — произвольное множество (возможно, что $A \notin M$), где ω_0 — первое бесконечное ординальное число. Если X — транзитивное множество, то пусть $\mathrm{Def}(X)$ обозначает множество всех X-определимых подмножеств (см. *Конструктивное по Гёделю множество*), т. е. $\mathrm{Def}(X) = \mathrm{Def}(X, \in | X)$. С помощью процесса, аналогичного построению конструктивных по Гёделю множеств, для каждого ординального числа α индуктивно определяется множество $M_\alpha[A]$:

$$M_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}\left(M_\beta[A]\right) \cup \left\{x \in M \cup \{A\} : x \subseteq M_\beta[A]\right\}.$$

Пусть $M[A] = M_{\alpha_0}[A]$, где $\alpha_0 = \sup\{\alpha \in M : \alpha$ — ординал$\}$. Модель ZF, в к-рой нарушается континуум-гипотеза, ищется среди моделей вида $M[A]$. Пусть λ — ординал такой, что в M истинно утверждение: λ есть второй несчетный ординал.

Множество вынуждающих условий P и отношение $\leqslant$ определяются эквивалентностями: а) $p \in P \Longleftrightarrow p$ — функция, определенная на нек-ром конечном подмножестве

множества $\lambda \times \omega_0$, со значениями в множестве $\{0, 1\}$, b) $p \leqslant q \Longleftrightarrow q$ есть продолжение p. В качестве языка L берется так наз. р а з в е т в л е н н ы й я з ы к, имеющий много типов переменных (для каждого $\alpha \leqslant \alpha_0$ свой тип переменных, пробегающих множество $M_\alpha[A]$) и содержащий имена (т. е. индивидные константы) для каждого множества из $M[A]$. Если $x \in M$, то имя x обозначается через $x^\vee$. Пусть a — имя множества A. Отношение вынуждения $p \Vdash \varphi$ вводится индуктивным определением, имеющим, в частности, следующие характерные пункты:

(1) $p \Vdash (\langle \delta n \rangle^\vee \in a) \Longleftrightarrow p(\langle \delta n \rangle) = 1$,

(2) $p \Vdash (\neg \varphi) \Longleftrightarrow \neg \exists q \geqslant p (q \Vdash \varphi)$,

(3) $p \Vdash (\varphi \vee \psi) \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \vee p \Vdash \psi$,

(4) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi) \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi$.

Если α — тип переменной x, то

(5) $p \Vdash \exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \exists c \in C_\alpha p \Vdash \varphi(c)$,

где C_α — множество всех констант типа α.

Последовательность вынуждающих условий

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$$

наз. п о л н о й, если для всякой замкнутой формулы φ языка L имеет место

$$\exists n (p_n \Vdash \varphi \vee p_n \Vdash \neg \varphi).$$

Счетность множества всех замкнутых формул языка L и пункт (2) определения отношения вынуждения позволяют доказать существование полной последовательности, начиная с любого p_0.

Множество A, содержащееся в $\lambda \times \omega_0$, наз. г е н е р и ч е с к и м о т н о с и т е л ь н о м о д е л и M, если существует такая полная последовательность, что $\bigcup_{n \leqslant \omega_0} p_n$ есть характеристич. функция χ_A множества A. Фундаментальное значение имеют следующие два факта о генерических множествах и отношении вынуждения.

I. Если A — генерическое множество, то

$$M[A] \models \varphi \Longleftrightarrow \exists p \subseteq \chi_A (p \Vdash \varphi),$$

где $M[A] \models \varphi$ означает, что формула φ истинна в $M[A]$.

II. Отношение

$$p \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — константы L, рассматриваемое как отношение между $p, c_1, \ldots, c_n$, выразимо в модели M.

В силу этих фактов, для доказательства того, что $M[A] \models \varphi$, достаточно показать истинность в модели M утверждения

$$\forall p (p \Vdash \neg\neg \varphi), \text{ т. е. } \forall p \exists q \geqslant p (q \Vdash \varphi).$$

На этом основана проверка справедливости в модели $M[A]$ аксиом ZF и $\neg$CH. При проверке $\neg$CH в $M[A]$ используется также специфика множества вынуждающих условий, позволяющая доказать, что:

1) если ординалы $\delta_1, \delta_2 < \lambda$ различны, то

$$\forall p \exists q \geqslant p \exists n < \omega_0 (q(\langle \delta_1 n \rangle) \neq q(\langle \delta_2 n \rangle)),$$

т. е.

$$A_{\delta_1} \neq A_{\delta_2}, \text{ где } A_\delta = \{n \mid \langle \delta n \rangle \in A\};$$

2) $M[A] \models (\lambda$ есть второй несчетный ординал).

Укажем, как отношение вынуждения связано с булевозначными моделями.

Если ввести обозначения

$$\| \varphi \| = \{p \in P : p \Vdash \neg\neg \varphi\},$$

$$\mathbb{B} = \{X \subseteq P : \forall p (p \in X \leftrightarrow \forall q \geqslant p \exists r \geqslant q (r \in X))\},$$

то $(\mathbb{B}, \subseteq)$ есть полная булева алгебра и $\| \varphi \| \in \mathbb{B}$ есть булево значение формулы φ. Таким образом, задание частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ и определение отношения $p \Vdash \neg\neg \varphi$ оказываются равносильными по-

строению нек-рой булевозначной модели $\mathfrak{M}$. Анализ доказательства утверждений вида:

$$M[A] \models \varphi_0,$$

где φ_0 — аксиома ZF или $\neg$CH, позволяет заключить, что формулы ZF, выражающие утверждение:

$$\forall p\ (p \Vdash \neg\neg\varphi_0),$$

т. е. $\|\varphi\| = 1_B$, выводимы из аксиом ZF. Таким образом, $\mathfrak{M}$ есть B-модель для ZF$+\neg$CH, построенная средствами ZF. Предположение о существовании счетного транзитивного множества, являющегося моделью ZF, равно как и понятие генерического множества, оказываются несущественными для целей доказательства относительной непротиворечивости.

Выяснилось, что построение булевозначной модели можно упростить (см. [2], [3], [5]). В частности, введение разветвленного языка L не является обязательным. Возможен следующий способ построения генерической модели $M[A]$ (см. [4]).

Подмножество X частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ наз. п л о т н ы м, если

$$\forall p\ \exists q \geqslant p\ (q \in X).$$

Пусть P и отношение $\leqslant$ суть элементы нек-рого счетного транзитивного множества M, являющегося моделью ZF. Подмножество $G \subseteq P$ наз. M - г е н е р и ч е с к и м ф и л ь т р о м, если:

1) $p \in G \wedge q \leqslant p \to q \in G$,
2) $p \in G \wedge q \in G \to \exists r \in G\,(p \leqslant r \wedge q \leqslant r)$,
3) $(X \in M \wedge X$ плотно на $P) \to X \cap G \neq \varnothing$.

Пусть G есть M-генерический фильтр на P. Так как M счетно, то G существует. Вообще говоря, $G \notin M$. Отношение $\in_G$ определяется эквивалентностью

$$x \in_G y \longleftrightarrow \exists p \in G\ (\langle x p\rangle \in y),$$

где x и y — произвольные элементы модели M.

Пусть функция F_G определена на M равенством

$$F_G(y) = \{F_G(x) : x \in_G y\}$$

и

$$N_G = \{F_G(x) : x \in M\}.$$

Если φ — замкнутая формула языка ZF, пополненного константами для обозначения каждого множества из M, то положим

$$p \Vdash \varphi \longleftrightarrow \forall G \ni p\ (G \text{ есть } M\text{-генерический фильтр} \to N_G \models \varphi).$$

Можно показать, что

I. $N_G \models \varphi \leftrightarrow \exists p \in G\,(p \Vdash \varphi)$.

II. Отношение $p \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ определимо в модели M для каждой формулы φ.

Используя только I, II и тот факт, что M — модель ZF, можно установить, что N_G — модель ZF. Если P определено эквивалентностями (a) и (b), то $N_G \models \neg$CH и $\bigcup G$ есть характеристич. функция нек-рого множества $A \subseteq \lambda < \omega_0$ и $M[A] = N_G$. Определимое в M отношение $p \Vdash \varphi$ не удовлетворяет пунктам (3) и (5) определения П. Коэна отношения вынуждения. Имеет место

$$p \Vdash \exists x \varphi(x) \longleftrightarrow \forall p' \geqslant p \exists p'' \geqslant p' \exists a \in M\,(p'' \Vdash \varphi(a)).$$

Полагая

$$|\varphi| = \{p \Vdash \varphi\},$$

получим определимую в M булевозначную модель для ZF$+\neg$CH с той же булевой алгеброй $\mathbb{B}$, что и в случае П. Коэна.

Таким образом, В. м. состоит фактически в построении $\mathbb{B}$-модели и гомоморфизма, сохраняющего нек-рые бесконечные объединения и пересечения алгебры $\mathbb{B}$, в двухэлементную алгебру $\{0, 1\}$ (о применениях В. м. в теории множеств см., напр., [2]).

Лит.: [1] К о э н П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Й е х Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] T a k e u t i G., Zaring W. M., Axiomatic set theory, N. Y. — Hdlb. — B.,

1973; [4] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [5] Манин Ю. И., в кн.: «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 5—72; [6] Fitting M. C., Intuitionistic logic, model theory and forcing, Amst. – L., 1969. *В. Н. Гришин.*

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ — незатухающие колебания в к.-л. материальной системе, возникающие под действием внешней переменной во времени силы. В линейной *диссипативной системе* при действии на нее внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону, В. к. имеют частоту внешней силы. Амплитуда В. к. определяется параметрами внешнего воздействия (амплитудой, частотой) и коэффициентами сопротивления среды, в к-рой происходят колебания материальной системы. Если частота внешней силы близка к одной из частот *собственных колебаний* системы, то амплитуда В. к. может иметь достаточно большую величину, тем большую, чем меньше сопротивление среды. В случае отсутствия сопротивления среды при совпадении частоты внешней силы с одной из частот собственных колебаний системы амплитуда В. к. неограниченно возрастает пропорционально времени. Это явление носит название *резонанса*.

При включении внешней силы в материальной системе возникают как В. к., так и собственные колебания. В диссипативной системе собственные колебания затухают, и в системе остаются только В. к. (установившийся режим). Режим перехода к установившимся колебаниям наз. переходным режимом. Время переходного режима тем меньше, чем больше сопротивление среды. Если внешняя сила является периодич. функцией времени с периодом $T=2\pi p$, к-рая может быть представлена рядом Фурье, то в линейной системе возникают В. к., представляющие собой сумму гармоник с частотами np ($n=1, 2, 3, \ldots$). Амплитуды этих гармоник убывают с возрастанием n, но не равномерно. На практике часто ограничиваются конечным числом гармоник.

Если при к.-л. значении n частота np близка к одной из собственных частот системы, то амплитуда гармоники В. к. с частотой np может быть достаточно большой, а при отсутствии сопротивления среды будет расти пропорционально времени. Напр., для диссипативной системы с одной степенью свободы, уравнение движения к-рой имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(npt + \delta_n)$$

(h, k^2, H_n, p, δ_n — постоянные коэффициенты), В. к. будут происходить по закону

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\sqrt{(k^2 - n^2p^2)^2 + 4h^2n^2p^2}} \sin(npt + \delta_n - \gamma_n),$$

где $\gamma_n = \operatorname{arctg}[2hnp/(k^2 - n^2p^2)]$. Если же $h = 0$ (среда без сопротивления) и $sp = k$, то

$$x = \sum_{n=1}^{(s)\ \infty} \frac{H_n}{k^2 - n^2p^2} \sin(npt + \delta_n) - \frac{H_s t}{2sp} \cos(spt + \delta_s),$$

где значок (s) у суммы означает, что член при $n = s$ в сумму не входит.

При непериодическом внешнем возмущении возникающие в системе В. к. будут также непериодическими. При воздействии внешней гармонической силы на нелинейную диссипативную систему возможно возникновение В. к. не только с частотой внешней силы, но и с частотой, в целое число раз большей частоты внешней силы (субгармонические колебания).

В автоколебательной системе (см. *Автоколебания*) при действии на нее внешней гармонической силы возникает квазипериодический режим (режим биений), характеризующийся наличием периодич. колебания с частотой, близкой к частоте автоколебаний, и В. к. с частотой внешнего возмущения. При частоте внешнего возмущения, близкой к частоте

автоколебаний, система совершает колебания только с частотой внешней силы. Это явление носит назв. принудительной синхронизации (захватывание).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, [М.], 1956; [2] Бабаков И. М., Теория колебаний, 2 изд., М., 1965; [3] Бутенин Н. В., Теория колебаний, 2 изд., М., 1963; [4] Коловский М. З., Нелинейная теория виброзащитных систем, М., 1966; [5] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [6] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 1964; [7] Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т., Механические колебания, пер. с англ., М., 1966.

Н. В. Бутенин.

ВЫПУКЛАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра* n лиц, в к-рой существует такое непустое множество игроков A, что для каждого игрока $i \in A$ множество его чистых стратегий X_i выпукло, а функция выигрыша $K_i(x_1, \ldots, x_n)$ вогнута по $x_i \in X_i$ при всех значениях x_k, $k \neq i$. Если функции выигрыша всех игроков в В. и. непрерывны, а множества чистых стратегий компактны, то существует ситуация равновесия, в к-рой игроки множества A используют чистые стратегии. В. и. наз. конечной, если каждое X_i компактно и содержится в нек-ром евклидовом пространстве E^{n_i}, а функции выигрыша K_i полилинейны. В частности, конечная антагонистическая В. и. задается тройкой $\langle R, S, K \rangle$, где $R \subset E^m$, $S \subset E^n$, а функция K имеет вид

$$K(r, s) = \sum a_{ij} r_i s_j, \quad r_i \in R, \ s_j \in S.$$

Если μ и ν — размерности множеств оптимальных стратегий игроков I и II соответственно, а ρ — ранг матрицы $\|a_{ij}\|$, то $\mu + \nu \leqslant m + n - \rho$. Поэтому если матрица $\|a_{ij}\|$ невырожденна, то $\mu + \nu \leqslant \max(m, n)$. Конечные В. и. тесно связаны с *вырожденными играми*.

Пусть $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$ — антагонистическая *игра на единичном квадрате*, функция выигрыша к-рой вогнута по $x \in X$ при каждом $y \in Y$ и непрерывна на квадрате $X \times Y$. Тогда игрок I имеет оптимальную чистую стратегию $x_0 \in X$, а игрок II — оптимальную меру (смешанную стратегию), носитель к-рой состоит не более чем из двух точек. Таким образом, можно получить нек-рую информацию о свойствах стратегий игроков в В. и., не принадлежащих множеству A. Естественным обобщением В. и. на единичном квадрате являются обобщенно-выпуклые игры, к-рые определяются тем, что для нек-рого n выполняется неравенство $\partial^n K(x, y)/\partial x^n \leqslant 0$ при $x \in X$, $y \in Y$. В этом случае, если условиться, что концевой точке отрезка приписывается вес $^1/_2$, игрок I имеет оптимальную меру, носитель к-рой состоит не более чем из $n/2$ точек, а игрок II — оптимальную меру, носитель к-рой состоит не более чем из n точек.

Лит.: [1] Никайдо Х., Исода К., в кн.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 449—58; [2] Дрешер М., Карлин С., там же, с. 180—94; [3] Бонненбласт Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С., там же, с. 337—52.

Г. Н. Дюбин.

ВЫПУКЛАЯ МЕТРИКА — *внутренняя метрика* на двумерном многообразии M, удовлетворяющая нек-рому условию выпуклости. Точнее, пусть l и m две кратчайшие, исходящие из нек-рой точки $O \in M$, X и Y — точки на них, x, y — расстояние от O до X, Y, z — расстояние между X, Y, $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами, равными x, y, z, лежащий против стороны, равной z. Условие выпуклости метрики (в точке O) состоит в том, что $\gamma(x, y)$ является невозрастающей функцией (т. е. $\gamma(x_1, y_1) \geqslant \gamma(x_2, y_2)$ при $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$) на всякой паре промежутков $0 < x \leqslant x_0$, $0 < y \leqslant y_0$ такой, что точки X и Y, соответствующие любым двум значениям из этих промежутков, можно соединить кратчайшей. Внутренняя метрика является В. м. тогда и только тогда, когда она есть метрика неотрицательной кривизны. Метрика выпуклой поверхности является В. м. Обратно, любое двумерное многообразие с В. м.

реализуется в виде выпуклой поверхности (теорема А. Д. Александрова).

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948.

М. И. Войцеховский.

ВЫПУКЛАЯ ОБЛАСТЬ — *выпуклое множество*, имеющее внутренние точки.

ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА множества M — минимальное *выпуклое множество*, содержащее M; то есть пересечение всех содержащих M выпуклых множеств. В. о. множества M обозначается $\mathrm{conv}M$. В евклидовом пространстве E^n В. о. есть множество возможных положений центра тяжести массы, различным образом распределяемой в M. Каждая точка В. о. есть центр тяжести массы, сосредоточенной не более чем в $n+1$ точках (теорема Каратеодори).

Замыкание В. о. наз. замкнутой В. о. Она представляет собой пересечение всех содержащих M замкнутых полупространств или совпадает со всем E^n. Часть границы В. о., не прилегающая к M, имеет локально строение развертывающейся гиперповерхности. В E^n В. о. ограниченного замкнутого множества M есть В. о. крайних точек M (крайней наз. точку множества M, не являющуюся внутренней ни для какого отрезка, принадлежащего M).

Кроме евклидова пространства, В. о. обычно рассматривают в локально выпуклых линейных топологич. пространствах L. В L В. о. компактного множества M есть замкнутая В. о. его крайних точек (теорема Крейна — Мильмана).

Лит.: [1] Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968.

В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — область (связное открытое множество) на границе *выпуклого тела* в евклидовом пространстве E^3. Вся граница выпуклого тела наз. полной В. п. Если тело конечно, то полная В. п. наз. замкнутой. Если тело бесконечно, то полная В. п. наз. бесконечной. Бесконечная В. п. гомеоморфна либо плоскости, либо круговому цилиндру. В последнем случае она сама является цилиндром. Простейшее выпуклое тело — выпуклый многогранник, т. е. пересечение конечного числа полупространств. Поверхность выпуклого многогранника составлена из выпуклых многоугольников и также наз. *выпуклым многогранником*.

Современная теория В. п. построена главным образом советскими геометрами — А. Д. Александровым и его школой. Однако отдельные результаты теории В. п. были известны значительно раньше. Так, еще О. Коши (A. Cauchy) доказал неизгибаемость замкнутого выпуклого многогранника. Г. Либман (H. Liebmann) и В. Бляшке (W. Blaschke) доказали жесткость замкнутых выпуклых поверхностей. Г. Минковский (H. Minkowski) — существование замкнутой В. п. с данной гауссовой кривизной. Г. Вейль (H. Weyl) наметил решение проблемы существования замкнутой В. п. с данной метрикой. Это решение было завершено Г. Леви (H. Lewy). С. Кон-Фоссен (S. Cohn-Vossen) доказал однозначную определенность регулярных замкнутых В. п.

С каждой точкой X В. п. F естественным образом связан конус $V(X)$ - предел поверхностей F_n при $n\to\infty$, получаемых преобразованием гомотетии из F относительно точки X с коэффициентом гомотетии n. Этот конус наз. касательным конусом. В зависимости от вида касательного конуса, точки В. п. подразделяются на конические, ребристые и гладкие. Точка В. п. наз. конической, если касательный конус в этой точке не вырождается. Если же касательный конус вырождается в двугранный угол или плоскость, точка наз. ребристой или, соответственно, гладкой. Негладкие точки на В. п. представляют собой в нек-ром смысле исключение. Именно, множество реб-

ристых точек имеет меру нуль, а множество конических точек не более чем счетно.

Для последовательности В. п. определяется понятие сходимости: последовательность В. п. F_n сходится к В. п. F, если любое открытое множество D одновременно пересекает или не пересекает F и все F_n при $n>N(D)$. Любую В. п. можно представить как предел выпуклых многогранников. Бесконечные совокупности В. п. обладают важным свойством компактности, состоящим в том, что из любой последовательности полных В. п., не удаляющихся в бесконечность, всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность с пределом в виде В. п., к-рая может быть вырожденной (в дважды покрытую плоскую область, прямую, полупрямую или отрезок).

Любые две точки В. п. можно соединить спрямляемой кривой на поверхности. Точная нижняя грань длин кривых, соединяющих две данные точки на В. п., наз. р а с с т о я н и е м м е ж д у э т и м и т о ч к а м и н а п о в е р х н о с т и. Кривая на В. п. наз. к р а т ч а й ш е й, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых на поверхности, соединяющих ее концы. У каждой точки В. п. есть окрестность, любые две точки к-рой можно соединить кратчайшей на поверхности. На полной В. п. любые две точки соединяются кратчайшей. Кратчайшая на В. п. имеет в каждой точке правую и левую полукасательные. Важнейшим свойством кратчайших на В. п. является с в о й с т в о н е н а л е г а н и я. Оно состоит в том, что для взаимного расположения двух кратчайших могут быть только следующие возможности: кратчайшие не имеют общих точек; кратчайшие имеют одну общую точку; кратчайшие имеют две общие точки, являющиеся их концами; одна кратчайшая есть часть другой; кратчайшие совпадают на нек-ром отрезке, причем один конец этого отрезка является концом одной кратчайшей, а второй конец служит концом другой кратчайшей. Метрика В. п. обладает с в о й с т в о м в ы п у к л о с т и (см. *Выпуклая метрика*). У г л о м между кратчайшими γ и γ' в точке O наз. предел угла $\alpha(X, X')$ при $X, X'\to O$. Определяемый так угол существует для любых двух кратчайших, исходящих из общей точки. По свойству неналегания кратчайших, кратчайшие γ и γ', исходящие из точки O, разбивают окрестность этой точки на два сектора. Пусть V — один из этих секторов, ограниченный кратчайшими γ и γ'. Проведем в этом секторе кратчайшие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, занумеровав их в порядке следования от γ к γ'. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - углы между соседними кратчайшими γ и γ_1, γ_1 и γ_2, ... У г л о м с е к т о р а V наз. точная верхняя грань суммы углов $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ по всем кратчайшим γ_i внутри сектора. Угол сектора равен углу между полукасательными к кратчайшим в точке O на развертке касательного конуса. Сумма углов взаимно дополняющих секторов с вершиной в точке O не зависит от взятых кратчайших и наз. п о л н ы м у г л о м п о в е р х н о с т и в т о ч к е O. Полный угол в любой точке В. п. не превышает 2π.

Для В. п. вводится понятие в н у т р е н н е й и в н е ш н е й к р и в и з н ы. Внутренняя кривизна ω определяется сначала для основных множеств точек, открытых кратчайших и треугольников. Т р е у г о л ь н и к о м наз. гомеоморфная кругу область, ограниченная тремя кратчайшими. Если M — точка и θ — полный угол вокруг нее на поверхности, то $\omega(M)=2\pi-\theta$. Если M — открытая кратчайшая, т. е. кратчайшая с исключенными концами, то $\omega(M)=0$. Если M — открытый треугольник, т. е. треугольник с исключенными сторонами и вершинами, то $\omega(M)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β, γ - углы треугольника. Далее кривизна определяется для элементарных множеств, представляемых в виде теоретико-множественной суммы попарно не пересекающихся основных: $M=\sum_{k=1}^{n}B_k$. Для таких мно-

жеств $\omega(M) = \Sigma\omega(B_k)$. Внутренняя кривизна любого замкнутого множества определяется как точная нижняя грань внутренней кривизны элементарных множеств, содержащих данное замкнутое множество. Наконец, для любого множества внутренняя кривизна определяется как верхняя грань внутренней кривизны содержащихся в нем замкнутых множеств. Определяемая таким образом внутренняя кривизна на В. п. является вполне аддитивной функцией на кольце *борелевских множеств*. Внешняя кривизна множества на В. п. определяется как площадь (мера Лебега) *сферического изображения* этого множества. Она определена для всех борелевских множеств на В. п. и совпадает с внутренней кривизной.

Метрика ρ двумерного многообразия наз. в н у т р е н н е й, если расстояние $\rho(X_1, X_2)$ между любыми двумя точками X_1 и X_2 многообразия равно точной нижней грани длин кривых в этом многообразии, соединяющих точки X_1 и X_2. При этом длина кривой $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющей точки X_1 и X_2, определяется как точная верхняя грань сумм

$$\sum \rho\,(X\,(t_{k-1}),\quad X\,(t_k)),\quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots \leqslant 1.$$

Пусть γ и γ' — две кривые, исходящие из точки O в многообразии с внутренней метрикой. Возьмем на них точки X и X' и построим плоский треугольник со сторонами $\rho(O, X)$, $\rho(O, X')$, $\rho(X, X')$. Нижний предел угла $\alpha(X, X')$ этого треугольника, противолежащего стороне $\rho(X, X')$, наз. у г л о м м е ж д у к р и в ы м и γ и γ' в точке O. Очевидно, этот угол всегда существует. Метрика многообразия наз. в ы п у к л о й, если для любого треугольника, стороны к-рого являются кратчайшими, сумма его углов не меньше π. Метрика В. п. — в этом смысле выпуклая. Одним из основных результатов теории В. п. является теорема о реализуемости внутренней выпуклой метрики на нек-рой В. п. Именно, полное многообразие с внутренней выпуклой метрикой реализуется полной В. п.

Для кривых на В. п. вводится понятие п р а в о г о и л е в о г о п о в о р о т о в, обобщающее понятие интегральной *геодезической кривизны*. Пусть γ — произвольная кривая без самопересечений на В. п. с концами A и B. Задается направление на кривой γ и строится последовательность простых геодезических ломаных с концами A, B, сходящихся к γ и расположенных в правой полуокрестности кривой. Пусть α_n — углы секторов, образуемые звеньями ломаной со стороны области, ограниченной ломаной γ_n и кривой γ; α и β — углы секторов, образуемых ломаной γ_n и кривой γ в концевых точках. П р а в ы м п о в о р о т о м наз. предел $\alpha + \beta + \Sigma(\pi - \alpha_n)$ при $\gamma_n \to \gamma$. Этот предел всегда существует, если кривая γ имеет определенные направления на концах, т. е. полукасательные, и не зависит от взятой последовательности ломаных. Л е в ы й п о в о р о т определяется аналогично. Поворот замкнутой кривой определяется путем приближения к ней замкнутой ломаной с соответствующей стороны. Для В. п. имеет место теорема, обобщающая *Гаусса — Бонне теорему* для регулярных поверхностей. Именно, если замкнутая кривая на В. п. ограничивает гомеоморфную кругу область, то сумма кривизны области и поворота кривой, ограничивающей область со стороны этой области, равна 2π.

И з о м е т р и ч е с к и м п р е о б р а з о в а н и е м наз. такая деформация В. п., при к-рой поверхность остается выпуклой и ее метрика не меняется, т. е. не изменяются расстояния между точками на поверхности. Изометрич. преобразование наз. т р и в и а л ь н ы м, если оно сводится к перемещению поверхности как целого или к перемещению и зеркальному отражению. Поверхность, не допускающая нетривиальных изометрич. преобразований, наз. о д н о з н а ч н о-

определенной. Замкнутые В. п. и бесконечные В. п. с полной кривизной 2π являются однозначно-определенными. Бесконечные В. п. с полной кривизной, меньшей 2π, допускают нетривиальные изометрич. преобразования и притом с большим произволом. Всякая В. п. локально допускает нетривиальные изометрич. преобразования, т. е. каждая точка В. п. имеет окрестность, допускающую такие преобразования.

Важнейшим средством исследования изометрич. преобразований В. п. является теорема о склеивании. Согласно этой теореме, полное многообразие D, составленное из областей D_k, изометричных В. п., само изометрично В. п., если выполняются следующие условия: границы областей D_k имеют повороты ограниченной вариации, отождествляемые участки границ одинаковой длины, сумма поворотов на любом отрезке отождествляемых границ неотрицательна, а сумма углов секторов в любой общей точке границ областей D_k не превышает 2π. Теоремы о возможности нетривиальных изометрич. преобразований В. п. обычно получают «подклеиванием» к данной В. п. плоской области с соблюдением указанных выше условий.

Для общих В. п. вводится понятие площади для любого борелевского множества; сначала оно вводится для простейших множеств, ограниченных кратчайшими,— геодезич. многоугольников. Многоугольник подвергается мелкой триангуляции T_n так, чтобы стороны треугольников были меньше $1/n$. Для каждого треугольника этой триангуляции строится плоский треугольник со сторонами той же длины и берется сумма площадей S_n таких треугольников. Оказывается, независимо от выбора триангуляции многоугольника, сумма S_n при $n\to\infty$ стремится к определенному пределу. Этот предел и принимается за площадь многоугольника. Затем обычными приемами теории меры определяются площади замкнутых, открытых и вообще борелевских множеств. Площадь В. п. есть вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств.

Удельной кривизной В. п. в области D наз. отношение кривизны области к ее площади. Если удельная кривизна В. п. во всех областях заключена в положительных пределах, то поверхность является гладкой и строго выпуклой. Гауссовой кривизной В. п. в данной точке X наз. предел удельной кривизны области D при стягивании ее к точке X. Гауссова кривизна, если она существует, является непрерывной функцией точки на поверхности. Если на В. п. существует определенная гауссова кривизна, то на этой поверхности можно ввести полярные геодезич. координаты и представить линейный элемент поверхности в виде

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2.$$

При этом гауссова кривизна с помощью коэффициента G определяется по формуле

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

В. п. наз. регулярной, если в окрестности любой ее точки она допускает аналитич. задание $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — регулярная (достаточное число раз дифференцируемая) вектор-функция, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$. Метрика В. п. наз. регулярной, если она допускает задание с помощью линейного элемента

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

причем коэффициенты формы ds^2 — регулярные функции. Регулярная В. п. имеет, очевидно, регулярную метрику, так как

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., двугранный угол имеет регулярную, даже аналитич. метрику, так

как он изометричен плоскости, но не является регулярной поверхностью. Однако, если метрика В. п. регулярна, а гауссова кривизна положительна, то поверхность регулярна. Именно, если коэффициенты линейного элемента дифференцируемы n раз ($n \geqslant 2$), то поверхность дифференцируема по крайней мере $n-1$ раз.

Теория В. п. строится также и в пространствах постоянной кривизны. При этом, как и в евклидовом пространстве, В. п. наз. область на границе выпуклого тела. Многие результаты теории В. п. в пространствах постоянной кривизны формулируются и доказываются так же, как и для В. п. евклидова пространства. Однако нек-рые результаты существенно отличаются. Напр., в пространстве Лобачевского полная В. п. может быть гомеоморфна любому связному открытому множеству на сфере.

Лит.: [1] Minkowski H., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 447—95; [2] Вейль Г., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2, с. 159—90; [3] Кон-Фоссен С. Э., «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 33—76; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [5] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

А. В. Погорелов.

ВЫПУКЛАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H (частично) *упорядоченной группы* G, являющаяся *выпуклым подмножеством* G относительно заданного отношения порядка. Инвариантные выпуклые подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов частично упорядоченных групп, сохраняющих порядок. Подгруппа упорядочиваемой группы, выпуклая при всяком линейном упорядочении, наз. абсолютно выпуклой подгруппой, а выпуклая при нек-ром ее линейном порядке — относительно выпуклой подгруппой. Пересечение всех неединичных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы есть абсолютно выпуклая подгруппа, объединение всех собственных относительно выпуклых подгрупп также есть абсолютно выпуклая подгруппа. Абелевы группы без кручения не имеют нетривиальных абсолютно выпуклых подгрупп. Подгруппа H доупорядочиваемой группы G абсолютно выпукла тогда и только тогда, когда для любых элементов $g \notin H$, $a \in H$ пересечение $S(g) \cap S(ga)$ не пусто, где $S(x)$ — минимальная инвариантная подполугруппа G, содержащая x. Выпуклая l-подгруппа H *структурно упорядоченной группы* изолирована, т. е. для любого натурального n из $x^n \in H$ следует $x \in H$.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ВЫПУКЛАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность действительных чисел $\{a_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (*)$$

Если положить

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

то условие (*) запишется в виде

$$\Delta^2 a_n \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Геометрически условие (*) означает, что ломаная на плоскости x, y с вершинами в точках $x=n$, $y=a_n$ является выпуклой. Если последовательность $\{a_n\}$ выпукла и ограничена, то:

1) она не возрастает и, следовательно, сходится к конечному пределу;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} n \Delta a_n = 0$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) \Delta^2 a_n = a_0 - \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Если $f(x)$ — *выпуклая функция* при $x \geqslant 0$, то последовательность $a_n = f(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, выпукла.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ действительного переменного — функция $f(x)$, определенная на нек-ром интервале, для любых двух точек x_1 и x_2 к-рого выполняется условие

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (1)$$

Геометрически это означает, что середина любой хорды графика функции f лежит либо над графиком, либо на нем. Если для любых x_1 и x_2 неравенство (1) является строгим неравенством, то функция f называется строго выпуклой. Примеры В. ф.: x^p, $p\geqslant 1$, $x\ln x$ для $x>0$ и $|x|$ для всех x. При обратном знаке неравенства (1) функцию f наз. вогнутой. Всякая измеримая В. ф. непрерывна. Существуют В. ф., не являющиеся непрерывными, но они очень нерегулярны: если функция f выпукла на интервале (a, b) и ограничена сверху в некотором интервале, лежащем внутри (a, b), то она непрерывна на (a, b). Таким образом разрывная В. ф. неограничена на каждом внутреннем интервале и неизмерима.

Если функция f непрерывна на интервале и на каждой хорде ее графика имеется по крайней мере одна точка, отличная от концов хорды и лежащая над графиком или на нем, то функция f выпукла. Из условия (1) для непрерывной функции f вытекает, что центр тяжести любого конечного числа материальных точек, лежащих на графике функции, находится либо над ее графиком, либо на нем: для любых чисел $p_k>0$, $k=1, 2, \ldots, n$ (n — произвольно) справедливо неравенство

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}\right)\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)}{\sum_{k=1}^{n}p_k}, \qquad (2)$$

называемое *Иенсена неравенством*.

Если для нек-рой функции f неравенство (2) выполняется для любых двух точек x_1 и x_2 нек-рого интервала и любых $p_1>0$ и $p_2>0$, то функция f непрерывна и, конечно, выпукла на этом интервале. Любая хорда графика непрерывной В. ф. либо совпадает с соответствующей его частью, либо, за исключением его концов, целиком лежит над графиком. Это означает, что если непрерывная В. ф. не является линейной ни на каком интервале, то в неравенствах (1) и (2) для любых попарно различных значений аргумента выполняется строгое неравенство, и значит f является строго В. ф.

Непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда множество точек плоскости, лежащих над ее графиком, т. е. ее *надграфик* является *выпуклым множеством*. Для того чтобы непрерывная функция f, определенная на интервале (a, b), была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы через каждую точку ее графика проходила по крайней мере одна прямая (наз. опорной прямой), лежащая либо под графиком [над интервалом (a, b)], либо частично на графике, т. е. чтобы для любой точки $x_0\in(a, b)$ существовало такое $k=k(x_0)$, что

$$f(x_0)+k(x-x_0)\leqslant f(x) \qquad (3)$$

для всех $x\in(a, b)$.

Непрерывная выпуклая на интервале функция не имеет строгого локального максимума. Если функция f непрерывна и выпукла на интервале (a, b), то в каждой его точке x_0 она имеет левую $D_-f(x_0)$ и правую $D_+f(x_0)$ конечные производные, причем $D_-f(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$ и, более того, если число $k=k(x_0)$ удовлетворяет условию (3), то $D_-f(x)\leqslant k(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$. Функции $D_-f(x)$ и $D_+f(x)$ не убывают и во всех точках, за исключением, быть может, счетного числа их, совпадают $D_-f(x)=D_+f(x)=f'(x)$, и тем самым функция f является дифференцируемой в этих точках. На каждом отрезке, лежащем внутри (a, b), функция f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, является абсолютно непре-

рывной. Это позволяет установить следующий критерий выпуклости: непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда она является неопределенным интегралом от неубывающей функции.

Если функция f дифференцируема на интервале, то для того чтобы она была (строго) выпуклой на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее производная (возрастала) не убывала. В точке графика непрерывной В. ф., соответствующей точке, в к-рой функция дифференцируема, существует единственная опорная прямая — касательная в этой точке. С другой стороны, если у дифференцируемой на интервале функции для каждой точки ее графика касательная к графику в этой точке в нек-рой окрестности точки касания лежит (за исключением точки касания) под графиком, то функция строго выпукла, если же она лежит либо под графиком функции, либо частично на нем, то — просто выпукла.

Если функция f дважды дифференцируема на интервале, то для того чтобы она была выпукла на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее вторая производная была неотрицательна на этом интервале (утверждение остается справедливым, если под второй производной понимать не обычную производную, а симметрическую производную). Если функция в каждой точке нек-рого интервала имеет положительную вторую производную, то функция строго выпукла на этом интервале.

Если функции f_i выпуклы на интервале (a, b) и $p_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, то функция

$$f=\sum_{i=1}^{n} p_i f_i$$

также выпукла на том же интервале, причем если хотя бы одна из функций f_i строго выпукла, то и функция f строго выпукла. Определение и свойства В. ф. на интервале переносятся и на промежутки других видов: отрезки и полуинтервалы.

Имеются различные обобщения понятия выпуклости на функции многих переменных. Пусть, напр., функция $y=f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определена на выпуклом множестве M n-мерного аффинного пространства E^n. Функция f наз. в ы п у к л о й, если для любых точек $x_1 \in M$ и $x_2 \in M$ выполняется неравенство (1), где под x_1+x_2 понимается сумма n-мерных векторов x_1 и x_2. Свойства В. ф. одного переменного соответствующим образом обобщаются на функции многих переменных: напр., для непрерывных В. ф. и в этом случае выполняется неравенство (2), непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда множество точек $(x^1, x^2, \ldots, x^n, y)$ пространства E^{n+1}, лежащих над ее графиком, выпукло.

Для того чтобы непрерывная функция f, определенная на выпуклой области G, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in G$ существовала такая линейная функция

$$l(y)=a_1 y^1+\ldots+a_n y^n+b,$$

что

$$f(x)=l(x), \quad f(y) \geqslant l(y), \quad y \in G. \tag{4}$$

Гиперплоскость, задаваемая уравнением $l(y)=0$, наз. о п о р н о й.

Если функция f непрерывно дифференцируема в G, то условие (4) эквивалентно условию

$$f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}(y^i-x^i) \geqslant 0, \quad x \in G, \ y \in G.$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то условие (4) эквивалентно условию неотрицательности второго дифференциала функции f, т. е. квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^i \xi^j$$

для всех $x \in G$.

Другим важным обобщением понятия В. ф. для функций многих переменных является понятие *субгармониче-*

ской функции. Понятие В. ф. естественным образом обобщается на функции, определенные на соответствующих подмножествах бесконечномерных линейных пространств, см. *Выпуклый функционал.*

Лит.: [1] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965, гл. 1, § 4; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965, гл. 1; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973, гл. 1; [4] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, гл. 10; [5] Никольский С. М., Курс математического анализа, М., 1973, гл. 5; [6] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948, гл. 3. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ комплексного переменного z — регулярная *однолистная функция*

$$w=f(z)\quad c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

в единичном круге $E=\{z;\ |z|<1\}$, отображающая единичный круг на нек-рую *выпуклую область.* Регулярная однолистная функция $w=f(z)$ является В. ф. тогда и только тогда, когда при обходе любой окружности $|z|=r$, $0<r<1$, касательная к образу $|z|=r$ в точке $f(z)$ вращается в одном и том же направлении. Следующее неравенство выражает необходимое и достаточное условие выпуклости $f(z)$:

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,\quad z\in E. \tag{1}$$

С другой стороны, для того чтобы $f(z)$ была В. ф., необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее параметрич. представление:

$$f(z)=c_0+c_1\int_0^z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-e^{-i\theta}\zeta\right)d\mu(\theta)\right]d\zeta, \tag{2}$$

где $\mu(\theta)$ — неубывающая действительная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1;$$

c_0, c_1 — комплексные постоянные, $c_1\neq0$. Формулу (2) можно рассматривать как обобщение *Кристоффеля — Шварца формулы* для отображения круга E на выпуклые многоугольники.

Пусть S^0 — класс всех В. ф. в E, нормированных условиями $c_0=f(0)=0$, $c_1=f'(0)=1$; S_p^0, $p=1,2,\dots$, суть подклассы класса S^0, состоящие из функций, отображающих E соответственно на выпуклые области плоскости w с p-кратной симметрией вращения относительно точки $w=0$, $S_1^0=S^0$. Классы S_p^0 компактны в себе относительно равномерной сходимости внутри E. Их интегральные представления, в частности формула (2) для S^0, позволяют развить вариационные методы решения экстремальных задач на классах S_p^0 (см. [2] — [5]).

Основные экстремальные свойства класса S^0 характеризуются следующими неулучшаемыми неравенствами:

$$|c_n|\leqslant1,\quad n=2,3,\dots,$$

$$|z|(1+|z|)^{-1}\leqslant|f(z)|\leqslant|z|(1-|z|)^{-1},$$

$$(1+|z|)^{-2}\leqslant|f'(z)|\leqslant(1-|z|)^{-2},$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant2\arcsin|z|,\quad z\in E,$$

под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$. Во всех этих оценках знак равенства имеет место только для функции $f(z)=z/(1-\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$. Для отношения K_r кривизны $K(r)$ границы $\partial B_r(f)$ области $B_r(f)=\{w=f(z);\ |z|<r\}$ на классе S_p^0, $p=1,2,\dots$, в точке $f(z)$ к кривизне $1/r$ прообраза $\partial B_r(f)$, т. е. окружности $|z|=r$, в точке z имеются также неулучшаемые оценки. Областям $B_1(f)$, $f\in S^0$, принадлежит круг $|w|<1/2$, причем радиус этого круга не может быть увеличен без дополнительных ограничений на класс функций. Если $f(z)\in S^0$, то однолистная функция $g(z)=zf'(z)$ звездообразна в круге E, т. е. отображает E на область, звездную относительно начала координат.

Примерами обобщения и видоизменения класса S^0 и его подклассов являются: класс Σ^0 однолистных в $|z|>1$ функций $F(z)=z+d_0+d_1z^{-1}+\dots$, регулярных при $1<|z|<\infty$ и отображающих $|z|>1$ на области с выпуклыми дополнениями; класс $S^0(r, R)$ регулярных в кольце $r<|z|<R$ нормированных определенным образом функций $F(z)$, каждая из к-рых однолистно отображает это кольцо в такую область, что конечная компонента ее дополнения выпукла и ее объединение с этой компонентой также выпукло; класс S^0_{pr} функций из S^0_p с действительными коэффициентами разложений Тейлора в окрестности точки $z=0$. Понятие В. ф. распространяется и на многолистные функции (см. [2], добавление).

Самостоятельный интерес представляет следующее обобщение В. ф. (см. [6]): регулярная в круге E функция $w=f(z)=z+c_2z^2+\dots$ наз. *близкой к выпуклой*, если существует в E В. ф. $\Phi(z)$, $\Phi(0)=0$, такая, что всюду в E

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{\Phi'(z)}\right\}>0, \quad z\in E.$$

Для класса K всех таких функций $f(z)$ доказана однолистность, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности функции $f(z)$ классу K и параметрич. представление функций $f(z)\in K$ при помощи интегралов Стилтьеса:

$$f(z)=\int_0^z\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+e^{i\varphi}e^{-i\theta}\zeta}{1-e^{-i\theta}\zeta}\,d\alpha(\theta)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-e^{-i\theta}\zeta)\,d\mu(\theta)\right]d\zeta,$$

где $|\varphi|<\pi$; $\alpha(\theta)$, $\mu(\theta)$ — неубывающие действительные функции,

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1.$$

Класс K включает в себя выпуклые, звездные и другие функции. Для функций $f(z)\in K$ справедлива *Бибербаха гипотеза*: $|c_n|\leqslant n$; известны неулучшаемые оценки:

$$|z|(1+|z|)^{-2}\leqslant|f(z)|\leqslant|z|(1-|z|)^{-2},$$
$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3}\leqslant|f'(z)|\leqslant(1+|z|)(1-|z|)^{-3},$$
$$|\arg f'(z)|\leqslant 4\arcsin|z|, \quad z\in E,$$

под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$. Во всех этих оценках знак равенства имеет место только для функции $f(z)=z(1+\varepsilon z)^2$, $|\varepsilon|=1$. Геометрически функции $f(z)$ класса K характеризуются тем, что они отображают круг E на области $D(f)$, внешность к-рых $\overline{CD}(f)$ может быть заполнена лучами L, проведенными из точек границы области, $L\subset\subset CD(f)$. Понятие функции, близкой к выпуклой, распространено на многолистные функции (см. [7]).

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Зморович В. А., «Укр. матем. ж.», 1952, т. 4, с. 276–98; [4] Александров П. А., Черников В. В., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 261–67; [5] Зморович В. А., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 3, с. 633–52; [6] Kaplan W., «Michigan Math. J.», 1952, v. 1, № 2, p. 169—85; [7] Styer D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 169, p. 105—12. *И. А. Александров, Ю. Д. Максимов.*

ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО в евклидовом или другом векторном пространстве - множество, к-рое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего их отрезка. Пересечение любой совокупности В. м. есть В. м.

Наименьшая размерность плоскости, содержащей данное В. м., наз. размерностью этого В. м. Замыкание В. м. (т. е. результат присоединения к В. м. всех его предельных точек) дает В. м. той же размерности. Центральное место в теории В. м. занимает изучение в ы п у к л ы х т е л (в. т.) — конечных (т. е. ограниченных) замкнутых В. м. размерности n. При отказе от

ограниченности говорят о бесконечных в. т., а при отказе от n-мерности — о вырожденных в. т. или в. т. более низких размерностей.

В. т. гомеоморфно замкнутому шару. Бесконечное в. т., не содержащее прямых, гомеоморфно полупространству, а содержащее прямую является цилиндром с выпуклым (возможно бесконечным) поперечным сечением.

Через каждую точку границы В. м. проходит хотя бы одна гиперплоскость, оставляющая это В. м. в одном замкнутом полупространстве. Такие гиперплоскости и полупространство наз. о п о р н ы м и для данного В. м. в данной точке границы. Замкнутое В. м. есть пересечение его опорных полупространств. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклый многогранник. Г р а н я м и в. т. называют его пересечения с опорными гиперплоскостями. Это — в. т. более низких размерностей. Само в. т. считают его n-мерной гранью. Грань грани, в отличие от случая многогранника, может не быть гранью исходного в. т.

С каждой граничной точкой x в. т. связывают: открытый касательный конус, заполненный лучами, идущими из x через внутренние точки в. т.; замкнутый касательный конус — его замыкание; касательный конус поверхности — его границу. Первые два конуса выпуклые.

Точки границы в. т. классифицируют по минимальной размерности граней, к-рым они принадлежат, а также по размерности множества опорных гиперплоскостей в точке. Точки нульмерных граней наз. выступающими. Крайними наз. точки в. т., не внутренние ни для одного отрезка, лежащего в этом в. т. Изучается вопрос о возможном обилии точек и множества направлений граней разного типа. Напр., точки с неединственной опорной гиперплоскостью занимают на границе нулевую $(n-1)$-мерную площадь; направления лежащих на границе отрезков имеют нулевую меру среди всех направлений в пространстве.

Точка, не принадлежащая в. т., строго отделена от него гиперплоскостью, оставляющей эту точку и в. т. в разных открытых полупространствах. Два непересекающихся В. м. отделены гиперплоскостью, оставляющей их в разных замкнутых полупространствах. Последнее свойство отделимости сохраняется для В. м. в бесконечномерных векторных пространствах.

С в. т. F связана его о п о р н а я ф у н к ц и я H: $E^n \to E^1$, определяемая равенством $H(u) = \sup\{ux : x \in F\}$, где ux — скалярное произведение. Функция $H(u)$ — положительно однородная 1-й степени: $H(\alpha u) = \alpha H u$ при $\alpha \geqslant 0$, и выпуклая:

$$H(u+v) \leqslant H(u) + H(v).$$

Любая функция с этими двумя свойствами есть опорная функция для некоторого (причем единственного) в. т. Задание опорной функции — один из основных способов задания в. т.

При размещении начала координат внутри в. т. вводят функцию расстояния D: $E^n \to E^1$, определяемую при $u \neq 0$ равенством

$$D(u) = \sup\{\alpha : u / \alpha \in F\},$$

и полагают $D(0) = 0$. Это — тоже положительно однородная 1-й степени выпуклая функция, определяющая F. Два в. т. наз. п о л я р н ы м и (или д в о й с т в е н н ы м и) друг другу, если опорная функция одного из них есть функция расстояния для другого. Существование двойственных в. т. связано с самосопряженностью E^n.

Если в. т. F симметрично относительно начала координат, то функция $\rho(u, v) = D(u-v)$ является метрикой. Это — метрика пространства Минковского (конечномерного банахова пространства), причем F играет роль единичного шара. Аналогично в бесконечномерном банахо-

вом пространстве единичный шар есть В. м. Свойства пространства связаны с геометрией этого шара, в частности с наличием на его границе точек разного типа [3].

В. т. можно задавать как *выпуклую оболочку* точек его границы или части этих точек.

Существует ряд достаточных признаков, позволяющих делать заключение о выпуклости множества (или каждого из множеств нек-рого семейства). Напр., если C^2-гладкая замкнутая поверхность в E^3 имеет в каждой точке неотрицательную гауссову кривизну, то эта поверхность - граница в. т.; если пересечение компактного множества F в E^3 с каждой плоскостью, оставляющей F в одном полупространстве, связно, то F выпукло [4].

На множестве в. т. (в том числе вырожденных, но не пустых) метрику можно ввести многими способами. Наиболее употребительна метрика Хаусдорфа (см. *Выпуклых множеств пространство* метрическое). В этой метрике каждое в. т. можно приближать выпуклыми многогранниками, а также такими в. т., к-рые допускают задание $P(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, где P — многочлен, и к-рые имеют во всех точках границы положительные главные кривизны.

В. т. всегда имеют конечный объем (по Жордану), совпадающий с его n-мерной мерой Лебега. Граница в. т. имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь, причем различные способы введения площади в этом случае эквивалентны. Объем и площадь границы непрерывно (по метрике Хаусдорфа) зависят от в. т.

С изучением зависимости объема линейной комбинации $\Sigma\lambda_i F_i$ в. т. F_i от коэффициентов λ_i связана теория *смешанных объемов*. Среди смешанных объемов находятся, кроме объема и площади границы, многие другие функционалы, связанные с в. т. [5]; напр. k-мерные объемы проекций на k-мерные плоскости разных направлений и их средние значения. Главным достижением этой теории являются разнообразные неравенства между смешанными объемами; среди них — *изопериметрическое неравенство классическое*.

С в. т. связывают ряд простых фигур, напр. для каждого в. т. единствен наибольший (по объему) вписанный и наименьший описанный эллипсоиды [6]. Развиты признаки, выделяющие среди всех в. т. шары, эллипсоиды, центрально-симметричные тела [1], [2]. Особое место в теории В. м. занимают теоремы о семействах В. м. [6].

Значение теории В. м.— в наглядности методов и результатов, их общности и независимости от аналитич. требований гладкости (решениями экстремальных задач часто служат негладкие в. т.).

Лит.: [1] Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, B., 1934; [2] Valentine F., Convex sets, N. Y., 1964; [3] Дей М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [4] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., Достаточные признаки выпуклости, в кн.: Вопросы глобальной геометрии, Л., 1974, с. 3–53 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та, т. 45); [5] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [6] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛОЕ ПОДМНОЖЕСТВО частично упорядоченного множества — подмножество, содержащее вместе с любыми двумя элементами a и b весь интервал $[a, b]$ (см. *Интервал и сегмент*).

Л. А. Скорняков.

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвященный теории и методам решения задач минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах, задаваемых системами неравенств и равенств. Существует законченная теория В. п. и разработаны многочисленные методы решения задач В. п. Для многих итерационных методов в В. п. установлены априорные оценки скорости сходимости. Одним из разделов В. п. является *квадратичное программирование*.

Лит.: [1] Еремин И. И., Астафьев Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [4] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974.
В. Г. Карманов.

ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО — замкнутое (конечное или бесконечное) *выпуклое множество* в евклидовом или другом топологическом векторном пространстве, имеющее внутренние точки.

ВЫПУКЛОСТИ РАДИУС, граница выпуклости $R(x_0, f)$ функции $f(x)$, — точная верхняя грань радиусов $r>0$ шаров $\{x; \rho(x, x_0)<r\}$, каждый из к-рых отображается на *выпуклую область*; при этом функция $f(x)$ определена в области D метрич. пространства с метрикой $\rho(x_1, x_2)$ и принимает значения в линейном пространстве. В. р. $R(x_0)$ в точке $x_0 \in D$ относительно нек-рого класса $\mathfrak{M}$ отображений $f(x)$ области D есть, по определению, число

$$R(x_0) = \inf \{R(x_0, f);\ f \in \mathfrak{M}\}.$$

Если $f(x)$ — аффинное отображение евклидова пространства E^n, $n \geqslant 2$, то $R(x_0, f) = \infty$. Относительно класса $\mathfrak{M}$ всех нормированных однолистных конформных отображений $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, единичного круга $E=\{z;\ |z|<1\}$ комплексной плоскости В. р. $R(z_0) = 2-\sqrt{3+|z_0|}$, а при дополнительном условии выпуклости областей $\{w;\ w=f(z),\ z \in E\}$, т. е. для *выпуклых функций*, $R(z_0)=1-|z_0|$.

См. также *Однолистная функция*.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., «Докл. АН СССР», 1957, т. 116, № 6, с. 903—05; [3] Marx A., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, № 1, S. 40—67.
И. А. Александров.

ВЫПУКЛОСТЬ — термин, используемый в разных разделах математики и указывающий на свойства, обобщающие отдельные свойства *выпуклых множеств* в евклидовых пространствах E^n. С термином «В.» ассоциируется применимость ряда приемов исследования.

В E^n эквивалентны следующие два основных определения. Множество выпукло: а) если оно есть пересечение открытых полупространств; б) если вместе с любыми двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок. Оба определения В. переносятся на случай векторных пространств L.

Определение б) распространяют на множества в пространствах с геодезическими (пространства со связностью; локально компактные метрич. пространства, в частности римановы и финслеровы пространства). При этом роль отрезков играют геодезические; но если две точки соединимы не единственной геодезической или кратчайшей, то понятие «В.» разветвляется. В римановой геометрии употребительны, в частности, следующие варианты В. (см. [1]; [2]): 1) множество M выпукло, если каждые две точки из M соединимы единственной кратчайшей и она лежит в M; 2) множество M локально выпукло, если каждая точка из M имеет выпуклую в смысле 1) окрестность в M; 3) множество M слабо выпукло, если каждые две точки соединимы хотя бы одной кратчайшей, идущей в M; 4) множество M абсолютно выпукло, если для каждых двух точек в M лежат все соединяющие их геодезические.

В E^n границу (или часть границы) n-мерного *выпуклого тела* наз. выпуклой гиперповерхностью, при $n=3$ — выпуклой поверхностью, при $n=2$ — выпуклой кривой.

Для функции действительного переменного В. означает В. ее *надграфика* (см. *Выпуклая функция* действительного переменного). Аналогично определяют В. функционала f в L (см. *Выпуклый функционал*).

Для выпуклых множеств в L можно говорить о В. семейства $\mathfrak{A}$ множеств, требуя, чтобы из условия M_1, $M_2 \in \mathfrak{A}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ следовало $(1-\alpha)M_1 + \alpha M_2 \in \mathfrak{A}$.

На выпуклых семействах $\mathfrak{A}$ определяют выпуклые (и вогнутые) функционалы $\Phi(M)$. Выпуклость функционала определяется требованием

$$\Phi((1-\alpha)M_1+\alpha M_2)\leqslant(1-\alpha)\Phi(M_1)+\alpha\Phi(M_2).$$

Термин «В.» для однолистных функций комплексной переменной имеет особый смысл — свойство отображать единичный круг в выпуклую область (см. *Выпуклая функция* комплексного переменного).

Из обобщений В. в E^n рассматривалась R-выпуклость компакта M, означающая, что каждая точка, удаленная от M менее чем на R, имеет в M единственную ближайшую (см. [4], [5]).

В теории линейных дифференциальных операторов термин «В.» связывают с нек-рыми свойствами групп гомологий [6]. Это ассоциируется с возможностью коснуться границы изнутри области гиперповерхностью, у к-рой определенное число главных кривизн положительно. В теории функций многих комплексных переменных важную роль играет голоморфная выпуклость, связанная с невозможностью коснуться границы области изнутри аналитич. поверхностью [7]. Последнее понятие есть частный случай так наз. K-выпуклости (см. [7], с. 6). В схему K-выпуклости укладываются многие из перечисленных понятий В.

В выпуклом анализе используют понятие H-выпуклости, обобщающее представимость выпуклой функции как супремума семейства линейных функций [8].

В теории метрич. пространств выпуклость метрики (по Менгеру) определяется как существование для любых точек $x\neq y$ отличной от них точки, для к-рой $\rho(x,y)=\rho(x,z)+\rho(z,x)$ (см. [9]). Под d-выпуклостью множества M понимают принадлежность M любой такой точки z при $x,\ y\in M$. Весьма близки к этому определения В. в пространствах с упорядочением (см., напр., *Выпуклая подгруппа*).

Почти каждому определению В. соответствует связанное с ним понятие локальной В. Но при выделении класса локально выпуклых векторных топологич. пространств термин «локальная В.» имеет особый смысл, означая существование у каждой точки базисной системы выпуклых окрестностей.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны [Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 63], М., 1962; [3] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [4] Federer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 93, № 3, p. 418—91; [5] Решетняк Ю. Г., «Матем. сб.», 1956, т. 40, с. 381—98; [6] Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967; [7] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [8] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 3, с. 127—176; [9] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ — свойство неотрицательной функции $f(x)$, определенной на нек-ром промежутке, состоящее в следующем: если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка и любых $p_1>0$, $p_2>0$, $p_1+p_2=1$, выполняется неравенство

$$f(p_1x_1+p_2x_2)\leqslant f^{p_1}(x_1)\,f^{p_2}(x_2),$$

то функция $f(x)$ наз. логарифмически выпуклой. Если функция логарифмически выпукла, то она либо тождественно равна нулю, либо строго положительна и $\ln f(x)$ — *выпуклая функция*.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ — раздел математики, занимающий промежуточное положение между анализом и геометрией, в к-ром изучаются *выпуклые функции*, *выпуклые функционалы* и *выпуклые множества*. Основания В. а. были заложены Г. Минковским [1], [2], создав-

шим выпуклую геометрию, т. е. геометрию выпуклых множеств в конечномерном пространстве. Многие понятия и концепции выпуклой геометрии нашли свое завершение в функциональном анализе. С работы В. Фенхеля [3] начался новый этап В. а., на к-ром детально исследовались свойства выпуклых функционалов. Формирование В. а. как самостоятельного раздела относится к 50 – 60-м гг. 20 в. Понятия и методы В. а. широко применяются в разных областях математики — в теории экстремальных задач, особенно — в выпуклом программировании и классическом вариационном исчислении, в математич. физике, теории целых функций, математич. статистике и т. д.

Основными в В. а. являются понятия *поляры*, *субдифференциала* и *сопряженной функции*. Теоремы В. а. связывают операции сопряжения, перехода к поляре и взятия субдифференциала с алгебраическими, теоретико-множественными и порядковыми операциями над выпуклыми множествами и функциями. Исследуются также всевозможные двойственные отношения между множествами и их полярами, функциями и сопряженными к ним, множествами и выпуклыми однородными функциями и т. п.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, B.— Lpz., 1910; [2] его же, Theorie der konvexen Körper, в кн.: Gesamm. Abh., Bd 2, Lpz., 1911; [3] Fenchel W., «Can. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [4] Рокафеллар Р. Т., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973. *В. М. Тихомиров.*

ВЫПУКЛЫЙ КОНУС — *выпуклое тело* V, состоящее из полупрямых, исходящих из одной точки — вершины конуса. При этом исключается случай, когда V совпадает со всем пространством. Понятие В. к. включает в себя как частные случаи двугранный угол и полупространство. Иногда В. к. наз. поверхность В. к.

Е. В. Шикин.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК — *выпуклая оболочка* конечного числа точек в евклидовом пространстве E^n. Такой В. м. есть ограниченное непустое пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Бесконечным В. м. называют пересечение конечного числа замкнутых полупространств, содержащее по крайней мере один луч, причем условливаются пространство E^n также считать В. м. В этом смысле В. м. есть замкнутая выпуклая оболочка конечного числа точек и лучей. Размерностью В. м. наз. минимальную размерность содержащего его пространства E^n.

В. м.— частный вид *выпуклого множества*. Как пересечение полупространств В. м. описывается системой линейных неравенств и может быть исследован алгебраическими средствами. Методы минимизации линейных форм на В. м. составляют предмет *линейного программирования*.

В. м. имеет конечное число граней (пересечений В. м. с опорными гиперплоскостями). Каждая грань В. м. есть В. м. меньшей размерности. Грани граней являются гранями исходного В. м. Одномерные грани наз. ребрами, нульмерные — вершинами. Ограниченный В. м. есть выпуклая оболочка своих вершин.

В теории *выпуклых поверхностей* В. м. наз. также границу В. м., а иногда (см. [1]) даже часть такой границы. В последнем случае говорят о выпуклом многограннике с краем. В элементарной геометрии принято первоначально определять многогранник как фигуру, специальным образом составленную из многоугольников (см. [2]), а затем выделять В. м. как лежащий по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Ограниченный n-мерный В. м. имеет не менее чем $n+1$ вершину. Наиболее просто устроен *симплекс*, имеющий $n+1$ вершину. Всякий ограниченный В. м. разбивается на симплексы, прилегающие по целым граням.

В евклидовом пространстве E^3 есть пять правильных В. м.: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Об их свойствах и аналогах см. *Правильные многогранники*, *Полуправильные многогранники*. О В. м. с частными особенностями строения см. *Изогоны и изоэдры*, *Зоноэдры*. С правильными разбиениями пространства связаны специальные типы В. м.: *стереоэдры*, *параллелоэдры*, *планигоны*.

Возможные типы строения сети граней В. м. изучены не полностью. Пусть f_k — число k-мерных граней ограниченного n-мерного В. м. Справедливо соотношение Эйлера

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

имеющее топологич. характер: оно верно для любого разбиения сферы S^{n-1} на простые ячейки. При $n=3$ для не образующей двуугольных и самокасающихся ячеек связной сети ребер на сфере S^2 найдется В. м. в евклидовом пространстве E^3 с таким строением сети (теорема Штейница). При $n>3$ строение сети граней В. м. менее произвольно, чем возможные разбиения сферы (см. [3]). В классе В. м. могут ставиться специфические экстремальные задачи, в условия к-рых входят строение сети граней, число или суммарная длина ребер и т. п. (см. [4]).

Приближение выпуклых тел посредством В. м. является универсальным приемом исследования. Приближением В. м. получены многие результаты теории *смешанных объемов*, теоремы существования, единственности, устойчивости выпуклых поверхностей с фиксированными данными, развиты геометрич. методы решения *Монжа — Ампера уравнения*. Эффективность этого метода связана с тем, что В. м. характеризуются конечным числом данных; для В. м. общие теоремы имеют простую формулировку; к В. м. применимы синтетич. приемы исследования.

В связи с теорией поверхностей сформировался большой раздел теории В. м. (см. [1]). В евклидовом пространстве E^3 два ограниченных В. м., имеющие одинаковые и в одинаковом порядке прилегающие грани, совместимы движением (теорема Коши). В E^n для нек-рых $\boldsymbol{n}_i$, $S_i>0$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{n}_i S_i = 0, \qquad N \geqslant n+1,$$

существует и единствен с точностью до переноса В. м. с единичными внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$ граней и площадями граней S_i (теорема Минковского). Развертка из плоских многоугольников, склеиваемая так, что результат гомеоморфен сфере S^2 и вокруг каждой вершины склеиваются углы с суммой $\leqslant 2\pi$, изометрична В. м. в E^3, и этот В. м. единствен с точностью до движения (теорема А. Д. Александрова). Два В. м. в E^n совместимы переносом, если ни для одного направления нормали $\boldsymbol{n}$ грань одного В. м. нельзя переносом сделать строгой частью другого. Для выходящих из точки лучей l_i и чисел $\omega_i>0$ существует и единствен с точностью до гомотетии В. м. с вершинами на лучах l_i и кривизнами ω_i в этих вершинах.

Лит.: [1] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.—Л., 1950; [2] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [4] Grünbaum B., Convex polytopes, L.—N.Y.— Sydney, 1967.

В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК — плоское *выпуклое множество*, граница к-рого — ломаная линия, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков. Иногда В. м. наз. только его границу. В. м. есть пересечение конечного числа (замкнутых) полуплоскостей.

М. И. Войцеховский.

ВЫПУКЛЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Вогнутый и выпуклый операторы*.

ВЫПУКЛЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — функционал, определенный на векторном линейном пространстве и обладающий тем свойством, что его *надграфик* является *выпуклым множеством*. Функционал f, не принимающий значений, равных $-\infty$ на выпуклом множестве A, будет выпуклым на A тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leqslant(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y),\ x,\ y\in A,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

При обратном знаке неравенства функционал f наз. в о г н у т ы м. Операциями, переводящими В. ф. в В. ф., являются, напр., сложение $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$, умножение на положительное число, взятие верхней грани

$$(f_1\vee f_2)(x)=\max(f_1(x),\ f_2(x)),$$

инфимальная конволюция

$$(f_1\oplus f_2)(x)=\inf_{x_1+x_2=x}(f_1(x)+f_2(x)).$$

В. ф., ограниченный сверху в окрестности нек-рой точки x, является непрерывным в этой точке. Если В. ф. конечен в нек-рой точке x, то он имеет производную по любому направлению (конечную или бесконечную) в этой точке. Замкнутые В. ф. (т. е. функционалы с выпуклыми и замкнутыми надграфиками) в локально выпуклых линейных топологич. пространствах допускают двойственное описание: они являются верхними гранями аффинных функций, их не превосходящих. Такая двойственность позволяет связать с каждым В. ф. двойственный объект, сопряженный функционал:

$$f^*(x^*)=\sup_x(\langle x^*,\ x\rangle-f(x)).$$

Свойства В. ф., операции над ними, взаимосвязи В. ф. и их сопряженных и т. п. изучаются в *выпуклом анализе*.

Лит.: [1] Burnbaum Z., Orlicz W., «Stud. math.», 1931, v. 3, p. 1—67; [2] Харди Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958; [4] Fenchel W., «Can. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [5] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973. *В. М. Тихомиров.*

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВО л и н е й н о е — пространство, элементами к-рого служат классы эквивалентных пар (X, Y) *выпуклых множеств* в линейном локально выпуклом топологич. пространстве. Пара (X, Y) трактуется как «разность» $X-Y$, причем пары (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) по определению эквивалентны, если $X_1+Y_2=X_2+Y_1$, где сложение множеств понимают как замыкание векторной суммы. В линейном В. м. п. вводятся сложение, вычитание, умножение на число и топология, причем В. м. п. оказывается локально выпуклым топологическим пространством. Вводят, кроме того, отношение частичного упорядочения, аналогичное включению множеств. Линейные В. м. п. рассматривались также в нелокально выпуклых линейных пространствах.

Лит.: [1] Пинскер А. Г., «Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та», 1966, т. 63, с. 13—17. *В. А. Залгаллер.*

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВО м е т р и ч е с к о е — совокупность компактных *выпуклых множеств* F в евклидовом пространстве E^n, снабженная метрикой Хаусдорфа:

$$\rho(F_1, F_2)=\sup_{x\in F_1,\ y\in F_2}\{\rho(x, F_2),\ \rho(y, F_1)\}.$$

Это пространство ограниченно компактно (см. *Бляшке теорема выбора*). Об аналогах метрических В. м. п. (другие метризации, некомпактные множества, классы множеств, другие исходные пространства) см. [1].

Лит.: [1] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971. *В. А. Залгаллер.*

ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — вероятность того, что в *ветвящемся процессе* не осталось частиц к мо-

менту времени t. Пусть $\mu(t)$ — число частиц в ветвящемся процессе с однотипными частицами. В. в.

$$P_0(t) = P\{\mu(t) = 0 \mid \mu(0) = 1\}$$

не убывает при увеличении t; **вероятностью вырождения за бесконечное время**, или просто **вероятностью вырождения**, наз. величину

$$q = \lim_{t \to \infty} P_0(t).$$

Если τ — время от начала процесса до момента исчезновения последней частицы, то $P\{\tau < t\} = P_0(t)$ и $P\{\tau < \infty\} = q$. Для различных моделей ветвящихся процессов изучена скорость сходимости $P_0(t)$ к q при $t \to \infty$.

В. П. Чистяков.

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, функция Куммера, функция Похгаммера,— решение *вырожденного гипергеометрического уравнения*

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \qquad (1)$$

В. г. ф. может быть определена с помощью так наз. ряда Куммера:

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots, \qquad (2)$$

где α и γ — параметры, принимающие любые действительные или комплексные значения, кроме $\gamma = 0, -1, -2, \dots$, z — комплексное переменное. Функция $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ наз. **вырожденной гипергеометрической функцией 1-го рода**. Второе линейно независимое решение уравнения (1)

$$\Psi(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\,\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1 - \gamma)} z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z),$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |\arg z| < \pi,$$

наз. **вырожденной гипергеометрической функцией 2-го рода**.

В. г. ф. $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ — целая аналитич. функция во всей комплексной плоскости z; при фиксированном z — целая функция α и мероморфная функция γ с простыми полюсами в точках $\gamma = 0, -1, -2, \dots$. В. г. ф. $\Psi(\alpha; \gamma; z)$ — аналитич. функция в комплексной плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$ и целая функция α и γ.

В. г. ф. $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ связана с *гипергеометрической функцией* $F(\alpha; \beta; \gamma; z)$ соотношением

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) = \lim_{\beta \to \infty} F\left(\alpha; \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right).$$

Элементарные соотношения. Четыре функции $\Phi(\alpha \pm 1; \gamma; z)$ и $\Phi(\alpha; \gamma \pm 1; z)$ наз. смежными с функцией $\Phi(\alpha; \gamma; z)$. Между $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ и любыми двумя смежными с ней существует линейная зависимость. Напр.,

$$\gamma\Phi(\alpha; \gamma; z) - \gamma\Phi(\alpha - 1; \gamma; z) - z\Phi(\alpha; \gamma + 1; z) = 0.$$

Шесть формул такого типа могут быть получены из соотношений между смежными функциями для гипергеометрич. функций. Последовательное применение этих рекуррентных формул приводит к линейным соотношениям, связывающим функцию $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ с ассоциированными функциями $\Phi(\alpha + m; \gamma + n; z)$, где m и n — целые числа.

Формула дифференцирования:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Phi(\alpha; \gamma; z) = \Phi(\alpha + n; \gamma + n; z), \quad n = 1; 2, \dots.$$

Основные интегральные представления:

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0;$$

$$\Psi(\alpha; \gamma; z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \ \operatorname{Re} z > 0.$$

Асимптотич. поведение В. г. ф. при $z\to\infty$ может быть изучено с помощью интегральных представлений (см. [1] — [3]). Если $\gamma\to\infty$, в то время как α и z ограничены, то поведение функции $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)$ описывается формулой (2). В частности, при больших γ и ограниченных α и z:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)=1+O(|\gamma|^{-1}).$$

Представления функций через В. г. ф. Функции Бесселя:

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}\,\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2iz\right),$$

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z}\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2z\right),$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\pi}\,e^{-z}(2z)^\nu\Psi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2z\right).$$

Многочлены Лагерра:

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,\Phi(-n;\ \alpha+1;\ z).$$

Интеграл вероятностей:

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2z}{\sqrt{\pi}}\,\Phi\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -z^2\right),$$

$$\operatorname{erf}c(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\,\Psi\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right).$$

Интегральная показательная функция:

$$-\operatorname{Ei}(-z)=e^{-z}\,\Psi(1;\ 1;\ z).$$

Интегральная логарифмическая функция:

$$\operatorname{li}(z)=z\Psi(1;\ 1;\ -\ln z).$$

Гамма-функции:

$$\Gamma(\alpha,\ z)=e^{-z}\,\Psi(1-\alpha;\ 1-\alpha;\ z).$$

Элементарные функции:

$$e^z=\Phi(\alpha;\ \alpha;\ z),$$

$$\sin z=e^{iz}z\,\Phi(1;\ 2;\ -2iz).$$

См. также [1], [2], [3], [8].

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, [т. 2], пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 4 изд., М., 1963; [3] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, N. Y., 1964; [4] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, ч. 2 — Трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [5] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [6] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959; [7] An index of Mathematical tables, 2 ed., v. 1, 2, Oxford, 1962; [8] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963. *Э. А. Чистова.*

ВЫРОЖДЕННАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра* n лиц, в к-рой функция выигрыша $K_i(x_1,\ \dots,\ x_n)$ каждого игрока i вырождена, т. е. имеет вид

$$\sum_{j_1,\ \dots,\ j_n} a^{(i)}_{j_1,\ \dots,\ j_n}\,r^{(i)}_{j_1}(x_1)\ \dots\ r^{(i)}_{j_n}(x_n),$$

где $r^{(i)}_{j_k}(x_k)$, $1\leqslant j_k\leqslant n^{(k)}$ — функции, заданные на множестве чистых стратегий X_k игрока k, $k=1,\ \dots,\ n$. В случае антагонистических В. и. на единичном квадрате функция выигрыша $K(x,\ y)$ игрока I равна

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}r_i(x)\,s_j(y).$$

Такая игра сводится к конечной антагонистической *выпуклой игре* $\langle R,\ S,\ K\rangle$, где R — выпуклое множество, натянутое на расположенную в m-мерном пространстве кривую $r_i=r_i(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $i=1,\ \dots,\ m$, а S — выпуклое множество, натянутое на кривую $s_j=s_j(y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $j=1,\ \dots,\ n$, лежащую в n-мерном пространстве; функция выигрыша $K(r,\ s)$ имеет вид

$$\sum_{i-1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}r_is_j,\ r\in R,\ s\in S.$$

В частности, если $r_i(x)=x^i$, а $s_j(y)=y^j$, то В. и. наз. полиномиальной игрой. Во всякой анта-

гонистической В. и. на единичном квадрате игрок I имеет оптимальную смешанную стратегию, носитель к-рой состоит не более чем из m точек, если же игра полиномиальная, то не более чем из $m/2$ точек (при подсчете числа точек концевой точке отрезка приписывается вес $^1/_2$). Аналогично, игрок II имеет оптимальную смешанную стратегию, носитель к-рой состоит не более чем из n точек; в случае полиномиальной игры — не более чем из $n/2$ точек.

Лит.: [1] Дрешер М., Карлин С., Шепли Л. С., в кн.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 154—179.

Г. Н. Дюбин.

ВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА, особая матрица, сингулярная матрица,— квадратная матрица, определитель к-рой равен нулю.

ВЫРОЖДЕННАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ — множество представлений полупростой группы Ли G, индуцированных характерами ее не минимальной параболич. подгруппы P. Пусть Π — фундаментальная система корней, по отношению к к-рой алгебра Ли борелевской подгруппы $B \in G$ натянута на корневые векторы e_α, $\alpha<0$. Множество всех параболич. подгрупп, содержащих B, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех подсистем $\Pi_0 \subset \Pi$, причем $P \neq B$, если Π_0 непусто, и алгебра Ли группы P порождается образующими e_α, $\alpha<0$, и e_α, $\alpha \in \Pi_0$. Пусть $\pi(\chi)$ — представление группы G, индуцированное характером χ подгруппы P в классе $C^\infty(G)$. Существуют характеры χ, при к-рых $\pi(\chi)$ продолжается до унитарного представления группы G в $L^2(Z)$, где Z — подгруппа в G, алгебра Ли к-рой натянута на векторы e_α, $\alpha>0$, $\alpha \notin \Delta_0$, Δ_0 — аддитивная оболочка Π_0. Такие представления наз. представлениями основной В. с. п. Дополнительная В. с. п. получается пополнением $\pi(\chi)$ (при нек-рых χ) относительно других скалярных произведений в $\pi(\chi)$. Для группы $G=SL(n, \mathbb{C})$ представления В. с. п. неприводимы.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т.36; [2] Gross K., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 2, p. 398—428.

Д. П. Желобенко.

ВЫРОЖДЕННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(t, x, Du)=0, \qquad (*)$$

где функция $F(t, x, q)$ удовлетворяет условию: корни многочлена

$$\sum_{\alpha|=m} \frac{\partial F(t, x, Du)}{\partial q_\alpha} \lambda^{\alpha_0} \xi^{\alpha'}$$

действительны при всех действительных ξ и существуют $\xi \neq 0$, t, x и Du, при к-рых либо нек-рые корни совпадают, либо коэффициент при λ^m обращается в нуль. Здесь: t — независимая переменная, часто интерпретируемая как время; x есть n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $u(t,x)$ — искомая функция; α и α' — мультииндексы $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha'=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем в уравнение $(*)$ входят производные порядка не выше m; q_α — компоненты вектора q; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\xi^{\alpha'}=\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней.

А. М. Ильин.

ВЫРОЖДЕННОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, конфлюэнтное уравнение — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$zw'' + (\gamma - z) w' - \alpha w = 0, \quad \alpha, \gamma = \text{const}, \qquad (1)$$

или, в самосопряженной форме,

$$(e^{-z} z^\gamma w')' - \alpha e^{-z} z^{\gamma-1} w = 0.$$

Переменные z, w и параметры α, γ в общем случае могут принимать любые комплексные значения. Приведенной формой уравнения (1) является *Уиттекера уравнение*. Уравнение (1) тесно связано с *гипергеометрическим уравнением*. В. г. у. можно рассматривать как уравнение, получающееся из *Римана дифференциального уравнения* при слиянии двух особых точек. Точка $x=0$ является для уравнения (1) регулярной особой точкой, а точка $x=\infty$ — сильно особой (см. *Особая точка дифференциального уравнения*). Впервые систематич. изучение решений уравнения (1) предпринял Э. Куммер [1].

Решения уравнения (1) выражаются через *вырожденную гипергеометрическую функцию* $\Phi(\alpha, \gamma; z)$. Если γ не равно целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$w = C_1\Phi(\alpha, \gamma, z) + C_2 z^{1-\gamma}\Phi(\alpha - \gamma + 1, 2-\gamma; z), \quad (2)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; это представление справедливо в комплексной плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$. Для целых значений γ общее решение имеет более сложный вид (возможно существование членов, содержащих логарифмы). В качестве фундаментальной системы решений уравнения (1) можно выбирать и иные функции, отличные от указанных в (2) (напр., *Уиттекера функции*, см. [2], [3]). Решение уравнения (1) может быть представлено также через контурные интегралы в комплексной плоскости z.

Многие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка (напр., *Бесселя уравнение*) преобразованием неизвестной функции и независимой переменной приводятся к уравнению (1) (см. [4]). В частности, уравнение вида

$$(a_0 z + b_0)w'' + (a_1 z + b_1)w' + (a_2 z + b_2)w = 0,$$
$$a_i,\ b_i = \text{const},$$

интегрируется с помощью вырожденной гипергеометрич. функции.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1836, Bd 15, S. 39—83, 127—72; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

ВЫРОЖДЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное интегральное уравнение Фредгольма с *вырожденным ядром*. Общий вид В. и. у.:

$$\lambda x(P) - \int_D \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\,\psi_i(Q)\,x(Q)\,dQ = f(P). \quad (1)$$

Интегрирование производят по области D (вообще n-мерного) евклидова пространства, P и Q — точки из D, λ — действительный или комплексный параметр, а функции, входящие в (1), суммируемы с квадратом на D. Решение В. и. у. (1) ищется в виде

$$x(P) = \frac{1}{\lambda} f(P) + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(P).$$

Коэффициенты c_i находятся из системы линейных алгебраич. уравнений

$$\lambda c_j - \sum_{i=1}^{N} c_i \int_D \psi_j(Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_D f(P)\,\psi_j(P)\,dP. \quad (2)$$

Если система (2) при заданном λ имеет единственное решение, то уравнение (1) также однозначно разрешимо. Те значения $\lambda \neq 0$ (их не более N), при к-рых определитель системы (2) равен 0, являются собственными значениями. Условия разрешимости В. и. у. (1) даются *Фредгольма альтернативой*. При $\lambda = 0$ В. и. у. (1) есть уравнение Фредгольма I рода; для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция f могла быть представлена в виде линейной комбинации функций

φ_i. Тогда В. и. у. (1) имеет решение, представимое в виде

$$x(P) = \sum_{j=1}^{N} d_j \psi_j(P) + \psi(P),$$

при этом коэффициенты d_j определяются однозначно, а ψ есть функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_D \psi(P)\,\psi_j(P)\,dP = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Важность В. и. у. для общей теории уравнений Фредгольма обусловлена тем, что решение любого уравнения Фредгольма II рода может быть с любой точностью в среднем квадратическом (и в нек-рых других метриках) приближено решениями В. и. у. Их вырожденные ядра в том или ином смысле аппроксимируют ядро исходного уравнения.

Абстрактным аналогом и обобщением В. и. у. служит линейное операторное уравнение вида

$$\lambda x - Ax = f,$$

где x и f принадлежат банахову пространству E, а оператор A имеет конечномерную область значений. Свойства таких уравнений аналогичны свойствам В. и. у. (1).

Лит.: [1] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959. *А. Б. Бакушинский.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(t, x, Du) = 0,$$

где функция $F(t, x, q)$ обладает свойством: для нек-рого четного натурального числа p все корни λ многочлена

$$\sum_{\alpha:\ p\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\partial F(t, x, Du)}{\partial q_\alpha} \lambda^{\alpha_0} (i\xi)^{\alpha'}$$

имеют неположительные действительные части для всех действительных ξ, причем при нек-рых $\xi \neq 0$, t, x и Du для к.-л. корня $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, либо при нек-рых t, x и Du коэффициент при старшей степени $\lambda^{m/p}$ обращается в нуль. Здесь: t — независимая переменная, часто интерпретируемая как время; x есть n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $u(t, x)$ — искомая функция; α — мультииндекс $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем $p\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant m$; q — вектор с компонентами q_α; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(i\xi)^{\alpha'} = (i\xi_1)^{\alpha_1} \ldots (i\xi_n)^{\alpha_n}$. См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней. *А. М. Ильин.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ — точка x_0, для к-рой $f(x_0) = 0$ и матрица $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ имеет нулевые собственные значения. Наиболее изучены В. п. р. двумерных систем, для к-рых развит ряд методов исследования поведения траекторий в окрестности В. п. р., напр. методы Бендиксона (см. [1], [2], [4]), Фроммера (см. [3], [4]). В пространствах более двух измерений предлагались геометрич. методы исследования, состоявшие в основном из выделения главных членов в правых частях уравнений и из доказательства сохранения поведения траекторий при переходе от укороченного к полному уравнению (см. [5]). Если отображение f достаточное число раз дифференцируемо или аналитично, то можно рассматривать степень вырожденности (степень негрубости) положения равновесия в зависимости от того, на сколько невырожденных положений равновесия может распасться данное В. п. р. при изменении f, малом в смысле C^r-топологии.

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta Math.», 1901, v. 24, p. 1—88; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л.,1949; [5] Брюно А. Д., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 2, с. 329—64. *Л. Э. Рейзинь.*

ВЫРОЖДЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ в *n*-мерном евклидовом пространстве — любое распределение, сосредоточенное с вероятностью 1 на нек-ром линейном многообразии размерности, меньшей *n*, рассматриваемого пространства. В противном случае распределение наз. невырожденным. В. р. в случае конечных вторых моментов характеризуется тем, что ранг соответствующей матрицы ковариаций (или корреляционной матрицы) *r* меньше *n*. При этом *r* совпадает с наименьшей размерностью линейных многообразий, на к-рых сосредоточено данное В. р. Понятие В. р. очевидным образом распространяется на распределения в линейных пространствах. Иногда В. р. наз. несобственными распределениями, а невырожденные — собственными распределениями. *А. В. Прохоров.*

ВЫРОЖДЕННОЕ УРАВНЕНИЕ с частными производными — дифференциальное уравнение с частными производными, тип к-рого вырождается в нек-рых точках области задания уравнения или на ее границе. Тип уравнения или системы уравнений в точке определяется одним или несколькими алгебраич. соотношениями между коэффициентами. Среди этих соотношений имеются, как правило, строгие неравенства. Если в нек-рых точках рассматриваемой области вместо строгих неравенств выполняются нестрогие, то говорят о вырождении типа, а уравнение (система уравнений) наз. вырождающимся, или вырожденным. Различают *вырожденные эллиптические уравнения*, *вырожденные гиперболические уравнения*, *вырожденные параболические уравнения* (системы уравнений).

Примеры:

$$xu_{x^4}+u_{y^4}+u_{z^4}+u_x=0$$

— вырожденное эллиптич. уравнение в полупространстве $x\geqslant 0$;

$$y^2u_{yy}-u_{xx}=0$$

— вырожденное гиперболич. уравнение во всей плоскости;

$$-u_t+u_{yy}+yu_x=0$$

— вырожденное параболич. уравнение в области $t\geqslant 0$;

$$yu_x-v_y=0,\quad u_y+v_x=0$$

вырожденная эллиптич. система при $y\geqslant 0$.

В. у. встречаются в теории пограничного слоя, в безмоментной теории оболочек, в теории диффузионных процессов, в частности в теории броуновского движения, и во многих других задачах механики и физики.

Исследования В. у. ведутся по двум тесно связанным между собой направлениям: 1) доказывается разрешимость краевых задач с учетом тех изменений в постановке, к-рые происходят в силу вырождения типа; 2) устанавливаются свойства решений, аналогичные свойствам невырожденных уравнений (гладкость, неравенства Гарнака для эллиптич. и параболич. уравнений и т. п.).

Наиболее полно изучены В. у. 2-го порядка эллиптич. и параболич. типов (строго говоря, параболич. уравнение тоже можно считать вырожденным эллиптич. уравнением, удовлетворяющим дополнительным условиям). В случае, когда вырождение типа имеется не только на границе, но и во внутренних точках

(напр., во всех точках рассматриваемой области), такие уравнения называют еще уравнениями с неотрицательной характеристической формой, эллиптико-параболическими уравнениями, ультрапараболическими уравнениями.

Особенностью В. у. является специфич. постановка краевых задач. Граничные условия иногда приходится задавать не на всей границе, а на ее части. М. В. Келдыш впервые обратил внимание на зависимость постановки краевой задачи от характера вырождения эллиптич. уравнения на границе. Для общего эллиптико-параболич. уравнения 2-го порядка

$$a^{ik}(x)\,u_{x_i x_k}+b^i(x)\,u_{x_i}+c(x)\,u=f(x);\quad a^{ik}\xi_i\xi_k\geqslant 0,\ (*)$$

первая краевая задача ставится следующим образом. Пусть Γ - граница рассматриваемой области D, $n=(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — внутренняя нормаль к Γ, а $\tilde{\Gamma}$ — та часть Γ, где $a^{ik}n_in_k=0$ и $(b^i-a^{ij}_{x_j})n_i\geqslant 0$. Требуется найти решение уравнения $(*)$ в области D так, чтобы $u|_{\Gamma\setminus\tilde{\Gamma}}=\varphi$. Были доказаны существование и единственность обобщенного решения этой задачи и указаны достаточные условия, при к-рых обобщенное решение будет гладким.

Так как частным случаем В. у. являются уравнения 1-го порядка, то ясно, что решения вырожденных эллиптич. уравнений, вообще говоря, не будут гладкими внутри области, если граничные условия недостаточно гладкие. Однако примеры показывают, что и при бесконечно дифференцируемых граничных условиях и коэффициентах В. у. его решения могут не быть бесконечно дифференцируемыми. Найдено условие гипоэллиптичности для общего вырожденного эллиптич. уравнения 2-го порядка.

Свойства решений вырожденных эллиптич. и параболич. уравнений 2-го порядка изучаются как с помощью геометрич. методов, так и с помощью методов теории вероятностей.

Большинство исследований вырожденных гиперболич. уравнений относится к уравнениям 2-го порядка с двумя независимыми переменными, вырождающимся на границе области. Эти работы стимулировались прежде всего изучением уравнений смешанного типа и связанных с ними задач газовой динамики. Для иллюстрации возникающих здесь вопросов рассмотрим задачу Коши $(u(x, 0)=\alpha(x),\ u_y(x,0)=\beta(x))$ для уравнения с главной частью $u_{yy}-y^m u_{xx}$. При $m<2$ эта задача имеет единственное решение, а при $m>2$ задача Коши, вообще говоря, некорректна. Для уравнения с главной частью $y^m u_{yy}-u_{xx}$ задача Коши с данными на линии вырождения поставлена корректно при $0<m<1$. Если $m\geqslant 1$, то так же, как и для эллиптич. уравнения, постановка задачи, вообще говоря, видоизменяется. Вместо $u_y(x, 0)$ задается $\lim\limits_{y\to 0}\rho(y)\,u_y(x, y)$, где $\rho(y)$ нек-рая положительная функция, зависящая от коэффициентов уравнения.

Для гиперболич. уравнения с бо́льшим числом пространственных переменных

$$u_{tt}-\left(a^{ij}(t, x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}+b^i(t, x)\,u_{x_i}+ +b^0(t, x)\,u_t+c(t, x)\,u=f,$$

вырождающегося как на начальной плоскости $t=0$, так и внутри области, доказана корректность задачи Коши при выполнении нек-рых условий. Наиболее существенным из этих условий является выполнение неравенства

$$\alpha t\,(b^i\xi_i)^2\leqslant A a^{ij}\xi_i\xi_j+a^{ij}_t\xi_i\xi_j,$$

где α и A — нек-рые положительные постоянные.

Ряд результатов для линейных В. у. переносится и на квазилинейные уравнения.

Лит.: [1] Олейник О. А., Радкевич Е. В., Итоги науки. Математический анализ. 1969, М., 1971, с. 7—252; [2] Смирнов М. М., Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., 1966. *А. М. Ильин.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x,\ Du)=0, \tag{1}$$

где действительная функция $F(x,\ q)$ удовлетворяет условиям:

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F(x,\ Du)}{\partial q_\alpha}\xi^\alpha\geqslant 0 \tag{2}$$

для всех действительных ξ и существует $\xi\neq 0$, при к-ром в соотношении (2) достигается равенство. Здесь: x есть n-мерный вектор $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$; $u(x)$ — искомая функция, α — мультииндекс $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем в уравнение (1) входят производные порядка не выше m; q_α - компоненты вектора q; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1},\ \xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. Если в соотношении (2) для к.-л. x и Du и для всех действительных $\xi\neq 0$ выполняется строгое неравенство, то уравнение (1) в точке $(x,\ Du)$ является эллиптическим. Уравнение (1) вырождается в тех точках $(x,\ Du)$, где соотношение (2) обращается в равенство для к.-л. действительного $\xi\neq 0$. Если равенство достигается лишь на границе рассматриваемой области, то уравнение наз. в ы р о ж д а ю щ и м с я н а г р а н и ц е о б л а с т и. Наиболее исследованы линейные В. э. у. 2-го порядка

$$\sum a^{ik}(x)\,u_{x_i x_k}+\sum b^i(x)\,u_{x_i}+c(x)\,u=f(x),$$

где матрица $\|(a^{ik}(x)\|$ неотрицательно определенная для всех рассматриваемых значений x.

См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней. *А. М. Ильин.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ЯДРО — ядро линейного интегрального *Фредгольма оператора*, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(P)\,\psi_i(Q),$$

где P и Q - точки евклидовых пространств. *А. Б. Бакушинский.*

ВЫРОЖДЕННЫХ ЯДЕР МЕТОД — один из методов построения аппроксимирующего уравнения для приближенного (и численного) решения нек-рых видов линейных и нелинейных интегральных уравнений. Основным типом интегральных уравнений, пригодных для применения В. я. м., являются линейные одномерные интегральные уравнения Фредгольма II рода. Для таких уравнений В. я. м. состоит в приближенной замене ядра $K(x,\ s)$ интегрального уравнения

$$\lambda\varphi(x)-\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x) \tag{1}$$

на вырожденное ядро вида

$$K_N(x,\ s)=\sum_{n=1}^N a_n(x)\,b_n(s)$$

и в последующем решении *вырожденного интегрального уравнения* Фредгольма

$$\lambda\tilde{\varphi}(x)-\int_a^b K_N(x,\ s)\,\tilde{\varphi}(s)=f(x). \tag{2}$$

Решение (2) сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений. Вырожденное ядро $K_N(x,\ s)$ можно искать по ядру $K(x,\ s)$ многими способами, напр. разложением ядра в ряд Тейлора или Фурье (о других методах см. *Бейтмена метод*, *Полос метод*).

В. я. м. переносится на системы интегральных уравнений типа (1), на многомерные уравнения с относительно простыми областями интегрирования и нек-рые специальные нелинейные уравнения типа Гаммерштейна (см. *Гаммерштейна уравнение*).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962.

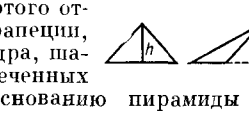
А. Б. Бакушинский.

ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ, пропозициональное исчисление,— общее название дедуктивных систем, выводимые объекты к-рых интерпретируются как суждения, составленные из простейших (не анализируемых в рамках В. и.) суждений при помощи пропозициональных связок (таких, как «не», «и», «или», «если..., то...» и др.; см. *Логические исчисления*). Важнейшим примером является классич. В. и., в интерпретации к-рого суждения рассматриваются как принимающие два значения («истина» и «ложь») и выводимыми объектами оказываются все тождественно истинные суждения и только они. Интерес к В. и. определяется тем, что эти исчисления лежат в основе почти любой логико-математич. теории и обычно соединяют сравнительную простоту с высокой содержательностью. В частности, многие важные задачи как теоретического, так и прикладного характера сводятся к тем или иным проблемам для классич. В. и.

Лит. см. при ст. *Логические исчисления.*

С. Ю. Маслов.

ВЫСОТА в элементарной геометрии — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины геометрич. фигуры (напр., треугольника, пирамиды, конуса) на ее основание или на продолжение основания, а также длина этого отрезка. В. трапеции, призмы, цилиндра, шарового слоя, усеченных параллельно основанию пирамиды и конуса,— расстояние между верхним и нижним основаниями. На рис. изображены В. (h) треугольников, трапеции и усеченного конуса.



БСЭ-3.

ВЫСОТА в диофантовой геометрии — некоторая численная функция на множестве решений *диофантова уравнения*. В простейшем случае целочисленного решения $(x_1, \ldots, x_n)$ диофантова уравнения высота есть функция решения, равная $\max |x_i|$. В таком виде она встречается уже в методе спуска Ферма. Пусть имеется проективное алгебраич. многообразие X, определенное над глобальным полем K. Высота представляет собой класс действительнозначных функций $h_L(P)$, определенных на множестве $X(K)$ рациональных точек P, и зависящий от морфизма $L: X \to P^n$ многообразия X в проективное пространство P^n. Каждая функция из этого класса тоже наз. высотой. Различие между функциями из этого класса с точки зрения оценки рациональных точек несущественно; для любых двух функций h'_L и h''_L существуют такие константы $c' > 0$ и $c'' > 0$, что $c' h'_L \leqslant h''_L \leqslant c'' h'_L$. Такие функции наз. эквивалентными; эта эквивалентность (здесь) обозначается $\asymp$.

Основные свойства В. Функция $h_L(P)$ функториальна по P, т. е. для любого морфизма $f: X \to Y$ и морфизма $L: Y \to P^n$

$$h_{f^*L}(P) \asymp h_L(f(P)), \quad P \in X(K).$$

Если морфизмы L, L_1 и L_2 определяются обратимыми пучками $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$, то $h_L \asymp h_{L_1} h_{L_2}$. Множество точек $P \in X(K)$, имеющих ограниченную В., конечно в следующем смысле: если основное поле K есть поле алгебраич. чисел, то указанное множество конечно; если же K — поле алгебраич. функций с полем констант k, то элементы $X(K)$ зависят от конечного числа параметров из поля k и, в частности, K конечно, если поле k конечно. Пусть $|\cdot|_v$ пробегает множество всех

нормирований поля K. Тогда В. точки $(x_0:x_1:\ldots:x_n)$ проективного пространства P^n с координатами из K может быть определена как

$$\Pi_v \sup_i |x_i|_v. \qquad (*)$$

Корректность определения следует из формулы произведения $\Pi_v |x|_v = 1$, $x \in K$. Пусть X — произвольное проективное многообразие над K и L — замкнутое вложение многообразия X в проективное пространство, В. h_L можно получить, перенося функцию (*) с помощью этого вложения на множество $X(K)$. Различные проективные вложения, соответствующие одному и тому же пучку $\mathscr{L}$, определяют на $X(K)$ эквивалентные функции. Распространение по линейности дает требуемую функцию h_L. Иногда вместо функции h_L используют ее логарифм — так наз. л о г а р и ф м и ч. в ы с о т у.

Приведенные выше оценки являются в нек-рых случаях следствием точных равенств (см. [3], [4], [5]). Существует вариант функции В.— высота Тейта — Перона, к-рая определяется на абелевых многообразиях и ведет себя функториальным образом относительно морфизмов абелевых многообразий, сохраняющих нулевую точку. Локальный аспект развит в [6]. Построенные там локальные компоненты В. играют в арифметике роль индексов пересечения.

Лит.: [1] В е й л ь А., Теория чисел и алгебраическая геометрия, «Математика», 1958, т. 2, № 4; [2] L a n g S., Diophantine geometry, N. Y.—L., 1962; [3] М а н и н Ю. И., Теорема Морделла — Вейля, в кн.: М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971, с. 279 -95; [4] М а н и н Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 1363—90; [5] M u m f o r d D., «Amer. J. Math.», 1965, v. 87, p. 1007 -16; [6] N é r o n A., «Ann. Math.», 1965, v. 82, p. 249—331.

А. Н. Паршин.

ВЫСОТА ИДЕАЛА — минимум высот простых идеалов, содержащих данный идеал. В ы с о т а $\mathrm{ht}(\mathfrak{P})$ п р о с т о г о и д е а л а $\mathfrak{P}$ в кольце A — наибольшее число h (или ∞, если такого числа нет) такое, что существует цепочка различных простых идеалов

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_h = \mathfrak{P}.$$

К о в ы с о т а $\mathrm{coht}(\mathfrak{P})$ п р о с т о г о и д е а л а $\mathfrak{P}$ определяется как наибольшее h, для к-рого существует цепочка простых идеалов

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_h \neq A.$$

Иначе говоря,

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \dim(A_{\mathfrak{P}}), \quad \mathrm{coht}(\mathfrak{P}) = \dim(A/\mathfrak{P}),$$

где dim означает размерность соответствующего кольца по Круллю. Высота простого идеала равна коразмерности многообразия, определяемого идеалом, а ковысота — размерности этого многообразия. Высота и ковысота простого идеала связаны неравенством

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{P}) \leqslant \dim A,$$

равенство достигается, напр., в случае, когда A локальное *Коэна — Маколея кольцо*.

Простые идеалы высоты 0 — это минимальные простые идеалы. Существование в нётеровой области целостности простых идеалов высоты 1 устанавливает т е о р е м а о г л а в н о м и д е а л е: высота ненулевого главного идеала равна 1 (см. *Крулля кольцо*). Более общий результат — т е о р е м а К р у л л я — связывает высоту с числом образующих идеала: в нётеровом кольце В. и., порожденного r элементами, не превосходит r, и обратно: простой идеал высоты r является минимальным среди простых идеалов, содержащих некоторые r элементов. В частности, в нётеровом кольце любой идеал имеет конечную высоту; в отношении ковысоты это уже не так (см. [2]).

Лит.: [1] K r u l l W., Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, B.—Lpz., 1928; [2] N a g a t a M., Local rings, N. Y., 1962; [3] З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] С е р р Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93.

В. И. Данилов.

ВЫЧЕТ целого числа a по модулю m — любое целое число b, сравнимое с a по модулю m (см. *Сравнение*). Пусть r — остаток от деления a на целое $m>0$, $0\leqslant r\leqslant m-1$, тогда В. b числа a по модулю m имеет вид $b=mq+r$, где q — некоторое целое число. В., соответствующий $q=0$, равен остатку r и наз. наименьшим неотрицательным вычетом числа a. Наименьший по абсолютной величине В. ρ наз. абсолютно наименьшим вычетом числа a. Если $r<m/2$, то $\rho=r$; если $r>m/2$, то $\rho=r-m$; наконец, если m четное и $r=m/2$, то за ρ можно принять любое из чисел $m/2$ и $-m/2$.

Система, состоящая из m целых чисел, каждое из к-рых является В. одного и только одного из чисел $0, 1, \ldots, m-1$, наз. полной системой вычетов по модулю m. Чаще всего в качестве полной системы В. употребляются наименьшие неотрицательные В. $0, 1, \ldots, m-1$ или же абсолютно наименьшие В.

Вычетом степени n по модулю m, $n\geqslant 2$ — целое, наз. всякое целое число a, взаимно простое с m, для к-рого сравнение

$$x^n \equiv a \pmod m$$

разрешимо. Если же данное сравнение не разрешимо, то a наз. невычетом степени n по модулю m. В частности, при $n=2$ вычеты или невычеты наз. квадратичными, при $n=3$ — кубическими, при $n=4$ — биквадратичными (см. также *Степенной вычет*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

ВЫЧЕТ аналитической функции $f(z)$ одного комплексного переменного в конечной изолированной особой точке a однозначного характера — коэффициент c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана функции $f(z)$ (см. *Лорана ряд*) в окрестности точки a, или равный ему интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

где γ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a. В. обозначается $\operatorname*{res}_a [f(z)]$ (либо Выч. $_a[f(z)]$).

Теория вычетов опирается на *Коши интегральную теорему*. Основной в теории В. является следующая теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитич. функция всюду в односвязной области G, кроме изолированных особых точек; тогда интеграл от $f(z)$ по любой простой замкнутой спрямляемой кривой γ, лежащей в области G и не проходящей через особые точки функции $f(z)$, вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{a_k} [f(z)],$$

где a_k, $k=1, \ldots, N$, — особые точки функции $f(z)$, попавшие внутрь γ.

Вычет функции в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ для функции $f(z)$, однозначной и аналитической в окрестности этой точки, определяется формулой

$$\operatorname*{res}_\infty [f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -c_{-1},$$

где γ^- — окружность достаточно большого радиуса, ориентированная по часовой стрелке, а c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки. Из теоремы о В. вытекает теорема о полной сумме вычетов: если $f(z)$ — однозначная аналитич. функция в расширенной комплексной плоскости, кроме конечного числа особых точек,

то сумма всех В. функции $f(z)$, включая В. в бесконечно удаленной точке, равна нулю.

Таким образом, вычисление интегралов от аналитич. функций по замкнутым кривым (контурных интегралов) сводится к вычислению В., к-рые находятся особенно просто в случае конечных полюсов. Пусть $a\neq\infty$ — полюс порядка m функции $f(z)$, тогда

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\right\}.$$

При $m=1$ (простой полюс) эта формула принимает вид

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)];$$

если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в окрестности точки a, причем для $\psi(z)$ точка a есть простой нуль, то

$$\operatorname*{res}_a\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Применение теоремы о В. к логарифмич. производной приводит к важной теореме о логарифмическом вычете: если функция $f(z)$ мероморфна в односвязной области G, а простая замкнутая кривая γ лежит в G и не проходит через нули и полюсы функции $f(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P,$$

где N — число нулей, P — число полюсов функции $f(z)$ внутри γ с учетом их кратностей. Выражение в левой части этой формулы наз. логарифмическим вычетом функции относительно кривой γ (см. также *Аргумента принцип*).

В. применяются к вычислению нек-рых определенных интегралов от действительных функций, таких, напр., как

$$J_1 = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt,$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)\,dx,$$

где $R(\sin t, \cos t)$—рациональная функция от $\sin t$, $\cos t$, непрерывная при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, а $f(z)$ - непрерывная функция при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, где $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z, и аналитическая при $\operatorname{Im} z>0$, кроме конечного числа особых точек. При этом J_1 подстановкой $e^{it}=z$ сводится к контурному интегралу

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz},$$

т. е. к вычислению В.;

$$J_2 = 2\pi i \sum\nolimits_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_a [f(z)],$$

если $f(z)z^{-r}\to 0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $r>1$;

$$J_3 = 2\pi i \sum\nolimits_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_a [e^{iz} f(z)],$$

если $f(z)$ удовлетворяет условиям *Жордана леммы*.

В. находят многочисленные и важные применения в вопросах аналитич. продолжения, разложения мероморфных функций на простейшие дроби, суммирования степенных рядов, асимптотич. оценок и во многих др. вопросах анализа и его приложений (см. [1] — [4]).

Теория В. одного переменного разработана в основном О. Коши (A. Cauchy) в 1825—29. Ряд результатов, относящихся к обобщениям теории В. и ее приложениям, был получен Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, теорема о сумме В. двоякопериодической функции), П. Лораном (P. Laurent), Ю. В. Сохоцким, Э. Линделёфом (E. Lindelöf) и др.

На римановой поверхности рассматриваются В. не аналитич. функций, а аналитических дифференциалов (см. [5]). Вычет аналитического дифференциала dZ в окрестности его изолированной особой точки определяется как коэффициент c_{-1} при z^{-1} в разложении Лорана функции $g(z)=dZ/dz$, где z — униформизирующий параметр в окрестности этой точки. При этом интеграл от dZ по любой замкнутой кривой на римановой поверхности выражается через В. дифференциала dZ и через его циклические периоды (интегралы от dZ по *каноническим разрезам*). На римановы поверхности распространяется теорема о полной сумме В.: сумма всех В. мероморфного дифференциала на компактной римановой поверхности равна нулю.

Теория вычетов аналитических функций многих комплексных переменных базируется на интегральных теоремах Стокса и Коши — Пуанкаре, позволяющих заменять интеграл от замкнутой формы по одному циклу интегралом от этой формы по другому циклу, гомологичному первому. Начало теории В. функции многих переменных положил А. Пуанкаре [6], к-рый в 1887 впервые обобщил интегральную теорему Коши и понятие В. на функции двух комплексных переменных, показав, в частности, что интеграл от рациональной функции двух комплексных переменных по двумерному циклу, не проходящему через особенности подинтегральной функции, сводится к периодам *абелевых интегралов*, и применил двойные В. для обоснования двумерного аналога *Лагранжа ряда*.

Ж. Лере (J. Leray, см. [7], а также [4], [8]) разработал общую теорию В. на комплексном аналитич. многообразии X. Теория вычетов Лере, в частности, описывает метод вычисления интегралов по нек-рым циклам на X от замкнутых внешних дифференциальных форм, имеющих особенности на аналитич. подмногообразиях. Вводится понятие *вычет-формы*, обобщающее понятие В. аналитич. функции одного переменного; получаемая при этом формула В. позволяет свести вычисление интеграла от формы ω, имеющей на комплексном аналитич. подмногообразии S полярную особенность 1-го порядка, по нек-рому циклу в $X\setminus S$ к вычислению интеграла на 1 меньшей размерности от вычет-формы $\operatorname{res}[\omega]$ по циклу на S. Для вычисления интегралов от замкнутых форм, имеющих на S произвольные особенности, важны понятие вычет-класса (см. *Вычет-форма*) и теорема Лере, согласно к-рой для любой замкнутой формы $\omega\in C^\infty(X\setminus S)$ найдется когомологичная ей форма ω_0, имеющая на S полярную особенность 1-го порядка. Для формы ω, имеющей особенность на нескольких подмногообразиях $(S_1\cup\ldots\cup S_m)$, используются кратные вычет-форма

$$\operatorname{res}^m[\omega]\in C^\infty(S_1\cap\ldots\cap S_m),$$

вычет-класс

$$\operatorname{Res}^m[\omega]\in H^*(S_1\cap\ldots\cap S_m)$$

и формула В.

$$\int_{\delta^m\gamma}\omega=(2\pi i)^m\int_\gamma \operatorname{Res}^m[\omega],$$

где δ^m — кратный оператор δ, а γ — цикл в $S_1\cap\ldots\cap S_m$.

Имеется другой подход к теории В. функций многих комплексных переменных — метод выделения базы гомологий, опирающийся на идею Э. Мартинелли (E. Martinelli) применения *Александера двойственности* (см. [9]). Пусть $f(z)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$, — голоморфная функция в области $G\subset\mathbb{C}^n$, а σ есть n-мерный цикл в G. Если $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_p\}$ — база n-мерных гомологий области G и

$$\sigma\sim\sum\nolimits_{\nu=1}^{p}k_\nu\sigma_\nu$$

— разложение σ по этой базе, то обобщение теоремы о В. имеет вид

$$\int_\sigma f(z)\,dz = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{p} k_\nu R_\nu,\quad dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

где

$$R_\nu = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma_\nu} f(z)\,dz$$

есть n-мерный аналог В. и наз. вычетом функции $f(z)$ относительно базисного цикла σ_ν. В отличие от случая одной переменной, значительную трудность представляет отыскание как базы гомологий $\{\sigma_\nu\}$, так и коэффициентов $\{k_\nu\}$ разложения σ по базе. В ряде случаев (напр., когда $G = \mathbb{C}^2 \setminus \{P(z_1, z_2) = 0\}$, где P — многочлен) эти задачи позволяет решить двойственность Александера и Понтрягина. При этом коэффициенты k_ν находятся как коэффициенты зацепления цикла σ с циклами на множестве $\mathbb{C}^n \setminus G$ (компактифицированном определенным образом), двойственными циклам σ_ν. Вычеты R_ν в нек-рых случаях находятся как соответствующие коэффициенты разложения Лорана функции $f(z)$.

Многомерные аналоги логарифмич. В. (см. [4], [12]) выражают число общих нулей (с учетом их кратностей) системы голоморфных функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ в области $D \subset\subset G \subset \mathbb{C}^n$ через интегралы:

$$N(f, D) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{\nu=1}^{n} \bar{f}_\nu df_\nu \wedge d\bar{f}_1 \wedge df_1 \wedge \ldots \text{[v]}$$

$$N(f, D) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\gamma \frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где γ - нек-рый цикл в $\partial D \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{f_j(z) = 0\}$. В. функций многих переменных нашли применения при изучении фейнмановских интегралов, в комбинаторном анализе (см. [11]) и в теории неявных функций (см. [12]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [3] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969; [5] Спрингер Д., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [6] Poincaré H., «Acta math.», 1887, t. 9, 321—380; [7] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., М., 1961; [8] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих переменных, М., 1962; [9] Южаков А. П., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1964, № 5 (42), с. 149—61; [10] Griffits P. A., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, p. 460—95; [11] Егорычев Г. П., Южаков А. П., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 5, 1049—60; [12] Южаков А. П., Элементы теории многомерных вычетов, Красноярск, 1975.

А. П. Южаков.

ВЫЧЕТ-ФОРМА, форма-вычет,— обобщение понятия *вычета* аналитич. функции одного комплексного переменного на случай многих переменных. Пусть X — комплексное аналитич. многообразие, S — его аналитич. подмногообразие комплексной коразмерности 1 и пусть $\omega(x)$ - замкнутая внешняя дифференциальная форма класса C^∞ на $X \setminus S$, имеющая на S полярную особенность 1-го порядка. Последнее означает, что для функции $s(x, y)$, голоморфной от x в окрестности U_y точки $y \in S$ и такой, что

$$S \cap U_y = \{x:\ s(x, y) = 0\},\quad ds \not\equiv 0 \text{ при } x = y,$$

форма $\omega(x) \cdot s(x, y)$ принадлежит классу $C^\infty(U_y)$. При этих условиях в окрестности U любой точки $y \in S$ существуют такие формы $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ класса C^∞, что

$$\omega(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y),$$

причем $\psi(x, y)|_{S \cap U_y}$ есть замкнутая форма класса C^∞, зависящая только от ω. Замкнутая форма на S, определяемая в окрестности каждой точки $y \in S$, сужением

$\psi(x, y)|_{S\cap U_y}$, наз. в ы ч е т-ф о р м о й формы ω и обозначается

$$\operatorname{res}[\omega] = \frac{s\omega}{ds}\Big|_S.$$

Если форма ω голоморфна, то и ее В.-ф. голоморфна. Напр., для $X=\mathbb{C}^n$, $S=\{x\in\mathbb{C}^n : s(x)=0\}$ и формы

$$\omega(x) = \frac{f(x)}{s(x)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где f, s — голоморфные функции в $\mathbb{C}^n$, $\operatorname{grad} s\neq 0$ на S, В.-ф. равна

$$\operatorname{res}[\omega] = \left[f(x) \Big/ \frac{\partial S}{\partial x_j} \right]\Big|_S dx_1 \wedge \ldots \wedge [dx_j] \wedge \ldots \wedge dx_n$$

в точках, где $dS/dx_j\neq 0$.

Для В.-ф. имеет место ф о р м у л а в ы ч е т а:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{res}[\omega],$$

где γ — произвольный цикл в S размерности, равной степени $\operatorname{res}[\omega]$, $\delta\gamma$ — цикл в $X\setminus S$ — граница нек-рой цепи в X, находящейся в общем положении с S и пересекающейся с S по γ.

Кратная В.-ф. $\operatorname{res}^m[\omega]$ определяется по индукции.

В ы ч е т-к л а с с (или к л а с с-в ы ч е т) замкнутой в $X\setminus S$ формы ω есть класс *когомологий* подмногообразия S, образованный В.-ф. форм класса C^∞ в $X\setminus S$, когомологичных ω и имеющих на S полярную особенность 1-го порядка. Вычет-класс формы ω обозначается $\operatorname{Res}[\omega]$.

$\ldots\wedge d\bar{f}_n\wedge df_n$,

Вычет-класс голоморфной формы может не содержать голоморфной формы, так что в общем случае нельзя ограничиться рассмотрением кольца голоморфных форм вместо кольца замкнутых форм. Однако это возможно, если X — *Штейна многообразие*. Вычет-класс $\operatorname{Res}[\omega]$ не зависит от выбора ω из одного и того же класса когомологий и осуществляет гомоморфизм группы классов когомологий многообразия $X\setminus S$ в группу классов когомологий многообразия S:

$$\operatorname{Res}\colon H^*(X\setminus S) \to H^*(S).$$

Как и для В.-ф., справедлива ф о р м у л а в ы ч е т а:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{Res}[\omega],$$

причем интеграл в правой части берется от любой формы из вычет-класса $\operatorname{Res}[\omega]$ и не зависит от ее выбора.

Лит. см. при ст. *Вычет* аналитической функции [7], [8], [4].

А. П. Южаков.

ВЫЧИСЛИМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, вычисление значений к-рой может быть проведено с помощью заранее заданной эффективной процедуры, или *алгоритма*. Характерная черта вычислительных процессов — вычисление искомых величин задач происходит последовательно из данных исходных величин по определенным, заранее заданным, правилам и инструкциям. На основании многочисленных примеров вычислительных процессов в математике оформилось интуитивное понятие вычислительной процедуры. В связи с общей программой обоснования математики в 20 в. возникла задача создания не интуитивного, а точного понятия алгоритма. Строгое определение В. ф., эффективных процедур и алгоритмов было дано в различных формах Д. Гильбертом (D. Hilbert), К. Гёделем (K. Gödel), А. Чёрчем (A. Church), С. Клини (S. Kleene), Э. Постом (E. Post), А. Тьюрингом (A. Turing) и А. А. Марковым.

Общая идея различных подходов к созданию строгих математич. определений рассматриваемых понятий такова: проводится детальный анализ уже известных или мыслимых вычислительных процессов, выявляются существенные особенности этих процессов, находятся подходящие математич. аналоги этих процессов и их особенностей. Реализация различных аспектов этой

идеи неоднозначна и приводит к разным вариантам математич. понятия алгоритма. Основными математич. моделями понятия алгоритма являются машины Тьюринга, частично рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова и др.

Машины Тьюринга. Алгоритмы, применяемые в математике, напоминают машину, работающую отдельными тактами и выдающую ответ через конечное число тактов. А. Тьюринг и Э. Пост описали понятия *вычислительных машин абстрактных*, на к-рых можно моделировать вычислительные процессы. Машина Тьюринга (иногда говорят машина Тьюринга — Поста) M состоит из:

конечного алфавита $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, где a_i произвольные символы; конечные упорядоченные последовательности символов алфавита α наз. словами в алфавите α; с помощью слов в алфавите α кодируются исходные данные задачи, промежуточные вычисления и получаемые ответы;

конечного списка $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ элементарных состояний, в к-рых машина M может находиться; при этом q_1 считается начальным состоянием, в к-ром находится M, когда начинает работу, а q_0 — конечным состоянием: если M приходит в состояние q_0, то она останавливает свою работу;

программы, составленной из отдельных команд T_{ij}, имеющих один из видов: $a_i q_j \to a_k D q_l$, где $0 \leqslant i,\ k \leqslant n,\ 0 < j \leqslant m,\ 0 \leqslant l \leqslant m$, D — один из символов движения Л, П или С.

Конфигурация машины M в данный момент времени кодируется словом вида $A a_i q_j B$, где A и B — нек-рые слова в алфавите α (вместо пустого слова A пишут a_0). Конфигурация машины M в следующий момент времени (после выполнения одного такта работы) также кодируется словом, к-рое зависит от команды T_{ij}:

если D = Л, то получается слово $A q_l a_k B$,

если D = С, то получается слово $A a_k q_l B$,

если D = П и $B = a_r B'$, то получается слово $A a_k a_r q_l B'$,

если D = П и B — пустое слово, то получается слово $A a_k a_0 q_l B$.

Работа машины M может быть описана следующим образом: кодируют исходные данные с помощью нек-рой начальной конфигурации (здесь $q_j = q_1$); согласно программе машины M получают следующую конфигурацию и т. д., если в какой-либо момент получают конфигурацию, содержащую конечное состояние q_0, то прекращают работу; заключительная конфигурация декодируется в ответ; если машина никогда не останавливается, то считают ответ в задаче неопределенным.

Всякая вычислительная процедура, к-рая может быть сведена к работе подходящей машины Тьюринга, является эффективной в интуитивном смысле. Обращение предыдущего высказывания получило название тезиса Тьюринга: всякая эффективная вычислительная процедура может быть реализована на соответствующей машине M. Этот тезис нельзя доказать, так как он объединяет два понятия — строгое математич. понятие машины Тьюринга и расплывчатое, интуитивное понятие эффективной процедуры. Если моделировать на машинах Тьюринга вычисление значений функции, области определения и значений к-рой суть множества натуральных чисел, то приходят к понятию вычислимой (на машинах Тьюринга) функции. См. также *Тьюринга машина*.

Частично рекурсивные функции. Все известные примеры алгоритмов можно свести к вопросу вычисления значений подходящей функции. Считая эту черту алгоритмов основной, А. Чёрч, К. Гёдель и С. Клини выделили широкий класс функций, названных частично рекурсивными. Пусть F — класс частичных функций, об-

ласти определения и значения к-рых суть множества натуральных чисел. На множестве F определяют следующие операции:

с у п е р п о з и ц и я ф у н к ц и й: если $f, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$, то говорят, что функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_n(x_1, \ldots, x_n))$$

получается из $f, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с помощью суперпозиции;

μ-о п е р а т о р: пусть $f_1, f_2 \in F$; говорят, что функция ψ получается из f_1 и f_2 с помощью μ-оператора, и записывают

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y [f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y)],$$

если $f_1(x_1, \ldots, x_n, z)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n, z)$ определены и неравны между собой при $z < y$, а

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ и } \psi(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

Ясно, что если эти операции применяются к функциям, значение к-рых мы умеем вычислять, то имеются алгоритмы, вычисляющие значения функций φ и ψ. Следующие функции считаются простейшими: $+$, $\times$, $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ и

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y, \\ 1, & \text{если } x \geqslant y. \end{cases}$$

Имеются легкие алгоритмы, вычисляющие значения простейших функций.

Функция f наз. ч а с т и ч н о р е к у р с и в н о й, если она за конечное число шагов может быть получена из простейших с помощью суперпозиции и μ-оператора. Всюду определенная частично рекурсивная функция наз. о б щ е р е к у р с и в н о й. Значение всякой частично рекурсивной функции может быть вычислено эффективно в интуитивном смысле. Обращение этого высказывания получило название т е з и с а Ч ё р ч а: всякая функция, значение к-рой может вычисляться эффективно, является частично рекурсивной. Таким образом, согласно тезису Чёрча, в ы ч и с л и м ы м и ф у н к ц и я м и являются частично рекурсивные функции.

Нормальные алгорифмы Маркова. Всякий конкретный алгоритм имеет дело с нек-рым алфавитом, и решение конкретной задачи сводится к переработке слов данного алфавита по нек-рым заранее заданным правилам. Такой подход к теории алгоритмов развит А. А. Марковым, предложившим концепцию нормального алгорифма в качестве математич. модели понятия вычислительной процедуры.

Нормальный алгорифм φ состоит из нек-рого алфавита $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и конечного упорядоченного списка правил вида $A \to B$, где A и B — нек-рые слова в алфавите α. Часть правил выделена и названа заключительными. Правило $A \to B$ применяется к слову P следующим образом: слово P представляется в виде QAR, где Q и R — слова в алфавите α, возможно пустые, и из всех таких представлений выбирается то, в к-ром слово Q имеет наименьшую длину; тогда результатом применения данного правила к слову P наз. слово QBR. Нормальный алгорифм φ применяется к слову P следующим образом: применяют к слову P первое правило из тех, к-рые к P можно применить, получают слово P_1; применяют к P_1 первое правило из тех, к-рые к P_1 можно применить, получают слово P_2 и т. д. В результате получается последовательность слов, к-рая обрывается после применения какого-либо заключительного правила.

Кодируя соответствующим образом информацию, можно использовать нормальные алгорифмы для решения разнообразных алгоритмич. задач. Всякая вычислительная процедура, промоделированная с помощью нормального алгорифма, является эффективной в интуитивном смысле. Обращение этого высказывания носит

название тезиса Маркова: всякая эффективная вычислительная процедура может быть промоделирована с помощью подходящего нормального алгорифма. Если моделировать с помощью нормальных алгорифмов вычисление значений функций из класса F, то приходят к еще одному понятию вычислимой функции. Были предложены и другие уточнения понятия алгоритмов (см. *Алгоритм*, а также *Нормальный алгорифм*).

Доказан следующий результат о равносильности различных концепций понятия алгоритма: классы функций, вычислимых на машинах Тьюринга, частично рекурсивных функций, вычислимых с помощью нормальных алгорифмов Маркова (аналогичные классы функций при других концепциях понятия алгоритма), совпадают. По мнению большинства современных математиков, этот класс функций адекватен классу интуитивно В. ф. и отождествляется с ним. Такое отождествление позволяет придать математичность алгоритмическим проблемам.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [3] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», 1937, v. 42, № 2, p. 230—65; [4] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [5] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42).

И. А. Лавров, А. Д. Тайманов.

ВЫЧИСЛИМОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО — действительное число, для к-рого существует *алгоритм*, находящий сколь угодно точные рациональные приближения к этому числу. Близкое значение имеет термин «конструктивное действительное число», обычно употребляемый при рассмотрении В. д. ч. в рамках той или иной системы конструктивной математики (см. *Конструктивный анализ*).

Б. А. Кушнер.

ВЫЧИСЛИМЫЙ ИНВАРИАНТ бинарного отношения между словами данного вида — *алгоритм* (в к.-л. точном смысле; напр. — как это сделано в [1] — *нормальный алгорифм*), применимый ко всякому слову рассматриваемого вида и перерабатывающий в одно и то же слово всякие два слова, связанные этим отношением.

А. А. Марков называет два слова неотделимыми по инвариантам данного отношения, если всякий В. и. этого отношения перерабатывает упомянутые слова в один и тот же результат. Заметим, что если к.-л. бинарное отношение разрешимо (см. *Разрешимое множество*), то легко построить такой его В. и., к-рый будет принимать различные значения на любых двух словах, не связанных этим отношением. Если же для данного отношения удастся построить слова, им не связанные, но по его инвариантам неотделимые, то тем самым будет доказана также и неразрешимость рассматриваемого отношения.

Многие известные *алгоритмические проблемы* алгебры и топологии могут быть формулированы как задачи исследования разрешимости определенных классов отношений эквивалентности, и отрицательные решения таких проблем обычно получаются в виде утверждений о наличии неразрешимых отношений среди определенного типа отношений эквивалентности. А. А. Марковым была осуществлена программа усиления в духе сделанного в предыдущем абзаце замечания известных отрицательных решений многих алгоритмич. проблем математики (проблемы тождества в теории групп, проблемы гомеоморфии, проблемы распознавания инвариантных свойств ассоциативных исчислений и групповых исчислений). Был построен пример перечислимого (см. *Перечислимое множество*), но не разрешимого отношения эквивалентности слов, у которого тем не менее любые два слова, не связанные этим отношением, отделимы по его инвариантам (см. [2]). Вопрос о возможности получения аналогичного результата для

классов отношений, рассмотренных А. А. Марковым, остается открытым (1977).

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 907—36; [2] Нагорный Н. М., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 1, М., 1973, с. 205—10.

Н. М. Нагорный.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА — раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Содержание термина «В. м.» нельзя считать установившимся, так как эта область математики интенсивно развивается в связи с быстро растущими применениями ЭВМ в новых направлениях. Часто термин «В. м.» понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математич. задач. Это толкование термина «В. м.» получило распространение на первоначальном этапе, когда использование ЭВМ предъявило новые требования к численным методам; основной задачей на этом этапе была разработка новых методов, «удобных» для ЭВМ. Ниже В. м. понимается в первом — широком смысле этого термина.

В В. м. можно выделить следующие три основных раздела. Первый связан с применением ЭВМ в различных областях научной и практич. деятельности и может быть охарактеризован как анализ матем. моделей. Второй — с разработкой методов и алгоритмов решения типовых математич. задач, возникающих при исследованиях математич. моделей. Третий раздел связан с вопросом об упрощении взаимоотношений человека с ЭВМ, включая теорию и практику *программирования* задач для ЭВМ, в том числе *автоматизацию программирования* задач для ЭВМ.

Анализ математич. моделей включает в себя изучение постановки задачи, выбор модели, анализ и обработку входной информации, численное решение математич. задач, возникающих при исследовании модели, анализ результатов вычислений и, наконец, вопросы, связанные с реализацией полученных результатов.

Задача выбора модели должна решаться с учетом следующего требования. Степень достоверности, с к-рой результаты анализа модели позволяют исследовать конкретное явление (или класс явлений), должна соответствовать точности исходной информации. При этом с появлением возможности получать более точную информацию обычно возникает необходимость совершенствования построенной модели, а в ряде случаев даже коренной ее замены. Для этих задач приобретает существенное значение обработка исходной информации, что в большинстве случаев требует привлечения методов математич. статистики.

Математич. модели сыграли важную роль в развитии естествознания; в настоящее время использование математич. моделей является существенным фактором в широком диапазоне человеческой деятельности (в том числе в вопросах планирования, управления, прогнозирования и т. д.).

Изучение реальных явлений на основе анализа построенных моделей, как правило, требует развития численных методов и привлечения ЭВМ. Таким образом, в В. м. важное место занимают численные методы решения поставленных математич. задач и в первую очередь типовых математич. задач (В. м. в узком смысле слова).

В качестве примера типовых математич. задач, часто встречающихся в приложениях, можно назвать задачи алгебры: здесь большое значение имеют численные методы решения систем линейных алгебраич. уравнений (в частности, больших систем), *обращение матриц*, нахождение собственных значений матриц (как нескольких первых значений, — *частичная проблема* собственных значений, так и нахождение всех собственных значений — *полная проблема собственных значений*). Другие примеры: *дифференцирование численное* и *интегрирование численное* функций одного или нескольких переменных; численные методы решения *дифферен-*

циальных уравнений обыкновенных, интегральных уравнений, а также изучение и сравнительный анализ численных методов различных типов, например *Адамса метод*, *Рунге—Кутта метод*. Значительное число исследований посвящено численным методам решения уравнений с частными производными (см. *Гиперболического типа уравнение*; численные методы решения, *Параболического типа уравнение*; численные методы решения, *Эллиптического типа уравнение*; численные методы решения). Здесь большое направление составляют «экономичные методы», т. е. методы, позволяющие получать результаты при относительно малом (экономном) числе операций.

Быстро развивающимся направлением В. м. являются численные методы оптимизации. Задача оптимизации состоит в изучении экстремальных (наибольших или наименьших) значений функционалов на множествах, как правило, весьма сложной структуры (см., напр., *Экстремальные задачи*; численные методы решения). В первую очередь следует упомянуть задачи *математического программирования* (в том числе линейного и динамического), к к-рым сводятся многие задачи экономики. К задачам оптимизации примыкают минимаксные задачи (и соответствующие численные методы), возникающие при решении задач исследования операций (см. *Исследование операций*) и теории игр (см. *Игр теория*). Особенно сложные задачи типа minmaxminmax возникают при решении многошаговых (динамически развивающихся) игр. Здесь даже математич. эксперимент (проигрывание вариантов поведения играющих) невозможен без использования мощных ЭВМ.

Применение ЭВМ к решению сложных задач, в особенности задач больших размеров, вызвало к жизни одно из главных направлений в теории численных методов — исследования устойчивости методов и алгоритмов к различного рода ошибкам (в том числе к ошибкам округления). См. *Устойчивость вычислительного алгоритма*, *Устойчивость вычислительных процессов*.

Обратные задачи, напр. задача определения элемента x из уравнения $Ax=b$ при известной информации об операторе A и элементе b, часто являются неустойчивыми (некорректно поставленными) задачами (малым погрешностям во входных данных могут соответствовать большие погрешности в x). Более того, обратные задачи часто имеют решение не для всех b, поэтому, задавая приближенное значение b, следует учитывать, что формально решение этой задачи может не существовать. Неустойчивые задачи потребовали специального определения понятия приближенных решений и развития соответствующих методов для их нахождения. К неустойчивым задачам относится широкий класс задач, связанных с проблемами автоматизации обработки результатов экспериментов (см. *Некорректные задачи*; численные методы решения).

В большинстве разделов В. м. важное место занимают вопросы *оптимизации методов* решения задач. Особенно это существенно для задач большого объема (напр., с большим числом переменных).

Применение ЭВМ непрерывно расширяет круг пользователей и поэтому возникает тенденция такой степени автоматизации, при к-рой становится менее существенным знакомство пользователей с численными методами. Это предъявляет новые требования к алгоритмам, их классификации и к стандартным программам решения типовых задач.

В настоящее время выделился ряд направлений прикладной науки, где современные темпы научно-технич. прогресса были бы немыслимы без развития численных методов и применения ЭВМ (см., напр., *Газовой динамики численные методы*).

Основной задачей теории программирования можно считать облегчение отношений человека с машиной, хо-

тя этот взгляд и конкретные направления исследований претерпевают радикальные изменения с развитием вычислительной техники. Смена ряда поколений вычислительных машин обусловила смену этапов в развитии программирования.

От составления программ на внутреннем языке машин программирование быстро перешло к составлению *стандартных программ* решения типовых задач и комплексов таких программ. При их употреблении для широкого класса задач отпадает необходимость в программировании метода решения; достаточно лишь ограничиться заданием исходной информации. Однако задание такой информации, а также написание нестандартных блоков все равно требуют существенного объема программирования на языке машины (см. *Машинно-ориентированный язык*).

Появление машин следующего поколения с бо́льшим быстродействием сопровождалось ростом числа задач, предъявляемых к решению; в результате этого возникло узкое место системы человек — машина: скорость программирования. Это вызвало к жизни новый этап программирования создание *алгоритмических языков* с трансляторами для перевода с алгоритмич. языка на внутренний язык машины. Вследствие большой близости алгоритмич. языков к общечеловеческому, их внедрение упростило программирование и существенно расширило круг пользователей.

Наряду с созданием универсальных алгоритмич. языков (алгол, фортран) был разработан ряд *проблемно-ориентированных языков* для определенного круга пользователей, напр. связанных с задачами обработки экономич. информации (кобол). Создание специализированных языков вызвано следующим: универсальные языки и трансляторы, предназначенные для решения широкого класса задач, иногда слабо учитывают специфику отдельных важных классов задач, что снижает эффективность использования всех возможностей машины.

При дальнейшем повышении скорости ЭВМ узким местом системы человек — машина стали устройства для ввода и вывода информации; их медленная работа сводила на нет высокопроизводительную работу центрального устройства. Необходимость преодоления этого противоречия явилась одной из причин создания систем одновременного решения на машине нескольких задач. Другой причиной было требование одновременной работы на машине большого коллектива пользователей (в частности, последнее особенно существенно при применении ЭВМ в автоматизированных системах управления — АСУ). Все это вместе с рядом других причин обусловило появление нового этапа программирования — *системного программирования*. Основной задачей системного программирования является создание операционных систем, управляющих работой машины, программным путем расширяющих возможности машины и предоставляющих пользователю дополнительное обслуживание, не предусмотренное аппаратурой: возможность ввода и вывода одновременно с решением задач, автоматизация редактирования выдачи, вывод графиков, работа с экраном, диалог с машиной, возможность одновременного решения на машине многих задач (система разделения времени).

Развитие применения ЭВМ характерно также организацией работы комплексов, включающих большое число машин, в том числе машин различных типов, вводные устройства, каналы связи между машинами и пользователем, а зачастую и физич. установки. Такие высокопроизводительные системы создаются, напр., для решения задач экономики и обработки физич. экспериментов, требующих ввода и обработки большого количества информации.

Задача развития вычислительных систем, в частности информационных систем и автоматизированных систем

управления, является одной из наиболее актуальных научных проблем. *А. Н. Тихонов.*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА АБСТРАКТНАЯ, абстрактная машина,— математическое понятие, к-рое описывает модель вычислительной машины, абстрагируясь от ограниченности емкости запоминающих устройств и других технич. параметров вычислительных машин. В отличие от последних, В. м. а. может вычислять функции, определенные на бесконечной области *конструктивных объектов* (напр., целых чисел, слов в конечном алфавите, конечных графов, бесконечных деревьев и т. д.). В. м. а. употребляется как понятие, уточняющее интуитивное понятие *алгоритма*, для исследования вопросов существования алгоритма (т. е. разрешимости или неразрешимости *алгоритмических проблем*), качества алгоритма (т. е. оценок сложности различных параметров алгоритма), формализации семантики *алгоритмических языков*, моделирования одних классов В. м. а. другими (напр., с целью так наз. «распараллеливания» алгоритмов).

В. м. а. можно разделить на классы по уровню абстракции, а также по типу обрабатываемой информации. Ниже перечислены основные классы В. м. а.

1) В. м. а., обрабатывающие слова в конечном алфавите и относящиеся к наиболее высокому уровню абстракции в связи с подчинением структуры В. м. а. специфич. запросам теории. Типичные представители — *Тьюринга машина*, машины Минского, *нормальные алгорифмы* Маркова, *Поста каноническая система*. В. м. а. часто употребляются для доказательства неразрешимости алгоритмич. проблем, а также для оценок сложности алгоритмов (см. *Алгоритма сложность* вычисления).

2) В. м. а., относящиеся к тому же уровню абстракции, что и В. м. а. из 1-го класса, но обрабатывающие матрицы, конечные графы, произвольные комплексы. Типичные представители — алгоритмы Колмогорова, автоматы Неймана — Чёрча, растущие автоматы. Если в алгоритмах Колмогорова преобразование информации производится локально, то в автоматах Неймана — Чёрча и растущих оно протекает параллельно. Построены универсальные В. м. а. с хорошими характеристиками, способные моделировать произвольные В. м. а. данного типа. Изучались вычисления с максимальным быстродействием (т. е. в реальное время) на В. м. а. из данного класса.

3) В. м. а., к-рые обрабатывают, чаще всего, слова или целые числа и относятся к низкому уровню абстракции. Их структуры сформировались под влиянием запросов практики и имеют много общего со структурами вычислительных машин. Типичные представители — так наз. операторные алгоритмы (см. [3]) и машины с произвольным доступом к памяти. Эти В. м. а. употребляются для оценки сложности алгоритмов, используемых на практике, и для моделирования двух типов В. м. а.

4) В. м. а., относящиеся к тому же уровню абстракции, что и В. м. а. из 3-го класса, но обрабатывающие произвольные графы (чаще всего бесконечные деревья). Эти В. м. а. образовались в результате развития В. м. а. из 3-го класса, направленного на приспособление к особенностям алгоритмич. языков. Такие В. м. а. используются для формализации семантики алгоритмич. языков, а также для доказательства правильности программ. Типичные представители — В. м. а., используемые для задания семантики языков *алгол-68* и *ПЛ/1*.

Лит.: [1] Барздинь Я. М., «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 3, с. 542—45; [2] Ван Вейнгаарден А. и др., Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—144; 1970, № 1, с. 13—160; [3] Ершов А. П., «Проблемы кибернетики», 1960, вып. 3, с. 5—48; [4] Колмо-

горов А. Н., Успенский В. А., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, № 4, с. 3—28; [5] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [6] Трахтенброт Б. А., Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., 1974; [7] Hartmanis T., «Math. Syst. Theory», 1971, v. 5, № 3, p. 232—45; [8] Wegner P., «Computing Surveys», 1972, v. 4, № 1, p. 5—63.

В. А. Непомнящий.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ — точно определенное указание действий над данными, позволяющее с помощью цифровой вычислительной машины дискретного действия преобразовать за конечное количество операций нек-рый массив данных (входные данные) в другой массив данных (выходные данные). В. а. реализуется в виде вычислительного процесса, т. е. в виде дискретно распределенной во времени конечной последовательности состояний реальной ЭВМ, имеющей, в отличие от абстрактной вычислительной машины, ограниченные скорость выполнения операций, разрядность чисел и объем памяти.

При заданных ЭВМ и В. а. вычислительный процесс является строго детерминированным, т. е. заданным входным данным отвечают вполне определенным образом: последовательность операций ЭВМ; последовательность состояний ЭВМ; выходные данные. В. а. является линейным, если последовательность операций ЭВМ не зависит от входных данных, и нелинейным — в противном случае.

Объектом операций ЭВМ являются данные, представляемые в виде машинных слов, интерпретируемых как машинные числа, машинные команды и т. п. Машинные числа обычно составляют конечное ограниченное множество M чисел, размещенных в машинном интервале $[-A, A]$ и записанных в машинной разрядной сетке при заданном основании a; $a \geqslant 2$ — нек-рое натуральное число, A — наибольшое машинное число (машинная бесконечность). Как следствие, машинные числа имеют ограничение по числу значащих цифр и по абсолютной величине. Конкретная ЭВМ может оперировать с различными множествами M, соответствующими различным основаниям, разрядным сеткам и машинным интервалам.

Машинная команда есть машинное слово, к-рое содержит информацию об операции, напр. арифметической, и ее оперантах (объектах, над к-рыми производится операция, и результате операции). Арифметич. операция над парой машинных чисел может вывести результат из совокупности M по двум причинам: вследствие превышения допустимого числа значащих цифр; вследствие превышения допустимой величины машинного числа. В первом случае применяется операция округления, к-рая возвращает результат действия в множество M, но делает само действие приближенным и приводит к потере точности. Второй случай приводит к аварийной остановке ЭВМ (АВОСТ, или «аварийный останов»).

Композиция арифметич. операции, примененной к паре машинных чисел, и операции округления называется квазиоперацией. Множество M вместе с определенной над ним совокупностью квазиопераций образует замкнутую систему N, однако, в отличие от поля действительных чисел, N не образует поля. Система N зависит от выбора ЭВМ.

Реальный В. а. складывается из двух частей:

а) абстрактного (или собственно) В. а., к-рый применяется к математич. объектам (элементам конечномерных векторных пространств, полей, алгебраич. систем, функциональных пространств и т. д.), не связан с конкретной ЭВМ и может записываться в общепринятых математич. терминах или на каком-либо алгоритмич. языке;

б) программы, т. е. совокупности машинных команд, описывающих В. а., к-рая организует реализацию вычислительного процесса в конкретной ЭВМ.

Первая часть В. а. является исходной и переходит во вторую часть с помощью различных методов программирования. В. а. содержит ряд управляющих параметров, к-рые остаются неопределенными в первой части и фиксируются в программе, полностью определяя вычислительный процесс, обеспечивая адаптацию его первой части к конкретной ЭВМ.

В. а. осуществляет переработку числовой и символьной информации и, как правило, связан с потерей информации и точности. Потеря точности является следствием ряда погрешностей, появляющихся на различных этапах вычислений: погрешности модели, аппроксимации, входных данных, округления. Погрешность модели является следствием приближенности математич. описания реального процесса. Погрешность входных данных зависит от ошибок наблюдения, измерения и т. п., но также может включать в себя и ошибку округления входной информации. Иногда погрешность модели и погрешность входных данных объединяют одним названием неустранимая погрешность. Погрешность аппроксимации возникает, если рассматривать абстрактный В. а. как нек-рую дискретную модель, к-рая, как правило, аппроксимирует континуальную модель. В нек-рых случаях абстрактный В. а. является самостоятельной дискретной моделью, к-рая не сопоставляется ни с какой другой моделью; в этом случае нет смысла говорить о погрешности аппроксимации. Погрешности округления могут встречаться только в реальном вычислительном процессе и зависят от выбора ЭВМ. При заданных входных данных и абстрактном В. а. промежуточные и выходные данные, получаемые в ЭВМ, зависят от выбора ЭВМ и режима ее работы (вычисления с одинарной и двойной точностью). Абстрактный В. а. допускает эквивалентные преобразования, к-рые при заданных входных данных могут менять промежуточные данные, но оставляют неизменным окончательный результат. В. а., соответствующий двум различным эквивалентным представлениям абстрактного В. а., может при фиксированной ЭВМ и входных данных приводить к различным окончательным результатам.

Помимо свойства точности, В. а. должен обладать свойством устойчивости. Устойчивость В. а. определяется как свойство В. а., позволяющее судить о скорости накопления суммарной вычислительной погрешности. Имеется градация устойчивости (соответственно неустойчивости), основанная на измерении исходной ошибки округления и суммарной вычислительной погрешности в различных нормах. В тех случаях, когда В. а. сводится к последовательности линейных рекуррентных соотношений, устойчивость В. а. определяется в терминах норм конечномерных матриц в конечномерных векторных пространствах. Свойство устойчивости определяется как структурой абстрактного В. а., так и влиянием ошибок округления. Так, устойчивость итерационного процесса $x^{n+1}=A_n x^n+b_n$, где матрица A_n также вычисляется, будет зависеть от влияния ошибок округления в коэффициентах матрицы на ее норму. Ошибки округления, входя в коэффициенты различных уравнений и операторов, вносят возмущения в математич. модель абстрактного В. а. и в этом смысле могут интерпретироваться так же, как и ошибки модели. Чем лучше свойства устойчивости абстрактного В. а., тем меньше, при заданном абстрактном В. а., результаты вычислений зависят от выбора ЭВМ и эквивалентных представлений абстрактного В. а.

Другим условием, особенно важным в массовых вычислениях, является экономичность В. а., измеряемая затратой машинного времени, необходимой для достижения заданной точности вычисления. Экономичные В. а. получили широкое распространение в задачах

математич. физики (см., напр., *дробных шагов метод*). Важной задачей теории В. а. является оптимизация В. а.

При построении В. а. характерна тенденция к контролю точности. Контроль точности может косвенно осуществляться за счет увеличения устойчивости и порядка аппроксимации В. а., изменения параметров В. а. (внутренняя сходимость), сравнения двух численных решений одной и той же задачи, соответствующих различным В. а., применения тестов и т. д. Прямой контроль точности осуществляется в том случае, когда удается получить *двусторонние оценки* (или, по крайней мере, односторонние оценки) результата вычислений. Теоретич. оценки такого рода не всегда возможны и эффективны, т. к. не всегда дают достаточно точные границы отклонения численного решения от точного. Получил распространение интервальный анализ, к-рый дает возможность в процессе вычислений строить доверительные границы для вычисляемых величин.

Различия в результатах абстрактного и реального В. а. определяются довольно сложными связями между их параметрами. Так, в абстрактном В. а. для сходящегося итерационного процесса точность ε, вообще говоря, тем больше, чем больше число итераций n. В случае реального В. а. эта ситуация может измениться вследствие влияния ошибок округления и, начиная с нек-рого момента, разность между n-й итерацией и точным решением может потерять тенденцию к убыванию.

Вообще говоря, абстрактный В. а. строится независимо от выбора конкретной ЭВМ и только косвенно учитывает ее конфигурацию своими свойствами аппроксимации и устойчивости. Так, для машин с большим быстродействием, но при малой оперативной памяти при решении дифференциальных уравнений с частными производными целесообразно применение экономичных абсолютно устойчивых схем высокой точности. В связи с появлением ЭВМ с параллельно действующими процессорами получили развитие параллельные алгоритмы и параллельное программирование. Сущность параллельного программирования заключается в разбиении перерабатываемых численных массивов на части (подмассивы), независимо перерабатываемые соответствующими процессорами; производится обмен информацией между подмассивами, причем время, затрачиваемое на этот обмен, существенно меньше, чем выигрыш времени, достигаемый в результате распараллеливания счета. Это делает эффективным применение ЭВМ с параллельным действием, позволяя достигать резкого увеличения быстродействия, особенно при решении больших задач.

Многообразие ЭВМ приводит к многообразию программ, реализующих один и тот же абстрактный В. а. Составление программ является трудоемким процессом, и поэтому особое значение приобретает проблема адаптации, т. е. быстрого и по возможности автоматич. преобразования (при заданном абстрактном В. а.) программы с одной ЭВМ на другую (см. *Программирование*).

Н. Н. Яненко.

ВЫЧИТАНИЕ — арифметическое действие, обратное *сложению*, т. е. нахождение одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому. При этом данная сумма наз. у м е н ь ш а е м ы м, данное слагаемое — в ы ч и т а е м ы м, искомое слагаемое — р а з н о с т ь ю. Обозначается знаком — (минус). Так, в выражении

$$a - b = c,$$

a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность.

ВЬЕТОРИСА ГОМОЛОГИИ — одна из первых теорий гомологий, определенных в неполиэдральном случае. Впервые их рассмотрел Л. Брауэр (L. Brouwer, 1911) (в плоском случае), а затем Л. Вьеторис (L. Vietoris, 1927) распространил его определение на произ-

вольные подмножества евклидова (и даже метрического) пространства.

Под (упорядоченным) n-мерным симплексом t^n подмножества A метрич. пространства X понимается упорядоченное подмножество $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ в A с условием $\operatorname{diam}\{e_0, \ldots, e_n\}<\varepsilon$. После этого определяются ε-цепи множества A по данной группе коэффициентов G как формальные конечные линейные комбинации $\Sigma g_i t_i$ ε-симплексов t_i^n с коэффициентами $g_i \in G$. Граница ε-симплекса $t^n(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ определяется так: $\Delta t^n = \sum_i (-1)^i (e_0, e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n)$; это — ε-цепь. По линейности определяются граница любой ε-цепи, и ε-циклы как ε-цепи с нулевой границей. ε-цепь x^n множества η-гомологична нулю в A (в записи $x^n \sim 0$), если $x^n = \Delta y^{n+1}$ для нек-рой η-цепи y^{n+1} в A.

Истинным циклом множества A наз. последовательность $z^n = \{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots\}$, в к-рой z_k^n есть ε_k-цикл в A, и $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Истинные циклы образуют группу $Z^n(A, G)$. Истинный цикл z гомологичен нулю в A, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что все z_k^n при $k \geqslant N$ ε-гомологичны нулю в A. Обозначим $\Delta^n(A, G)$ факторгруппу группы $Z^n(A, G)$ по подгруппе $H^n(A, G)$ циклов, гомологичных нулю.

Цикл z наз. сходящимся, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что любые два цикла z_k^n, z_m^n при $k, m \geqslant N$ ε-гомологичны между собою в A. Обозначим группу сходящихся циклов $Z_c^n(A, G)$, и пусть $\Delta_c^n(A, G) = Z_c^n(A, G)/H_c^n(A, G)$—соответствующая факторгруппа.

Цикл z имеет компактный носитель, если существует такой компакт $F \subseteq A$, что все вершины всех симплексов всех циклов z_k^n лежат в F. Аналогично изменим понятие гомологичности нулю цикла, потребовав наличие компакта, на к-ром лежат все осуществляющие гомологию цепи; определяем сходящийся цикл с компактным носителем. Обозначая индексом k внизу переход к циклам и гомологиям с компактными носителями, прихо-

дим к группам $\Delta_k^n(A, G)$ и $\Delta_{ck}^n(A, G)$. Вторая из них наз. группой гомологии Вьеториса. В случае конечного полиэдра группы В. г. совпадают со стандартными.

Определяются также относительные группы гомологий $\Delta^n(A, B, G)$. $\Delta_c^n(A, B, G)$, $\Delta_k^n(A, B, G)$, $\Delta_{ck}^n A, B, G)$ по модулю подмножества $B \subseteq A$. Именно, ε-циклом множества A по модулю B наз. любая ε-цепь x^n в A, для к-рой цепь Δx^n лежит в B. Аналогично, ε-цикл x^n по модулю B η-гомологичен по модулю B нулю в A, если $x^n = \Delta y^{n+1} + w^n$, где y^{n+1} и w^n суть η-цепи в A, и цепь w^n лежит в B.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

А. А. Мальцев.

ВЯЛЫЙ ПУЧОК — пучок множеств F над топологич. пространством X такой, что для любого открытого в X множества U отображение ограничения $F(X) \to F(U)$ сюръективно. Таковы, напр., пучок ростков всех (необязательно непрерывных) сечений *расслоенного пространства* с базой X, пучок ростков *дивизоров* и простой пучок над неприводимым алгебраич. многообразием F. Вялость пучка F является локальным свойством (то есть В. п. индуцирует на любом открытом множестве снова В. п.). Факторпучок В. п. по вялому подпучку является В. п. Прямой образ В. п. при непрерывном отображении есть В. п. Если X паракомпактно, то В. п. является *мягким пучком* (т. е. всякое сечение F над замкнутым множеством продолжимо на все пространство X).

Пусть

$$0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots$$

— точная последовательность В. п. абелевых групп. Тогда для любого семейства Ф носителей соответствующая последовательность сечений (носители к-рых принадлежат Ф)

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(F^0) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F^1) \longrightarrow \dots$$

является точной, т. е. $F \to \Gamma_\Phi(F)$ — точный слева функтор.

М. И. Войцеховский.

ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ — математическое выражение основных законов сохранения массы, импульса, энергии газа, описывающих состояние газа. Газ есть совокупность большого числа частиц (молекул, атомов, ионов), находящихся в непрерывном хаотич. движении. Учет взаимодействия и движения каждой частицы газа является чрезвычайно трудной проблемой, поэтому для описания состояния газа применяют статистический или континуальный подход. При таком подходе состояние ансамбля частиц газа характеризуется функцией распределения частиц, определенной или в 7-мерном фазовом пространстве x^i, u^i, t, $i=1, 2, 3$, или 4-мерном пространстве x^i, t, i 1, 2, 3. В первом случае рассматривается скалярная функция распределения

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = f(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3, t),$$

в к-рой величины x^i, u^i, t — непрерывно меняющиеся аргументы, x^i и t меняются в конечных или бесконечных интервалах, $-\infty < u^i < +\infty$. Сама функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Больцмана (см. *Больцмана уравнение*, *Кинетическое уравнение*) или же, в зависимости от физич. предпосылок, другим уравнениям (см. *Боголюбова цепочка уравнений*, *Власова кинетическое уравнение*). Во втором случае функция распределения, описывающая состояние газа, является векторной функцией

$$\boldsymbol{w} = \{\rho, \rho u^1, \rho u^2, \rho u^3 \rho E\},$$

зависящей от четырех аргументов x^1, x^2, x^3, t, непрерывно и независимо меняющихся в интервалах $-\infty < x^i < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$. В этом случае под частицей, строго говоря, следует понимать материальный элемент газа, занимающий бесконечно малый объем и обладающий определенной скоростью $\boldsymbol{u} = \{u^1, u^2, u^3\}$, к-рая является функцией аргументов x^1, x^2, x^3, t. Здесь $\rho = \rho(x^1, x^2, x^3, t)$ — плотность газа, т. е. масса газа, приходящаяся на единицу объема, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$ — полная энергия единицы массы газа, ε внутренняя энергия единицы массы газа.

В предположении локального термодинамич. равновесия из уравнений Больцмана следуют законы сохранения газовой динамики в интегральной форме. В инерциальной ортонормированной системе координат:

$$\oint_{l_m} w^i d\boldsymbol{x} + \oint_{l_m} \frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} dt\, d\boldsymbol{x} = \int_{L_{m+1}} F^i\, dt\, d\boldsymbol{x}, \qquad (1)$$

где L_{m+1} — объем пространства, ограниченный поверхностью l_m, $m \geqslant 1$. Соотношения (1) справедливы для произвольного объема L_{m+1} с границей l_m в $(m+1)$-мерном фазовом пространстве $\{\boldsymbol{x}, t\} = \{x^1, \ldots, x^m, t\}$. Величины w^i, $\Sigma^{i\alpha}$, F^i в трехмерном случае имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^1 \\ \rho u^2 \\ \rho u^3 \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^\alpha u^\alpha \end{pmatrix},$$

$$\sum^{i\alpha} = \sum^{1i\alpha} + \sum^{2i\alpha} + \sum^{3i\alpha}, \qquad (2)$$

$$\sum^{r i\alpha} = \left\| \overset{r}{\eta}_{kj} \right\|, \quad r = 1, 2, 3,$$

$$\overset{1}{\eta}_{kj} = w^k u^j,$$

$$\overset{2}{\eta}_{kj} = p\delta^{kj} + pu^j\delta^{4k},$$

$$\overset{3}{\eta}_{0j} = 0, \quad \overset{3}{\eta}_{1j} = -\sigma^{1j}, \quad \overset{3}{\eta}_{2j} = -\sigma^{2j}, \quad \overset{3}{\eta}_{3j} = -\sigma^{3j},$$

$$\overset{3}{\eta}_{4j} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x^j} - \sigma^j_\alpha u^\alpha,$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda d^\gamma_\gamma \delta^{\alpha\beta} + \mu d^{\alpha\beta},$$

$$d^{\alpha\beta} = d^\alpha_\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, 4; \ \alpha, \beta, \gamma, i, j = 1, 2, 3,$$

p давление газа, T — температура газа, $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, λ — коэффициент вязкости сжатия, μ — коэффициент вязкости сдвига, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. При записи формул употребляются правила записи формул тензорного анализа.

Для гладких течений получается система дифференциальных уравнений в дивергентной форме:

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} + \frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = F^i. \tag{3}$$

Эта система уравнений становится замкнутой после присоединения уравнений состояния. В случае термодинамич. равновесия уравнения состояния принимают вид:

$$p = p(\rho, T), \ \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \ \varkappa = \varkappa(\rho, T), \ \lambda = \lambda(\rho, T), \ \mu = \mu(\rho, T). \tag{4}$$

В неравновесном случае эти величины могут зависеть от градиентов функции течения.

Представление (2) имеет определенный физич. смысл: $\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}$ соответствует конвективным потокам массы, импульса, энергии, $\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}$ — шаровой недиссипативной части тензора напряжений, т. е. давлению, $\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha}$ — диссипативной части напряжений (вязкость, диффузия тепла) и используется в методе расщепления для получения эффективных схем интегрирования задач газовой динамики.

Для описания течения газа могут применяться различные системы координат. Кроме системы координат, неподвижно связанной с физич. пространством и являющейся галилеевой (эйлерова система координат), применяются различные подвижные, не обязательно декартовы и галилеевы системы координат. Очень распространенной является лагранжева система координат, связанная с частицами газа. В этой системе координат каждый материальный элемент имеет фиксированную координату. Эйлеров способ состоит в том, что в каждый момент времени t параметры состояния газа определяются как функции координат x^1, x^2, x^3 (эйлеровы координаты) точки в нек-рой неподвижной системе координат и вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x^1, x^2, x^3, t)$ означает скорость

частицы газа, находящейся в момент времени t в точке x^1, x^2, x^3. Способ Лагранжа предполагает задание скорости $\boldsymbol{u}$ и термодинамич. величин для каждой частицы как функций времени t. Зафиксировав частицу газа с помощью параметров q^1, q^2, q^3, получают параметры течения газа как функции от времени t и q^1, q^2, q^3 (лагранжевы координаты). Связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами имеет вид:

$$x^i = q^i + \int_0^t u^i(q^1, q^2, q^3, \tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3, t)$ — эйлеровы координаты частицы, находившейся в момент времени $t = 0$ в точке $x^i = q^i$. В случае одной пространственной переменной при условии, что газодинамич. переменные являются непрерывно дифференцируемыми функциями, уравнения вязкого теплопроводного газа имеют вид:
в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho u^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(E + \frac{p}{\rho}\right) - \mu u \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\right);$$

в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(p - \mu\rho \frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(p - \mu\rho \frac{\partial u}{\partial q}\right)\right] = \rho \frac{\partial}{\partial q}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial q}\right),$$

где $v = \frac{1}{\rho}$, $\frac{\partial x(q, t)}{\partial t} = u(q, t)$.

Для произвольной подвижной системы координат во многих случаях целесообразно одновременно преобразовывать компоненты скорости по тензорному закону. Если

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t) \tag{5}$$

есть преобразование пространственных координат, при к-ром временная координата не изменяется, то отображение (5) можно связать с самим течением газа и тогда оно будет определять поле локальных систем координат, зависящих от самого течения. Возможны и более общие преобразования, включающие изменение временной координаты.

Большую роль в теории Г. д. у. и в приложениях играет анализ малых параметров λ, μ, $\varkappa$, ω ($\omega = 1/c^2$ — коэффициент сжимаемости), входящих в уравнения (3). Если $\lambda = \mu = \varkappa = 0$, то (3) — уравнения идеальной газовой динамики; если $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varkappa = \omega = 0$, то (3) — уравнения Навье — Стокса несжимаемой жидкости. Эти уравнения не принадлежат к типу Коши — Ковалевской. В случае $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varkappa = 0$, $\omega = \text{const}$ получается система уравнений типа Коши — Ковалевской параболич. типа, не являющаяся сильно параболической. В теории турбулентности и неньютоновых жидкостей коэффициенты λ, μ могут зависеть от градиентов газодинамич. величин.

Определяющие соотношения (2) и, в частности, уравнения состояния (4) характеризуют тип системы Г. д. у. (3) и ряд ее качественных особенностей. Так, в случае идеального сжимаемого газа ($\lambda = \mu = \varkappa = 0$) система уравнений (3) является гиперболической, если

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \geqslant 0, \tag{6}$$

где энтропия S определяется соотношением (второй закон термодинамики)

$$T\,dS = p\,d\frac{1}{\rho} + d\varepsilon.$$

Условие (6) является локальным, зависит от решения и в нек-рых случаях может нарушаться. Так, в случае уравнения состояния Ван-дер-Ваальса условие (6) может нарушаться, уравнения становятся эллиптическими, решение — неустойчивым.

Законы сохранения (1) позволяют сформулировать обобщенное решение Г. д. у., к-рое уже не обязательно является непрерывным и не удовлетворяет дифференциальным Г. д. у. (3). Полная теория обобщенных решений Г. д. у. не создана, однако хорошо изучены простейшие обобщенные решения, как, напр., ударная волна, центрированная волна разрежения, контактное течение и т. д. Существует гипотеза, согласно к-рой обобщенное решение уравнений идеального сжимаемого газа есть предел соответствующего решения вязкого газа при $\lambda \to 0$ и $\mu \to 0$. Это утверждение строго доказано для одномерных ударных волн и в нек-рых частных случаях для уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Особый интерес представляют собой стационарные Г. д. у., к-рые в основном связаны с задачами стационарного обтекания тел в бесконечном пространстве или стационарных течений в каналах. В этом случае решение системы уравнений (3) не зависит от t, и система принимает вид:

$$\frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = F^i. \tag{7}$$

Для стационарной системы уравнений (7) ставится нек-рая краевая задача, к-рая может быть весьма сложной, а само уравнение (7) может быть как эллиптического, так и смешанного типов. Напр., для задачи обтекания идеального сжимаемого газа в предположении потенциальности течения получается следующее уравнение в двумерном случае:

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2} = 0, \tag{8}$$

где $u^1 = \partial\varphi/\partial x^1$, $u^2 = \partial\varphi/\partial x^2$, φ — потенциал скорости, квадрат скорости звука c^2 может быть определен из интеграла Бернулли:

$$\frac{1}{2}\left[(u^1)^2 + (u^2)^2\right] + \int c^2(\rho)\, d\ln\rho = \text{const}.$$

Для уравнения (8) может быть поставлена задача обтекания данного контура l:

$$u^1(\infty) = U_0^1, \quad u^2(\infty) = U_0^2, \quad u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

где u_n — нормальная составляющая вектора скорости по нормали к контуру l. В случае $(u^1)^2 + (u^2)^2 - c^2 > 0$ уравнение (8) имеет гиперболич. тип, в случае $(u^1)^2 + (u^2)^2 - c^2 < 0$ — эллиптич. тип. Возможен переход от эллиптич. типа к гиперболическому (трансзвуковой поток). Можно показать, что краевая задача в случае трансзвукового обтекания является некорректной, так как сколь угодно малое изменение контура может сделать краевую задачу неразрешимой в классе непрерывных функций.

Большой интерес представляют задачи газодинамич. неустойчивости и турбулентности, к-рые описываются, как правило, в рамках теории несамосопряженных уравнений (уравнение Орра — Зоммерфельда, уравнение Рейнольдса). В связи с практич. приложениями приобрели большое значение Г. д. у., описывающие движение более сложных сред (многофазные среды, неньютоновы жидкости, магнитная гидродинамика). Большинство уравнений математич. физики представляют собой результат линеаризации Г. д. у. О численном

решении задач газовой динамики см. ст. *Газовой динамики численные методы*.

Лит.: [1] Серрин Дж., Математические основы классической механики жидкости, пер. с англ., М., 1963; [2] Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. 1—2, М., 1970; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [4] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1963; [5] Брановер Г. Г., Цинобер А. М., Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, М., 1970; [6] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ — методы решения задач газовой динамики на основе вычислительных алгоритмов. Рассмотрим основные аспекты теории численных методов решения задач газовой динамики, записав *газовой динамики уравнения* в виде законов сохранения в инерциальной ортонормированной системе координат:

$$\frac{\partial w^i}{\partial t}+\frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}=F^i.$$

Здесь

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} w^0\\ w^1\\ w^2\\ w^3\\ w^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho\\ \rho u^1\\ \rho u^2\\ \rho u^3\\ \rho E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 0\\ F^1\\ F^2\\ F^3\\ F^\alpha u^\alpha\end{pmatrix},$$

$$\sum^{i\alpha}=\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}+\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}+\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha},$$

$$\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{pmatrix} \rho u^1 & \rho u^2 & \rho u^3\\ \rho u^1u^1 & \rho u^1u^2 & \rho u^1u^3\\ \rho u^2u^1 & \rho u^2u^2 & \rho u^2u^3\\ \rho u^3u^1 & \rho u^3u^2 & \rho u^3u^3\\ \rho E u^1 & \rho E u^2 & \rho E u^3\end{pmatrix},$$

$$\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\\ pu^1 & pu^2 & pu^3\end{pmatrix},$$

$$\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -\sigma^{11} & -\sigma^{12} & -\sigma^{13}\\ -\sigma^{21} & -\sigma^{22} & -\sigma^{23}\\ -\sigma^{31} & -\sigma^{32} & -\sigma^{33}\\ -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^1}-\sigma^1_\alpha u^\alpha & -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^2}-\sigma^2_\alpha u^\alpha & -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^3}-\sigma^3_\alpha u^\alpha\end{pmatrix},$$

$$\sigma^{\beta k}=\frac{1}{2}\lambda d^\gamma_\gamma\delta^{\beta k}+\mu d^{\beta k},$$

$$d^{\beta k}=d^\beta_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta}\right),$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$m=1$ — одномерный случай, $m=2$ — двумерный случай, $m=3$ — трехмерный случай, ρ — плотность газа, p — давление газа, $\boldsymbol{u}=\{u^1,\ u^2,\ u^3\}$ — скорость газа, T — температура газа, $E=\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ — полная энергия массы газа, ε — удельная внутренняя энергия, λ — коэффициент вязкости сжатия, μ — коэффициент вязкости сдвига, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $\delta^{\beta k}$ — символ Кронекера.

Следует различать два основных класса задач газовой динамики:

задача Коши для ограниченной или бесконечной области (нестационарные задачи газовой динамики);

стационарные краевые задачи газовой динамики для конечной или бесконечной области.

В свою очередь эти задачи могут подразделяться на ряд классов в зависимости от физич. свойств течения газа. По этому принципу можно различать:

течения идеального газа ($\lambda=\mu-\varkappa=0$);

течения вязкого несжимаемого газа ($\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\varkappa=0$, $\omega=0$, ω – коэффициент сжимаемости, $\omega=1/c^2$, c – скорость звука), описываемые уравнениями Навье – Стокса;

течения вязкого сжимаемого теплопроводящего газа ($\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\varkappa\neq 0$, $\omega\neq 0$).

Численные методы решения задач газовой динамики развивались исторически почти независимо по указанным классам задач. Ныне создано большое количество разностных схем различного порядка аппроксимации. Наметились общие принципы построения численных методов, приемлемые для всех задач газовой динамики в целом, хотя и не доказанные математически строго. Эти принципы заключаются в следующем.

1) Представления обобщенного решения уравнений идеального газа как предела соответствующих решений с физическими ($\sum^{3}{}^{i\alpha}\neq 0$) или искусственными диссипативными членами при стремлении последних к нулю. Искусственные диссипативные члены могут вводиться непосредственно в уравнения газовой динамики или же неявно определяться самой структурой разностной схемы (аппроксимационная вязкость).

2) Расщепления (декомпозиции) интегральных законов сохранения и самих дифференциальных уравнений геометрически, аналитически и по физич. процессам (метод слабой аппроксимации, см. *Дробных шагов метод*).

3) Представления стационарного решения как предела решений нестационарных задач (метод установления). При этом в качестве вспомогательных нестационарных задач используются уравнения как гиперболического, так и параболического типов.

4) Аппроксимация уравнений не типа Коши — Ковалевской уравнениями типа Коши — Ковалевской при стремлении соответствующего малого параметра к нулю (уравнения Навье — Стокса, уравнения фильтрации).

5) Построение подвижных разностных сеток как регулярного, так и нерегулярного типов.

6) Разделение в разностной схеме задач аппроксимации во внутренних регулярных и граничных точках.

7) Представление сложной системы линейных или нелинейных алгебраич. уравнений в виде рекуррентных соотношений (метод приближенной или точной факторизации).

8) Метод продолжения краевой задачи за границу и включения ее в краевую задачу с простой областью (метод фиктивных областей).

Совокупность этих представлений и методов позволяет в конечном итоге свести алгоритм решения сложных задач газовой динамики к алгоритмам решений простых задач стандартной структуры (модульный анализ алгоритмов). Такой подход пока строго не обоснован, однако практически он себя оправдал и находит все большее распространение.

Численные методы задач газовой динамики можно разделить на два больших класса: методы с явным выделением особенностей (ударные волны, контактные границы, центрированные волны разрежения) и так наз. методы сквозного счета, в к-рых особенности явно не выделяются.

Методы 1-го класса основаны на представлении обобщенного решения уравнений газовой динамики как совокупности классич. решений, определенных в некоторых областях, покрывающих фазовое пространство

$\{x^1, x^2, x^3, t\}$ и примыкающих друг к другу через общие границы (линии разрывов) с соблюдением условий примыкания (условия динамич. совместности). В каждой области можно применять разностную схему, пригодную для классич. решений, а условия примыкания должны разрешаться с помощью системы, вообще говоря, нелинейных алгебраич. уравнений. Одним из наиболее распространенных методов дискретного представления классич. решений является метод характеристик. Этот метод используется только для решения задач газовой динамики, описываемых гиперболич. уравнениями, и основан он на свойстве гиперболич. системы уравнений иметь, напр., в случае двух неизвестных функций и двух независимых переменных семейство характеристик, к-рые образуют характеристич. сетку, строящуюся в процессе счета. Метод характеристик появился в газовой динамике сравнительно давно и с успехом применялся для расчета одномерных нестационарных течений с небольшим количеством особенностей, а также расчета двумерных стационарных течений в области гиперболичности уравнений. В расчетах используются также и модификации метода характеристик, в к-рых расчет ведется по слоям, ограниченным фиксированными линиями. В случае двух независимых переменных (одномерные нестационарные задачи или двумерные стационарные задачи, сверхзвуковое обтекание) метод характеристик дает возможность избежать интерполяций и тем самым эффектов сглаживания и аппроксимационной вязкости. Он позволяет точно определять место возникновения ударных волн внутри поля течения как результат пересечения характеристик одного семейства. При большом количестве неизвестных и независимых переменных начинают появляться недостатки этого метода: возникает аппроксимационная вязкость, при наличии большого числа особенностей алгоритм становится логически сложным. Существенным недостатком метода характеристик является также ограничение на шаг сетки, связанное с критерием устойчивости Куранта, и нестрогое выполнение законов сохранения. Поэтому методом характеристик целесообразно рассчитывать задачи, в к-рых число разрывов невелико. Для метода характеристик доказана сходимость его решения к решению исходной дифференциальной задачи в случае достаточно гладких течений. С развитием ЭВМ, способных решать сложные логические задачи, метод характеристик будет использоваться более эффективно.

Наряду с методом характеристик для указанных задач газовой динамики широко используется метод интегральных соотношений, применимый к уравнениям различных типов. Метод интегральных соотношений строится на основе законов сохранения и сводится в конечном итоге к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основой для построения разностных схем задач газовой динамики является аппроксимация законов сохранения на заданной подвижной или неподвижной сетке, к-рая приводит к сложной системе нелинейных соотношений явного (явные разностные схемы) или неявного (неявные разностные схемы) типа (см. *Гиперболического типа уравнение*; численные методы решения).

Так, для уравнений одномерной газовой динамики в лагранжевых координатах можно построить общую разностную схему в виде:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1} - \boldsymbol{w}_j^n}{\tau} + \frac{\sum_{j+1/2}^{*} - \sum_{j-1/2}^{*}}{h} = 0, \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{w}_j^n = \boldsymbol{w}(x_j, t_n) = \boldsymbol{w}(jh, n\tau)$. Для замыкания соотношений (*) следует связать величины $\sum_{j+1/2}^{*}$, $\sum_{j-1/2}^{*}$ с величинами $\boldsymbol{w}_j^n$, $\boldsymbol{w}_j^{n+1}$. Это делается различными способами, к-рые приводят или к явным разностным схемам,

если $\sum^*_{j+1/2}$, $\sum^*_{j-1/2}$ выражены через w^n_j, или к неявным разностным схемам, если $\sum^*_{j+1/2}$, $\sum^*_{j-1/2}$ выражены через w^n_j, w^{n+1}_j, и нелинейным соотношениям, если применяется один целый шаг, и линейным, если применяется два или несколько дробных шагов (метод предикатор-корректор).

Решение получающейся при этом системы уравнений может быть сильно упрощено, если применить методы расщепления либо аналитические (метод предикатор-корректор), либо по физич. процессам, либо геометрические. Последние применяются при сведении многомерных задач к задачам меньшей размерности (метод дробных шагов или метод расщепления). Метод расщепления позволяет получить экономичные абсолютно аппроксимирующие схемы, в к-рых число операций на вычисление искомых функций в одной точке не возрастает с числом точек (см. *Разностная схема*). Одной из модификаций метода расщепления является метод «частиц в ячейках», в к-ром расщепление не связано с понижением размерности операторов.

Указанная общая методика приводит к разностным схемам сквозного счета, как в случае идеального газа ($\sum^3 l^\alpha = 0$), так и в случае диссипативного процесса ($\sum^3 l^\alpha \neq 0$). Разностные схемы сквозного счета, вводя аппроксимационную вязкость, сглаживают особенности в переходных областях ширины $0\ (h)$ и преобразуют ударные волны в ударные переходы, контактные разрывы в контактные полосы. Аппроксимационная вязкость разностных схем объединяет в себе диссипативные свойства уравнений газовой динамики и диссипативные свойства самой разностной схемы. Структура аппроксимационной вязкости определяется дифференциальным приближением схем, к-рое отличается от исходной системы уравнений членами порядка $O(\tau^\gamma)$, где γ — порядок аппроксимации схемы. Во многих случаях представляется важным насколько разностная схема и ее дифференциальное приближение сохраняют групповые свойства исходной системы дифференциальных уравнений. Сохранение разностной схемой групповых свойств имеет большое значение в практич. счете, особенно в задачах газовой динамики, где, напр., неинвариантность первого дифференциального приближения относительно преобразования Галилея приводит к неприятным счетным эффектам (неустойчивость, немонотонность профилей и т. д.).

Известные разностные схемы сквозного счета имеют на гладких решениях локальную точность, как правило, не выше 3-го порядка и глобальную точность не выше 1-го порядка (учитывая невысокую точность разностной схемы вблизи особенностей). Разностные схемы для уравнений газовой динамики должны удовлетворять, кроме независимых требований аппроксимации и устойчивости, еще ряду практически необходимых требований — дивергентности, экономичности, полной консервативности и т. д. Для многомерных задач строить экономичные разностные схемы позволяет идея расщепления. Дивергентность или консервативность разностной схемы означает выполнение в разностных уравнениях разностных аналогов основных законов сохранения (массы, импульса, полной энергии). Свойство полной консервативности требует выполнения разностных аналогов законов сохранения не только массы, импульса и полной энергии, но и различных видов энергии (кинетической, потенциальной, магнитной).

Рассмотрим несколько конкретных разностных схем вида (*). Полагая в формуле (*)

$$\sum^*_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(f^n_{j+1} + f^n_j\right) - \frac{h}{2\tau}\left(w^n_{j+1} - w^n_j\right),$$

получим явную разностную схему 1-го порядка аппроксимации:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1}-\boldsymbol{w}_j^n}{\tau}+\frac{\boldsymbol{f}_{j+1}^n-\boldsymbol{f}_{j-1}^n}{2h}=\frac{h^2}{2\tau}\frac{\boldsymbol{w}_{j+1}^n-2\boldsymbol{w}_j^n+\boldsymbol{w}_{j-1}^n}{h^2}.$$

Здесь

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} p \\ -u \\ up \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{f}_j^n=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}_j^n)$. Указанная схема является условно аппроксимирующей при $\tau/h=\text{const}$ (при $\tau/h^2=\text{const}$ схема аппроксимирует систему уравнений $\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}=\frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x^2}$), дивергентной и условно устойчивой. Условие устойчивости имеет вид: $c\tau/h\leqslant 1$, где c — скорость звука.

Полагая в формуле (*)

$$\sum\nolimits_{j+1/2}^{*}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}_{j+1}^n+\boldsymbol{f}_j^n\right)-\frac{\tau}{2h}A_{j+1/2}^2\left(\boldsymbol{w}_{j+1}^n-\boldsymbol{w}_j^n\right),$$

где

$$A_{j+1/2}^2=A^2\left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{w}_{j+1}^n+\boldsymbol{w}_j^n\right)\right], \quad A=\frac{df}{d\boldsymbol{w}},$$

получим абсолютно аппроксимирующую явную разностную схему 2-го порядка аппроксимации:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1}-\boldsymbol{w}_j^n}{\tau}+\frac{\boldsymbol{f}_{j+1}^n-\boldsymbol{f}_{j-1}^n}{2h}=$$

$$-\frac{\tau}{2h^2}\left[A_{j+1/2}^2\left(\boldsymbol{w}_{j+1}^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)-A_{j-1/2}^2\left(\boldsymbol{w}_j^n-\boldsymbol{w}_{j-1}^n\right)\right].$$

Это схема — дивергентная и устойчивая при условии $\frac{c\tau}{h}\leqslant 1$.

Разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\alpha\frac{p_{j+1/2}^{n+1}-p_{j-1/2}^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h}=0,$$

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}+\alpha\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^n}{\tau}+\left[\alpha p_{j+1/2}^{n+1}+(1-\alpha)p_{j+1/2}^n\right]\times$$

$$\times\left[\alpha\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}\right]=0$$

является явной при $\alpha=0$, неявной при $\alpha\neq 0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$; при $\alpha=1/2$ имеет 2-й порядок аппроксимации, при $\alpha\neq 1/2$ 1-й порядок аппроксимации; при $\alpha=1/2$ схема полностью консервативная.

Разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1/2}-u_j^{n-1/2}}{\tau}+\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h}=0,$$

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n+1/2}-u_j^{n+1/2}}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^n}{\tau}+\frac{\bar{p}_{j+1/2}^{n+1}+\bar{p}_{j+1/2}^n}{2}\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}=0$$

имеет 2-й порядок аппроксимации, неявная, абсолютно аппроксимирующая и недивергентная. Здесь

$$\boldsymbol{p}_{j+1/2}^n=p_{j+1/2}^n+\omega_{j+1/2}^n,\ \varepsilon_{j+1/2}^n=\varepsilon\left(p_{j+1/2}^n,\ v_{j+1/2}^n\right),$$

$$\omega_{j+1/2}^n=-\mu_0 h^2\frac{1}{v_{j+1/2}^n}\frac{\left|u_{j+1}^{n-1/2}-u_j^{n-1/2}\right|}{h}\frac{u_{j+1}^{n-1/2}-u_j^{n-1/2}}{h},$$

$$\mu_0=\text{const}.$$

Успех разностных схем сквозного счета связан с тем обстоятельством, что, хотя аппроксимационная вяз-

кость схемы определяет структуру разностного ударного перехода, отличную от физического ударного перехода, консервативная аппроксимация сохраняет скорость ударной волны и воспроизводит условия динамич. совместности.

Однако эти хорошие качества разностных схем сквозного счета теряют свое значение в случаях, когда важно точно передать структуру ударного перехода (задачи радиационной газовой динамики), структуру контактной полосы или пограничного слоя. В случае контактного разрыва хорошая аппроксимация в рамках разностной схемы сквозного счета становится невозможной не только из-за сильного расширения контактной полосы, но и в результате развития неустойчивости Гельмгольца и Тейлора. В этом случае с успехом применяется схема метода частиц в ячейке, к-рая позволяет передать сильные искажения границы вследствие неустойчивости.

В задачах обтекания вязким газом при достаточно больших числах Рейнольдса эффект аппроксимационной вязкости превосходит эффект физич. вязкости, если разностная сетка недостаточно детальна. Для уменьшения эффекта аппроксимационной вязкости необходимо сильное измельчение сетки вблизи обтекаемого тела. Практически в этом случае отходят от единой трактовки течения, разбивая задачу интегрирования на две: задачу обтекания тела идеальным газом, в к-рой, в частности, определяется скорость u_l потока на границе l тела; задачу расчета вязкого течения вблизи тела, где градиенты величин велики (так наз. пограничный слой), с краевыми условиями на бесконечности, где задаются значения скорости $u_\infty - u_l$. Постановка задачи в рамках теории пограничного слоя является менее строгой, чем интегрирование уравнений Навье — Стокса; однако она является наиболее употребительной в инженерных расчетах при больших числах Рейнольдса.

Особо важный класс задач газовой динамики составляют задачи гидродинамич. неустойчивости и турбулентности. В этом случае необходимо решать задачи на собственные значения для уравнений гидродинамики вязкой жидкости в вариациях (уравнения Орра — Зоммерфельда) и строить сложные численные модели для описания нелинейной неустойчивости и турбулентности. Эти задачи принадлежат к классу наиболее трудных задач вычислительной математики и требуют разработки новых моделей и мощных ЭВМ.

Лит.: [1] Рихтмайер Р. Д., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, М., пер. с англ., 1972; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., 1973; [3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений ..., М., 1968; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Жуков А. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1960, т. 58, [6] Харлоу Ф. Х., в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, М., 1967, 316—42; [7] Дородницын А. А., в кн.: Труды 3 Всесоюзного матем. съезда, т. 3, М., 1958, 447—53; [8] Белоцерковский О. М., в сб.: Численные методы решения задач механики сплошной среды, М., 1969, 101—213; [9] Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И., в сб.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1970, т. 1, 40—62; [10] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967; [11] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., 1975; [12] Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 6, 1020—1050.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГАЗОВЫХ СТРУЙ ТЕОРИЯ — раздел газовой динамики, в к-ром исследуются течения газа в предположении, что газ частично обтекает встречаемое на пути своего распространения препятствие и стекает с него, образуя за препятствием застойную область. Решение задач о струйном течении газа достигается в предположении, что газ баротропный и движение его плоскопараллельное, потенциальное и установившееся. В этих

предположениях выводится из уравнений гидродинамики следующая основная формула:

$$d(x+iy)=\frac{e^{i\theta}}{1-\frac{|v|^2}{2\alpha\tau}}\left(d\varphi+i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right), \qquad (1)$$

в к-рой φ и ψ — соответственно потенциал скоростей и функция тока, ρ — плотность газа в произвольной точке, ρ_0 — плотность газа в точке нулевой скорости газа. Для адиабатич. движений постоянная α есть квадрат скорости звука в точке нулевой скорости газа, поделенный на $\gamma-1$ (γ — показатель адиабаты). Для решения задач Г. с. т. целесообразно рассматривать искомые функции не в зависимости от переменных x, y — координат в плоскости потока, а как функции переменных Чаплыгина: $\tau=|v|^2/2\alpha$ и угла θ наклона вектора скорости v к оси Ox. При таком выборе независимых переменных уравнение (1) приводит к системе двух уравнений с частными производными

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\beta=\frac{1}{\gamma-1},$$

к к-рой надо присоединить интеграл Бернулли

$$\rho=\rho_0(1-\tau)^{\beta}.$$

Исключение функции $\varphi(\theta,\tau)$ приводит к уравнению для функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \qquad (2)$$

Это — уравнение эллиптич. типа для дозвуковых течений и гиперболич. типа для сверхзвуковых течений. Решение уравнения (2) может быть получено для ряда препятствий, составленных из отрезков прямых линий; вдоль каждого такого отрезка переменное θ имеет соответствующее постоянное значение. Вдоль линий тока, срывающихся с концов отрезков и являющихся границей, отделяющей движущийся газ от спокойного газа в застойной области, переменное τ имеет постоянное значение. Функция тока $\psi(\theta,\tau)=\text{const}$ в точках границ $\theta=\text{const}$ и $\tau=\text{const}$. На плоскости переменных θ, τ образуется область, ограниченная отрезками прямых линий, параллельных осям координат; вдоль каждого такого отрезка функция тока имеет постоянное значение. Расположение этих отрезков и постоянные значения функции $\psi(\theta,\tau)$ на них зависят от вида и положения препятствия на плоскости течения газа. В определенном круге задач функция $\psi(\theta,\tau)$ может быть получена из уравнения (2) методом разделения переменных. Напр., если поток газа дебита Q и конечной ширины набегает на прямолинейную пластинку, поставленную перпендикулярно к скорости газа в удаленных частях потока, то функция $\psi(\theta,\tau)$ определяется рядом:

$$\frac{\pi\psi}{2Q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n\frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)}\sin 2n\theta\sin^2\mu n, \qquad (3)$$

где τ_0 — значение переменной τ на граничной линии тока, μ — угол скорости потока с осью Ox далеко за пластинкой. Угол μ может быть найден через длину, а сила давления потока на пластинку — с помощью формулы (1).

Функция $y_n(\tau)$ получается при разделении переменных в уравнении (2) и является интегралом гипергеометрич. уравнения:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2}+[(2n+1)+(\beta-2n-1)\tau]\frac{dy_n}{d\tau}+$$
$$+\beta n(2n+1)y_n=0,$$

голоморфным около точки $\tau=0$.

Функция $\psi(\theta, \tau)$ для газа, вытекающего из отверстия бесконечно широкого сосуда, определяется рядом

$$\frac{\pi\psi}{Q} = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)} \sin 2n\theta. \qquad (4)$$

Сходимость рядов вида (3) и (4) была установлена С. А. Чаплыгиным (см. [1]) для дозвуковых течений, т. е. при $\tau < 1/(2\beta+1)$.

Ряды, подобные рядам (3) и (4) для функции $\psi(\theta, \tau)$, могут быть составлены, если в потоке есть лишь одна характерная для него скорость, отличная от нуля. Если же имеются две или несколько характерных скоростей, как, напр., в задаче о вытекании газа из отверстия в поперечной стенке сосуда, ограниченного двумя бесконечными полупрямыми, то решение выражается с помощью определенных интегралов сложной структуры, содержащих θ и τ в виде параметров.

Для исследования рядов вида (3), (4) и определенных интегралов, дающих точное решение задач Г. с. т, С. А. Чаплыгин предложил приближенный метод решения задач о струйном движении газа. Этот метод приводит задачу о движении газа к задаче о плоскопараллельном потенциальном движении несжимаемой жидкости.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1948, с. 19—137; [2] Бай Ши-и, Теория струй, пер. с англ., М., 1960.

Л. Н. Сретенский.

ГАЛЕРКИНА МЕТОД, метод моментов,— метод нахождения приближенного решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы.

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, область определения к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$F(x) = h \qquad (1)$$

методом Галеркина выбираются линейно независимая система элементов из X (координатная система) $\{\varphi_i\}_1^\infty$ и линейно независимая система функционалов $\{\psi_j\}_1^\infty$ из пространства Y^*, сопряженного к Y (проекционная система). Приближенное решение x уравнения (1) разыскивается в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \qquad (2)$$

Числовые коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из системы уравнений

$$\langle F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right), \psi_j \rangle = \langle h, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

В этой общей постановке задачи нельзя гарантировать, что система (3) имеет хотя бы одно решение. В случае если (3) имеет единственное решение при каждом $n = 1, 2, \ldots$, приближенное решение (2) может не сходиться при $n \to \infty$ даже слабо к точному решению уравнения (1). Тем не менее, Г. м. является мощным средством не только для нахождения приближенных решений, но и для доказательства теорем существования решений линейных и нелинейных уравнений, особенно в задачах для уравнений с частными производными.

В ряде случаев задача определения коэффициентов (2) из системы (3) эквивалентна задаче об отыскании минимума нек-рого функционала, и Г. м. превращается в вариационный (энергетический) метод. Наиболее важный из таких методов — *Ритца метод*. В нек-рых случаях эффективно применение для исследования системы (3) топологич. методов.

Если пространства X и Y гильбертовы, то Г. м. иногда наз. методом Галеркина — Петрова. Если, кроме того, координатная и проекционная системы совпадают: $X = Y = H$ и $\psi_i = \varphi_i$, то принято говорить о методе Бубнова — Галеркина. Если $X = Y = H$ — гильбертово пространство, а

$\psi_i = F(\varphi_i)$, то этот частный случай Г. м. наз. *наименьших квадратов методом*.

В линейном случае, когда $F(x) \equiv Ax$, A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subseteq X$ и с областью значений $R(A) \subseteq Y$, а координатная система выбрана в $D(A)$, уравнение (1) принимает вид:

$$Ax = h. \tag{4}$$

При этом система (3) представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle A\varphi_i, \psi_j \rangle = \langle h, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Если в условиях метода наименьших квадратов на $R(A)$ существует и ограничен обратный оператор A^{-1}, $h \in R(A)$ и система $\{A\varphi_i\}_1^\infty$ полна в H, то приближенное решение (2) при $n \to \infty$ сходится к точному решению уравнения (4). Если в условиях метода Галеркина — Петрова оператор A симметричен, положительно определен, $h \in R(A)$ и система $\{\varphi_i\}_1^\infty$ полна в гильбертовом пространстве H_A — пополнении $D(A)$ в метрике, порожденной скалярным произведением

$$[x, y] = (Ax, y), \quad x, y \in D(A),$$

то приближенное решение (2) сходится к точному решению уравнения (4) как в H_A, так и в H.

Если A — самосопряженный положительно определенный оператор в H, а $\{\varphi_i\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система его собственных элементов, то метод Бубнова — Галеркина и метод наименьших квадратов совпадают с *Фурье методом*.

Г. м. применяется также для приближенного решения задач на собственные значения и собственные элементы.

Г. м. получил широкое распространение после исследований Б. Г. Галеркина [1]; ранее он применялся для решения конкретных задач теории упругости И. Г. Бубновым. Существует общий подход к приближенным методам, охватывающий обобщающие Г. м. *проекционные методы*, *разностные методы* и другие приближенные методы.

Лит.: [1] Галеркин Б. Г., «Вестник инженеров», 1915, т. 1, № 19, с. 897—908; [2] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957; [3] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972. *В. А. Треногин.*

ГАЛИЛЕЕВА СИСТЕМА КООРДИНАТ — система координат в *псевдоевклидовом пространстве*, в к-рой линейный элемент имеет вид:

$$ds^2 = \sum e_i dx^{i^2},$$

где $e_i = \pm 1$. Г. с. к. аналогична декартовой системе координат в евклидовом пространстве. Происхождение названия связано с приложениями системы отсчета Галилея (см. *Инерциальная система отсчета*).

Д. Д. Соколов.

ГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — пространство-время классич. механики Галилея — Ньютона, в к-ром за расстояние между двумя событиями, происходящими в точках M_1 и M_2 в моменты времени t_1 и t_2, принимается временной интервал $|t_1 \quad t_2|$, а в том случае, когда эти события происходят одновременно, расстояние между событиями считается равным расстоянию между точками M_1 и M_2. В случае n-мерного Г. п. расстояние определяется следующим образом:

$$d(x, y) = |x^1 - y^1| \text{ при } x^1 \neq y^1,$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} (x^i - y^i)^2} \text{ при } x^1 = y^1.$$

Г. п. является *полупсевдоевклидовым пространством* дефекта 1; может рассматриваться как предельный случай псевдоевклидова пространства, в к-ром изотропный конус вырождается в плоскость. Этот предельный

переход соответствует предельному переходу от специальной теории относительности к классич. механике.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

ГАЛИЛЕЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование, определяющее в классич. механике переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. При этом система отсчета понимается как четырехмерная, позволяющая фиксировать три пространственные координаты и отсчет часов (время). Если задана инерциальная система отсчета (x, y, z, t), то во всякой другой инерциальной системе (x', y', z', t'), движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты (x', y', z', t') связаны (с точностью до переноса начала и поворота осей) с координатами (x, y, z, t) преобразованиями Галилея

$$x' = x - v_x t,\ y' = y - v_y t,\ z' = z - v_z t,\ t' = t,$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости движения системы (x', y', z', t') относительно системы (x, y, z, t).

Основные законы классич. механики инвариантны относительно Г. п., но, напр., уравнение распространения фронта световой волны (электромагнитное явление) не инвариантно относительно Г. п. По этой причине Г. п. были обобщены Х. Лоренцом (H. Lorentz, см. *Лоренца преобразование*). Эти преобразования легли в основу специальной теории относительности. Преобразования Лоренца переходят в Г. п. при $v \ll c$.

Г. п. образуют группу, являющуюся подгруппой группы неоднородных преобразований Галилея, называемой группой Галилея, к-рая получается из группы Г. п. добавлением преобразований смещения начала координат в трехмерном пространстве и начала отсчета времени.

А. З. Петров.

ГАЛИЛЕЯ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ — основной принцип классич. механики, утверждающий инвариантность законов механич. движения относительно замены одних инерциальных систем другими. Существование инерциальных систем отсчета постулируется. Г. п. о. был подготовлен в результате развития классич. механики от античных времен до эпохи Возрождения; Г. Галилею (G. Galilei, 1636) принадлежит его окончательная формулировка. Математически Г. п. о. описываются *Галилея преобразованиями*, при введении к-рых предполагают существование абсолютного времени и абсолютного пространства безотносительно к материи и друг к другу, что допускает экспериментальную проверку. Такая проверка приводит к положительным результатам при малых сравнительно со скоростью света скоростях. Однако при скоростях, близких к скорости света, проверка приводит к отрицательным результатам. Этот факт, а также обобщение Г. п. о. на электромагнитные явления послужили основным стимулом для создания специальной теории относительности, в к-рой существование инерциальных систем отсчета также постулируется, но связаны они между собой группой *Лоренца преобразований*, относительно к-рых инвариантны релятивистские уравнения механики (обобщение уравнений классич. механики) и уравнения электродинамики. Дальнейшее развитие Г. п. о. содержится в общей теории относительности.

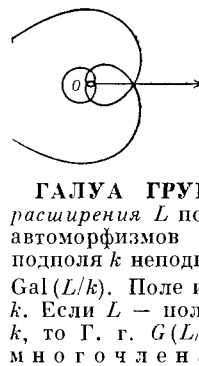
Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961. *А. З. Петров.*

ГАЛИЛЕЯ СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = a\varphi^2 - l,\ l \geqslant 0.$$

Г. с. симметрична относительно полярной оси (см. рис.) и имеет двойную точку в полюсе с касательными, об-

разующими с полярной осью углы, равные $\pm\sqrt{l/a}$. На полярной оси у Г. с. бесконечно много двойных точек, для которых $\rho = ak^2\pi^2 - l$, где $k = 1, 2, \ldots$. Г. с. относятся к так называемым алгебраическим *спиралям*. Названа по имени Г. Галилея (G. Galilei, 1638) в связи с его работами по теории свободного падения тел.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ГАЛУА ГРУППА — группа автоморфизмов *Галуа расширения* L поля k, т. е. группа, состоящая из всех автоморфизмов поля L, оставляющих все элементы подполя k неподвижными. Г. г. обозначается $G(L, k)$ или $\mathrm{Gal}(L/k)$. Поле инвариантов $L^{G(L,k)}$ совпадает с полем k. Если L — поле разложения многочлена f над полем k, то Г. г. $G(L/k)$ наз. также группой Галуа многочлена f. Эти группы играют важную роль в теории Галуа алгебраич. уравнений. Вычисление Г. г. для расширений полей алгебраич. чисел является одной из основных задач алгебраич. теории чисел. Задача нахождения расширений Галуа с абелевой Г.г. (абелевы расширения) относится к теории полей классов. Г. г. полей алгебраич. функций изучаются в алгебраич. геометрии.

Если L — поле и G — конечная подгруппа группы автоморфизмов поля L, то L является расширением Галуа поля инвариантов $k = L^G$, Г. г. этого расширения изоморфна G; при этом степень расширения $[L:k]$ равна порядку группы G.

Фундаментальным результатом о Г. г. является следующая теорема, иногда наз. основной теоремой о расширениях Галуа (или теоремой о соответствии Галуа). Если L — расширение Галуа конечной степени поля k, то существует взаимное однозначное соответствие между всеми подгруппами H Г. г. $G(L/k)$ и всеми подполями F поля L, содержащими k, причем соответствующие друг другу H и F таковы, что F — поле инвариантов H, а H — группа Галуа L/F (см. *Галуа соответствие*). Эта теорема имеет многочисленные аналоги во многих математич. теориях, так существует ее обобщение на случай расширений бесконечной степени (см. *Галуа топологическая группа*). Имеется обобщение понятия Г. г. на случай расширений произвольных коммутативных колец и даже схем (см. *Фундаментальная группа*), а также на случай расширений тел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947. *И. В. Долгачев.*

ГАЛУА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА — группа всех автоморфизмов *дифференциального поля* P, перестановочных с *дифференцированиями* и оставляющих на месте все элементы нек-рого фиксированного дифференциального подполя P' поля P. *Л. А. Скорняков.*

ГАЛУА КОГОМОЛОГИИ — когомологии *Галуа группы*. Если M — абелева группа и $G(K/k)$ — группа Галуа расширения K/k, действующая на M, то когомологии Галуа есть группы когомологий

$$H^n(K/k, M) = H^n(G(K/k), M), \quad n \geqslant 0,$$

определяемые комплексом (C^n, d), где C^n состоит из всех отображений $G(K/k)^n \to M$, а d — кограничный оператор (см. *Когомологии групп*). Если K/k — расширение бесконечной степени, то дополнительно требуется, чтобы *Галуа топологическая группа* непрерывно действовала на дискретной группе M, а за коцепи C^n берутся непрерывные отображения.

Для неабелевой группы M содержательно определяются только нульмерные (H^0) и одномерные (H^1)

когомологии. А именно, $H^0(K/k, M)=M^{G(K/k)}$ — множество неподвижных точек группы $G(K/k)$ в M, а $H^1(K/k, M)$ — фактормножество множества одномерных коциклов, т. е. непрерывных отображений z: $G(K/k)\to M$, удовлетворяющих соотношению

$$z(g_1g_2)=z(g_1)g_1z(g_2)$$

для всех g_1, $g_2\in G(K/k)$, по отношению эквивалентности $\sim$ (где $z_1\sim z_2$ тогда и только тогда, когда $z_1(g)=m^{-1}z_2(g)g_m$ для некоторого $m\in M$ и всех $g\in G(K/k)$). В неабелевом случае $H^1(K/k, M)$ является множеством с отмеченной точкой, соответствующей тривиальному коциклу $G(K/k)\to(e)$ (где e — единица M), и структурой группы, вообще говоря, не обладает. Тем не менее и для таких когомологий можно развить стандартный когомологич. формализм (см. *Неабелевы когомологии*).

Если $K=k_s$ — сепарабельное замыкание поля k, то принято группу $G(k_s/k)$ обозначать G_k и вместо $H^n(k_s/k, M)$ писать $H^n(k, M)$.

Г. к. в форме, несколько отличной от современной, возникли еще в работах Д. Гильберта (D. Hilbert), Э. Артина (E. Artin), Р. Брауэра (R. Brauer), Х. Хассе (H. Hasse), К. Шевалле (C. Chevalley) по теории полей классов, конечномерным простым алгебрам и квадратичным формам. Развитие идей и методов гомологич. алгебры обусловили введение в начале 50-х гг. 20 в. Г. к. конечных расширений со значениями в абелевой группе в работах Э. Артина, А. Вейля (A. Weil), Г. Хохшильда (G. Hochschild), Дж. Тейта (J. Tate) в связи с потребностями теории полей классов. В общем случае теория абелевых Г. к. была затем развита Дж. Тейтом и Ж. П. Серром (см. [1], [3], [6]).

С помощью Г. к. Дж. Тейтом было введено понятие когомологич. размерности группы Галуа G_k поля k, к-рая обозначается $\mathrm{cd}G_k$. Она определяется через к о г о м о л о г и ч е с к у ю p-р а з м е р н о с т ь cd_pG_k — наименьшее целое число n такое, что для всякого периодического G_k-модуля A и всякого целого $q>n$ p-примарная компонента группы $H^q(G_k, A)$ равна нулю. К о г о м о л о г и ч е с к а я р а з м е р н о с т ь $\mathrm{cd}\,G_k$ есть

$$\sup_p \mathrm{cd}_p G_k.$$

Для всякого алгебраически замкнутого поля k $\mathrm{cd}G_k=0$; для всех полей таких, что *Брауэра группа* $B(K)$ их любого конечного расширения K/k тривиальна, $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 1$; для p-адического поля, поля алгебраич. функций одной переменной с конечным полем констант и для чисто мнимого числового поля $\mathrm{cd}\,G_k=2$ (см. [1]). Поля k, когомологич. размерность группы Галуа к-рых $\leqslant 1$, и группа Брауэра $B(k)=0$, наз. п о л я м и р а з м е р н о с т и $\leqslant 1$, и это обозначается $\dim k\leqslant 1$. К таким полям относятся все конечные поля, максимальные неразветвленные расширения p-адических полей, поле рациональных функций от одной переменной с алгебраически замкнутым полем констант. Если группа Галуа $G(K/k)$ является п р о-p-г р у п п о й, т. е. проективным пределом конечных p-групп, то размерность $H^1(G(K/k), Z/pZ)$ над Z/pZ равна минимальному числу топологических образующих группы $G(K/k)$, а размерность $H^2(G(K/k), Z/pZ)$ есть число определяющих соотношений между этими образующими. Если $\mathrm{cd}G(K/k)=1$, то $G(K/k)$ — свободная про-p-группа.

Неабелевы Г. к. появились в конце 50-х гг. 20 в., однако систематич. исследования начались лишь в 60-х гг. и стимулировались главным образом проблемой классификации алгебраич. групп над алгебраически незамкнутыми полями. Одной из основных задач, давших толчок развитию неабелевых Г. к., является задача классификации главных однородных про-

странств групповых схем. Особенно эффективными оказываются Г. к. для проблемы классификации форм алгебраич. многообразий.

Упомянутые выше задачи приводят к проблеме вычисления Г. к. алгебраич. групп. Общие теоремы о строении алгебраич. групп в существенном сводят изучение Г. к. к отдельному рассмотрению Г. к. конечных групп, унипотентных групп, торов, полупростых групп, абелевых многообразий.

Г. к. связной унипотентной группы U тривиальны, если U определена над совершенным полем k, т. е. $H^1(k, U)=0$ для произвольной унипотентной группы U, и $H^n(k, U)=0$ для всех $n\geqslant 1$, если U — абелева группа. В частности, для аддитивной группы произвольного поля k G_a всегда $H^1(k, G_a)=0$. Для несовершенного поля k, вообще говоря, $H^1(k, G_a)\neq 0$.

Одним из первых существенных фактов о Г. к. была «теорема 90» Гильберта, одна из формулировок к-рой утверждает, что $H^1(k, G_m)=0$. Кроме того, и для любого k-разложимого алгебраич. тора T всегда $H^1(k, T)=0$. В общем случае вычисление $H^1(k, T)$ для произвольного k-определенного тора T сводится к вычислению $H^1(K/k, T)$, где K — минимальное поле разложения T, что пока (1977) сделано только для специальных полей. Особенно важен для приложений случай, когда k — поле алгебраич. чисел. Для этого случая получены теоремы двойственности, имеющие разнообразные применения.

Пусть K/k — расширение Галуа конечной степени, $C(K)$ — группа *аделей* мультипликативной K-группы G_m, $\hat{T}=\mathrm{Hom}_k(T, G_m)$ — группа характеров тора. Теорема двойственности утверждает, что $\cup$-произведение:

$$H^{2-r}(K/k, \hat{T})\times H^r(K/k, \mathrm{Hom}(\hat{T}, C(K))\to H^2(K/k, C(K)),$$

задает невырожденное спаривание при $r=0, 1, 2$. С помощью этой теоремы найдена формула, выражающая *Тамагавы числа* тора T через инварианты, связанные с его Г. к. Существуют и другие важные теоремы двойственности для Г. к. [1].

Доказана [11] тривиальность $H^1(k, G)$ над полями k размерности $\leqslant 1$. Выделен естественный класс полей, обладающих лишь конечным числом расширений фиксированной степени [так наз. п о л я т и п а (F)]; к ним относится, напр., поле p-адических чисел. Доказано, что для произвольной алгебраич. группы G над полем k типа (F) группа когомологий $H^1(k, G)$ является конечным множеством (см. [1]).

Теория Г. к. полупростых алгебраич. групп имеет глубокие арифметич. и аналитич. применения. Т е о р е м а К н е з е р а — Б р ю а — Т и т с а утверждает, что $H^1(k, G)=0$ для односвязных полупростых алгебраич. групп G над локальными полями k, поле вычетов к-рых имеет когомологич. размерность $\leqslant 1$. Эта теорема была доказана сначала для полей p-адических чисел [12], а затем в [7] было получено единообразное доказательство в общем случае. Доказана [13] тривиальность $H^1(k, G)$ для поля алгебраич. функций от одной переменной с конечным полем констант. Во всех этих случаях когомологич. размерность $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 2$, и это подтверждает общую гипотезу Ж. П. Серра о тривиальности $H^1(k, G)$ для односвязных полупростых G над полями k с $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 2$.

Пусть k — глобальное поле, V — множество всех неэквивалентных нормирований k, k_v пополнение k. Вложения $k\to k_v$ индуцируют естественное отображение

$$i: H^1(k, G)\to \Pi_{v\in V} H^1(k_v, G)$$

для произвольной k-определенной алгебраич. группы G, ядро к-рого обозначается $Ш(G)$ и в случае абелевых многообразий наз. г р у п п о й Ш а ф а р е в и ч а — Т е й т а. Группа $Ш(G)$ показывает в какой мере Г. к.

над глобальным полем определяются Г. к. над локализациями. Для линейных алгебраич. групп основной результат о Ш(G) принадлежит А. Борелю (A. Borel), к-рый доказал конечность группы Ш(G). Существует гипотеза, что группа Ш(G) конечна и в случае абелевых многообразий. Выделяется случай, когда Ш(G) $=0$, т. е. отображение i инъективно. Тогда говорят, что для G справедлив *Хассе принцип*. Такое название объясняется тем, что для ортогональной группы инъективность i эквивалентна классич. теореме Минковского — Хассе о квадратичных формах, а для проективной группы — теореме Брауэра — Хассе — Нётер о расщеплении простых алгебр. Существует также гипотеза, принадлежащая Ж. П. Серру, что для односвязной или присоединенной полупростой группы всегда Ш(G)$=0$. Это утверждение доказано для большинства односвязных полупростых групп над числовыми глобальными полями (исключая группы, имеющие простые компоненты типа E_8) (см. [13]), а также для любых односвязных алгебраич. групп над функциональными глобальными полями.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] его же, Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [5] Artin E., Tate J., Class field theory, N. Y.— Amst., 1967; [6] Serre J.-P., Corps locaux, P., 1962; [7] Borel A., Serre J.-P., «Comm. Math. Helv.», 1964, v. 39, p. 111—64; [8] Artin M., Grothendieck A., Verdier J.-L., Théorie des topos et cohomologie etale des schémas, t. 1—3, B.— Hdlb. — N. Y., 1972; [9] Bruhat F., Tits J., «Publ. Math. IHES», 1972, № 41, p. 5—252; [10] Borel A., там же, 1963, № 16, p. 5—30; [11] Steinberg R., там же, 1965, № 25, p. 49—80; [12] Knezer M., «Math. Z.», 1965, Bd 88, S. 40—47; Bd 89, S. 250—72; [13] Harder G., «Math. Z.», 1965, Bd 90, S. 404—28; 1966, Bd 92, S. 396—415.

Е. А. Нисневич, В. П. Платонов.

ГАЛУА ПОЛЕ, конечное поле,— поле, число элементов к-рого конечно. Г. п. впервые рассматривалось Э. Галуа (E. Galois, см. [1], с. 35—47).

Число элементов любого Г. п. есть степень p^n нек-рого натурального простого числа p, являющегося характеристикой этого поля. Для любого натурального простого p и любого натурального n существует (и единственно, с точностью до изоморфизма) поле из p^n элементов. Оно обозначается $\mathrm{GF}(p^n)$ или F_{p^n}. Поле $\mathrm{GF}(p^m)$ содержит в качестве подполя поле $\mathrm{GF}(p^n)$ в том и только в том случае, когда m делится на n. В частности, в любом поле $\mathrm{GF}(p^n)$ содержится поле $\mathrm{GF}(p)$, наз. простым полем характеристики p. Поле $\mathrm{GF}(p)$ изоморфно полю $Z/(p)$ классов вычетов кольца целых чисел по простому модулю p. В любом фиксированном *алгебраическом замыкании* Ω поля $\mathrm{GF}(p)$ существует точно одно подполе $\mathrm{GF}(p^n)$ для каждого n. Соответствие $n \leftrightarrow \mathrm{GF}(p^n)$ является изоморфизмом между решеткой натуральных чисел относительно делимости и решеткой конечных алгебраич. расширений поля $\mathrm{GF}(p)$, лежащих в Ω, относительно включения. Такова же решетка множества конечных алгебраич. расширений любого Г. п., лежащих в его фиксированном алгебраич. замыкании.

Алгебраич. расширение $\mathrm{GF}(p^n)/\mathrm{GF}(p)$ является простым, т. е. существует примитивный элемент $\alpha \in \mathrm{GF}(p^n)$ такой, что $\mathrm{GF}(p^n)=\mathrm{GF}(p)(\alpha)$. Таким α будет любой корень каждого неприводимого многочлена степени n из кольца $\mathrm{GF}(p)[X]$. Число примитивных элементов расширения $\mathrm{GF}(p^n)/\mathrm{GF}(p)$ равно

$$\sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d},$$

где μ — *Мёбиуса функция*. Аддитивная группа поля $\mathrm{GF}(p^n)$ естественным образом наделяется структурой n-мерного векторного пространства над $\mathrm{GF}(p)$. В качестве базиса можно взять $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Ненулевые элементы поля $\mathrm{GF}(p^n)$ образуют мультипликативную группу $\mathrm{GF}^*(p^n)$ порядка p^n-1, т. е. каждый элемент из $\mathrm{GF}^*(p^n)$ является корнем многочлена $X^{p^n-1}-1$.

Группа $GF^*(p^n)$ циклическая, ее образующие — первообразные корни из единицы степени p^n-1, число к-рых равно $\varphi(p^n-1)$, где φ — *Эйлера функция*. Каждый первообразный корень из единицы степени p^n-1 является примитивным элементом расширения $GF(p^n)/GF(p)$, но не наоборот. Точнее, среди

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)p^{n/d}$$

неприводимых унитарных многочленов степени n над $GF(p)$ имеется $\frac{1}{n}\varphi(p^n-1)$ таких, корни к-рых будут образующими для $GF^*(p^n)$.

Множество элементов поля $GF(p^n)$ в точности совпадает с множеством корней многочлена $X^{p^n}-X$ в Ω, т. е. $GF(p^n)$ характеризуется как подполе элементов из Ω, инвариантных относительно автоморфизма $\tau: x\to x^{p^n}$, наз. автоморфизмом Фробениуса. Если $GF(p^m)\supset GF(p^n)$, то расширение $GF(p^m)/GF(p^n)$ нормально (см. *Расширение* поля), его *Галуа группа* $\mathrm{Gal}(GF(p^m)\ GF(p^n))$ циклическая порядка m/n. В качестве образующей группы $\mathrm{Gal}(GF(p^m)/GF(p^n))$ может быть взят автоморфизм τ.

Лит.: [1] Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.—Л., 1936; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976, с. 158—62; [3] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, М.—Л., 1934, ч. 1, с. 154—62; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965, с. 185—203.
А. И. Скопин.

ГАЛУА РАСШИРЕНИЕ поля — нормальное и сепарабельное *расширение* поля. Изучение группы автоморфизмов таких расширений относится к *Галуа теории*.

ГАЛУА СООТВЕТСТВИЕ между частично упорядоченными множествами M и M' – пара отображений $\varphi: M\to M'$ и $\psi: M'\to M$, удовлетворяющих следующим условиям:

если $a\leqslant b$, то $a\varphi\geqslant b\varphi$;

если $a'\leqslant b'$, то $a'\psi\geqslant b'\psi$; $a\varphi\psi\geqslant a$ и $a'\psi\varphi\geqslant a'$.

Здесь $a,\ b\in M,\ a',\ b'\in M'$.

Понятие Г. с. тесно связано с понятием замыкания в частично упорядоченном множестве, а именно, если между M и M' установлено Г. с., то равенства $\bar{a}=a\varphi\psi$, $a\in M$, и $\bar{a'}=a'\psi\varphi$, $a'\in M'$, определяют *замыкания отношения* в множествах M и M' соответственно. Понятие Г. с. возникло из *Галуа теории*, где изучается Г. с. между всеми промежуточными подполями расширения $P\subseteq K$ и системой подгрупп группы Галуа этого расширения.

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962.
О. А. Иванова.

ГАЛУА ТЕОРИИ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача построения конечного нормального расширения для данного поля k с заданной *Галуа группой* (см. *Галуа теория*), а также выяснения условий, обеспечивающих существование или отсутствие такого расширения над полем k.

Если k есть поле рациональных чисел, то эта задача превращается в задачу построения нормального поля алгебраич. чисел с заданной группой Галуа и сводится к отысканию алгебраич. уравнения над k с данной группой Галуа. Такие уравнения существуют для любой симметрической группы, а также для знакопеременной группы. Конструктивно уравнения со знакопеременными группами построены И. Шуром (I. Schur), в частности показано, что уравнения вида

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1!}+1=0$$

(отрезки разложения показательной функции) имеют при $n\equiv 0 \pmod 4$ группой Галуа знакопеременную группу, а в остальных случаях – симметрическую группу.

Существование расширения поля алгебраич. чисел с любой разрешимой группой G в качестве группы Галуа доказано И. Р. Шафаревичем [2] с использованием арифметич. свойств полей алгебраич. чисел. В качестве решения K можно выбрать такое поле, что дискриминант K над полем алгебраич. чисел взаимно прост с любым наперед заданным целым числом, и, следовательно, решений данной задачи бесконечно много.

Рассмотрение групп Галуа бесконечных расширений данного поля (см. *Галуа топологическая группа*) дает возможность решать Г. т. о. з. сразу для множества однотипных полей: конечных, локальных, полей алгебраич. функций от одной переменной.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1, М.—Л., 1934; [2] Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 2, с. 261—96; № 3, с. 525—78.

С. П. Демушкин.

ГАЛУА ТЕОРИЯ — в наиболее общем смысле теория, изучающая те или иные математич. объекты на основе их групп автоморфизмов. Так, напр., возможны Г. т. полей, колец, топологич. пространств и т. п. В более узком смысле под Г. т. понимается Г. т. полей. Возникла эта теория из задачи решения в радикалах алгебраич. уравнений высших степеней. Общеизвестная формула для решения квадратного уравнения была установлена в глубокой древности. Методы решения уравнений 3-й (*Кардано формула*) и 4-й степеней (см. *Феррари метод*) найдены в 16 в. В течение трех последующих столетий велись безуспешные поиски формул для решения уравнений 5-й степени и выше. Наконец, в 1824 Н. Абель (N. Abel) доказал, что общее алгебраич. уравнение степени $\geqslant 5$ в радикалах не решается. После этого встал вопрос о необходимых и достаточных условиях, к-рым должны удовлетворять коэффициенты уравнения, чтобы оно решалось в радикалах, т. е. могло быть сведено к цепи двучленных уравнений вида $x^n - a = 0$. Ответ на этот вопрос был найден Э. Галуа (E. Galois); свои результаты он изложил в предсмертном письме (1832), опубликованном в 1846. В современном изложении Г. т. выглядит следующим образом.

Пусть k — произвольное поле. Р а с ш и р е н и е м поля k наз. любое поле K, содержащее k в качестве подполя. Каждое расширение можно рассматривать как линейное пространство над полем k; если это пространство имеет конечную размерность n, то расширение наз. к о н е ч н ы м, а размерность n — с т е п е н ь ю р а с ш и р е н и я. Элемент α нек-рого расширения поля k наз. а л г е б р а и ч е с к и м над k, если он является корнем уравнения $f = 0$, где f — многочлен с коэффициентами из k (этот многочлен можно считать неприводимым). Наименьшее расширение поля k, содержащее алгебраический над k элемент α, обозначается обычно $k(\alpha)$. Конечное расширение K поля k наз. с е п а р а б е л ь н ы м, если $K = k(\alpha)$, причем многочлен f, корнем к-рого является α, не имеет кратных корней. В случае, когда поле k имеет характеристику 0 (напр., если k — числовое поле), любое конечное расширение сепарабельно (т е о р е м а о п р и м и т и в н о м э л е м е н т е). П о л е м р а з л о ж е н и я неприводимого многочлена f наз. наименьшее расширение поля k, содержащее все корни этого многочлена. Степень такого расширения делится на степень многочлена f и равна этой степени, если все корни многочлена f выражаются через один из корней. Расширение K наз. н о р м а л ь н ы м, если оно является полем разложения нек-рого многочлена, и р а с ш и р е н и е м Г а л у а, если оно нормально и сепарабельно. Группа всех автоморфизмов расширения Галуа K, оставляющих на месте все элементы поля k, наз. г р у п п о й Г а л у а этого расширения и обозначается $\mathrm{Gal}(K/k)$. Ее порядок (число элементов) равен степени расширения K над k. Каждой подгруппе H группы $\mathrm{Gal}(K/k)$ соответствует подполе P поля K, состоящее

из всех элементов K, не меняющихся под воздействием автоморфизмов из H. Обратно, каждому подполю $P \subset K$ (содержащему поле k) соответствует подгруппа H группы $\mathrm{Gal}(K/k)$, состоящая из всех автоморфизмов, оставляющих на месте каждый элемент поля P. При этом поле K является расширением Галуа P и $\mathrm{Gal}(K/P)=H$. Основная теорема теории Галуа утверждает, что эти соответствия обратны друг к другу и, следовательно, являются взаимно однозначными соответствиями между всеми подгруппами группы $\mathrm{Gal}(K/k)$ и всеми подполями поля K, содержащими поле k. Таким образом, описание всех подполей поля K сводится к описанию всех подгрупп конечной группы $\mathrm{Gal}(K/k)$, что является значительно более простой задачей. Важно, что при этом соответствии «хорошим» свойствам подполей отвечают определенные свойства подгрупп и обратно. Так, подгруппа H будет нормальным делителем группы $\mathrm{Gal}(K/k)=G$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей поле P является расширением Галуа поля k. При этом группа $\mathrm{Gal}(P/k)$ изоморфна G/H. Любой возрастающей последовательности

$$k=K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r=K \qquad (1)$$

подполей поля K отвечает убывающая последовательность

$$G=H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_r=\{e\} \qquad (2)$$

подгрупп группы G, где $H_i=\mathrm{Gal}(K/K_i)$. Последовательность (2) является нормальным рядом (т. е. каждая группа H_{i+1} — нормальный делитель группы H_i при $1<i<r$) тогда и только тогда, когда в последовательности (1) каждое поле K_{i+1} есть расширение Галуа поля K_i, и в этом случае $H_i/H_{i+1} \approx \mathrm{Gal}(K_{i+1}/K_i)$.

К задаче решения алгебраич. уравнений эти результаты применяются следующим образом. Пусть f — неприводимый многочлен без кратных корней над полем k, а K — его поле разложения (оно будет расширением Галуа поля k). Группа Галуа этого расширения наз. группой Галуа уравнения $f=0$. Решение уравнения $f=0$ тогда и только тогда сводится к решению цепи уравнений $f=0, \ldots, f_r=0$, когда K содержится в поле $\overline{K}$, являющемся последним членом возрастающей последовательности полей

$$k=K_0 \subseteq K_1 \subset \ldots \subset K_r=\overline{K},$$

где K_i, $i=1, \ldots, r$ — поле разложения над полем K_{i-1}, многочлена f_i. Последнее условие равносильно тому, что группа $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ является факторгруппой группы $\overline{G}=\mathrm{Gal}(\overline{K}/k)$, обладающей нормальным рядом, факторы H_i/H_{i+1} к-рого изоморфны группам Галуа уравнений $f_i=0$.

Пусть поле k содержит все корни из единицы степени n. Тогда для любого $a \in k$ полем разложения многочлена x^n-a служит поле $k(\alpha)$, где α - одно из значений радикала $\sqrt[n]{a}$. Группа $\mathrm{Gal}(k(\alpha)/k)$ является в этом случае циклич. группой порядка n, и обратно, если группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ является циклич. группой порядка n, то $K=k(\alpha)$, где α — корень нек-рого двучленного уравнения $x^n-a=0$. Таким образом, если поле k содержит корни из единицы всех необходимых степеней, то уравнение $f=0$ решается в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима (т. е. обладает нормальным рядом с циклич. факторами H_i/H_{i+1}). Найденное условие разрешимости в радикалах справедливо и в случае, когда поле k не содержит всех нужных корней из единицы, поскольку группа Галуа $\mathrm{Gal}(k'/k)$ расширения k', получающегося присоединением этих корней, всегда разрешима.

Для практического применения условия разрешимости весьма важно, что группу Галуа уравнения можно вычислить, не решая этого уравнения. Идея вы-

числения следующая. Каждый автоморфизм поля разложения многочлена f индуцирует нек-рую перестановку его корней, причем этой перестановкой он вполне определяется. Поэтому группу Галуа уравнения в принципе можно трактовать как нек-рую подгруппу группы подстановок его корней (а именно, подгруппу, состоящую из подстановок, сохраняющих все алгебраич. зависимости между корнями). Зависимости между корнями многочлена дают нек-рые соотношения между его коэффициентами (в силу формул Виета); анализируя эти соотношения, можно определить зависимости между корнями многочлена и тем самым вычислить группу Галуа уравнения. В общем случае группа Галуа алгебраич. уравнения может состоять из всех перестановок корней, т. е. являться симметрической группой n-й степени. Поскольку при $n \geqslant 5$ симметрическая группа неразрешима, то уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, в радикалах не решается (теорема Абеля).

Соображения Г. т. позволяют, в частности, описать полностью класс задач на построение, разрешимых с помощью циркуля и линейки. Методами аналитической геометрии показывается, что любая такая задача на построение сводится к нек-рому алгебраич. уравнению над полем рациональных чисел, причем она разрешима с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение решается в квадратных радикалах. А для этого необходимо и достаточно, чтобы группа Галуа уравнения обладала нормальным рядом, факторы к-рого являются группами 2-го порядка, что имеет место тогда и только тогда, когда ее порядок является степенью двух. Итак, задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, сводится к решению уравнения, поле разложения к-рого имеет над полем рациональных чисел степень вида 2^s; если степень уравнения не имеет вида 2^s, то такое построение невозможно. Так обстоит дело с задачей об удвоении куба (сводящейся к кубическому уравнению $x^3 - 2 = 0$) и с задачей о трисекции угла (также сводящейся к кубическому уравнению). Задача о построении правильного p-угольника сводится при простом p к уравнению $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$, обладающему тем свойством, что его поле разложения порождается любым из корней и поэтому имеет степень $p - 1$, равную степени уравнения. В этом случае построение с помощью циркуля и линейки возможно, только если $p = 2^s + 1$ (напр., при $p = 5$ и $p = 17$ оно возможно, а при $p = 7$ и при $p = 13$ нет).

Идеи Галуа оказали решающее влияние на развитие алгебры в течение почти целого столетия. Г. т. развивалась и обобщалась во многих направлениях. В. Круллем (W. Krull) построена Г. т. для бесконечных расширений; доказано (теорема Кронекера — Вебера), что корни уравнения с рациональными коэффициентами с абелевой группой Галуа рационально выражаются через корни из единицы; дана классификация абелевых расширений заданного поля алгебраич. чисел (общая теория полей классов); доказано существование поля алгебраич. чисел с заданной разрешимой группой Галуа (см. *Галуа теории обратная задача*). Тем не менее в классич. Г. т. осталось еще много нерешенных задач. Напр., неизвестно, для любой ли группы G существует уравнение над полем рациональных чисел с этой группой Галуа.

Лит.: [1] Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.—Л., 1936; [2] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1—2, М.—Л., 1934—37; [3] его же, Теория Галуа, М.—Л., 1936; [4] Постников М. М., Основы теории Галуа, М., 1960; [5] его же, Теория Галуа, М., 1963; [6] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [7] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Бурбаки Н., Алгебра, Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [9] Кох Г., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [10] Artin E., Galoische Theorie, Lpz., 1959.

М. М. Постников.

ГАЛУА ТЕОРИЯ КОЛЕЦ — обобщение результатов теории *Галуа полей* на случай ассоциативных колец с единицей. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей, H некоторая подгруппа группы всех автоморфизмов кольца A, N — подгруппа группы H,

$$J(N) = \{a \in A \mid h(a) = a \quad \forall h \in N\},$$

B $J(H)$. Тогда $J(N)$ - подкольцо кольца A. Пусть B_1 — подкольцо кольца A. Говорят, что автоморфизм h кольца A составляет кольцо B_1 поэлементно инвариантным, если $h(b) = b$ для всех $b \in B_1$. Множество всех таких автоморфизмов обозначается $G(B_1)$. Пусть

$$H(B_1) = G(B_1) \cap H \text{ и } B_1 \supseteq B.$$

Основной объект изучения Г. к. т. — соответствия:

1) $N \to J(N)$; 2) $B_1 \to G(B_1)$; 3) $B_1 \to H(B_1)$.

В отличие от теории Галуа полей (даже в том случае, когда группа H конечна) здесь не всегда выполняется равенство $G(B_1) = H(B_1)$, а соответствия 1), 2) и 1), 3) не обязаны быть взаимно обратными. Поэтому представляет интерес выделение таких семейств подколец и семейств подгрупп, для к-рых справедлив аналог теоремы о соответствиях Галуа. В двух случаях эта задача получила удовлетворительное решение. Первый из них характеризуется требованием «близости» свойств кольца A к свойствам поля (напр., A — тело или полное кольцо линейных преобразований векторного пространства над телом), второй — требованием «близости» строения кольца A над подкольцом B к строению соответствующей пары в случае, когда A — поле (напр., B-модуль проективен).

Пусть c — обратимый элемент кольца A и $T_c: A \to A$ — автоморфизм кольца A, определяемый равенством $T_c(x) = cxc^{-1}$, $x \in A$, $R(H)$ — подалгебра алгебры A, порожденная обратимыми элементами $c \in A$, для которых $T_c \in H$. Группа H наз. N-группой, если $T_x \in H$ для всех обратимых $x \in R(H)$. Если A — тело, B — его подтело, причем $B = J(G(B))$, A — конечномерное левое векторное пространство над B, то соответствия Галуа $H \to J(H)$ и $D \to G(D)$ являются обратными друг к другу, где H принадлежит множеству всех N-подгрупп группы $G(B)$, а D — множеству всех подтел тела A, содержащих тело B.

Аналогичный результат справедлив и в том случае, когда A — полное кольцо линейных преобразований (однако соответствующая система условий, выделяющая семейства подгрупп и семейства подколец, формулируется несколько сложнее).

Пусть далее A — коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов и $A \supseteq B$. Кольцо A наз. конечным нормальным расширением кольца B, если $B = J(G(B))$ и A — конечно порожденный B-модуль. Кольцо A можно рассматривать как $A \otimes_B A$-модуль, полагая

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i a,$$

где a_i, b_i, $a \in A$. Кольцо A наз. сепарабельной B-алгеброй, если A — проективный $A \otimes_B A$-модуль. Если A — конечное нормальное сепарабельное расширение кольца B, то A — конечно порожденный проективный B-модуль, группа $G(B)$ конечна ($[G(B) : 1] = \operatorname{rank}_B A$) и отображения $H \to J(H)$, $B_1 \to G(B_1)$ задают взаимно обратные соответствия между множеством всех подгрупп группы $G(B)$ и множеством всех сепарабельных B-подалгебр алгебры A.

Всякое кольцо B обладает сепарабельным замыканием, являющимся аналогом сепарабельного замыкания поля. Группа всех автоморфизмов этого замыкания, оставляющих кольцо B поэлементно инвариантным, оказывается, в общем случае, проконечной группой. Соответствия 1) и 2) являются взаимно обратными

на множестве всех замкнутых подгрупп полученной группы и на множестве всех сепарабельных B-подалгебр сепарабельного замыкания кольца B.

Аналогичные результаты справедливы и в том случае, когда кольцо B содержит нетривиальные идемпотенты. При этом, однако, ряд основных понятий подвергается существенному изменению. Напр., роль группы Галуа $G(B)$ играет фундаментальный группоид.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Chase S. U., Swedler M. E., Hopf algebras and Galois theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [3] De Meyer F., Ingraham E., Separable algebras over commutative rings, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [4] Magid A. R., The separable Galois theory of commutative rings, N. Y., 1974.

К. И. Бейдар, А. В. Михалев.

ГАЛУА ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа Галуа, снабженная топологией Крулля; базис фильтра этой топологии состоит из нормальных делителей конечного индекса. Если L/K — конечное расширение Галуа, то топология его группы Галуа $G(L/K)$ дискретна. Если поле L — объединение конечных расширений Галуа K_i поля K, то Г. т. г. $G(L/K)$ есть проективный предел конечных групп $G(K_i/K)$ с дискретной топологией. В этом случае Г. т. г. является *проконечной группой* и тем самым вполне несвязной компактной топологич. группой. Если K' — поле инвариантов для группы $G(L/K)$, то подгруппа $G(L/K')$ всюду плотна в группе $G(L/K)$. Основная теорема о конечных расширениях Галуа может быть переформулирована для бесконечных расширений: существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными открытыми подгруппами Г. т. г. расширения L/K и подполями L, являющимися конечными расширениями Галуа поля K.

И. В. Долгачев.

ГАЛЬТОНА — ВАТСОНА ПРОЦЕСС — *ветвящийся процесс* с одним типом частиц и с дискретным временем; назван по имени Ф. Гальтона (F. Galton) и Дж. Ватсона (G. Watson), впервые занимавшихся в 1873 задачей о вырождении фамилии.

Б. А. Севастьянов.

ГАМИЛЬТОНА ОПЕРАТОР, набла-оператор, ∇-оператор, гамильтониан,— символический дифференциальный оператор 1-го порядка, применяемый для записи основных дифференциальных операций векторного анализа. В декартовой прямоугольной системе координат $x=(x_1, \ldots, x_n)$ с ортами $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Г. о. имеет вид:

$$\nabla = \sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Применение Г. о. к скалярной функции $f(x)$, понимаемое как умножение «вектора» ∇ на скаляр $f(x)$, дает *градиент* функции $f(x)$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

т. е. вектор с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Скалярное произведение ∇ на векторное поле $a=(a_1, \ldots, a_n)$ дает *дивергенцию* поля a:

$$\operatorname{div} a = \nabla a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Векторное произведение ∇ на векторы $a_j=(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $j=1,2, \ldots, n-2$, дает *вихрь* (ротор) совокупности полей $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, т. е. вектор:

$$[\nabla, a_1, \ldots, a_{n-2}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \ldots & a_{n-2,n} \end{vmatrix}.$$

При $n=3$

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{e}_3.$$

Скалярный квадрат Г. о. дает *Лапласа оператор:*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$[\nabla, \nabla\varphi] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

$$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \quad \nabla [\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0,$$

$$[\nabla [\nabla, \boldsymbol{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \quad \Delta\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

Г. о. был введен У. Гамильтоном [1].

Лит.: [1] Hamilton W. R., Lectures on quaternions..., Dublin, 1853.

Л. П. Купцов.

ГАМИЛЬТОНА УРАВНЕНИЯ — канонические обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, описывающие движения голономных механич. систем под действием приложенных к ним сил, а также экстремали задач классического вариационного исчисления.

Г. у., установленные У. Гамильтоном [1], эквивалентны *Лагранжа уравнениям* 2-го рода (или *Эйлера уравнениям* в классическом вариационном исчислении), в к-рых неизвестными являются обобщенные координаты q_i, а также и $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. Вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ У. Гамильтон ввел в рассмотрение обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ — *Лагранжа функция*, n — число степеней свободы системы, и определил функцию

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{2}$$

наз. ныне *Гамильтона функцией*. В правой части (2) переменные $\dot{q}_i$ заменяются их выражениями

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_s, p_s, t),$$

получаемыми разрешением уравнений (1). Для динамич. систем, у к-рых

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0,$$

такое разрешение всегда возможно.

Г. у. имеют вид канонич. уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь Q_i^* обозначают непотенциальные обобщенные силы, если они действуют на систему. Число уравнений (3) равно числу $2n$ неизвестных q_i, p_i.

Порядок системы (3) как и системы уравнений Лагранжа 2-го рода, равен $2n$.

Переход от переменных q_i, $\dot{q}_i$, t и функции Лагранжа L к переменным q_i, p_i, t и функции Гамильтона H, согласно формулам (1) и (2), представляет собой *Лежандра преобразование*. Г. у. имеют определенные преимущества по сравнению с уравнениями Лагранжа, что обусловило их большую роль в аналитич. механике. См. также *Гамильтонова система*.

Лит.: [1] Hamilton W. R., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1835, pt 1, p. 95—144.

В. В. Румянцев.

ГАМИЛЬТОНА ФУНКЦИЯ, гамильтониан,— функция, введенная У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834) для описания движений механических систем; начиная с работ К. Якоби (K. Jacobi, 1837), используется в классическом вариационном исчислении для представления *Эйлера уравнений* в канонической

форме. Пусть $L(t, x, \dot{x})$ — *Лагранжа функция* механич. системы или подинтегральная функция в задаче минимизации функционала

$$J(x)=\int L(t, x\dot{x})\, dt$$

классического вариационного исчисления, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\det\|L_{\dot{x}\dot{x}}\|\neq 0$. Г. ф. представляет собой *Лежандра преобразование* функции L по переменным $\dot{x}$, иначе говоря,

$$H(t, x, p)=(p\mid \dot{x})-L(t, x, \dot{x}),$$

где $\dot{x}$ выражено через p соотношением $p=L_{\dot{x}}$; $(p\mid \dot{x})$— скалярное произведение векторов $p=(p_1, \ldots, p_n)$ и $\dot{x}$. С помощью Г. ф. уравнения Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0$$

(в задачах классич. механики называемые *Лагранжа уравнениями*) записываются в виде системы уравнений 1-го порядка:

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Эти уравнения наз. *Гамильтона уравнениями*, *гамильтоновой системой*, а также каноническ ой с и с т е м о й. Через Г. ф. пишутся уравнения Гамильтона - Якоби для функции действия (см. *Гамильтона — Якоби теория*).

Г. ф. в задаче оптимального управления определяется следующим образом. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt$$

при дифференциальных связях

$$\dot{x}^i=f^i(t, x, u),$$

при заданных граничных условиях и ограничении на управление $u\in U$. Здесь $x=(x^1, \ldots, x^n)$ есть n-мерный вектор фазовых координат, $u=(u', \ldots, u^m)$ — m-мерный вектор управления, U — замкнутое множество допустимых значений управления u. Г.ф. в этой задаче имеет вид

$$H(t, x, \psi, u)=\psi_0 f^0(t, x, u)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t, x, u),$$

где $\psi_0=\text{const}\leqslant 0$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — сопряженные переменные (множители Лагранжа, импульсы), аналогичные введенным выше канонич. переменным p_i. Если (x_0, u_0) есть минимум в поставленной задаче и $\psi_0\neq 0$ (тогда ψ_0 можно считать равным -1), то

$$H(t, x_0(t), p(t), u_0(t))=(p\mid f)\,|_{x_0, u_0}=f^0\,|_{x_0, u_0},$$

где

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x_0, u_0}.$$

Полученное для Г. ф. выражение имеет ту же структуру, что и в классическом вариационном исчислении. Согласно *Понтрягина принципу максимума* уравнения Эйлера для задачи оптимального управления с помощью Г. ф. можно записать в виде

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Оптимальное управление u при каждом t должно доставлять максимум Г. ф.:

$$H(t, x, \psi, u)=\max_{v\in U} H(t, x, \psi, v).$$

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

И. Б. Вапнярский.

ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО ПРИНЦИП, стационарного действия принцип,— общий интегральный *вариационный принцип классической механики*, установленный У. Гамильтоном [1] для

голономных систем, стесненных идеальными стационарными связями, и обобщенный М. В. Остроградским [2] на нестационарные геометрич. связи. Согласно Г.—О.п., в действительном движении системы под действием потенциальных сил

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$$

имеет стационарное значение по сравнению с близкими кинематически-возможными движениями, для которых начальное и конечное положения системы и время движения одинаковы с таковыми для действительного движения. Здесь T — кинетическая, U — потенциальная энергии, $L=T-U$ функция Лагранжа системы. В нек-рых случаях истинное движение соответствует не только стационарной точке функционала S, но и доставляет ему наименьшее значение. Поэтому Г.—О. п. часто наз. принципом наименьшего действия. В случае непотенциальных активных сил F_ν условие стационарности действия $\delta S=0$ заменяется условием

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum\nolimits_\nu F_\nu \cdot \delta r_\nu)\, dt = 0.$$

Лит.: [1] Hamilton W., Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, L., 1835, p. 513—18; [2] Ostrogradsky M., «Mém. de l'Acad. des Sci. de St-Petersbourg», 1850, t. 8, № 3, p. 33—48.

В. В. Румянцев.

ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ТЕОРИЯ — раздел классического вариационного исчисления и аналитич. механики, в к-ром задача нахождения экстремалей (или задача интегрирования гамильтоновой системы уравнений) сводится к интегрированию нек-рого уравнения с частными производными 1-го порядка - так наз. уравнения Гамильтона — Якоби. Основы Г.— Я. т. были разработаны У. Гамильтоном (W. Hamilton) в 20-х гг. 19 в. в применении к задачам волновой и геометрич. оптики. В 1834 У. Гамильтон распространил свои идеи на задачи динамики, а в 1837 К. Якоби (C. Jacobi) применил этот метод для общих задач классического вариационного исчисления.

Исходные позиции Г.—Я.т. были заложены в 17 в. П. Ферма и Х. Гюйгенсом на материале геометрич. оптики (см. *Ферма принцип* и *Гюйгенса принцип*). Рассмотрим, следуя У. Гамильтону, задачу о распространении света в неоднородной (но для простоты — изотропной) среде, где $v(x)$ — локальная скорость света в точке x. В соответствии с принципом Ферма свет в неоднородной среде распространяется от точки к точке за кратчайшее время. Пусть $x_0 \in E$ исходная точка, а $W(x)$ — минимальное время, требуемое свету для преодоления пути от x_0 к x. Функцию $W(x)$ называют эйконалом, или оптической длиной пути. Допустим, что за малое время dt свет распространился из точки x до точки $x+dx$. В соответствии с *Гюйгенса принципом* свет с точностью до малых более высокого порядка будет распространяться по нормали к поверхности уровня функции $W(x)$. Таким образом выполняется равенство

$$W\left(x + \frac{W'(x)}{|W'(x)|} v(x)\, dt\right) = W(x) + dt + o(dt),$$

из к-рого следует уравнение Гамильтона — Якоби для задач геометрич. оптики:

$$|W'(x)|^2 = \frac{1}{v^2(x)} \Leftrightarrow \sum\nolimits_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x)}.$$

В аналитич. механике роль принципа Ферма играет вариационный *Гамильтона Остроградского принцип*, а роль эйконала играет функция действия, представляющая собой интеграл

$$S(t, x) = \int_\gamma L\, dt, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

вдоль траектории γ, соединяющей фиксированную точку (t_0, x_0) с точкой (t, x), где L — функция Лагранжа механич. системы.

К. Якоби предложил рассматривать функцию действия, подобную (1), для любой задачи классического вариационного исчисления. Экстремали задачи $\int L dt \to \to \inf$, исходящие из точки (t_0, x_0), пересекают поверхность уровня функции действия трансверсально (см. *Трансверсальности условие*), из этого выводят вид дифференциала функции действия:

$$dS = (p \mid dx) - H\,dt,$$

где $p = L_{\dot{x}}$, а $H = p\dot{x} - L$ — *Гамильтона функция* (см. также *Лежандра преобразование*).

Последнее соотношение приводит к уравнению для функции S:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение и наз. уравнением Гамильтона — Якоби.

Важнейшим результатом Г.—Я. т. является теорема Якоби, заключающаяся в том, что полный интеграл уравнения (2), т. е. решение $S(t, x, \alpha)$ этого уравнения, зависящее от параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (с условием невырожденности $\det \left|\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}\right| \neq 0$), позволяет получить общий интеграл уравнения Эйлера функционала (1), или, что то же самое,— гамильтоновой системы, связанной с этим функционалом, по формулам $\frac{\partial S}{\partial x} = p$, $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$. Применение теоремы Якоби к интегрированию гамильтоновых систем основано, как правило, на методе разделения переменных в специально выбранных координатах.

Несмотря на то, что интегрирование уравнений с частными производными составляет, как правило, более сложную задачу, чем отыскание решений обыкновенных уравнений, Г.—Я. т. оказалась мощным орудием исследования задач оптики, механики и геометрии. Суть принципа Гюйгенса была применена Р. Беллманом (R. Bellmann) к задачам оптимального управления.

См. также *Гильберта инвариантный интеграл*.

Лит.: [1] Вариационные принципы механики, М., 1959; [2] Парс Л.-А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971, с. 283—86; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974, с. 219—24; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955, с. 92—96.

В. М. Тихомиров.

ГАМИЛЬТОНИАН — см. *Гамильтона функция*, *Гамильтона оператор*.

ГАМИЛЬТОНОВА ГРУППА — неабелева группа, все подгруппы к-рой инвариантны. Группы с таким свойством исследовались Р. Дедекиндом (R. Dedekind) и были названы им Г. г. в честь У. Гамильтона (W. Hamilton) — создателя алгебры кватернионов. Группа тогда и только тогда гамильтонова, когда она является прямым произведением группы кватернионов порядка 8, абелевой группы, каждый элемент к-рой имеет конечный нечетный порядок, и абелевой группы показателя 2. В частности, любая Г. г. периодична.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА — система обыкновенных дифференциальных уравнений для $2n$ неизвестных $p = (p_1, \ldots, p_n)$ («обобщенные импульсы») и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ («обобщенные координаты»), имеющая вид:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где H — нек-рая функция от (p, q, t), наз. *Гамильтона функцией*, или гамильтонианом, системы (1). Г. с. наз. также каноническими, а в автономном случае (когда H не зависит явно от t) иногда и

консервативными системами, поскольку в этом случае функция H (имеющая во многих примерах физич. смысл энергии) является первым интегралом (т. е. энергия сохраняется при движении).

В механике Г. с. описывают движение при голономных связях и силах, имеющих *потенциал* (см. *Гамильтона уравнения*). Многие задачи теоретич. физики также приводят к Г. с. или к таким уравнениям с частными производными, к-рые имеют близкие свойства и могут рассматриваться как бесконечномерные аналоги Г. с. Уравнениям квантовой механики можно придать вид Г. с., в к-рых, однако, $p_i(t)$ и $q_i(t)$ являются не числовыми функциями времени, а (зависящими от t) самосопряженными линейными операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям. Г. с. (в обычном смысле слова) играют важную роль при исследованиях нек-рых асимптотич. задач для уравнений с частными производными (коротковолновая асимптотика для волнового уравнения, квазиклассич. асимптотика в квантовой механике).

Тесно связаны с Г. с. различные вариационные принципы. Принцип Гельмгольца (см., напр., [3]) непосредственно приводит к Г. с., однако он употребляется редко. Наибольшее значение имеет *Гамильтона—Остроградского принцип* (стационарного действия принцип), к-рый непосредственно приводит к *Лагранжа уравнениям*; при выполнении нек-рых дополнительных условий типа невырожденности от последних можно перейти к Г. с. с помощью *Лежандра преобразования* (см. *Гамильтона функция*, *Гамильтона уравнения*), если в вариационный принцип входят производные только первого порядка. Несколько сложнее осуществляется предложенный М. В. Остроградским переход к Г. с. в том случае, когда вариационный принцип содержит производные порядка выше первого (см., напр., [4], § 110).

Если H не зависит явно от q_i, то $p_i = \text{const}$ — первый интеграл. В этом случае координату q_i наз. ц и к л и ч е с к о й (в нек-рых случаях она имеет физич. или геометрич. смысл угловой переменной), или и г н о р и р у е м о й. Такую координату q_i и соответствующий ей импульс p_i можно исключить и тем самым перейти к Г. с. с меньшим числом неизвестных. Более общо, при наличии k независимых первых *интегралов в инволюции* возможно понижение порядка Г. с. на $2k$ (по крайней мере в нек-рой области изменения переменных и с заменой времени), и при этом снова получается Г. с. Если все координаты циклические, то Г. с. наз. (в п о л н е) и н т е г р и р у е м о й; нахождение ее решений и качественное исследование их свойств уже не требует решения дифференциальных уравнений.

Первые интегралы Г. с. часто получаются из т е о р е м ы Н ё т е р: если функция Лагранжа (или л а г р а н ж и а н) инвариантна относительно некоторой непрерывной группы преобразований, то соответствующая Г. с. имеет первые интегралы определенного вида (см., напр., [2]). Другое общее соображение, позволяющее иногда проинтегрировать Г. с., состоит в переходе к вспомогательному уравнению с частными производными — так наз. уравнению Гамильтона — Якоби (см. *Гамильтона — Якоби теория*). Посредством разделения переменных в подходящих координатах иногда удается найти полный интеграл последнего, тогда теорема Якоби позволяет сравнительно легко проинтегрировать Г. с. [Связь между Г. с. и уравнением Гамильтона — Якоби является двусторонней: решение последнего сводится к интегрированию соответствующей Г. с. Исторически эта связь вместе с аналогией между механикой и геометрич. оптикой (см. [1], с. 548, [2] или [3], с. 421, 451) способствовала открытию Г. с. (принцип Гюйгенса в оптике сразу приводит к *эйконала уравнению* — уравнению типа уравнения Гамильтона — Якоби).]

Для Г. с., близких к интегрируемым, разработаны специфич. методы приближенного интегрирования и качественного исследования свойств решений. Родственные методы служат также для исследования поведения траекторий Г. с. в окрестности положений равновесия, периодич. или квазипериодич. решений. Могут использоваться и методы, не связанные специально с Г. с., однако и тогда специфика Г. с. может позволить упростить вычисления или, наоборот, усложнить задачу (поскольку с точки зрения общего метода Г. с. могут оказаться «исключительными» — так, напр., обстоит дело с *устойчивостью*). См. *Адиабатический инвариант*, *Малого параметра метод*, *Малые знаменатели*, *Осреднение*.

Пусть $\varphi_t(z)$ - решение Г. с. (1), проходящее при $t=0$ через точку $z=(p, q)\in\mathbb{R}^{2n}$. Г. с. однозначно характеризуется тем, что (локальные) диффеоморфизмы φ_t переводят внешнюю дифференциальную форму

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i \qquad (2)$$

(так наз. интегральный инвариант Пуанкаре) снова в ω; этот факт в других терминах отмечался еще М. В. Остроградским и Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz); последний говорил о «свойстве взаимности» (см. [3]). Диффеоморфизмы, сохраняющие ω, наз. каноническими преобразованиями (или каноническими заменами переменных); они не только естественно возникают из Г. с., но и переводят любую Г. с. снова в Г. с. (Последним свойством обладают и обобщенные канонич. преобразования, переход к к-рым, впрочем, не является особенно существенным расширением рассматриваемого класса преобразований.) При этом гамильтониан новой системы легко выражается через исходный гамильтониан и производящую функцию S канонич. преобразования (которое удобно задавать именно с помощью S). Таким образом, имея дело с Г. с. и производя канонич. замену переменных, можно производить вычисления всего с двумя функциями H и S (тогда как в общем случае замены переменных в системе дифференциальных уравнений пришлось бы рассматривать гораздо больше функций); в этом состоит так наз. канонический формализм, существенно упрощающий вычисления в пределах своей применимости. Он широко используется в небесной механике и теоретич. физике.

Определение Г. с. в терминах интегрального инварианта приводит к естественному обобщению, когда вместо формы (2) в $\mathbb{R}^{2n}$ речь идет о заданной на нек-ром многообразии M четной размерности $2n$ внешней дифференциальной форме ω 2-го порядка, причем ω замкнута (внешний дифференциал $d\omega=0$) и всюду $\omega^n=\omega\wedge\ldots\wedge\omega\neq 0$ (тогда говорят, что на M задана симплектическая структура.) Еще более общей является трактовка Г. с. не как динамической системы, а как конгруэнции, когда траектории рассматривают просто как семейство линий с определенными свойствами и не обращают внимания на скорость движения по ним. (Систему (1) можно включить в эту схему, рассматривая графики решений $p=p(t)$, $q=q(t)$ в пространстве (p, q, t); при этом вместо (2) большую роль играет интегральный инвариант Пуанкаре — Картана $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt$.) Собственно, когда с помощью первых интегралов понижается порядок Г. с. (1), то получается Г. с. именно в этом обобщенном смысле (см. [2]).

О свойствах Г. с., не являющихся интегрируемыми или близкими к таковым, известно мало (не считая названных выше вопросов о локальном поведении траекторий). Сохранение ω влечет сохранение элемента объема ω^n (теорема Лиувилля; обратное неверно, исключая малые размерности). Поэтому Г. с. принадле-

жат к числу систем с инвариантной мерой, изучаемых в *эргодической теории*.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [2] Амальди У., Курс теоретической механики, пер. с итал., М., 1951, т. 2, ч. 2; [3] Леви-Чивита Т., Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937. *Д. В. Аносов.*

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА ЛИНЕЙНАЯ — система вида

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\quad \frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad j=1,\ \ldots,\ k, \tag{1}$$

где H — квадратичная форма с действительными коэффициентами от переменных $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ с коэффициентами, к-рые могут зависеть от времени t. Г. с. л. наз. также линейной канонической системой. Система (1) может быть записана в векторной форме:

$$J\frac{dx}{dt}=H(t)\,x, \tag{2}$$

где x — вектор-столбец $(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k)$, $H(t)=H(t)^*$ — матрица квадратичной формы $2H$ и $J=\left\|\begin{matrix}0 & I_k\\ -I_k & 0\end{matrix}\right\|$ (I_k — единичная $(k\times k)$-матрица). Уравнение (2) с произвольной неособой действительной кососимметрической матрицей J может быть сведено подходящей заменой вида $x=Sx_1$, где S — неособая действительная матрица, к аналогичному виду:

$$J_1\frac{dx_1}{dt}=H_1(t)\,x,$$

здесь J_1 — любая заранее заданная действительная неособая кососимметрическая матрица. Ниже предполагается, что в (2) $|H(t)|\in L[t_1, t_2]$, $\forall -\infty<t_1<t_2<+\infty$. К канонич. уравнению (2) сводятся: векторное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+P(t)\,y=0, \tag{3}$$

в к-ром y — вектор порядка k, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$ — действительные $(k\times k)$-матрицы функции, $\det R(t)\neq 0$; уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+Q\frac{dy}{dt}+P(t)\,y=0, \tag{3a}$$

где $Q=-Q^*$ — постоянная матрица, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$, $\det R(t)\neq 0$ (матрицы $P(t)$, Q, $R(t)$ — действительные), скалярное уравнение

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\varphi_j(t)\frac{d^j\eta}{dt^j}\right)=0, \tag{4}$$

где $\varphi_j(t)$ — действительные функции, $\varphi_k(t)\neq 0$, и аналогичное векторное уравнение. [Для уравнения (3)

$$x=\left\|\begin{matrix}y\\ z\end{matrix}\right\|,\quad z=R\frac{dy}{dz};$$

для уравнения (3а)

$$x=\left\|\begin{matrix}p\\ q\end{matrix}\right\|,\ \text{где}\ \ p=R\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}Qy,\ \ q=y;$$

для уравнения (4) $x_j=\eta^{(j-1)}$, $j=1,\ \ldots,\ k$,

$$x_{j+k}=\varphi_j x_{j+1}-x'_{k+j+1},\ j=1,\ \ldots,\ k-1,\ x_{2k}=\varphi_k x'_k].$$

Скалярное уравнение (3) с $R(t)=1$, т. е. уравнение $\frac{d^2y}{dt^2}+P(t)y=0$, в к-ром $P(t)$ — периодич. функция, наз. уравнением Хилла.

Пусть $X(t)$ — матрицант уравнения (2) [матрица фундаментальной системы решений уравнения (2), нормированная условием $X(0)=I_n$]. Введем индефинитное скалярное произведение $\langle x, y\rangle=i(Jx, y)$, где $(x, y)=\sum_{j=0}^{2k}x_j\overline{y_j}$ — обычное скалярное произведение. Матрица U (вообще комплексная), унитарная в смысле этого произведения, т. е. такая, что $U^*JU=J$, наз. J-уни-

тарной; действительная J-унитарная матрица X наз. симплектической.

Известно (см. *Гамильтонова система*), что при сдвиге вдоль траектории Г. с. сохраняется интегральный инвариант Пуанкаре — внешняя дифференциальная форма $\sum_{j=1}^{k} dp_j \wedge dq_j$. В случае Г. с. л. это свойство означает, что для любых решений $x^{(1)}-x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}=x^{(2)}(t)$ уравнения (2) выполнено $\langle x^{(1)},\ x^{(2)}\rangle=\langle X(t)x^{(1)}(0),\ X(t)x^{(2)}(0)\rangle=\text{const}$, т. е. что матрицант $X(t)$ — симплектическая матрица для любого t. Из соотношения $X^*JX=J$ следует (теорема Ляпунова Пуанкаре), что собственные значения симплектической матрицы X (с учетом их кратностей и порядков жордановых ящиков) располагаются симметрично (в смысле инверсии) относительно единичной окружности. Собственные значения симплектических (и J-унитарных) матриц, равные по модулю 1, подразделяются на собственные значения 1-го и 2-го рода по следующему правилу. Пусть ρ - собственное значение J-унитарной матрицы U и $|\rho|=1$. Тогда форма $\langle x, x\rangle$ на соответствующем корневом подпространстве не вырождается. Пусть p — число положительных и q — число отрицательных ее квадратов; говорят, что в точке ρ совпало p собственных значений 1-го рода и q собственных значений 2-го рода.

Аналогично определяется род чисто мнимых собственных значений матриц $K=J^{-1}L$, $L^*=L$ (для них $\langle Kx, y\rangle=-\langle x, Ky\rangle$, $\forall x, y$). Для J-унитарной матрицы X собственные значения ρ при $|\rho|\neq 1$ считаются собственными значениями 1-го рода, если $|\rho|<1$, и 2-го рода, если $|\rho|>1$. Любая симплектическая матрица X имеет (с учетом кратности) ровно k собственных значений $\rho_1, \ldots, \rho_k$ 1-го рода и k значений $\rho_1^{-1}, \ldots, \rho_k^{-1}$ 2-го рода. При соответствующей нумерации $\rho_1, \ldots, \rho_k$ являются непрерывными функциями матрицы X (см. [2], [3]).

1. Осцилляторные свойства решений Г. с. л. К изучению осцилляторных свойств решений уравнений (2)—(4) приводит ряд задач вариационного исчисления, оптимального управления, исследование свойств спектра соответствующего дифференциального оператора и др.

Определения. (I) Уравнение (3) наз. колебательным, если для любого $t_0>0$ найдутся числа $t_2>t_1>t_0$ и решение $y(t)\not\equiv 0$ такие, что $y(t_1)=y(t_2)=0$, и неколебательным — в противном случае. (II) Уравнение (4) наз. колебательным, если для любого $t_0>0$ найдется решение $\eta(t)\not\equiv 0$, имеющее по крайней мере два k-кратных нуля $t_2>t_1>t_0$, и неколебательным — в противном случае. (III) Уравнение (1) наз. колебательным, если на (t_0, ∞) функция

$$\Delta \operatorname{Arg} X(t)=\sum_{j=1}^{k}\Delta \operatorname{Arg}\rho_j(t) \qquad (5)$$

является неограниченной, и неколебательным в противном случае. [В(5) $\rho_j(t)$ суть собственные значения 1-го рода матрицы $X(t)$.] После сведения уравнения (3) или (4) к уравнению (2) получающееся уравнение (2) будет колебательным в смысле определения (III) тогда и только тогда, когда уравнение (3) [соответственно (4)] колебательно в смысле определения (I) [соответственно (II)]. Определению (III) можно придать следующую геометрич. интерпретацию. Группа $\mathrm{Sp}(k, R)$ симплектических матриц X гомеоморфна произведению связного и односвязного топологич. пространства на окружность. Соответствующее отображение можно выбрать так, что $\psi=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Arg}\rho_j$ является проекцией матрицы $X\in\mathrm{Sp}(k, R)$ на окружность (числа ρ_j — собственные значения 1-го рода матрицы X). Таким образом, уравнение (2) колебательно, если при $t\to\infty$ матрица $X(t)$ неограниченно «закручивается» в

$\mathrm{Sp}(k, R)$. (При $n=1$ эта группа гомеоморфна «сплошному тору» и «закручивание» имеет очевидный наглядный смысл.) Известны другие разнообразные определения аргумента симплектической матрицы, соответствующие другим отображениям группы $\mathrm{Sp}(k, R)$ на окружность и эквивалентные (5) в том смысле, что при любом из них выполнено неравенство:

$$|\Delta \operatorname{Arg}' X(t) - \Delta \operatorname{Arg} X(t)| < c \qquad (6)$$

для любой кривой $X(t) \in \mathrm{Sp}(k, R)$. Такими аргументами являются, напр.,

$\operatorname{Arg}_1 X = \operatorname{Arg} \det(U_1 - iV_1)$; $\operatorname{Arg}_2 X = \operatorname{Arg} \det(U_2 \cdot iV_2)$,

где U_j, V_j суть $(k \times k)$-подматрицы матрицы $X = \left\| \begin{smallmatrix} U_1 U_2 \\ V_1 V_2 \end{smallmatrix} \right\|$ (см. также [4]). Известны разнообразные эффективно проверяемые достаточные (а в нек-рых случаях необходимые и достаточные) условия колебательности и неколебательности уравнений (2), (3), (4) (см., напр., [5] и литературу в [6]).

2. Г. с. л. с периодическими коэффициентами. Пусть в (2) $H(t+T) = H(t)$ почти всюду. Матрица $X(T)$ наз. матрицей монодромии уравнения (2), а ее собственные значения — мультипликаторами уравнения (2). Уравнение (2) (или соответствующий гамильтониан $H(t)$) наз. сильно устойчивым, если все его решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$, и это свойство не нарушается при малых деформациях гамильтониана в смысле нормы $\|H\| = \int_0^T |H(t)|\,dt$. Аналогично определяется сильная неустойчивость уравнения (2) (гамильтониана $H(t)$). Для сильной устойчивости уравнения (2) необходимо и достаточно чтобы все его мультипликаторы лежали на единичной окружности и среди них не было совпадающих разного рода (иначе, чтобы все корневые подпространства у $X(T)$ были дефинитны в смысле произведения $\langle x, y\rangle\ i\langle Jx, y\rangle$). Для сильной неустойчивости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы нек-рые его мультипликаторы лежали вне единичной окружности. Два набора мультипликаторов (с учетом их рода), среди к-рых нет совпадающих разного рода, наз. эквивалентными, если один набор можно непрерывно перевести в другой без встречи мультипликаторов разного рода. Класс эквивалентных наборов мультипликаторов наз. мультипликаторным типом. В случае устойчивости имеется 2^k мультипликаторных типа. Их можно обозначить символами вида $\mu = (+, +, -, +, \ldots, -)$, в к-рых плюсы и минусы соответствуют роду мультипликаторов, последовательно встречающихся при прохождении верхней полуокружности $|\rho| = 1$ от точки $\rho = +1$ к точке $\rho = -1$. Пусть $L = \{H(t)\}$ — множество всех гамильтонианов указанного выше вида с нормой $\|H\| = \int_0^T |H(t)|\,dt$. Множество $O \subset L$ сильно устойчивых гамильтонианов распадается в L на счетное число областей $O_n^{(\mu)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \mu = \mu_1, \ldots, \mu_{2k}$. Область $O_n^{(\mu)}$ является множеством всех гамильтонианов, к-рым отвечают мультипликаторный тип μ и целое число n, определяемое формулой

$$\Delta \operatorname{Arg} X(t)\Big|_0^T = 2n\pi \cdot \sum_{j=1}^{k} \theta_j,$$

где $\theta_j = \arg \rho_j(T)$ — аргументы мультипликаторов 1-го рода (см. [4], [7]). Для $k = 1$ множество сильно неустойчивых гамильтонианов распадается на счетное число областей; при $k > 1$ это множество связно. Известны (см. [3], [7], [8]) разнообразные достаточные условия принадлежности $H(t) \in O_n^{(\mu)}$. При получении этих условий важную роль играет следующая теорема: пусть $H_1(t) \leqslant H_2(t)$, тогда из сильной устойчивости «отрезка» $H_s(t) = sH_1(t) + (1-s)H_2(t)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, следует сильная устойчивость любого гамильтониана $H(t)$ такого, что $H_1(t) \leqslant H(t) \leqslant H_2(t)$. Аналогичная теорема установ-

лена и для бесконечномерного случая ($k=\infty$), когда $\{x\}$ — гильбертово пространство и в (2) J, $H(t)$ суть операторы со специальными свойствами (см. [9]); при $\kappa=1$ эта теорема верна и для сильно неустойчивых гамильтонианов [3].

3. Параметрический резонанс. Рассмотрим уравнение

$$J\frac{dx}{dt}=H_0x \tag{8}$$

с постоянным гамильтонианом H_0 таким, что все решения уравнения (8) ограничены. Частота θ наз. критической, если для любого $\delta>1$ найдется «возмущенное» гамильтоново уравнение

$$J\frac{dx}{dt}=H(\theta t)\,x, \tag{9}$$

где $H(t+2\pi)=H(t)$, $\|H(t)-H_0\|<\delta$, такое, что уравнение (9) имеет неограниченные решения (знак у θ может быть любым). Явление возникновения неограниченно нарастающих колебаний системы при сколь угодно малом периодическом возмущении нек-рых ее параметров наз. параметрическим резонансом. Параметрич. резонанс имеет большое значение в технике и физике. Он «опаснее» (или «полезнее», в зависимости от задачи) обычного резонанса, поскольку в отличие от последнего при нем колебания нарастают по экспоненциальному закону (а не степенному), и частоты, при к-рых имеет место резонанс, заполняют малые интервалы. Длины этих интервалов зависят от амплитуды возбуждения, а сами интервалы стягиваются в точки (соответствующие критич. частотам), когда амплитуда возбуждения стремится к нулю. Пусть $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$ собственные значения 1-го рода матрицы $J^{-1}H_0$ (тогда $-i\omega_1, \ldots, -i\omega_k$ имеют 2-й род). Пусть $\omega_j+\omega_h\neq 0$ ($j, h=1, \ldots, k$). Критич. частотами являются числа $\theta_{jh}^{(N)}$ $(\omega_j+\omega_h)/N$ ($j, h=1, \ldots, k$, $N=\pm1, \pm2, \ldots$) и только они (см. [2]). Пусть в (9) $H(\theta t)-H_0+\varepsilon H_1(\theta t)$, ε — малый параметр;

$$J^{-1}H_0f_j=i\omega_jf_j \qquad (j=\pm1, \pm2, \ldots, \pm k), \qquad \omega_j=-\omega_j,$$
$$H_1(\tau)=\sum\nolimits_m H^{(m)}e^{im\tau}.$$

Систему векторов f_j можно выбрать нормированной условием $\langle f_j, f_h\rangle=\delta_{jh}\operatorname{sign} j$ ($j=\pm1, \ldots, \pm k$). На плоскости $\{\varepsilon, \theta\}$ вблизи оси θ точки $\{\varepsilon, \theta\}$, для к-рых уравнение (9) с $H(\theta t)=H_0+\varepsilon H_1(\theta t)$ сильно неустойчиво, заполняют области $\Omega_1(\varepsilon)<\theta-\theta_{jh}^{(N)}<\Omega_2(\varepsilon)$, примыкающие к точкам $(0, \theta_{jh}^{(N)})$, где $\Omega_{1,2}=\theta_{jh}^{(N)}+\varepsilon\mu_{1,2}+O(\varepsilon^{3/2})$ (имеется в виду «общий» случай, см. [3]). Числа μ_1, μ_2 просто выражаются через $H^{(m)}$ и f_j (см., напр., [3]).

Величина $|\langle H^{(N)}f_j, f_{-h}\rangle|$ характеризует «степень опасности» критич. частоты $\theta_{jh}^{(N)}$: чем больше эта величина, тем шире «клинышек» неустойчивости, примыкающий к точке $(0, \theta_{jh}^{(N)})$, и тем ближе к оси θ подходит внутри этого клинышка область $\alpha-$ экспоненциального возрастания решения с малым $\alpha>0$ (подробнее см. в [3]). Другие сведения имеются в [10], [12], [13].

Результаты, аналогичные перечисленным, имеются для уравнений (1) с комплексными коэффициентами ($H(t)$ — эрмитова матрица функции, $J^*=-J$, $\det J\neq 0$, см., напр., [11]). В работе [14] рассмотрена более общая система

$$Q(t)\frac{dy}{dt}=\left[S(t)-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}\right]y,$$

где $Q(t)^*=-Q(t)$, $S(t)^*=S(t)$, $\det Q(t)\neq 0$,
$Q(t+T)=Q(t)$, $S(t+T)=S(t)$.

Выяснено, что как в комплексном, так и в действительном случаях имеется конечное число областей устойчивости, получены их характеристики в терминах свойств решений соответствующих уравнений.

Ряд аналогичных результатов получен также для операторных уравнений (2) в гильбертовом пространстве с ограниченными и неограниченными операторными коэффициентами (см. [15], [16]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2, 1956, с. 7—263; [2] Крейн М. Г., в сб.: Памяти А. А. Андронова, М., 1955, с. 413—98; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972, гл. 3; [4] Гельфанд И. М., Лидский В. Б., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, № 1, с. 3—40; [5] Sternberg R. L., «Duke Math. J.», 1952, v. 19, № 2, p. 311—22; [6] Якубович В. А., «Матем. сб.», 1962, т. 56 (98), № 1, с. 3—42; [7] Крейн М. Г., Якубович В. А., в кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1, К., 1963, с. 277—305; [8] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, № 5, с. 877—80; [9] Дергузов В. М., «Матем. сб.», 1964, т. 63 (105), № 4, с. 591—619; [10] Moser J., «Comm. Pure Appl. Math.», 1958, v. 11, № 1, p. 81—114; [11] Coppel W. A., Howe A., «J. Austral. Math. Soc.», 1965, v. 5, № 2, p. 169—95; [12] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [13] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [14] Лидский В. Б., Фролов П. А., «Матем. сб.», 1966, т. 71 (113), № 1, с. 48—64; [15] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970, гл. 5; [16] Фомин В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л., 1972.

В. А. Якубович.

ГАММА-КОРРЕЛЯЦИЯ — двумерное распределение неотрицательных случайных зависимых величин X_1 и X_2, задаваемое плотностью

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k L_k^{\alpha_1}(x_1) L_k^{\alpha_2}(x_2),$$

где $0 \leqslant x_\nu < \infty$, $\alpha_\nu \geqslant \gamma > -1$, $\rho_\nu(x_\nu) = x_\nu^{\alpha_\nu} e^{-x_\nu} / \Gamma(\alpha_\nu + 1)$, $L_k^{\alpha_\nu}(x_\nu)$ — *Лагерра многочлены*, ортонормированные на положительной полуоси с весом $\rho_\nu(x_\nu)$, $\nu = 1, 2$;

$$a_k = \frac{\Gamma(\gamma + k + 1)}{\Gamma(\gamma + 1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\,\Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + k + 1)\,\Gamma(\alpha_2 + k + 1)}},$$

$$c_k = \int_0^1 \lambda^k\, dF(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$F(\lambda)$ — произвольная функция распределения на отрезке $[0, 1]$. Коэффициент корреляции между X_1 и X_2 равен $c_1 \frac{\gamma + 1}{\sqrt{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}}$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ получается симметричная Г.-к., тогда $a_k = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и соответствующая характеристич. функция имеет вид

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_0^1 \frac{dF(\lambda)}{[1 - it_1 - it_2 - t_1 t_2 (1 - \lambda)]^{1+\gamma}},$$

если $F(\lambda)$ такова, что $P(\lambda = R) = 1$, то $c_k = R^k$ и $\varphi(t_1, t_2) = [1 - it_1 - it_2 - t_1 t_2 (1 - R)]^{-1-\gamma}$, причем R есть коэффициент корреляции между X_1 и X_2 ($0 \leqslant R \leqslant 1$). В последнем случае ряд для плотности суммируется с помощью формулы (см. [2]):

$$p(x_1, x_2) = \frac{(x_1 x_2)^\gamma e^{-x_1 - x_2}}{\Gamma^2(\gamma + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} R^k L_k^\gamma(x_1) L_k^\gamma(x_2) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1 + x_2}{1 - R}}}{(1 - R)\,\Gamma(\gamma + 1)} \left(\frac{x_1 x_2}{R}\right)^{\frac{\gamma}{2}} I_\gamma\left(\frac{2\sqrt{x_1 x_2 R}}{1 - R}\right),$$

где I_γ — функция Бесселя от мнимого аргумента [2].

Лит.: [1] Сарманов И. О., в кн.: Тр. Гидрологического ин-та, 1969, в. 162, с. 37—61; [2] Miller-Lebedeff W., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 388—416.

О. В. Сарманов.

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное сосредоточенное на положительной полуоси $0 < x < \infty$ распределение вероятностей с плотностью

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda - 1} e^{-x},$$

где λ — параметр, принимающий положительные значения, и $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty y^{\lambda - 1} e^{-y}\, dy.$$

Соответствующая функция распределения при $x \leqslant 0$ равна нулю, а при $x > 0$ выражается формулой

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x y^{\lambda-1} e^{-y}\, dy.$$

Интеграл в правой части наз. неполной гамма-функцией. Плотность $g_\lambda(x)$ унимодальна и при $\lambda > 1$ достигает максимума $(\lambda-1)^{\lambda-1}e^{-(\lambda-1)}/\Gamma(\lambda)$ в точке $x = \lambda - 1$. При $0 < \lambda < 1$ плотность $g_\lambda(x)$ с ростом x монотонно убывает, причем если $x \to +0$, то $g_\lambda(x)$ неограниченно возрастает. Характеристич. функция Г.-р. имеет вид

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-\lambda}.$$

Моменты Г.-р. выражаются формулой

$$m_k = \int_0^\infty x^k g_\lambda(x)\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}, \quad k > -\lambda;$$

в частности, математич. ожидание и дисперсия равны λ. Г.-р. замкнуто относительно операции свертки:

$$g_{\lambda_1} * g_{\lambda_2} = g_{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Г.-р. играют не всегда явную, но значительную роль в приложениях. В частном случае $\lambda = 1$ получается показательная плотность. В теории массового обслуживания Г.-р. при λ, принимающем целочисленные значения, наз. *Эрланга распределением*. В математич. статистике Г.-р. часто встречаются благодаря тесной связи с нормальным распределением, т. к. сумма квадратов $\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ взаимно независимых (0,1) нормально распределенных случайных величин имеет плотность $0{,}5\, g_{n/2}(x/2)$ и наз. хи-квадрат плотностью с n степенями свободы. Ввиду этого с Г.-р. связаны многие важные распределения в задачах математич. статистики, где рассматриваются квадратичные формы от нормально распределенных случайных величин (напр., *Стьюдента распределение*, F-распределение и z-распределение Фишера). Если X_1 и X_2 независимы и распределены с плотностями g_{λ_1} и g_{λ_2}, то случайная величина $X_1/(X_1+X_2)$ имеет плотность

$$\frac{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)}\, x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1}, \quad 0 < x < 1,$$

к-рая наз. плотностью бета-распределения. Плотности линейных функций $aX+b$ от случайных величин X, подчиняющихся Г.-р., составляют специальный класс распределений — так наз. «тип III» семейства распределений К. Пирсона (K. Pearson). Плотность Г.-р. является весовой функцией системы ортогональных многочленов Лагерра. Значения функции Г.-р. можно вычислить по таблицам неполной гамма-функции (см. [1]).

Лит.: [1] Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

А. В. Прохоров.

ГАММА-ФУНКЦИЯ, Г-функция,— трансцендентная функция $\Gamma(z)$, распространяющая значения факториала $z!$ на случай любого комплексного $z \neq 0, -1, -2, \ldots$. Г.-ф. введена Л. Эйлером [(L. Euler), 1729, письмо к Х. Гольдбаху (Ch. Goldbach)] при помощи бесконечного произведения

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$

из к-рого Л. Эйлер получил интегральное представление (*эйлеров интеграл* второго рода)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx,$$

верное для $\operatorname{Re} z>0$. Многозначность функции x^{z-1} устраняется формулой $x^{z-1}=e^{(z-1)\ln x}$ с действительным $\ln x$. Обозначение $\Gamma(z)$ и назв. Г.-ф. были предложены А. М. Лежандром (A. M. Legendre, 1814).

Если $\operatorname{Re} z<0$ и $-k-1<\operatorname{Re} z<-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, то Г.-ф. может быть представлена интегралом Коши—Зальшюца:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}\left(e^{-x}-\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{x^m}{m!}\right)dx.$$

На всей плоскости z с выброшенными точками $z=0, -1, -2, \ldots$ для Г.-ф. справедливо интегральное представление Ганкеля:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int_C s^{z-1}e^{-s}\,ds,$$

где $s^{z-1}=e^{(z-1)\ln s}$, причем $\ln s$ есть ветвь логарифма, для к-рой $0<\arg\ln s\leqslant 2\pi$; контур C изображен на рис. 1. Из представления Ганкеля видно, что $\Gamma(z)$ — *мероморфная функция*. В точках $z_n=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, она имеет простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$

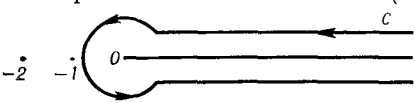


Рис. 1.

Основные соотношения и свойства Г.-ф.

1) Функциональное уравнение Эйлера:

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1),$$

или

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}\Gamma(z+n+1);$$

$\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$, если $n>0$ — целое, при этом считают $0!=\Gamma(1)=1$.

2) Формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

В частности,

$$\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\pi};\quad \Gamma\left(n+\frac12\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

если $n>0$ — целое, то

$$\left|\Gamma\left(\frac12+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\operatorname{ch}y\pi},\ y\text{ — действительное}.$$

3) Формула умножения Гаусса:

$$\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac12-mz}\Gamma(mz),$$

$$m=2, 3, 4, \ldots.$$

При $m=2$ это есть формула удвоения Лежандра.

4) При $\operatorname{Re} z\geqslant\delta>0$ или $|\operatorname{Im} z|\geqslant\delta>0$ имеет место асимптотич. разложение $\ln\Gamma(z)$ в ряд Стирлинга:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac12\right)\ln z-z+\frac12\ln2\pi+$$
$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}+O(z^{-2m-1}),$$
$$m=1,2,\ldots,$$

где B_{2n} — *Бернулли числа*. Из чего следует равенство

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac12}e^{-z}\left[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\right.$$
$$\left.-\frac{139z^{-3}}{51\,840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}+O(z^{-5})\right].$$

В частности,

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac12}e^{-x+\frac{\theta}{12x}},\quad 0<\theta<1.$$

Более точной является формула Сонина [6]:

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

5) В действительной области $\Gamma(x) > 0$ для $x > 0$ и принимает знак $(-1)^{k+1}$ на участках $-k-1 < x < -k$,

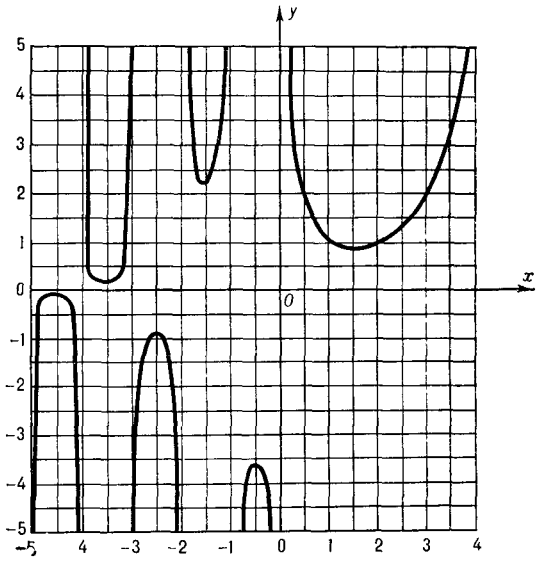


Рис. 2. График функции $y=\Gamma(x)$.

$k=0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 2). Для всех действительных x справедливо неравенство

$$\Gamma\Gamma'' > \Gamma'^2 \geqslant 0,$$

т. е. все ветви как $\Gamma(x)$, так и $\ln|\Gamma(x)|$ — выпуклые функции. Свойство логарифмич. выпуклости определяет Г.-ф. среди всех решений функционального уравнения

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$$

с точностью до постоянного множителя.

Для положительных x Г.-ф. имеет единственный минимум при $x = 1{,}4616321\ldots$, равный $0{,}885603\ldots$. Локальные минимумы функции $|\Gamma(x)|$ при $x \to -\infty$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю.

Рис. 3. График функции $\frac{1}{\Gamma(x)}$.

6) В комплексной области, при $\operatorname{Re} z > 0$, Г.-ф. быстро убывает при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \to \infty} |\Gamma(z)|\, |\operatorname{Im} z|^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z}\, e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im} z|} = \sqrt{2\pi}.$$

7) Функция $1/\Gamma(z)$ (см. рис. 3) является целой функцией 1-го порядка максимального типа, причем асимптотически при $r \to \infty$

$$\ln M(r) \sim r \ln r,$$

где

$$M(r) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|\Gamma(z)|}.$$

Она представима бесконечным произведением Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right],$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компактном множестве комплексной плоскости (здесь C — *Эйлера постоянная*). Справедливо интегральное представление Ганкеля:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^s s^{-z}\, ds,$$

где контур C^* изображен на рис. 4.

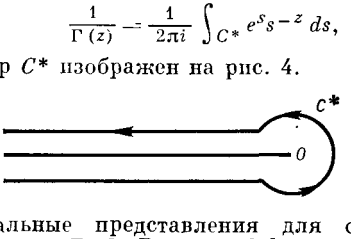


Рис. 4.

Интегральные представления для степеней Г.-ф. были получены Г. Ф. Вороным [7].

В приложениях большую роль играют так наз. полигамма-функции, являющиеся k-ми производными от $\ln \Gamma(z)$. Функция (ψ-функция Гаусса)

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} =$$

$$= -C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z-1}{(n+1)(z+n)} = -C + \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}\, dt$$

мероморфна, имеет простые полюсы в точках $z=0, -1, -2, \ldots$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}.$$

Из представления $\psi(z)$ при $|z|<1$ следует формула

$$\ln \Gamma(1+z) = -Cz + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{k} z^k,$$

где

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k};$$

эта формула полезна для вычисления $\Gamma(z)$ в окрестности точки $z=1$.

О других полигамма-функциях см. [2]. *Неполная гамма-функция* определяется равенством

$$I(x, y) = \int_0^y e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Функции $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ суть трансцендентные функции, не удовлетворяющие никакому линейному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами (теорема Гёльдера).

Исключительная роль Г.-ф. в математич. анализе определяется тем, что при помощи Г.-ф. выражается большое количество определенных интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов (см., напр., *Бета-функция*). Кроме того, Г.-ф. находит широкие применения в теории специальных функций (*гипергеометрической функции*, для которой Г.-ф. является предельным случаем, *цилиндрических функций* и др.), в аналитич. теории чисел и т. д.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., т. 2, 2 изд., М., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [3] Бурбаки Н., Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [4] Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби, (Справочная математическая библиотека), М., 1961; [5] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Lpz., 1906; [6] Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М., 1954;

[7] Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, с. 53—62; [8] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [9] Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, пер. с франц., 2 изд., М., 1967. *Л. П. Купцов.*

ГАММЕРШТЕЙНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s) f[s, \varphi(s)]\, ds = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $K(x, s)$ и $f(x, s)$ — заданные функции, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Названо по имени А. Гаммерштейна [1], рассмотревшего случай, когда $K(x, s)$ есть фредгольмово симметричное и положительное ядро, т. е. все его собственные значения положительны. Если, кроме того, функция $f(x, s)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|f(x, s)| \leqslant C_1|s| + C_2,$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, причем C_1 меньше первого собственного значения ядра $K(x, s)$, то Г. у. имеет по крайней мере одно непрерывное решение. Если же для любого фиксированного x из интервала (a, b) функция $f(x, s)$ является неубывающей функцией от s, то Г. у. может иметь не более одного решения. Это последнее свойство сохраняется и в том случае, если функция $f(x, s)$ удовлетворяет условию

$$|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leqslant C|s_1 - s_2|,$$

где положительная постоянная C меньше первого собственного значения ядра $K(x, s)$. Для построения решения Г. у. можно применять *последовательных приближений метод.*

Лит.: [1] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, Bd 30, S. 117—76; [2] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [3] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [5] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, М.—Л., 1936. *Б. В. Хведелидзе.*

ГАНКЕЛЯ ФУНКЦИИ, Ханкеля функции,— *цилиндрические функции* 3-го рода. Г. ф. могут быть следующим образом определены через Бесселя функции:

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{J_{-p}(z) - e^{-ip\pi} J_p(z)}{i \sin p\pi},$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{e^{ip\pi} J_p(z) - J_{-p}(z)}{i \sin p\pi}$$

(p-нецелое). Отсюда вытекают важные соотношения

$$H_{-p}^{(1)}(z) = e^{ip\pi} H_p^{(1)}(z),$$

$$H_{-p}^{(2)}(z) = e^{-ip\pi} H_p^{(2)}(z).$$

Г. ф. комплексны при действительных значениях z; однако

$$i^{p+1} H_p^{(1)}(iz) \text{ и } i^{-(p+1)} H_p^{(2)}(-iz)$$

действительны, если z действительно и положительно. Г. ф. обладают простыми асимптотич. представлениями при больших $|z|$:

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Г. ф. «полуцелого» аргумента $p = n + 1/2$ выражаются через элементарные функции, в частности:

$$H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{e^{iz}}{i},$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{e^{-iz}}{-i}.$$

Г. ф. введена Г. Ганкелем (H. Hankel, 1869).

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968.

П. И. Лизоркин.

ГАРМОНИЗУЕМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — *поток*, траектории к-рого после нек-рой замены времени становятся почти периодическими. Обычно при этом еще требуют, чтобы каждая траектория была всюду плотна в фазовом пространстве (так что можно говорить о гармонизуемом минимальном множестве). *Д. В. Аносов.*

ГАРМОНИЗУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — комплекснозначная случайная функция $X=X(t)$ действительного параметра t, допускающая представление в виде *стохастического интеграла*

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)=\lim\sum_k e^{i\lambda t}\,\Delta_k\Phi(\lambda), \qquad (*)$$

где $\Phi(\lambda), -\infty<\lambda<\infty,$ — случайный процесс. Приращения $\Delta_k\Phi(\lambda)=\Phi(\lambda_{k+1})-\Phi(\lambda_k)$ в (*) задают случайные «амплитуду» $A_k=|\Delta_k\Phi(\lambda)|$ и «фазу» $\theta_k=\arg\Delta_k\Phi(\lambda)$ элементарных колебаний вида

$$Ae^{i(\lambda t+\theta)}=e^{i\lambda t}\,\Delta_k\Phi(\lambda)$$

частоты λ, $\lambda_k\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{k+1}$, суперпозиция к-рых в пределе дает случайный процесс $X=X(t)$. Переход к пределу (в среднем квадратичном) в представлении (*) осуществляется при все более мелком разбиении прямой $-\infty<\lambda<\infty$ на интервалы $\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1})$, когда $\max\limits_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\to 0$. Обычно предполагают, что

$$F(\Delta_1\times\Delta_2)=\mathsf{E}(\Delta_1\Phi\cdot\Delta_1\overline{\Phi})$$

как функция множеств $\Delta_1\times\Delta_2$ на плоскости задает комплексную меру ограниченной вариации; в этом случае соответствующий процесс $\Phi(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$ [или точнее, соответствующая случайная мера $d\Phi(\lambda)$] однозначно определяется самим процессом $X(t)$, $-\infty<t<\infty$:

$$\Delta\Phi(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\lambda_2 t}-e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,X(t)\,dt$$

для любого интервала $\Delta=(\lambda_1,\lambda_2)$ такого, что $d\Phi(\lambda_1)=d\Phi(\lambda_2)=0$ и

$$\Phi(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-i\lambda t}X(t)\,dt$$

для любой точки λ, $-\infty<\lambda<\infty$. Случайный процесс $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, является Г. с. п. тогда и только тогда, когда его корреляционная функция представима в виде

$$B(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda s-\mu t)}\,F(d\lambda\times d\mu).$$

Примеры Г. с. п. 1) Стационарный случайный процесс. Если

$$X_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,d\Phi_0(t)$$

— стационарный случайный процесс, то процесс вида

$$X(t)=c(t)\,X_0(t),$$

где $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}m(d\lambda)$, $m(d\lambda)$ — некоторая мера на прямой, вообще говоря, уже не будет стационарным, но он будет гармонизуемым:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\Phi(\lambda),$$

где случайная мера $d\Phi(\lambda)$ определена формулой

$$\Delta\Phi(\lambda)=\int_{\Delta}m(\Delta-\lambda)\,d\Phi_0(\lambda).$$

2) Процесс, определяемый с помощью скользящего суммирования

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t-s)\,dZ(s),$$

где $dZ(t)$ - нек-рая случайная мера на прямой, а весовая функция $c(t)$ того же типа, что и выше:

$$c(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} m(d\lambda);$$

в этом случае

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda),$$

где

$$\Delta\Phi(\lambda) - \int_{\Delta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} dZ(t) \right] m(d\lambda).$$

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 486–511. *Ю. А. Розанов.*

ГАРМОНИКА — простейшая периодич. функция вида

$$A \sin(\omega x + \varphi).$$

Эта функция встречается при рассмотрении многих колебательных процессов. Число A наз. амплитудой, ω — частотой, φ — начальной фазой, $T = 2\pi/\omega$ — периодом колебания. Функции $\sin(2\omega x + \varphi)$, $\sin(3\omega x + \varphi)$, ..., наз. соответственно второй, третьей и т. д. высшими Г. относительно основной Г. Помимо самих Г., рассматривают их суммы

$$a_0 + a_1 \sin(\omega x + \varphi) + a_2 \sin(2\omega x + \varphi) + \ldots, \qquad (*)$$

так как очень широкий класс функций разлагается в ряды вида (*) для изучения различных процессов. *А. И. Барабанов.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ — термин, иногда применяемый для обозначения *емкости* множества в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, получаемой методом классической *потенциала теории* при помощи *ньютонова потенциала* при $n \geqslant 3$ или *логарифмического потенциала* при $n = 2$, в отличие от *аналитической емкости* или емкостей, получаемых при помощи потенциалов других типов. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МАЖОРАНТА, наименьшая гармоническая мажоранта $v(x)$ семейства $\{u_i\}$, нижняя огибающая семейства $\mathfrak{V} = \{v_k\}$ всех супергармонич. мажорант v_k семейства $\{u_i\}$ субгармонич. функций на открытом множестве D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, т. е.

$$v(x) = \inf \{v_k(x);\ v_k \in \mathfrak{V}\}, \quad x \in D.$$

Г. м. $v(x)$ либо является гармонич. функцией, либо $v(x) \equiv +\infty$. В случае семейства, состоящего из одной функции u, субгармонической на более широком множестве $D_0 \supset D$, иногда используется также понятие наилучшей Г. м. v^* — решения обобщенной задачи Дирихле для D по значениям u на границе $\Gamma = \partial D$. Всегда $v^* - v \geqslant 0$, причем справедлива формула [1]

$$v^*(x) - v(x) = -\int_{\Gamma} G(x, y)\, d\mu(y), \quad x \in D,$$

где μ - ассоциированная с u мера, $\mu \leqslant 0$, $G(x, y)$ - (обобщенная) функция Грина задачи Дирихле для D. Наилучшая и наименьшая Г. м. совпадают тогда и только тогда, когда множество всех иррегулярных точек Γ имеет μ-меру нуль.

Соответственно, если $\{\tilde{u}_i\}$ — семейство супергармонич. функций на D, то наибольшая гармоническая миноранта $w(x)$ семейства $\{\tilde{u}_i\}$ определяется как верхняя огибающая семейства всех субгармонич. минорант семейства $\{\tilde{u}_i\}$; при этом $-w(x)$ есть наименьшая Г. м. для семейства $\{-\tilde{u}_i\}$.

Другую постановку вопроса о Г. м., связанную с задачей Коши для уравнения Лапласа, см. в ст. *Гармоническая функция.*

Лит.: [1] Frostman O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Lund, 1935; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964, гл. 2, 9. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА — понятие теории *гармонических функций*, возникшее в связи с проблемами оценки модуля аналитич. функции внутри области, когда известны те или иные оценки модуля на границе области (см. [1], [2]). Пусть D – ограниченное открытое множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\Gamma = \partial D$ — граница D; $f: f(y)$ — конечная действительная непрерывная функция на Γ. Каждой такой функции f соответствует единственная гармонич. функция $H_f(x)$ на D, являющаяся для f обобщенным решением *Дирихле задачи*. Если считать точку $x\in D$ фиксированной, то функционал $H_f(x)$ определяет на компактном множестве Γ положительную борелевскую меру $\omega(x) = \omega(x; D)$, к-рая и называется г а р м о н и ч е с к о й м е р о й в т о ч к е x. Для всякой непрерывной на Γ функции f справедлива формула представления обобщенного решения задачи Дирихле

$$H_f(x) = \int f(y)\, d\omega(x; D),$$

полученная Ш.-Ж. Валле Пуссеном [3] *выметания методом*. Более того, если E — произвольное борелевское множество на Γ, то Г. м. $\omega(x; E, D)$, $x\in D$, множества E в точке x равна значению в x обобщенного решения задачи Дирихле для характеристич. функции $\chi_E(y)$, $y\in\Gamma$, множества E.

Основные свойства Г. м: $\omega(x; E, D)$ – гармонич. функция точки x на D;

$$0\leqslant\omega(x; E, D)\leqslant 1;$$
$$1-\omega(x; E, D)=\omega(x; \Gamma\setminus E, D);$$

если D — область и $\omega(x; E, D)=0$ хотя бы в одной точке $x\in D$, то $\omega(x; E, D)\equiv 0$.

В последнем случае E наз. м н о ж е с т в о м н у л е в о й Г. м. Если компактное множество $K\subset\mathbb{R}^n$ имеет нулевую Г. м. относительно какой-либо одной области D, $K\subset D$, то есть $\omega(x; K, D\setminus K)=0$, то оно имеет нулевую Г. м. относительно любой другой области D, $K\subset D$, то есть K есть множество н у л е в о й а б с о л ю т н о й Г. м. Множество K имеет нулевую абсолютную Г.м. тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую (гармоническую) *емкость*.

С точки зрения приложений к теории функций комплексного переменного особенно важное значение имеет зависимость Г. м. от области D, выражаемая *гармонической меры принципом*, сущность к-рого состоит в том, что при отображениях области D, осуществляемых однозначными аналитич. функциями $w=w(z)$, $z\in D$, Г. м. не убывает. В частности, при взаимно однозначном конформном отображении Г. м. не изменяется.

Явное вычисление Г. м. удается провести лишь для простейших областей D (прежде всего, для круга и шара, полуплоскости, полупространства; см. *Пуассона интеграл*). Поэтому важное значение имеют различные методы оценки (см. [4]—[7]) Г. м., базирующиеся в основном на *расширения области принципе*. В простейшей форме при $n=2$ он состоит в следующем: пусть конечносвязная область D ограничена конечным числом жордановых кривых Γ, α – дуги, лежащие на Γ. Тогда, если область D расширяется каким-либо образом через дополнительную часть $\Gamma\setminus\alpha$ границы, то Г. м. $\omega(z; \alpha, D)$ может только увеличиться.

Лит.: [1] C a r l e m a n T., «Ark. mat.», 1921, Bd 15, № 10, p. 1—7; [2] N e v a n l i n n a F., N e v a n l i n n a R., «Acta Soc. scent. fennica», 1922, n. 50, № 5; [3] d e l a V a l l é e P o u s s i n Ch.-J., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1932, v. 2, p. 169—232; [4] Н е в а н л и н н а Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [5] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [6] Б р е л о М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [7] H a l i s t e K., «Ark. mat.», 1965, Bd 6, № 1, p. 1—31.

Е. Д. Соломенцев.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ФОРМА — внешняя *дифференциальная форма* α на римановом многообразии M,

удовлетворяющая уравнению $\Delta\alpha = 0$, где $\Delta = d\delta + \delta d$ — *Лапласа оператор*, соответствующий римановой метрике на M, а δ — оператор, сопряженный к внешнему дифференциалу d. Если α имеет компактный носитель, то гармоничность формы α равносильна равенствам $d\alpha = -\delta\alpha = 0$. Г. ф. степени p на M образуют векторное пространство $H^p(M)$ над полем $\mathbb{R}$. Если риманово многообразие M компактно, то $H^p(M)$ конечномерно, как ядро эллиптич. оператора Δ. Поскольку Г. ф. замкнута, в силу теоремы де Рама возникает естественное отображение пространства $H^p(M)$ в пространство $H^p(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий степени p многообразия M. Из *Ходжа теоремы* следует, что это отображение является изоморфизмом. В частности, гармонич. функции, то есть Г. ф. степени 0, на связном компактном многообразии постоянны.

Г. ф. на компактном римановом многообразии инвариантны относительно любой связной группы изометрий этого многообразия, а для симметрического пространства M пространство $H^p(M)$ совпадает с пространством p-форм, инвариантных относительно наибольшей связной группы изометрий.

Параллельная теория Г. ф. существует для эрмитовых многообразий M. Г. ф. на эрмитовом многообразии M — это комплексная форма, лежащая в ядре оператора Бельтрами — Лапласа [1]. Г. ф. типа (p, q) составляют пространство $H^{p,q}(M)$ над $\mathbb{C}$. Если M компактно, то $H^{p,q}(M)$ конечномерно и естественно изоморфно пространству когомологий Дольбо. В случае, когда M — *кэлерово многообразие*, эти два понятия Г. ф. фактически совпадают, поскольку $\square = \bar{\square} = {}^1/_2\Delta$. В этом случае

$$H^{p,q}(M) = \overline{H}^{q,p}(M)$$

и

$$H^k(M) \otimes \mathbb{C} = \sum_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

Пусть ω — кэлерова форма на M, L — оператор внешнего умножения на ω, Λ — сопряженный к L оператор, $H_0^{p,q}(M)$ — пространство примитивных гармонических форм типа (p, q), т. е. форм $\alpha \in H^{p,q}(M)$, для которых $\Lambda\alpha = 0$. Для $p \geqslant q$ и $p + q \leqslant \dim_{\mathbb{C}} M$ справедливо равенство

$$H^{p,q}(M) = \sum_{s=0}^{q} L^s H_0^{p-s,\,q-s}(M) \cong$$

$$\cong \sum_{s=0}^{q} H_0^{p-s,\,q-s}(M).$$

Для компактного кэлерова многообразия M пространство $H^{p,0}(M)$ совпадает с пространством $\Omega^p(M)$ *голоморфных форм* степени p. В частности,

$$H^1(M) \otimes \mathbb{C} = \Omega^1(M) \dotplus \overline{\Omega^1(M)}.$$

Изучение гармонич. функций и форм на римановых поверхностях восходит к Б. Риману (B. Riemann), сформулированные к-рым теоремы существования были полностью обоснованы к началу 20 в. Теория Г. ф. на компактных римановых многообразиях была впервые изложена У. Ходжем (см. [1]).

В дальнейшем были даны различные обобщения теории Г.ф. Пусть на римановом (соответственно эрмитовом) многообразии M задано локально плоское (соответственно аналитическое) векторное расслоение E и пусть на слоях расслоения E задана евклидова (соответственно эрмитова) метрика. При помощи надлежащего обобщения оператора Лапласа (соответственно Бельтрами — Лапласа) (см. [4], [8]) определяются пространства $H^p(E)$ (соответственно $H^{p,q}(E)$) гармонич. форм со значениями в E (см. *Дифференциальная форма*). Если M компактно, то эти пространства конечномерны и изоморфны соответствующим пространствам когомологий де Рама и Дольбо, допускающим в свою очередь интерпретацию в терминах когомологий пучков.

В случае локально плоского расслоения эти когомологии тесно связаны также с когомологиями группы $\pi_1(M)$. Если M не компактно, то пространство Г. ф. с интегрируемым квадратом изоморфно пространству когомологий комплекса форм с интегрируемым квадратом [2]. В случае, когда M — область с гладкой границей и компактным замыканием $\bar{M}$ в кэлеровом многообразии $\tilde{M}$, можно рассматривать также пространство Г. ф. типа (p, q) со значениями в векторном аналитич. расслоении E над $\tilde{M}$, гладких в M и непрерывных в $\bar{M}$. Если M строго псевдовыпукла, то это пространство конечномерно и изоморфно пространству когомологий Дольбо, соответствующему E над M [9].

Г. ф. являются мощным средством изучения когомологий вещественных и комплексных многообразий, а также когомологий дискретных групп. Из теории Г. ф. выводятся основные когомологич. свойства компактных кэлеровых многообразий и, в частности, проективных алгебраич. многообразий [1], [4], [5]. С помощью Г.ф. удается установить связь между кривизной компактного риманова многообразия и тривиальностью некоторых его групп когомологий [6], [7]. Аналогичные связи имеют место в комплексной аналитич. геометрии (см. [4], [5]) и в теории дискретных групп преобразований (см. [8]).

Лит.: [1] Hodge W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [2] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [3] Шварц Л., Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, пер. с исп., М., 1964; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Goldberg S., Curvature and homology, N. Y.— L., 1962; [7] Яно К., Бохнер С., Кривизна и числа Бетти, пер. с англ., М., 1957; [8] Мацусима Й., Мураками С., «Математика», 1965, 9 : 5, с. 27—77; [9] Кон Дж. Дж., «Математика», 1964, 8 : 1, с. 108—41; 8 : 3, с. 80—101.

А. Л. Онищик.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $u(x)$, заданная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая в D непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков и являющаяся решением *Лапласа уравнения*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы прямоугольные координаты точки x. Иногда это определение распространяется и на комплексные функции $w(x) = u(x) + iv(x)$ в том смысле, что их действительные и мнимые части $\operatorname{Re} w(x) = u(x)$ и $\operatorname{Im} w(x) = v(x)$ являются Г. ф. Требования непрерывности и, даже, наличия производных не являются априори необходимыми. Напр., справедлива одна из теорем Привалова: непрерывная в D функция $u(x)$ является Г. ф. тогда и только тогда, когда в любой точке $x \in D$ для всех достаточно малых $R > 0$ выполняется свойство среднего

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n(R)} \int_{B_n(x, R)} u(y)\, dy,$$

где $B_n(x, R)$ — шар радиуса R с центром x, $\omega_n(R)$ — объем шара $B_n(x, R)$, dy — элемент объема в $\mathbb{R}^n$.

В случае неограниченной области D с компактной границей ∂D Г. ф. может быть доопределена в бесконечно удаленной точке ∞, т. е. может быть доопределена в областях компактифицированного по Александрову пространства $\mathbb{R}^n$. Общий принцип такого доопределения состоит в том, чтобы при простейших преобразованиях, сохраняющих гармоничность (в случае $n = 2$ — *инверсия*, в случае $n \geqslant 3$ — *Кельвина преобразование*) и переводящих конечную точку x_0 в ∞, Г.ф. в окрестности x_0 переходила в Г. ф. в окрестности ∞. Исходя из этого, считают Г. ф. $u(x)$ регулярной в бес-

конечности при $n \geqslant 3$, если

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Таким образом, в случае регулярной в бесконечности Г.ф. $u(x)$ при $n \geqslant 3$ всегда $u(\infty) = 0$. При $n = 2$ должно выполняться условие

$$u(x) = O(1), \quad |x| \to \infty,$$

из к-рого вытекает существование конечного предела

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = u(\infty).$$

Под Г. ф. в неограниченных областях обычно понимаются регулярные в бесконечности Г. ф.

В теории Г. ф. важную роль играют главные фундаментальные решения уравнения Лапласа

$$h_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \text{ при } n = 2,$$

$$h_n(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \text{ при } n \geqslant 3,$$

где σ_n — площадь единичной сферы пространства $\mathbb{R}^n$. При $|x| > 0$ это — Г. ф. С помощью фундаментальных решений записывается основная формула теории Г. ф., выражающая значения Г. ф. $u(x)$ внутри области D через ее значения $u(y)$ на границе $S = \partial D$ и через значения ее производной по направлению внешней нормали $\partial u(y)/\partial \nu$ к S в точке y:

$$\int_S \left[h_n(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial h_n(x-y)}{\partial \nu_y} \right] d\sigma(y) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Эта формула Грина справедлива, напр., при условии, что функция $u(x)$ и ее частные производные 1-го порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$, т. е. $u(x) \in C^1(\overline{D})$, граница S к-рой есть кусочно гладкая замкнутая поверхность или кривая. Она дает представление произвольной Г. ф. $u(x)$ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя (см. *Потенциала теория*). Плотности этих потенциалов, т. е. соответственно граничные значения $\partial u(y)/\partial \nu$ и $u(y)$, не могут быть заданы произвольно. Между ними имеется интегральная зависимость, выражаемая тем, что левая часть последней формулы — интеграл Грина — должна обращаться в нуль для всех точек x, лежащих вне замкнутой области $\overline{D}$. Основная формула теории Г. ф. есть непосредственный аналог основной формулы теории аналитич. функций — интегральной формулы Коши (см. *Коши интеграл*). Эта формула справедлива также при замене в ней главного фундаментального решения h_n любым другим фундаментальным решением уравнения Лапласа, достаточно гладким в $\overline{D}$, напр. принадлежащим классу $C^1(\overline{D})$.

Основные свойства Г. ф. в предположении кусочной гладкости границы S области D (многие из них с соответствующими изменениями верны и для комплексных Г. ф.).

1) Если D — конечная область и Г.ф. $u(x) \in C^1(\overline{D})$, то

$$\int_S \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma(y) = 0.$$

2) Теорема о среднем значении: если $u(x)$ — Г. ф. в шаре $B = B(x_0, R)$ радиуса R с центром x_0 и $u(x) \in C^1(\overline{B})$, то ее значение в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере $S(x_0, R)$, т. е.

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{S(x_0, R)} u(y) d\sigma(y),$$

где $\sigma_n(R)$ — площадь сферы радиуса R в $\mathbb{R}^n$. В предположении непрерывности $u(x)$ это свойство может быть принято за определение Г. ф.

3) Принцип экстремума: если D — область в $\mathbb{R}^n$, не содержащая внутри точки ∞, $u(x)$ — Г. ф. в D, $u(x)\neq\text{const}$, то ни в какой точке $x_0\in D$ функция $u(x)$ не может достигать локального экстремума, т. е. в любой окрестности $V(x_0)$ каждой точки $x_0\in D$ найдется точка $x^*\in V(x_0)$, в к-рой $u(x^*)>u(x_0)$, и найдется точка $x_*\in V(x_0)$, в к-рой $u(x_*)<u(x_0)$ (принцип экстремума в локальной форме). Если, кроме того, $u(x)\in C(\overline{D})$, то наибольшее и наименьшее значения $u(x)$ в замкнутой области $\overline{D}$ достигаются только в точках границы ∂D (принцип экстремума в глобальной форме). Следовательно, если $|u(x)|\leqslant M$ на ∂D, то $|u(x)|\leqslant M$ всюду в $\overline{D}$.

Этот принцип допускает обобщения в различных направлениях.

Например, если $u(x)$ — Г. ф. в области D, не содержащей ∞, и

$$\lim_{x\to y}\sup u(x)\leqslant M$$

для всех точек $y\in\partial D$, то $u(x)\leqslant M$ всюду в D.

4) Теорема о стирании особенностей: если $u(x)$ — Г. ф. в области $D\setminus\{x_0\}$, $x_0\in D$, удовлетворяющая условию

$$u(x)=o(|h_n(x-x_0)|),\quad x\to x_0,$$

то существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)$$

и $u(x)$, пополненная значением $u(x_0)$, есть Г. ф. в D.

5) Если $u(x)$ — Г.ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, ограниченная сверху или снизу, то $u(x)=\text{const}$.

6) Если $u(x)$ — Г. ф. в окрестности точки $x_0=((x_1)_0,(x_2)_0,\ldots,(x_n)_0)$, то $u(x)$ разлагается в этой окрестности в степенной ряд по переменным $x_1-(x_1)_0,\ldots,x_n-(x_n)_0$, т. е. всякая Г. ф. есть аналитич. функция переменных $x_1,\ldots,x_n$; следовательно, Г. ф. $u(x)$ имеет производные всех порядков

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},\quad k_1+\ldots+k_n=m,$$

к-рые в свою очередь являются Г. ф.

7) Свойство единственности: если $u(x)$ — Г. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)\equiv 0$ в нек-рой n-мерной окрестности какой-либо точки $x_0\in D$, то $u(x)\equiv 0$ в D. Если $u(x)$ — аналитическая функция действительных переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$ в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)$ — Г. ф. в нек-рой n-мерной окрестности какой-либо точки $x_0\in D$, то $u(x)$ — Г. ф. в D.

8) Принцип симметрии: пусть граница ∂D области $D\subset\mathbb{R}^n$ содержит открытое в плоскости $x_n=0$ множество G, $u(x)$ — Г. ф. в D и $u(x)=0$ всюду на G, $\tilde{D}$ — область, симметричная с D относительно плоскости $x_n=0$; тогда $u(x)$ гармонически продолжается в область $D\cup G\cup\tilde{D}$ по формуле

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=-u(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n),$$
$$(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\in\tilde{D}.$$

9) Первая теорема Гарнака: если последовательность $\{u_n(x)\}$ Г. ф. в ограниченной области D, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, сходится равномерно на границе ∂D, то она сходится равномерно в $\overline{D}$, причем предельная функция

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$$

есть Г. ф. в D.

10) Вторая теорема Гарнака: если последовательность $\{u_n(x)\}$ Г. ф. монотонна в области D и сходится по крайней мере в одной точке $x_0 \in D$, то она сходится всюду в D к Г. ф.

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x).$$

См. также *Гарнака неравенство*, *Гарнака теорема*.

Имеется тесная связь между Г. ф. двух переменных (x_1, x_2) и аналитич. функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Действительная и мнимая части аналитич. функции являются, быть может, многозначными, сопряженными Г. ф., т. е. они связаны *Коши — Римана условиями*. Если в окрестности точки (x_1^0, x_2^0) задана Г. ф. $u(x_1, x_2)$, то простейшее решение задачи об отыскании аналитич. функции $f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, для к-рой $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$, дается формулой Гурса:

$$f(z) \quad 2u\left(\frac{z+\overline{z^0}}{2}, \frac{z-\overline{z^0}}{2i}\right) - u(x_1^0, x_2^0) + iC_0,$$

где $\overline{z^0} \quad x_1^0 - ix_2^0$, C_0 — произвольная действительная постоянная. К многозначным Г. ф. в областях $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, приводят и нек-рые пространственные задачи математич. физики.

Важное значение Г.ф. в математич. физике обусловлено прежде всего тем, что часто встречаются потенциальные векторные поля вида $\boldsymbol{s} = -\operatorname{grad} u(x)$. Такие поля в областях, свободных от источников поля, должны удовлетворять уравнению сохранения $\operatorname{div} \boldsymbol{s} = -\Delta u(x) = 0$, т. е. уравнению Лапласа, а значит в таких областях потенциал $u(x)$ есть Г. ф.

Примеры: если $\boldsymbol{s}$ — силовой вектор гравитационного поля, то $u(x)$ — ньютонов потенциал сил тяготения; если $\boldsymbol{s}$ — поле скоростей установившегося движения несжимаемой однородной жидкости или газа, то $u(x)$ — потенциал скоростей; если $\boldsymbol{s}$ — напряженность электростатич. поля в однородной и изотропной среде, то $u(x)$ — потенциал электростатич. поля; если $\boldsymbol{s}$ — напряженность стационарного магнитного поля в однородной и изотропной среде, то $u(x)$ — скалярный, как правило, многозначный потенциал магнитного поля. В случае стационарного распределения тепла в однородной и изотропной среде или стационарного распределения диффундирующих частиц, Г. ф. $u(x)$ является непосредственно температура среды или соответственно плотность частиц в точке x. К решению задач на Г. ф. сводятся также многие важные вопросы теории упругости и теории электромагнитного поля.

В развитии теории Г. ф. и математич. физики особое место занимает краевая *Дирихле задача*, или первая краевая задача. Она состоит в отыскании гармонической в области D и непрерывной в $\overline{D}$ функции $u(x)$ по заданным ее непрерывным значениям $u(y)$ на границе области $S = \partial D$. В случае достаточно гладкой поверхности или линии S решение можно выразить при помощи *Грина функции* $G(x, y)$:

$$u(x) = -\int_S u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y).$$

При этом в случае простейших областей (шар, полупространство), когда нормальная производная $\partial G(x,y)/\partial \nu_y$ легко выражается в явном виде, получается *Пуассона интеграл*. Часто встречается также вторая краевая задача, или *Неймана задача*. Она состоит в определении Г. ф. $u(x)$ по заданным на границе S значениям ее нормальной производной. Решение этой задачи при помощи соответствующей функции Грина возможно, но явные выражения здесь значительно сложнее. Имеется еще целый ряд краевых задач теории Г. ф., более сложных по постановке и решению. См. также *Выметания метод*, *Робена задача*.

Особое место в современной теории Г. ф. занимают некорректные задачи, связанные в первую очередь с

задачей Коши для уравнения Лапласа. Сюда относится, напр., следующая проблема наилучшей мажоранты: если на границе $S=\partial D$ области D заданы функция $M=M(y)$ и условия $|u(y)|\leqslant M(y)$, $|\partial u(y)/\partial\nu|\leqslant M(y)$, то требуется оценить возможно точнее $\sup|u(x)|$ в классе Г. ф. $u(x)$ в D (см. [9], [10]).

Важное значение имеет исследование граничных свойств Г. ф., тесно связанное с субгармонич. функциями и *граничными свойствами аналитических функций*. Напр., в случае Г. ф. $u(x)$ в единичном шаре $B(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, $u(x)$ не имеет радиальных граничных значений

$$f(y)=\lim_{r\to 1} u(ry), \quad y\in S=\partial B(0, 1).$$

Однако для класса A Г. ф., определяемого условием

$$\int_S u^+(ry)\,d\sigma(y)\leqslant C(u)<\infty,$$

где $d\sigma(y)$ – элемент площади S, $u^+=\max\{0, u\}$, радиальные граничные значения существуют почти всюду на S по мере Лебега, и $u(x)\in A$ представима в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса

$$u(x)=\int_S P_n(x, y)\,d\mu(y),$$

где

$$P_n(x, y)=\frac{1}{\sigma_n(1)}\,\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

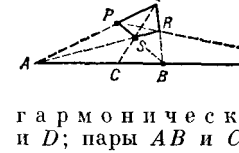
– ядро Пуассона, $d\mu$ – борелевская мера на S. Важное значение имеет также собственный подкласс B класса A, состоящий из всех Г.ф. $u(x)$, представимых в $B(0, 1)$ интегралом Пуассона – Лебега

$$u(x)=\int_S P_n(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y).$$

Большое развитие получила аксиоматич. теория Г. ф. и потенциалов в топологич. пространствах (см. *Гармоническое пространство*, *Потенциала теория абстрактная*).

Лит.: [1] Тиман А. Ф., Трофимов В. Н., Введение в теорию гармонических функций, М., 1968; [2] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [3] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1967; [7] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [8] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [9] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962; [10] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, № 5, с. 3—26; [11] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [12] Соломенцев Е. Д., Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, в кн.: Итоги науки. Серия математика. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, М., 1964, с. 83—100. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРКА точек — четверка точек на прямой, обладающая тем свойством, что ее *двойное отношение* равно -1. Если $(ABCD)$ – Г. ч., то говорят, что пара точек AB гармонически разделяет пару CD или что точки A и B гармонически сопряжены с точками C и D; пары AB и CD наз. гармонически сопряженными. Г. ч. может быть определена без привлечения метрич. понятий. Пусть $PQRS$ – четырехугольник (см. рис.), A и B – точки пересечения противоположных сторон, а C и D – точки пересечения диагоналей SQ и PR четырехугольника $PQRS$ с прямой AB. Тогда четверка точек $(ABCD)$ представляет собой Г. ч. Четверка прямых (или плоскостей), проходящих через одну точку (прямую), наз. гар-



монической четверкой прямых (плоскостей), если она проектирует Г. ч. *А. Б. Иванов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты, в к-рых *метрический тензор* g_{ik} удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik}\right) = 0,$$

где g — определитель, состоящий из компонент тензора g_{ik}. Использование Г. к. позволяет в ряде случаев (напр., при выводе уравнений движения в общей теории относительности) с помощью этих условий значительно упростить вычисления.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955. *А. Б. Иванов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — название раздела математики и математич. метода. В Г. а. как раздел математики обычно включают: теорию *тригонометрических рядов* (одномерных и многомерных), *Фурье преобразований* (функций одного и нескольких переменных), *почти периодических функций, Дирихле рядов, приближения теорию* (функций тригонометрическими полиномами), *гармонический анализ абстрактный* и нек-рые другие математич. дисциплины, близкие к указанным. Метод заключается в сведении нек-рых задач (из различных областей математики) к вопросам Г. а. и решаемых на его основе. Напр.: теория функций комплексного переменного в вопросах граничного поведения аналитических в единичном круге функций, по существу, сливается с теорией тригонометрич. рядов; изучение свойств случайных величин при помощи характеристич. функций — применение метода Г. а. в теории вероятностей; нек-рые объекты функционального анализа тесно связаны с тригонометрич. рядами, почти периодич. функциями и др. объектами Г. а.; в теории дифференциальных уравнений при помощи относящегося к Г. а. *Фурье метода* находятся решения различных уравнений математич. физики; наконец, многочисленные прикладные задачи вычислительной математики решаются на основе применения рядов и интегралов Фурье — объектов Г. а. *Е. М. Никишин.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АБСТРАКТНЫЙ — теория абстрактных *Фурье рядов* и *Фурье интегралов*. Классический гармонич. анализ - теория рядов Фурье и интегралов Фурье — интенсивно развивался под влиянием физич. задач в 18—19 вв., и в работах П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Римана (B. Riemann), А. Лебега (H. Lebesgue), М. Планшереля (M. Plancherel), Л. Фейера (L. Fejér), Ф. Рисса (F. Riesz) оформился в самостоятельную математич. дисциплину.

Дальнейшее развитие гармонич. анализа привело к установлению разнообразных связей гармонич. анализа с общими вопросами теории функций и функциональным анализом. Открытие *Хаара меры* и развитие теории *представлений бесконечных групп*, начиная с работ Г. Вейля и Ф. Петера (см. [1]) по теории *представлений бикомпактных групп* и работ Л. С. Понтрягина [2] по теории характеров локально бикомпактных абелевых групп, поставили вопрос о естественных границах основных результатов классического гармонического анализа. Эта задача основана на следующей интерпретации обычного ряда Фурье в комплексной форме. Пусть $f(x)$ — комплекснозначная суммируемая с квадратом функция на окружности единичной длины (или на отрезке $[0, 1]$), c_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{2\pi inx},\ n$ — целое$\}$:

$$c_n = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi inx}\, dx.$$

Тогда ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}$$

функции $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ в L^2 $[0, 1]$.

Мера Лебега на [0, 1] порождает меру Хаара на окружности (единичной длины) G, рассматриваемой как группа вращений плоскости, а функции $x \to e^{2\pi i n x}$ представляют собой полный набор неприводимых *унитарных представлений* топологич. группы G. Поэтому все величины, входящие в определение ряда Фурье, получают теоретико-групповой смысл и появляется возможность обобщения понятия ряда Фурье, основанная на теории неприводимых унитарных представлений топологич. групп. При этом Г. а. а. не только позволяет найти естественную форму результатов классического гармонич. анализа на прямой или окружности, но и установить новые результаты, относящиеся к бо́льшим классам топологич. групп.

Г. а. а. как гармонический анализ на группах зародился в значительной мере на основе теории характеров локально бикомпактных абелевых групп, созданной Л. С. Понтрягиным [2] (см. также [7], [8], [9]). Г. а. а. является одной из естественных областей приложения методов теории банаховых алгебр и может до нек-рой степени рассматриваться как одна из ветвей этой теории. С другой стороны, рамки Г. а. а. являются естественными для ряда классических задач теории функций и функционального анализа.

Приложения Г. а. а. весьма многообразны. Результаты Г. а. а. применяются в общей теории локально бикомпактных групп (напр., в структурных теоремах), в теории динамич. систем, в теории представлений бесконечных групп (к-рая, в свою очередь, служит одним из основных инструментов Г. а. а.) и во многих других математич. теориях.

Наиболее разработанным разделом Г. а. а. является теория интеграла Фурье на локально бикомпактной абелевой группе. Среди некоммутативных групп особое положение занимают бикомпактные группы, теория представлений к-рых имеет сравнительно простой и законченный вид: для бикомпактных групп получен ответ на многие классич. вопросы гармонич. анализа. В случае небикомпактных некоммутативных групп общая теория далека от завершения (1977). Однако и в этом случае известны естественные границы ряда фундаментальных результатов классического гармонич. анализа.

Связь задач Г. а. а. с теорией банаховых алгебр основана на возможности построить по любой локально бикомпактной топологич. группе G две банаховы алгебры, играющие большую роль в теории представлений группы G: *групповую алгебру* и *алгебру мер* $M(G)$, к-рая определяется следующим образом. Пусть $C_0(G)$ — множество непрерывных функций f на G с бикомпактным носителем, $M(G)$ — банахово пространство ограниченных *регулярных мер* на G. Введение в $M(G)$ умножения — свертки $(\mu_1, \mu_2) \to \mu_1 * \mu_2$ и инволюции $\mu \to \mu^*$ посредством соотношений (для всех $f \in C_0$)

$$\int_G f(g)\, d(\mu_1 * \mu_2)(g) = \int_G \int_G f(gh)\, d\mu_1(g)\, d\mu_2(h),$$

$$\int_G f(g)\, d\mu^*(g) = \overline{\int_G f(g^{-1})\, d\mu(g)}$$

превращает $M(G)$ в банахову алгебру с инволюцией, называемую алгеброй мер группы G. Если dg — левоинвариантная мера Хаара на G, то сопоставление каждому элементу $f(g)$ групповой алгебры $L^1(G)$ меры $f(g)dg$ приводит к изометрич. отображению алгебры $L^1(G)$ на замкнутую подалгебру алгебры мер $M(G)$, сохраняющему инволюцию. В этом смысле $L^1(G)$ может рассматриваться как замкнутая подалгебра алгебры $M(G)$.

Г. а. а. на локально бикомпактной абелевой группе. Для построения интеграла Фурье на локально бикомпактной абелевой группе G необходимы следующие факты. Любое неприводимое

унитарное представление G одномерно и определяет непрерывный гомоморфизм G в мультипликативную группу U комплексных чисел с модулем 1. Такое отображение $\chi\colon G\to U$ наз. унитарным характером группы G. Пусть $\hat{G}$ — группа характеров группы G. Теорема двойственности Понтрягина утверждает, что отображение $\eta\colon G\to\hat{\hat{G}}$, определяемое формулой

$$(\eta(g))(\chi)=\chi(g),$$

где $\chi\in\hat{G}$, $g\in G$, есть топологич. изоморфизм группы G на $\hat{\hat{G}}$ (см. [2], [3], [4], [6]). При этом группа G бикомпактна тогда и только тогда, когда двойственная к ней группа $\hat{G}$ дискретна. Группа характеров аддитивной группы K недискретного локально бикомпактного поля изоморфна K; группа характеров группы U изоморфна группе целых чисел Z. Если H — замкнутая подгруппа группы G и $H^{\perp}$ — множество таких $\chi\in G$, что $\chi\equiv 1$ на H, то $H^{\perp}$ есть замкнутая подгруппа группы G, $(H^{-})^{\perp}=\eta(H)$, $\hat{G}/H^{-}\approx\hat{H}$, и любой унитарный характер подгруппы H продолжается до унитарного характера группы G.

Интегралом Фурье на группе G (или преобразованием Фурье на группе G) наз. отображение F, к-рое мере $\mu\in M(G)$ ставит в соответствие функцию $\hat{\mu}=F\mu$ на $\hat{G}$, определяемую равенством

$$(F\mu)(\chi)=\int_G\overline{\chi(g)}\,d\mu(g).$$

Копреобразованием Фурье наз. отображение $\overline{F}$, определяемое равенством

$$(\overline{F}\mu)(\chi)=\int_G\chi(g)\,d\mu(g),\quad\mu\in M(G).$$

Для $f\in L^1(G)$ функция $F(f(g)dg)$ обозначается $\hat{f}$ или Ff (соответственно $\overline{F}f$). Отображения F и $\overline{F}$ являются *мономорфизмами* $M(G)$ в $L^{\infty}(\hat{G})$; образом для $M(G)$ при этих отображениях служит алгебра $B(G)$ линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций на $\hat{G}$. Справедлива обобщенная теорема Бохнера (см. [4], [6]): функция $F\mu$ является положительно определенной функцией на G тогда и только тогда, когда μ — положительная мера, и в этом случае

$$\sup_{\chi\in\hat{G}}|F\mu(\chi)|=F\mu(\hat{e})=\|\mu\|,$$

где $\hat{e}$ — единица группы $\hat{G}$.

Топологич. пространство $\hat{G}$ канонически гомеоморфно спектру кольца $L^1(G)$ (или пространству максимальных идеалов алгебры $L^1(G)$). Именно, характеру $\chi\in\hat{G}$ ставится в соответствие характер коммутативной алгебры $L^1(G)$, определяемый формулой

$$f\longrightarrow\int_G f(g)\chi(g)\,dg,\quad f\in L^1(G);$$

при этом копреобразование Фурье $\overline{F}$ совпадает на $L^1(G)$ с *Гельфанда представлением* алгебры $L^1(G)$. Спектр кольца $M(G)$, вообще говоря, не гомеоморфен $\hat{G}$.

Пусть $d\chi$ — мера Хаара на $\hat{G}$, а $L^2(\hat{G})$ — соответствующее гильбертово пространство. Справедлива следующая теорема Планшереля (см. [4], [16]): если $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$, то $Ff\in L^2(\hat{G})$, и при нек-рой нормировке мер dg и $d\chi$ отображение $f\to Ff$ множества $L^1(G)\cap L^2(G)$ в $L^2(\hat{G})$ продолжается единственным образом до унитарного оператора F из $L^2(G)$ в $L^2(\hat{G})$. Этот оператор наз. преобразованием Фурье в $L^2(G)$. В этом случае меры dg и $d\chi$ наз. со-

гласованными. Пусть через $A(G)$ обозначено линейное подпространство пространства $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f*g$, где $f,\ g\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Справедлива следующая формула обращения Фурье (см. [4], [16]): если $f\in A(G)$, то $Ff\in L^1(\hat{G})$ и для всех $g\in G$ имеет место равенство

$$f(g)=\int_{\hat{G}}\chi(g)\,(Ff)(\chi)\,d\chi,$$

т. е. если η — каноническое отображение G в $\hat{\hat{G}}$, то $f=(\overline{Ff})\circ\eta$ для всех $f\in A(G)$. Пусть $\mathfrak{B}(G)$ — множество таких $f\in L^1(G)$, что $f\in L^1(\hat{G})$. Тогда сужение F на $\mathfrak{B}(G)$ есть взаимно однозначное отображение $\mathfrak{B}(G)$ на $\mathfrak{B}(\hat{G})$; обратное отображение есть сужение $\overline{F}$ на $\mathfrak{B}(\hat{G})$. Если $f,\ g\in L^2(G)$, то $F(fg)=(Ff)*(Fg)$.

Классическая *Пуассона формула суммирования* получает в Г. а. а. следующую естественную интерпретацию. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, dg — мера Хаара на G, dh — мера Хаара на H и dk — мера Хаара на $K=G/H$. Пусть $(G/H)^{\wedge}$ отождествляется с $H^{\perp}$ и $d\rho$ — мера Хаара на $H^{\perp}$, согласованная с dk. Наконец, пусть $f\in L^1(G)$ и пусть сужение на $H^{\perp}$ непрерывной функции Ff интегрируемо по мере $d\rho$. Тогда для почти всех $g\in G$ функция $h\to f(gh)$ на H интегрируема по мере dh, и

$$\int_H f(gh)\,dh=\int_{H^{\perp}}\rho(g)\,(Ff)(\rho)\,d\rho.$$

Эта формула наз. обобщенной формулой суммирования Пуассона.

Важной внутренней задачей Г. а. а. является изучение банаховых алгебр $L^1(G)$ и $M(G)$ с точки зрения преобразования Фурье на G. Алгебра $L^1(G)$ есть вполне симметричная алгебра. Равенство $M(G)=L^1(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G дискретна. Если G не дискретна, то $M(G)$ содержит несимметричные максимальные идеалы. Пусть $A(\hat{G})$ (соответственно $B(\hat{G})$) — множество преобразований Фурье элементов алгебры $L^1(G)$ (соответственно $M(G)$). $A(\hat{G})$ и $B(\hat{G})$ являются алгебрами функций на $\hat{G}$; при этом $A(\hat{G})$ — регулярная алгебра, и $f\in A(\hat{G})$ тогда и только тогда, когда $f=f_1*f_2$ для нек-рых $f_1,\ f_2\in L^2(\hat{G})$. Множество тех $f\in L^1(G)$, для к-рых носитель функции Ff бикомпактен, есть плотное подмножество в $L^1(G)$.

Следующие результаты описывают функциональные свойства преобразования Фурье на G. Пусть F — функция, определенная на $[-1,1]$, и пусть $\hat{G}$ недискретна. Пусть F действует на $A(\hat{G})$, т. е. $F(\varphi)\in A(\hat{G})$ для любой функции $\varphi\in A(G)$, область значений к-рой лежит в $[-1,\ 1]$. Тогда F аналитична на $[-1,1]$, и если G недискретна, то $F(0)=0$. Обратно, аналитическая на $[-1,1]$ функция F ($F(0)=0$, если G недискретна) действует на $A(\hat{G})$. Функция F действует на $B(G)$ тогда и только тогда, когда F есть сужение на $[-1,\ 1]$ целой вещественной аналитич. функции. Пусть F определена на $[-1,1]$ и $\hat{G}$ есть бесконечная дискретная группа. F действует на $A(\hat{G})$ тогда и только тогда, когда $F(0)=0$ и F аналитична в некоторой окрестности начала (см. [12], [13], где имеется подробная библиография).

Традиционным вопросом теории банаховых алгебр является вопрос о структуре и свойствах замкнутых подалгебр. Следующие результаты относятся к замкнутым подалгебрам алгебры $L^1(G)$. Пусть S — борелевская полугруппа в локально бикомпактной абелевой группе G и $L^1(S)$ — максимальная подалгебра в $L^1(G)$. Тогда S содержится в замкнутой полугруппе

$P \subset G$, индуцирующей архимедов порядок на G. Коммутативная банахова алгебра A наз. алгеброй Стоуна — Вейерштрасса, если любая ее симметричная подалгебра $B \subset A$, отделяющая точки спектра M кольца A и не обращающаяся в нуль одновременно ни в одной точке из M, плотна в A. $L^1(G)$ есть алгебра Стоуна — Вейерштрасса в том и только в том случае, если G вполне несвязна.

Одним из направлений современных исследований в Г. а. а. является теория *тонких множеств* в локально бикомпактных абелевых группах, к-рая может рассматриваться как обобщение более специальных результатов классического гармонич. анализа (в частности, теории лакунарных тригонометрич. рядов). Пусть G — локально бикомпактная абелева группа, e — единица группы G. Множество $E \subset G$ наз. независимым, если для любых $g_1, \ldots, g_k \in E$ и целых $n_1, \ldots, n_k$ либо $g_1^{n_1} \cdot g_2^{n_2} - \ldots - g_k^{n_k} = e$, либо $\prod_{i=1}^{k} g_i^{n_i} \neq e$. Любая недискретная локально бикомпактная абелева группа содержит независимое множество, гомеоморфное канторову множеству. Среди независимых множеств следует выделить два важных класса множеств, а именно, множества Кронекера и множества типа K_q в группах D_q. Множество E в локально бикомпактной абелевой группе наз. множеством Кронекера, если для любой непрерывной функции f на E с модулем 1 и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой характер $\chi \in \hat{G}$, что $\sup_E |f(g) - \chi(g)| < \varepsilon$. Множество Кронекера независимо и не содержит элементов конечного порядка. Пусть $\mathbb{Z}_q$ — циклич. группа порядка $q \geqslant 2$ и D_q - прямое произведение счетного числа групп, изоморфных $\mathbb{Z}_q$. Множество E в D_q наз. множеством типа K_q, если любая непрерывная функция $f\colon E \to \mathbb{Z}_q$ ($\mathbb{Z}_q$ рассматривается как группа корней из единицы) совпадает на E с нек-рым унитарным характером группы D_q. Множества типа K_q независимы. Если в любой окрестности единичного элемента локально бикомпактной группы G содержится элемент бесконечного порядка, то G содержит множество Кронекера, гомеоморфное канторову множеству. Если G — недискретная локально бикомпактная абелева группа и если существует окрестность единичного элемента без элементов бесконечного порядка, то G содержит D_q (для нек-рого $q \geqslant 2$) как замкнутую подгруппу; любая группа D_q содержит множество типа K_q, гомеоморфное канторову множеству.

В конечномерных метрических локально бикомпактных абелевых группах независимое множество есть вполне несвязное множество. Бесконечномерный тор содержит множество Кронекера, гомеоморфное отрезку. Объединение двух множеств Кронекера на окружности может оказаться независимым множеством, не являющимся множеством Кронекера. На бесконечномерном торе добавлением одной точки к нек-рому множеству Кронекера можно получить независимое множество, не являющееся множеством Кронекера. Если E — бикомпактное множество Кронекера в G и μ — ограниченная мера, сосредоточенная на E, то

$$\max_{\chi \in \hat{G}} |F\mu(\chi)| = \|\mu\|.$$

Другой важный класс подмножеств локально бикомпактных абелевых групп образуют множества Хельсона - бикомпактные множества $P \subset G$, обладающие тем свойством, что любая непрерывная функция F на P есть сужение на P нек-рого элемента алгебры $A(\hat{G})$. Всякое бикомпактное множество Кронекера и всякое бикомпактное множество типа K_q в D_q являются множествами Хельсона. Не всякое счетное бикомпактное подмножество локально бикомпактной абеле-

вой группы G есть множество Хельсона; существуют независимые канторовы множества, не являющиеся таковыми. Бикомпактное подмножество $P \subset G$ будет множеством Хельсона тогда и только тогда, когда $\|\mu\|$ и $\sup_{\widehat{G}} |(F\mu)(\chi)|$ — эквивалентные нормы на банаховом пространстве $M(P)$ ограниченных мер на P. Пусть через $I(P)$ обозначено множество всех тех $f \in L^1(G)$, для которых $(\overline{Ff})(g)=0$ при всех $g \in P$. Тогда $I(P)$ есть замкнутый идеал в $L^1(\widehat{G})$. Сопряженное пространство к $L^1(\widehat{G})/I(P)$ изометрично пространству $\Phi(P)$, состоящему из всех тех $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$, для к-рых

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\varphi(\chi^{-1})\,d\chi = 0$$

при любых $f \in I(P)$. Бикомпактное множество P является множеством Хельсона тогда и только тогда, когда любая функция $\varphi \in \Phi(P)$ равна почти всюду преобразованию Фурье нек-рой ограниченной меры, сосредоточенной на P. Если P — множество Хельсона в G и σ — ненулевая мера, сосредоточенная на P, то F_σ не стремится к нулю на бесконечности.

При изучении рядов Фурье на бикомпактных абелевых группах большую роль играет понятие **множеств Сидона** в дискретных абелевых группах. Пусть G — бикомпактная абелева группа, E — подмножество $\widehat{G}$. Функция $f \in L^1(G)$ наз. **E-функцией**, если $\hat{f}(\chi)=0$ для всех $\chi \in E$. Линейная комбинация f унитарных характеров на G наз. **E-многочленом**, если f есть E-функция. Множество E наз. **множеством Сидона**, если существует такая постоянная $B=B_E$, что

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\chi)| \leqslant B \max_{g \in G} |f(g)|$$

для любого E-многочлена на G. Следующие условия эквивалентны:

E есть множество Сидона в $\widehat{G}$;

для любой ограниченной E-функции f ряд $\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\chi)|$ сходится;

для любой непрерывной E-функции f ряд $\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\chi)|$ сходится;

любая ограниченная функция f на E совпадает с сужением на E нек-рого элемента $\hat{f} \in B(G)$;

любая функция на E, стремящаяся к нулю на бесконечности, совпадает с сужением на E нек-рой функции $\hat{f} \in A(G)$.

Любое бесконечное множество в $\widehat{G}$ содержит бесконечное множество Сидона. Любое независимое подмножество из $\widehat{G}$ есть множество Сидона.

Другим интенсивно развивающимся направлением Г. а. а., тесно связанным с теорией тонких множеств, является теория замкнутых идеалов в $L^1(G)$, и в частности теория спектрального синтеза. Общая постановка задачи спектрального синтеза такова. Пусть I есть замкнутый идеал в $L^1(G)$; требуется выяснить, при каких условиях I является пересечением максимальных идеалов в $L^1(G)$, содержащих I (при этом следует отметить, что любой максимальный идеал в $L^1(G)$ регулярен, т.е. замкнут). Одним из важнейших результатов теории спектрального синтеза — *Винера тауберова теорема*: если J — замкнутый идеал в $L^1(G)$, $J \neq L^1(G)$, то существует такой характер $\chi \in \widehat{G}$, что $(Ff)(\chi)=0$ для всех $f \in J$. Это утверждение может рассматриваться как положительное решение поставленной выше проблемы для случая $I=L^1(G)$. Если любой замкнутый идеал в $L^1(G)$ есть пересечение содержащих его максимальных идеалов, то говорят, что G допускает **спектральный синтез**. Бикомпактная группа до-

пускает спектральный синтез. С другой стороны, справедлива т е о р е м а [15]: если группа $\hat{G}$ недискретна, то G не допускает спектрального синтеза. Отсюда следует, что если $\hat{G}$ недискретна, то алгебра $L^1(G)$ имеет несимметричные замкнутые идеалы.

Г. а. а. на бикомпактных группах может рассматриваться как часть теории представлений бикомпактных групп; эта теория тесно связана с теорией почти периодич. функций на группах; см. также *Бора компакт* и обзоры в [11], [4]. Задачи Г. а. а. на произвольной локально бикомпактной топологич. группе значительно сложнее ввиду недостаточной разработанности и сложности общей теории *бесконечномерных представлений* локально бикомпактной группы. Однако и в этом случае можно определить интеграл Фурье на локально бикомпактной группе (см. [5]) и получить аналог обобщенной теоремы Бохнера, формулу Планшереля и ряд других общих теорем (см. [8], [11]).

Лит.: [1] P e t e r F., W e y l H., «Math. Ann.», 1927, Bd 97, S. 737—55; [2] П о н т р я г и н Л. С., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 361—88; [3] K a m p e n E. R. van, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1934, v. 20, p. 434—36; [4] В е й л ь А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [5] Г е л ь ф а н д И. М., Р а й к о в Д. А., «Матем. сб.», 1943, т. 13, с. 301—16; [6] Р а й к о в Д. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 14, с. 1—86; [7] Г е л ь ф а н д И. М., Р а й к о в Д. А., Ш и л о в Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [8] Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [9] П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, 2 изд., М., 1954; [10] Б у р б а к и Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [11] Д и к с м ь е Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [12] H e l s o n H., (a. o.), «Acta Math.», 1959, v. 102, p. 135—57; [13] Х ь ю и т т Э., Р о с с К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1—2, М., 1975; [14] Л ю м и с Л. Х., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [15] M a l l i a v i n P., «Publ. Math. IHES», 1959, № 2, p. 61—68; [16] К р е й н М. Г., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, с. 482 -86.

Е. А. Горин, А. И. Штерн.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН — 1) Г. м.— многочлен по переменным $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющий *Лапласа уравнению*. Любой Г. м. может быть представлен в виде суммы о д н о р о д н ы х Г. м. При $n=2$ среди однородных Г. м. степени m имеется только два линейно независимых, напр. действительная и мнимая части в выражении $(x_1+ix_2)^m$. При $n-3$ число линейно независимых однородных Г. м. степени m равно $2m+1$. В общем случае $n\geqslant 2$ число линейно независимых однородных Г. м. степени m равно

$$K_n^m - K_n^{m-2}, \quad m\geqslant 2,$$

где

$$K_n^m = \frac{n\,(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$$

— число размещений из n по m с m повторениями. Однородные Г. м. $V_m(x)$ наз. также ш а р о в ы м и ф у н к ц и я м и (в особенности при $n=3$). При $n=3$ введение сферич. координат позволяет записать:

$$V_m(x) = r^m Y_m(\theta, \varphi),$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, а $Y_m(\theta, \varphi)$ есть *сферическая функция* степени m.

Лит.: [1] С о б о л е в С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [2] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [3] Б р е л о М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

2) Г. м.— конечная линейная комбинация *гармоник*. Действительнозначные Г. м. представимы в виде

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k x+\varphi_k)$$

при нек-ром натуральном N, неотрицательных A_k, действительных ω_k, φ_k, $k=1, 2, \ldots, N$. Комплекснозначные Г. м. представимы в виде

$$\sum_{k=-m}^{n} c_k e^{i\omega_k x}$$

при натуральных значениях m, n, действительных значениях ω_k и комплексных значениях c_k, $k=-m, -m+1, \ldots, n$. Г. м. являются простейшими *почти периодическими функциями*. *В. Ф. Емельянов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД — числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Каждый член Г. р. (начиная со второго) является *гармоническим средним* двух соседних (отсюда назв. Г. р.). Г. р. расходится (Г. Лейбниц, G. Leibniz, 1673), и его частные суммы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

растут как $\ln n$ (Л. Эйлер, L. Euler, 1740): существует такая постоянная $c>0$, наз. *Эйлера постоянной*, что $s_n = \ln n + c + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

наз. обобщенным Г. р., он сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА МЕТОД — приближенный метод исследования нелинейных колебательных систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Суть Г. б. м. состоит в замене в колебательных системах нелинейных сил специальным образом построенными линейными функциями, в силу чего он позволяет использовать теорию линейных дифференциальных уравнений для приближенного анализа нелинейных систем.

Линейные функции строятся с помощью специального приема, наз. гармонич. линеаризацией. Пусть задана нелинейная функция (сила)

$$F(x, \dot{x}) = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

где ε — малый параметр. Гармонической линеаризацией наз. замена $F(x, \dot{x})$ линейной функцией

$$F_l(x, \dot{x}) = kx + \lambda\dot{x},$$

где параметры k и λ вычисляются по формулам:

$$k(a) = \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$\lambda(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$\psi = \omega t + \theta.$$

Если $x = a\cos(\omega t+\theta)$, $a=\text{const}$, $\omega=\text{const}$, $\theta=\text{const}$, то нелинейная сила $F(x, \dot{x})$ является периодич. функцией времени, и ее разложение в ряд Фурье содержит, вообще говоря, бесконечное число гармоник с частотами $n\omega$, $n=1,2\ldots$, т. е. оно имеет вид:

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \theta_n). \qquad (1)$$

Слагаемое $F_1\cos(\omega t+\theta_1)$ наз. основной гармоникой разложения (1). Амплитуда и фаза линейной функции F_l совпадают с аналогичными характеристиками основной гармоники нелинейной силы.

Применительно к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}), \qquad (2)$$

типичному для теории квазилинейных колебаний, Г. б. м. заключается в замене $F(x, \dot{x})$ линейной функцией F_l, и вместо уравнения (2) рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + k_1 x = 0, \qquad (3)$$

где $k_1=\omega^2+k$. Принято называть F_l **эквивалентной линейной силой**, λ — **эквивалентным коэффициентом затухания**, k_1 — **эквивалентным коэффициентом упругости**. Доказано, что если нелинейное уравнение (2) имеет решение вида

$$x=a\cos(\omega t+\theta),$$

причем

$$\dot{a}=O(\varepsilon),\quad \omega=O(\varepsilon),$$

то разность между решениями уравнений (2) и (3) имеет порядок ε^2. В Г. б. м. частота колебаний зависит от амплитуды a (посредством величин k и λ).

Г. б. м. применяется для отыскания периодич. и квазипериодич. колебаний, периодич. и квазипериодич. режимов в теории автоматич. регулирования, стационарных режимов и для исследования их устойчивости. Особенно большое распространение он получил в теории автоматич. регулирования.

Лит.: [1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, К., 1937; [2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [3] Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, М., 1960.

Е. А. Гребеников.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ, синусоидальное колебание,— периодическое изменение во времени физич. величины, записываемое аналитически в виде

$$x=x(t)=A\cos(\omega t-\alpha)=\mathrm{Re}\left[Be^{i\omega t}\right],$$

где $x=x(t)$ - значение колеблющейся величины в момент времени t, $|A|=|B|$ — амплитуда, ω — циклическая (круговая) частота, α — начальная фаза колебаний. Продолжительность одного полного колебания, равная $T=2\pi/\omega$, наз. **периодом** Г. к., а величина $\nu=1/T$, равная числу полных колебаний в единицу времени, наз. **частотой** Г. к. ($\omega=2\pi\nu$). Период Г. к. не зависит от амплитуды. Скорость, ускорение и все высшие производные гармонически колеблющейся величины изменяются гармонически с той же частотой. На *фазовой плоскости* $(x, \dot{x})$ Г. к. изображается эллипсом. В природе из-за диссипации энергии абсолютно точные Г. к. не встречаются. Однако существует много важных процессов, близких к Г. к. Таковы малые колебания механич. систем относительно их устойчивого положения равновесия. Получающиеся при этом частоты (так наз. **собственные частоты**) колебаний не зависят от начальных условий движения, а определяются лишь самой колеблющейся системой как таковой. Напр., малые колебания (под действием силы тяжести) математич. маятника на нити длины l описываются дифференциальным уравнением

$$m\ddot{lx}=-mgx,$$

где g — ускорение силы тяжести, а $x(t)$ — угол между вертикалью и нитью маятника. Общее решение этого уравнения имеет вид $x=A\cos(\omega t-\alpha)$, где (собственная) частота колебаний $\omega=\sqrt{g/l}$ зависит только от g и l, а амплитуда A и фаза α являются постоянными интегрирования, выбираемыми на основе начальных условий.

Г. к. играют большую роль в изучении общих колебаний, так как сложные периодически и почти периодически меняющиеся величины могут быть с любой степенью точности представлены суммой различных Г. к. Математически это соответствует приближению функций тригонометрич. рядами и *Фурье интегралами*.

Классический ряд Фурье

$$x(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}a_ne^{int}$$

комплекснозначной функции $x(t)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, может рассматриваться как разложение $x(t)$ на сумму Г. к. с целочисленными частотами $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Коэффициент Фурье

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, e^{-int}\, dt$$

определяет амплитуду ($|a_n|$) и сдвиг фазы ($\arg a_n$) Г. к. частоты n. Совокупность всех коэффициентов Фурье определяет спектр $x(t)$ и показывает, какие Г. к. действительно входят в $x(t)$ и каковы амплитуды и начальные фазы этих колебаний. Знание спектра заменяет знание функции $x(t)$.

Функцию $x(t)$, определенную на $(-\infty, \infty)$, уже нельзя построить из Г. к. с целочисленными частотами. Для ее построения нужны колебания всех частот: функция $x(t)$ представляется в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(n)\, e^{int}\, dn,$$

где

$$a(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-int}\, dt$$

— спектральная плотность функции $x(t)$.

Эти представления функций являются основой *Фурье методов* решения различных задач в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Лит.: [1] Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959.

Л. П. Купцов.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X с пучком $\mathfrak{H}$ непрерывных действительных функций с аксиоматически фиксируемыми в той или иной форме тремя основными свойствами классических *гармонических функций*: свойство сходимости, выражаемое второй *Гарнака теоремой*; принцип экстремума; разрешимость *Дирихле задачи* для достаточно широкого класса открытых множеств из X. Функции пучка $\mathfrak{H}$ получают наименование гармонич. функций; преимущество этого аксиоматич. подхода состоит в том, что с его помощью в теорию включаются решения не только *Лапласа уравнения*, но и нек-рых других уравнений эллиптич. и параболич. типов. Пусть X — локально компактное топологич. пространство. Под пучком функций на X здесь понимается отображение $\mathfrak{F}$, определенное на семействе всех открытых множеств $U, V, \ldots$ из X и такое, что: 1) $\mathfrak{F}(U)$ есть семейство функций на U; 2) если $U \subset V$, то сужение любой функции из $\mathfrak{F}(V)$ на U принадлежит $\mathfrak{F}(U)$; 3) для любого семейства $\{U_i\}_{i \in I}$ функция на $\bigcup_{i \in I} U_i$ принадлежит $\mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$, если для всех $i \in I$ ее сужение на U_i принадлежит $\mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$. Пучок функций $\mathfrak{U}$ наз. гипергармоническим, если $\mathfrak{U}(U)$ для любого U есть выпуклый конус полунепрерывных и конечных снизу действительных функций на U. Пучок функций $\mathfrak{H}$ наз. гармоническим, если $\mathfrak{H}(U)$ для любого U есть действительное векторное пространство непрерывных функций на U; в дальнейшем используется только гармонич. пучок

$$\mathfrak{H} : U \to \mathfrak{U}(U) \cap (-\mathfrak{U}(U)).$$

Локально компактное пространство X наз. Г.п., если выполняются следующие аксиомы (см. [3]).

Аксиома положительности: пучок $\mathfrak{H}$ невырожден во всех точках $x \in X$, т. е. для любого $x \in X$ существует функция $u \in \mathfrak{H}$, определенная в окрестности x, причем $u(x) \neq 0$.

Аксиома сходимости: если возрастающая последовательность функций из $\mathfrak{H}(U)$ локально ограничена, то она сходится к функции из $\mathfrak{H}(U)$.

Аксиома разрешимости: существует базис разрешимых открытых множеств U, т. е. таких,

что для любой непрерывной функции f с компактным носителем на ∂U существует обобщенное в смысле Винера – Перрона (см. *Перрона метод*) решение задачи Дирихле для U из $\mathfrak{H}(U)$.

Аксиома мажоранты: если полунепрерывная и конечная снизу функция u на U для любого относительно компактного множества V такого, что $\overline{V}\subset U$, удовлетворяет условию

$$\sup\{v\in\mathfrak{H}(U);\ v(x)\leqslant u(x),\ x\in\partial V\}-\mu^V u\leqslant u$$

на V, то $u\in\mathfrak{U}(U)$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с пучком классич. решений уравнения Лапласа или *теплопроводности уравнения* образует Г. п. Имеется ряд других вариантов аксиоматики гармонич. пространств. Г. п. локально связны, не содержат изолированных точек; они имеют базис из связных разрешимых множеств.

Гипергармонич. функция u на Г. п. X наз. супергармонической, если для любого относительно компактного разрешимого множества V наибольшая миноранта $\mu^V u$ есть гармонич. функция. Положительная супергармонич. функция, для к-рой любая гармонич. миноранта тождественно равна нулю, наз. потенциалом. Г. п. X наз. $\mathfrak{H}$-гармоническим (или p-гармоническим), если для любого $x\in X$ существует положительная супергармонич. функция u (или, соответственно, потенциал u) на X такая, что $u(x)>0$.

Любое Г. п. допускает покрытие такими открытыми множествами U, для к-рых выполняется принцип минимума в следующей форме: если гипергармоническая функция $u\in\mathfrak{U}(U)$ положительна вне пересечения U с любым компактом из X и

$$\lim_{x\to y}\inf u(x)\geqslant 0$$

для всех $y\in\partial U$, то $u\geqslant 0$. В случае p-гармонич. пространства этот принцип минимума выполняется для всех открытых множеств. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с пучком классич. решений уравнения Лапласа при $n\geqslant 2$ образует $\mathfrak{H}$-гармонич. пространство, а при $n\geqslant 3$ оно образует p-гармонич. пространство; пространство $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1$, $n\geqslant 1$, с пучком решений уравнения теплопроводности образует p-гармонич. пространство.

Основными вопросами теории Г. п. являются: теория разрешимости задачи Дирихле, включающая исследование поведения обобщенного решения этой задачи в граничных точках; теория *емкости* множеств в Г. п.; изучение проблемы выметания (см. *Выметания метод*) и *Робена задачи*.

Лит.: [1] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [2] Bauer H., Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, B., 1966 (Lecture Notes in Mathematics, № 22); [3] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972; [4] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – число, обратная величина к-рого является средним арифметическим обратных величин данных чисел, т. е. число

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Например, $\frac{1}{n}$ является Г. с. дробей $\frac{1}{n-1}$ и $\frac{1}{n+1}$, $n=2,3,\ldots$. Г. с. чисел не превосходит их арифметич. среднего.

Л. Д. Кудрявцев.

ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ ПРИНЦИП: при отображениях, осуществляемых однозначными аналитич. функциями, *гармоническая мера* не убывает. Если $\omega(z;\alpha,D)$ – гармонич. мера граничного множества α относительно области D на плоскости комплексного переменного z, то одна из конкретных формулировок Г. м. п. утверждает следующее. Пусть в области D_z

с границей Γ_z, состоящей из конечного числа жордановых дуг, задана однозначная аналитич. функция $w=w(z)$, удовлетворяющая условиям: значения $w=w(z)$, $z\in D_z$, попадают в область D_w с границей Γ_w, состоящей из конечного числа жордановых дуг; функция $w(z)$ непрерывно продолжается на нек-рое множество $\alpha_z\subset\Gamma_z$, состоящее из конечного числа дуг, и значения $w(z)$ на α_z принадлежат множеству $E\subset\overline{D}_w$ с границей ∂E, состоящей из конечного числа жордановых дуг. При этих условиях во всякой точке $z\in D_z$, в к-рой $w(z)\notin E$, имеет место соотношение

$$\omega(z;\ \alpha_z,\ D_z)\leqslant\omega(w(z);\ \partial E,\ D_w^*),\qquad(1)$$

где D_w^* обозначает подобласть D_w такую, что точка $w(z)\in D_w^*$ и $\partial D_w^*\subset\Gamma_w\cup\partial E$. Если в (1) имеет место равенство в какой-либо одной точке z, то оно будет иметь место всюду в D_z. В частности, при взаимно однозначном конформном отображении D_z на D_w выполняется тождество

$$\omega(z;\ \alpha_z,\ D_z)\equiv\omega(w(z);\ \alpha_w,\ D_w).$$

Г. м. п. был установлен Р. Неванлинной, давшим ему многочисленные применения (см. [1], [2]). Например, из Г. м. п. выводится *двух констант теорема*, из к-рой, в свою очередь, следует, что для функции $w(z)$, голоморфной в области D_z, максимальное значение функции $\ln|w(z)|$ на линии уровня $\{z;\ \omega(z;\ \alpha_z, D_z)=t\}$ является выпуклой функцией параметра $t\in(0,\ 1)$.

Г. м. п. обобщается для голоморфных функций $w=w(z)$, $z=(z_1,\ldots,\ z_n)$, нескольких комплексных переменных, $n\geqslant1$.

Лит.: [1] Nevanlinna F., Nevanlinna R., «Acta Soc. scient. fennica», 1922, n. 50, № 5, p. 1—46; [2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941.

П. М. Тамразов.

ГАРНАКА ИНТЕГРАЛ — обобщение несобственного интеграла Римана на класс функций f, множество точек неограниченности к-рых E_f имеет нулевую жорданову меру и к-рые интегрируемы по Риману во всяком сегменте, не содержащем точек из E_f. Пусть Δ_i, $i=1,2,\ldots,\ n,$ — конечная система интервалов, содержащая E_f. Тогда Г. и. определяется равенством

$$(H)\int_a^b f(x)\,dx=\lim(R)\int_{(a,\ b)\setminus\bigcup_i\Delta_i}f(x)\,dx,$$

если последний предел при $\operatorname{mes}\bigcup_i\Delta_i\to0$ существует. Г. и. введен А. Гарнаком (Харнаком) [1]. Позднее к этому определению было добавлено требование, чтобы каждый интервал Δ_i имел непустое пересечение с E_f. При этом Г. и. становится, вообще говоря, условно сходящимся. Г. и. частично перекрывается с *Лебега интегралом* и покрывается *Перрона интегралом* и *Данжуа интегралом*. В настоящее время Г. и. представляет лишь методич. и историч. интерес.

Лит.: [1] Harnack A., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 305—26; [2] Песин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966.

В. А. Скворцов.

ГАРНАКА НЕРАВЕНСТВО (двойное) — неравенство, оценивающее сверху и снизу отношение $u(x)/u(y)$ двух значений положительной гармонич. функции; получено А. Гарнаком (Харнаком) [1]. Пусть $u(x)\geqslant0$ — гармоническая в области G n-мерного евклидова пространства функция, $E_r(y)$ — шар $\{x:|x-y|<r\}$ радиуса r с центром в точке y. Если замыкание $\overline{E_r(y)}\subset G$, то для всех $x\in E_\rho(y)$, $0\leqslant\rho<r$, справедливо неравенство Гарнака

$$\left(\frac{r}{r+\rho}\right)^{n-2}\frac{r-\rho}{r+\rho}u(y)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{n-2}\frac{r+\rho}{r-\rho}u(y)\qquad(1)$$

или

$$\max_{x\in E_\rho(y)}u(x)\leqslant\left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^n\min_{x\in E_\rho(y)}u(x).$$

Если g — компакт, $\overline{g} \subset G$, то существует число $M = M(G, g)$, такое, что

$$M^{-1} u(y) \leqslant u(x) \leqslant M u(y) \qquad (2)$$

для любых x, $y \in g$. В частности,

$$\max_{x \in g} u(x) \leqslant M \min_{x \in g} u(x).$$

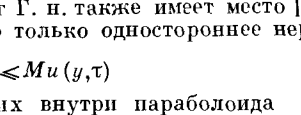
Из Г. н. следуют: сильный принцип максимума, *Гарнака теоремы* о последовательностях гармонич. функций теоремы о компактности семейств гармонич. функций, *Лиувилля теорема* и другие факты. Г. н. обобщается ([3], [4]) на неотрицательные решения широкого класса линейных эллиптич. уравнений вида

$$Lu \equiv -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)\,u = 0$$

с равномерно положительно определенной матрицей $\|a^{ij}\|$:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,\xi_i \xi_j \leqslant \Lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

где $\Lambda \geqslant \lambda > 0$ — числа, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — любой n-мерный вектор, $x \in G$. При этом постоянная M неравенства (2) зависит только от λ, Λ, некоторых норм младших коэффициентов оператора L и расстояния между границами G и g.



Для неотрицательных решений $u(x, t)$ равномерно параболич. уравнений вида $u_t + Lu = 0$ (коэффициенты оператора L могут зависеть и от t) аналог Г. н. также имеет место [5]. В этом случае возможно только одностороннее неравенство

$$u(x, t) \leqslant M u(y, \tau)$$

для точек (x, t), лежащих внутри параболоида

$$\{(x,t): |x-y|^2 \leqslant \mu^2(\tau - t),\ \tau - \nu^2 \leqslant t \leqslant \tau\}$$

с вершиной в точке (y, τ), обращенного полостью вниз (рис. *а*). При этом M зависит от величин y, τ, λ, Λ, μ, ν, нек-рых норм младших коэффициентов оператора L и от расстояний между границей параболоида и границей области, в к-рой $u(x, t) \geqslant 0$. Если, например, $u(x, t) \geqslant 0$ в цилиндре

$$Q = G \times (a, b], \quad \overline{g} \subset G,$$

расстояние между ∂G и ∂g больше или равно $d > 0$ и d достаточно мало, то в $g \times (a - d^2, b]$ выполняется неравенство [5]:

$$\ln \frac{u(x, t)}{u(y, \tau)} \leqslant M\left(\frac{|x-y|^2}{\tau - t} + \frac{\tau - t}{d^2} + 1\right).$$

В частности, если $u(x, t) \geqslant 0$ в Q (рис. *б*) и компакты Q_1, Q_2 вложены в Q, причем

$$\delta = \min_{(x,\,t) \in Q_1,\ (y,\,\tau) \in Q_2} (t - \tau) > 0,$$

то

$$\max_{(x,\,t) \in Q_2} u(x, t) \leqslant M \min_{(x,\,t) \in Q_1} u(x, t),$$

$$M = M(\delta, Q, Q_1, Q_2, L).$$

Пример функции

$$u(x, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x^i + t \sum_{i=1}^{n} k_i^2\right),$$

являющейся решением уравнения теплопроводности $u_t - \Delta u = 0$ при любых $k_1, k_2, \ldots k_n$, показывает невозможность в параболич. случае двусторонних оценок.

Лит.: [1] Harnack A., Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und die eindeutiger Potentialfunction in der Ebene, Lpz., 1887; [2] Курант Р., Уравнения

с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Серрин Дж., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 49—62; [4] Moser J., «Communs Pure and Appl. Math.», 1961, v. 14, № 3, p. 577—91; [5] его же, там же, 1964, v. 17, № 1, p. 101—34; [6] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [7] Ландис Е. М., Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, М., 1971. *Л. И. Камынин, Л. П. Купцов.*

ГАРНАКА ТЕОРЕМА — 1) Первая Г. т.: если последовательность функций, гармонических в ограниченной области G и непрерывных на $\overline{G}$, равномерно сходится на границе ∂G, то она равномерно сходится на G к гармонич. функции. Первая Г. т. имеет следующее обобщение для решений эллиптич. уравнения

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\,u = 0, \quad (*)$$

имеющего единственное решение *Дирихле задачи* при любой непрерывной краевой функции (см. [1]). Если последовательность решений уравнения (*) равномерно сходится на ∂G, то она равномерно сходится на G к решению уравнения (*).

2) Вторая Г. т., принцип Гарнака: если монотонная последовательность функций, гармонических в ограниченной области G, сходится в некоторой точке из G, то она сходится во всех точках области G к гармонич. функции, и эта сходимость равномерна в любой замкнутой подобласти области G. Вторая Г. т. допускает обобщение и для монотонной последовательности решений эллиптич. уравнения (*).

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968. *Л. И. Камынин.*

ГАРТОГСА ОБЛАСТЬ, полукруговая область, с плоскостью симметрии $\{z_n = a_n\}$ — область в пространстве n комплексных переменных, к-рая вместе с каждой точкой $z=(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \equiv ('z, z_n)$ содержит окружность

$$\{('z,\ a_n + e^{i\theta}(z_n - a_n)) : 0 \leqslant \theta < 2\pi\}.$$

Названа по имени Ф. Гартогса (Хартогса, F. Hartogs). Г. о. наз. полной, если вместе с каждой точкой $('z, z_n)$ она содержит круг

$$\{('z,\ a_n + \lambda(z_n - a_n)) : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Г. о. с плоскостью симметрии $\{z_n = 0\}$ удобно изображать на диаграмме Гартогса, т. е. образом Г. о. при отображении $('z, z_n) \to ('z, |z_n|)$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951. *Е. М. Чирка.*

ГАРТОГСА ТЕОРЕМА, Хартогса теорема,— 1) Основная (главная, или фундаментальная) Г. т.: если функция $f(z_1, \ldots, z_n)$, определенная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, в любой точке $\zeta \in D$ голоморфна по каждому переменному z_k (при фиксированных $z_j = \zeta_j$, $j \neq k$), $k = 1, \ldots, n$, то f голоморфна в D по совокупности переменных. Имеется много обобщений этой теоремы на случаи, когда часть переменных действительна или используются не все точки области D или когда допускаются нек-рые особенности f. Напр.: а) если функция $f(z, w)$, $z \in \mathbb{C}^k$, $w \in \mathbb{C}^l$, определенная в области $D = \{|z| < R_1,\ |w| < R_2\}$, голоморфна в области $\{|z| < r_1,\ |w| < R_2\}$, $r_1 < R_1$, и при каждом фиксированном w, $|w| < R_2$, голоморфна в шаре $|z| < R_1$, то f голоморфна в области D; б) если функция f, определенная в $\mathbb{C}^n$ со значениями из расширенной комплексной плоскости, рациональна по каждому переменному, то f — рациональная функция.

2) Г. т. о продолжении: пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ имеет вид $D = {}'D \times D'$, где ${}'D \subset \mathbb{C}^k$, $D' \subset \mathbb{C}^{n-k}$ и область D' ограничена. Любая функция f, голоморфная в окрестности множества $({}'\overline{D} \times \partial D') \cup (\{{}'a\} \times \overline{D'})$, ${}'a \in {}'D$, голоморфно продолжается в область D.

3) Иногда к Г. т. относят также теорему об устранении компактных особенностей (при $n>1$); она часто именуется теоремой Осгуда — Брауна (см. [3]).

4) Г. т. называют также теоремы о непрерывном расположении особых точек при $n>1$, об аналитичности множества особых точек и теорему о равномерной ограниченности последовательности поточечно ограниченных субгармонич. функций Теоремы 1), 1а), 2) и 4) впервые доказаны были Ф. Гартогсом (Хартогсом).

Лит.: [1] Hartogs F., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 1—88; [2] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969. *Е. М. Чирка.*

ГАРТОГСА — ЛОРАНА РЯД — ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k('z)(z_n-a_n)^k, \qquad (*)$$

где $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, а $f_k('z)$ - функции, голоморфные в нек-рой не зависящей от k области $'D\subset\mathbb{C}^{n-1}$. Если $f_k=0$ для всех $k<0$, то ряд (*) наз. рядом Гартогса. Всякая функция, голоморфная в *Гартогса области* D вида

$$\{('z, z_n): 'z\in 'D,\ 0\leqslant r('z)<|z_n-a_n|<R('z)\leqslant+\infty\},$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся внутри D Г.—Л. р. В полных областях Гартогса это будет разложение в ряд Гартогса. Областями сходимости Г.—Л. р. являются области того же вида со специальными $r('z)$ и $R('z)$, наз. радиусами Гартогса. При $n=1$, когда все f_k константы, Г.—Л. р. является *Лорана рядом*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

ГАТО ВАРИАЦИЯ отображения $f(x)$ линейного пространства X в линейное топологического пространство Y — предел в топологии пространства Y:

$$\delta f(x_0, h)=\frac{d}{dt}f(x_0+th)\Big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \qquad (*)$$

в предположении, что он существует для всех $h\in X$. Именно так ввел первую вариацию Р. Гато (R. Gateaux) в 1913—14. Для функционалов классического вариационного исчисления это определение было дано Ж. Лагранжем (см. *Вариация функционала*).

Выражение $\delta f(x_0, h)$ не обязательно является линейным функционалом по h, хотя оно всегда есть однородная функция по h первой степени. Отображение $h\to\delta f(x_0, h)$ называют иногда *Гато дифференциалом*. Начиная с работ П. Леви ([2], см. также [3]), обычно требуют линейность и непрерывность $\delta f(x_0, h)$ по h:

$$\delta f(x_0, h)=f'_\Gamma(x_0)h, \quad f'_\Gamma(x_0)\in L(X, Y).$$

В этом случае $f'_\Gamma(x_0)$ наз. *Гато производной*. Аналогично (*) определяются вторая и т. д. вариации. См. также *Вариация, Вторая вариация, Дифференцирование отображений*.

Лит.: [1] Gateaux R., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 157, p. 325—27; «Bull. soc. math. France», 1919, t. 47, p. 70—96; [2] Lévy P., Leçons d'analyse fonctionnelles, P., 1922; [3] Лев и П., Конкретные проблемы функционального анализа, пер. с франц., М., 1967. *В. М. Тихомиров.*

ГАТО ГРАДИЕНТ функционала $f(x)$ в точке x_0 гильбертова пространства H — вектор из H, равный *Гато производной* $f'_\Gamma(x_0)$ функционала f в точке x_0. Иначе говоря, Г. г. определяется формулой

$$f(x_0+x)=f(x_0)+\left(f'_\Gamma(x_0), h\right)+\varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(th)/t\to 0$ при $t\to 0$. В n-мерном евклидовом пространстве Г. г. $f'_\Gamma(x_0)$ есть вектор с координатами

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)$$

и наз. обычно градиентом. Понятие Г. г. распространяется на случай, когда X — риманово многообразие (конечномерное или гильбертово бесконечномерное), а f — гладкая действительная функция на X. Направление вдоль Г. г. среди всех направлений, проходящих через точку x_0, выделяется наибольшим ростом функции f.

В. М. Тихомиров.

ГАТО ДИФФЕРЕНЦИАЛ отображения $f(x)$ линейного топологич. пространства X в линейное топологич. пространство Y — функция

$$h \to Df(x_0, h),$$

где предел

$$Df(x_0, h) = \frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

в предположении, что он существует для всех $h \in X$, а сходимость понимается в топологии пространства Y. Так определенный Г. д. однороден, но неаддитивен. Аналогично вводятся Г. д. высших порядков. Отображение $h \to Df(x_0, h)$ наз. иногда Гато вариацией, или слабым дифференциалом (см. также *Дифференцирование отображений*, *Вариация*).

Обычно накладывают дополнительное требование линейности и непрерывности. Г. д.: $Df(x, h) = f'_\Gamma(x_0)h$, $f'_\Gamma(x_0) \in L(X, Y)$. В этом случае $f'_\Gamma(x_0)$ наз. *Гато производной*. Если отображение $(x, h) \to Df(x, h)$ равномерно непрерывно по x и непрерывно по h в нек-рой области, то в этой области существует *Фреше производная* $f'(x)$ и при этом $f'(x)h = Df(x, h)$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976.

В. М. Тихомиров.

ГАТО ПРОИЗВОДНАЯ, слабая производная,— наиболее распространенная в бесконечномерном анализе, наряду с *Фреше производной* (сильной производной), производная функционала или отображения. Производной Гато в точке x_0 отображения $f: X \to Y$ линейного топологич. пространства X в линейное топологич. пространство Y наз. непрерывное линейное отображение $f'_\Gamma(x_0): X \to Y$, удовлетворяющее условию

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_\Gamma(x_0)h + \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(th)/t \to 0$ при $t \to 0$ в топологии пространства Y (см. также *Гато вариация*). Если отображение f имеет в точке x_0 Г. п., то оно наз. дифференцируемым по Гато. Для Г. п. теорема о дифференцировании сложной функции, вообще говоря, неверна. См. также *Дифференцирование отображений*.

Лит.: [1] Gateaux R., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 157, p. 325—27; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [4] Авербух В. И., Смолянов О. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 201—60.

В. М. Тихомиров.

ГАУССА ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — вариационная задача, исследованная впервые К. Гауссом [1] и в современных терминах формулируемая следующим образом. Пусть μ — положительная мера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), имеющая конечную энергию (см. *Энергия мер*), и пусть

$$U^\mu = U^\mu(x) = \int \frac{1}{|x - y|^{n-2}} d\mu(y)$$

— ньютонов потенциал меры μ. Требуется среди всех мер λ с компактным носителем $K \subset \mathbb{R}^n$ найти такую меру μ_0, к-рая дает минимум интегралу

$$\int (U^\lambda - 2U^\mu) d\lambda,$$

представляющему собой скалярное произведение $(\lambda - 2\mu, \lambda)$ в предгильбертовом пространстве мер.

Значение Г. в. з. определяется тем, что равновесная мера (см. *Робена задача*) может быть получена как решение Г. в. з. при определенном выборе меры μ; напр., можно принять за μ равномерное распределение массы на сфере с центром в начале координат, охватывающей множество K.

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 5, Gött., 1867, S. 195 242; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 2; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964, гл. 11.

Е. Д. Соломенцев.

ГАУССА ЗАКОН — употребительное название *нормального распределения*. Название связано с той ролью, к-рую это распределение играет в *ошибок теории* К. Гаусса. Плотности

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0, \qquad (*)$$

(именно они первоначально назывались Г. з.) появились у К. Гаусса в соч. «Теория движения небесных тел» (1809). В книге 2, раздел 3, § 177 был сформулирован принцип: «Если какая-нибудь величина будет определена из многих непосредственных наблюдений, произведенных при одинаковых обстоятельствах и с одинаковой тщательностью, то среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением...» [1]. Это положение интерпретируется следующим образом: пусть истинное значение наблюдаемой величины будет z и пусть плотность вероятности получить результат x равна $\varphi(x-z)$. Тогда при любом n и любых $x_1, \ldots, x_n$ совместная плотность $\varphi(x_1 - z) \ldots \ldots \varphi(x_n - z)$ достигает максимума (как функция z) при

$$z = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Отсюда легко получить сначала, что отношение $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ не зависит от x, а затем, что $\varphi(x)$ имеет вид (*). Следует отметить, что указанный выше принцип неоднократно подвергался критике.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Избранные геодезические сочинения, пер. с латин. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89—109; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités, 2 éd., P., 1912.

Ю. В. Прохоров.

ГАУССА ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ — соотношение, связывающее значения *Лежандра символов* $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ для различных нечетных простых чисел p и q (см. *Квадратичный закон взаимности*). Кроме основного Г. з. в. для квадратичных вычетов, заключающегося в соотношении:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

имеются еще два дополнения к указанному закону, а именно:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ и } \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Закон взаимности для квадратичных вычетов был впервые высказан Л. Эйлером (L. Euler, 1772). А. Лежандр (A. Legendre, 1785) дал формулировку закона в современной форме и доказал часть этого закона. Первое полное доказательство Г. з. в. было дано К. Гауссом (C. Gauss, 1801) (см. [1]). В течение жизни К. Гаусс дал восемь различных доказательств квадратичного закона взаимности, построенных на различных принципах.

Попытки установить закон взаимности для кубических и биквадратичных вычетов привели К. Гаусса к введению кольца целых комплексных чисел.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем. и латин., М., 1959; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

С. А. Степанов.

ГАУССА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, использующая в качестве узлов интерполяции ближайшие к точке интерполирования x узлы. Если $x=x_0+th$, то формула

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0 + f^1_{1/2}t + f^2_0\frac{t(t-1)}{2!} + \ldots + f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}, \quad (1)$$

написанная по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, . . ., x_0+nh, x_0-nh, наз. формулой Гаусса для интерполирования вперед, а формула

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0 + f^1_{-1/2}t + f^2_0\frac{t(t+1)}{2!} + \ldots + f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}, \quad (2)$$

написанная по узлам x_0, $x-h$, x_0+h, . . ., x_0-nh, x_0+nh, наз. формулой Гаусса для интерполирования назад (см. [1], [2]). В формулах (1) и (2) использованы конечные разности, определяемые следующим образом:

$$f^1_{i+1,2} = f_{i+1} - f_i, \qquad f^m_i = f^{m-1}_{i+1/2} - f^{m-1}_{i-1/2}.$$

Преимущество Г. и. ф. состоит в том, что указанный выбор узлов интерполяции обеспечивает наилучшую оценку остаточного члена по сравнению с любым другим выбором, а упорядоченность узлов по мере их близости к точке интерполяции уменьшает вычислительную погрешность интерполирования.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973.

М. К. Самарин.

ГАУССА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — квадратурная формула вида

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

в к-рой *узлы* x_i и веса c_i подбираются так, чтобы формула была точна для функций

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k\omega_k(x),$$

где $\omega_k(x)$ — заданные линейно независимые функции (пределы интегрирования могут быть и бесконечными). Г. к. ф. введены К. Гауссом (см. [1]) для $a=-1$, $b=1$, $p(x)\equiv 1$. Полученная им общая формула, точная для произвольного многочлена степени не выше $2n-1$, имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = A^{(n)}_1 f(x_1) + A^{(n)}_2 f(x_2) + \ldots + A^{(n)}_n f(x_n) + R_n,$$

где x_k — корни *Лежандра многочлена* $P_n(x)$, а $A^{(n)}_k$ и R_n определяются по формулам

$$A^{(n)}_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[P'_n(x_k)]^2};$$

$$R_n = \frac{2^{2n+1}[n!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(c), \quad -1<c<1.$$

Применяется в тех случаях, когда подинтегральная функция достаточно гладкая, а выигрыш в числе узлов крайне существен: напр., если $f(x)$ определяется из дорогостоящих экспериментов, или при вычислении кратных интегралов как повторных. При практическом применении в таких случаях очень важен удачный подбор *весовой функции* $p(x)$ и функций $\omega_j(x)$.

Для широких классов $p(x)$ и $\omega_j(x)$ составлены таблицы узлов Г. к. ф. (см. [1]), в частности в [5] при $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ до $n=512$.

При $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ Г. к. ф. применяется в стандартных программах интегрирования с автоматич. выбором шага как метод вычисления интегралов по подотрезкам разбиения (см. [6]).

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 3, Gött., 1866, S. 163—196; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1959; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973; [5] Stroud A. H., Secrest D., Gaussian Quadrature Formulas, N. Y., 1966; [6] Стандартная программа для вычисления однократных интегралов по квадратурам типа Гаусса, в. 26, М., 1967.

Н. С. Бахвалов, В. П. Моторный.

ГАУССА МЕТОД — метод последовательного исключения неизвестных для нахождения решений системы линейных уравнений, впервые описанный К. Гауссом [1]. Пусть дана система

$$f_j(x) - a_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad (S^0)$$

где a_{ji}, a_j — элементы произвольного поля P. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Г. м. состоит в следующем. Из второго уравнения системы S^0 вычитают первое ее уравнение, умноженное почленно на a_{21}/a_{11}, из третьего — первое, умноженное на a_{31}/a_{11}, ..., из m-го - первое, умноженное на a_{m1}/a_{11}. Пусть S^1 — система полученных уравнений-разностей. При наличии ненулевого коэффициента в S^1 (после возможного изменения порядка уравнений и переменных) поступают с ней так же, как с системой S^0, и т. д. Если ранг r системы S^0 (т. е. ранг матрицы ее коэффициентов) меньше числа m, то на r-м шага появляется система S^r с нулевыми коэффициентами при всех неизвестных; при $r = m$ система S^r считается п у с т о й. Система S^0 тогда и только тогда совместна, когда система S^r либо совместна (т. е. не имеет отличных от нуля свободных членов), либо пуста.

Процесс получения одного из решений (совместной) системы S^0 может быть описан следующим образом. Берется к.-л. решение $(x_r^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^{r-1}. Придавая значения $x_r^0, \ldots, x_n^0$ неизвестным $x_r, \ldots, x_n$ в к.-л. уравнении системы S^{r-2}, имеющем ненулевой коэффициент при x_{r-1} (напр., в первом ее уравнении), находят из него $x_{r-1} = x_{r-1}^0$ и получают решение $(x_{r-1}^0, x_r^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^{r-2}. Иначе говоря, значение x_{r-1}^0 получается из системы S^{r-2} при замене в ней неизвестных $x_r, \ldots, x_n$ взятыми их значениями. Значения $x_{r-1}^0, x_r^0, \ldots, x_n^0$ подставляются затем в систему S^{r-3}, находится значение $x_{r-2} = x_{r-2}^0$, и получают решение $(x_{r-2}^0, \ldots, x_n^0)$ и т. д. Найденные так значения $x_1^0, \ldots, x_{r-1}^0$ составляют вместе со взятыми значениями $x_r^0, \ldots, x_n^0$ решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^0 (см. [2]).

Описанный метод допускает следующее обобщение (см. [4]). Пусть U — нек-рое подпространство векторного пространства P^n и $P^m(U)$ — множество всех решений $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ уравнения

$$p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \ldots + p_m f_m(x) = 0, \quad (*)$$

где x пробегает U. Для произвольной конечной системы

$$p^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_m^i), \qquad i = 1, 2, \ldots, l$$

ненулевых образующих элементов пространства $P^m(U)$ составляется система

$$\sum_{j=1}^m p_j^i f_j(x) - \sum_{j=1}^m p_j^i a_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

(x — неизвестное), наз. U-с в е р т к о й системы S^0. Если пространство $P^m(U)$ не содержит ненулевых элементов, то считается, что система S^0 имеет п у с т у ю U-с в е р т к у. Если система S^0 совместна, то при любом U ее U-свертка совместна или пуста. Установлено, что для совместности системы S^0 достаточно, чтобы совместной или пустой была ее U-свертка хотя бы для одного U. Пусть, далее, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — подпространства, порождаемые в пространстве P^n векторами $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Для $U=U_i$ уравнение (*) сводится к уравнению

$$a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{mi}p_m = 0.$$

Пусть, напр., $i=1$. Если при этом $a_{11}\neq 0$, то в качестве ненулевых образующих элементов пространства $P^m(U_1)$ можно взять векторы $(a_{21}/a_{11}, -1, 0, \ldots, 0)$, $(a_{31}/a_{11}, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, (a_{m1}/a_{11}, 0, 0, \ldots, -1)$, и тогда U_1-свертывание системы S^0 совпадает с процедурой исключения неизвестного x_1 в Г. м.

U-свертывание системы S^0 при $U=U_i+U_k$ есть процедура одновременного исключения двух неизвестных x_i и x_k. Пусть, напр., $i=1$ и $k=2$. Если при этом

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то для получения (U_1+U_2)-свертки системы S^0 можно взять строки матрицы

$$\begin{Vmatrix} -\Delta_{23} & \Delta_{13} & -\Delta_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ -\Delta_{24} & \Delta_{14} & 0 & -\Delta_{12} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\Delta_{2m} & \Delta_{1m} & 0 & 0 & \ldots & -\Delta_{12} \end{Vmatrix},$$

где

$$\Delta_{rs} = \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1} \\ a_{r2} & a_{s2} \end{vmatrix}$$

Чередуя исключения отдельных неизвестных с исключением тех или иных пар (или в общем случае наборов) неизвестных, можно для нахождения решений системы S^0 строить те или иные алгоритмы, обобщающие Г. м.

Лит.: [1] Gauss C. F., Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Gött., 1849; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [3] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963; [4] Черников С. Н., Линейные неравенства, М., 1968.

С. Н. Черников.

ГАУССА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное функциональное преобразование $W(\zeta)[x]$ функции $x(t)$, к-рое определяется интегралом:

$$W(\zeta)[x] = \frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{u^2}{\zeta}\right) x(t+u)\, du,$$

$$\operatorname{Re}(\zeta) > 0.$$

Если $x(t)\in L_2(-\infty, \infty)$, то $W(\zeta)[x]\in L_2(-\infty, \infty)$ для действительных значений $\zeta=\xi$ оператор $W(\zeta)$ является самосопряженным положительно определенным оператором [1]. Формула обращения для Г. п.:

$$x(t) = \exp\left\{-\frac{\zeta}{4}\frac{d^2}{dt^2}\right\} W(\zeta)[x(t)].$$

При $\zeta=4$ Г. п. наз. преобразованием Вейерштрасса.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, 2 изд., пер. с англ., М., 1962; [2] Диткин В. А., Прудников А. П., в кн.: Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

А. П. Прудников.

ГАУССА ПРИЗНАК — признак сходимости числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с положительными членами. Если отношение a_{n+1}/a_n представимо в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\gamma_n}{n^\beta}, \qquad (*)$$

где α и β — постоянные числа, $\beta>1$, а $\{\gamma_n\}$ — ограниченная последовательность, то ряд Σa_n сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Для того чтобы имело место представление (*), необходимо (но не достаточно), чтобы существовал конечный предел

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

или

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Г. п.— один из первых по времени (1812) общих признаков сходимости числовых рядов. К. Гаусс (C. Gauss) применял свой признак для исследования сходимости *гипергеометрического ряда*. Г. п. представляет собой простейший частный случай одного из *логарифмических признаков сходимости*.

Л. П. Купцов.

ГАУССА ПРИНЦИП, наименьшего принуждения принцип,— один из основных, наиболее общих дифференциальных *вариационных принципов классической механики*, установленный К. Гауссом (см. [1]) и выражающий экстремальное свойство действительного движения системы из класса мыслимых по Гауссу движений, удовлетворяющих наложенным на систему идеальным связям и условиям постоянства положений и скоростей точек системы для рассматриваемого момента времени.

Согласно Г. п. «движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы они стали свободными, т. е. оно происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения за время dt принять величину, равную сумме произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной» (см. [1]).

Г. п. равносилен *Д'Аламбера — Лагранжа принципу* и применим как к голономным, так и к неголономным системам. Г. п. обобщен на случай освобождения системы от части связей (см. [2], [3]), а также на случай систем, стесненных неидеальными связями, и на случай сплошных сред (см. [4]).

Лит.: [1] Gauss C., «J. reine und angew. Math.», 1829, Bd 4, S. 232—35; [2] Болотов Е. А., «Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те», 1916, т. 21, сер. 2, № 3, с. 99—152; [3] Четаев Н. Г., там же, 1932—33, т. 6, сер. 3, с. 68—71; [4] Румянцев В. В., «Прикл. матем. и механ.», 1973, т. 37, № 6, с. 963—73.

В. В. Румянцев.

ГАУССА РАЗЛОЖЕНИЕ топологической группы G — представление всюду плотного подмножества $G_0 \subset G$ в виде $G_0 = NHN^*$, где H — абелева подгруппа группы G, а N и N^* — нильпотентные подгруппы группы G, нормализуемые H. Если G — группа $GL(m, \mathbb{R})$ невырожденных вещественных матриц m-го порядка, H — подгруппа диагональных матриц, N (соответственно N^*) — подгруппа нижне (верхне)-треугольных матриц с единицами на главной диагонали, G_0 — подмножество матриц из G, все главные миноры к-рых отличны от нуля, то разложение $G_0 = NHN^*$ наз. разложением Гаусса полной линейной группы и непосредственно связано с *Гаусса методом* решения систем линейных уравнений: если $g_0 = hn^*$, где $n \in N$, $h \in H$, $n^* \in N^*$, — невырожденная матрица коэффициентов системы линейных уравнений $g_0 x = b$, то приведение матрицы g_0 методом Гаусса к треугольному виду hn^*, можно осуществить умножением g_0 слева на нижнетреугольную матрицу n^{-1}, $n \in N$. Строгое определение разложения Гаусса требует введения следующих терминов. Пусть G — топологич. группа, H — ее подгруппа, N и N^* — нильпотентные подгруппы в G, нормализуемые H. Подгруппа H наз. треугольным усечением группы, если а) $N \in D(R)$, $N^* \subset D(R^*)$, где $D(X)$ — коммутант группы X, R и R^* — связные разрешимые подгруппы группы G; б) множество $G_0 = NHN^*$ всюду плотно в G, и разложение NHN^* однозначно. Разложение $G_0 = NHN^*$ наз. треугольным разложением в G. Если H — абелева группа, то это разложение наз. вполне треугольным разложением, или разложением Гаусса. В этом случае подгруппы $B = NH = HN$, $B^* = N^*H = HN^*$ раз-

решимы. Пусть π — неприводимое (непрерывное) представление группы G в конечномерном векторном пространстве V, V_0 — подпространство всех векторов из V, неподвижных относительно N^*; тогда V_0 инвариантно относительно H, и представление α группы H в V_0 неприводимо. Представление α определяет π однозначно с точностью до эквивалентности. Представление π содержится (как инвариантная часть) в представлении $e(\alpha)$ группы G, индуцированном представлением α подгруппы B в классе $C(G)$, где α — продолжение на B одноименного представления группы H, тривиальное на N. При этом пространство $\mathrm{Hom}_G(\pi, e(\alpha))$ одномерно. Если H — абелева подгруппа, то V_0 одномерно и α — характер группы H. Известны следующие примеры треугольных разложений групп Ли. 1) Пусть G — редуктивная связная комплексная группа Ли с картановской подалгеброй H_0, H — редуктивная связная подгруппа в G, содержащая H_0. Тогда подгруппа H является треугольным усечением группы G. 2) Пусть G — редуктивная связная линейная группа Ли; тогда группа G содержит треугольное усечение $H=MA$, где A — односвязная абелева подгруппа в G (порождаемая некомпактными корнями в алгебре Ли группы G), M — централизатор A в максимальной компактной подгруппе $K\subset G$. 3) В частности, всякая редуктивная связная комплексная группа Ли допускает Г. р. $G_0=NHN^*$, где H — картановская подгруппа в группе G; N соответственно N^* — аналитич. подгруппа в G, алгебра Ли к-рой натянута на все корневые векторы e_α, $\alpha<0$ (соответственно $\alpha>0$), α — корень относительно H, т. е. HN и HN^* являются противоположными *Бореля подгруппами*. В примерах 1)—3) подгруппы N, N^* односвязны, G_0 открыто в G в топологии Зарисского, а отображение $N\times H\times N^*$, $(n, h, n^*)\to nhn^*$ является изоморфизмом алгебраич. многообразий (и, в частности, гомеоморфизмом). Этот факт позволяет доказать, что алгебраич. многообразие G рационально.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1968. *Д. П. Желобенко.*

ГАУССА СУММА — тригонометрическая сумма вида

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{q-1}\chi(m, q)\,e^{2\pi i\frac{am}{q}},$$

где $\chi(m, q)$ — числовой *характер* по модулю q. Г. с. вполне определяется заданием характера $\chi(m, q)$ и числа a. Г. с. были рассмотрены К. Гауссом (C. Gauss) в 1811 в случае простого нечетного $q=p$ и характера $\chi(m, q)=\left(\frac{m}{q}\right)$, где $\left(\frac{m}{q}\right)$ — *Лежандра символ*. В этом случае

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{am^2}{p}}, \qquad (*)$$

где $(a, p)=1$. Исследуя свойства суммы (*) К. Гаусс нашел точное выражение для модуля этой суммы:

$$|\tau_a(\chi)|=\sqrt{p}.$$

Он также решил более трудную задачу определения знака $\tau_a(\chi)$ и показал, что

$$\tau_a(\chi)=\sqrt{p} \text{ при } p\equiv 1 \pmod 4$$

и

$$\tau_a(\chi)=i\sqrt{p} \text{ при } p\equiv 3 \pmod 4.$$

К. Гаусс использовал свойства сумм (*) для решения нек-рых задач теории чисел, в частности он применил их в одном из доказательств *квадратичного закона взаимности*.

Значение Г. с. для теории чисел было выявлено только в 20-е гг. 20 в. В это время Г. Вейль (H. Weyl) применил для исследования равномерных распределений

более общие тригонометрич. суммы, получившие назв. *Вейля сумм*. В то же время И. М. Виноградов использовал Г. с. для получения оценки сверху наименьшего квадратичного невычета по модулю p.

Г. с. позволяют установить связь между двумя важными объектами теории чисел: между мультипликативными характерами $\chi=\chi(m, p)$ и аддитивными характерами

$$f_a=f_a(m)=e^{2\pi i\frac{am}{p}}$$

(ради простоты берется только случай простого модуля p). Множество F всех комплекснозначных функций $f(x)$ периода p образует p-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел. Если определить скалярное произведение в F, положив

$$(f, g)=\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1} f(x)\overline{g}(x), \quad f, g\in F,$$

то функции $f_a(m)$, $a=0, 1, \ldots, p-1$, составят ортонормированный базис F. При этом

$$\chi=\sum_{a=0}^{p-1}\alpha_a f_a,$$

где $\alpha_a=\frac{1}{p}\tau_a(\chi)$. Таким образом, Г. с. $\tau_a(\chi)$ (с точностью до множителя $1/p$) являются координатами в разложении мультипликативного характера χ по аддитивным характерам f_a. Возможность линейного представления любого характера $\chi=\chi(m, q)$ в виде линейной комбинации экспонент $e^{2\pi i\frac{am}{q}}$, вытекающая из свойств Г. с. общего вида, лежит в основе вывода функционального уравнения для L-функции.

Эти же соображения существенно используются в методе *большого решета* при переходе от оценок сумм от аддитивных характеров к оценкам сумм от мультипликативных характеров. Г. с. применяются также для представления L-функций в виде конечных сумм. Такое представление используется в задаче о числе классов дивизоров кругового поля.

Вопрос о знаке Г. с. $\tau_a(\chi)$, принадлежащей квадратичному характеру, может быть поставлен в более общем виде для Г. с., принадлежащей характеру χ порядка $k\geqslant 3$. Так возникает *Куммера гипотеза* относительно кубических Г. с. по простому модулю $p\equiv 1 \pmod 3$ и обобщения этой гипотезы на случай $k>3$.

Лит.: [1] Карл Фридрих Гаусс. Сб. статей, М., 1956; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [4] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [5] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

Б. М. Бредихин.

ГАУССА ТЕОРЕМА (theorema egregium): *гауссова кривизна* (произведение главных кривизн) регулярной поверхности в евклидовом пространстве E^3 не меняется при изгибаниях поверхности. (Здесь регулярность означает C^3-гладкое погружение.) Г. т. следует из того, что гауссова кривизна K поверхности в точке (u, v) может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

и их первые и вторые производные в этой точке. Такое выражение для K наз. уравнением Гаусса, оно допускает разные формы записи (см., напр., [2]). Запись уравнения Гаусса упрощается при специализации координат. Так в изотермич. координатах ($E=G=\lambda$, $F=0$):

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta\ln\lambda;$$

в полугеодезич. координатах ($E=1$, $F=0$):

$$K=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Уравнение Гаусса вместе с *Петерсона — Кодацци уравнениями* образуют условия интегрируемости системы, к к-рой сводится задача восстановления поверхности по ее первой и второй квадратичным формам. Из Г. т. и *Гаусса — Бонне теоремы* следует, что отличие суммы углов геодезич. треугольника на регулярной поверхности от π равно ориентированной площади сферич. образа этого треугольника (см. [1]).

Г. т. установлена К. Гауссом (C. Gauss) в [1] и является первым и важнейшим результатом в исследовании связей между внутренней и внешней геометриями поверхностей.

Для регулярной m-мерной, $2 \leqslant m \leqslant n-1$, поверхности F^m в римановом пространстве V^n справедливо следующее обобщение Г. т. (см. [3], с. 125; [4], с. 195):

$$k(a, b) = \tilde{k}(a, b) - \sum_{i=1}^{n-m} (l_i(a, a)\, l_i(b, b) - l_i^2(a, b)), \quad (*)$$

где $k(a, b)$, $\tilde{k}(a, b)$ кривизны соответственно F^m и V^n в двумерном направлении, определяемом касательными к F^m в рассматриваемой точке векторами a, b, а l_i — вторая квадратичная форма F^m относительно i-й нормали из ортонормированного набора нормалей в этой точке. Из $(*)$ следует, что для гиперповерхности F^{n-1} в R^n все четные элементарные симметрические функции главных кривизн

$$K_{2p} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{2p}} k_{i_1} \ldots k_{i_{2p}},$$

$2 \leqslant 2p \leqslant n-1$, определяются внутренней метрикой F^{n-1}. В четномерном E^{2m}, $m > 1$, гиперповерхность F^{2m-1} однозначно определяется ее внутренней метрикой и кривизной Гаусса — Кронекера:

$$K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{2m-1}$$

при условии, что последняя отлична от нуля (см. [5], с. 288).

Для широких классов двумерных нерегулярных поверхностей в E^3 удается определить «внешнюю кривизну» как борелевскую меру, связанную со сферич. отображением, и «внутреннюю кривизну» как меру, связанную с отличием суммы углов треугольников от π. Обобщение Г. т. состоит в утверждении, что внешняя и внутренняя кривизны совпадают. Такое обобщение Г. т. получено для общих выпуклых поверхностей (см. [6]) и для C^1-гладких поверхностей ограниченной внешней кривизны (см. [7]).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [4] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [5] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [7] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. *Ю. Д. Бураго.*

ГАУССА — БОННЕ ТЕОРЕМА: полная кривизна ω двумерного компактного риманова многообразия V^2, замкнутого или с краем, и поворот τ его гладкого края (границы) ∂V^2 связаны с эйлеровой характеристикой χ многообразия V^2 соотношением

$$\omega + \tau = 2\pi\chi;$$

здесь

$$\omega = \int_{V^2} K dS,$$

где K — гауссова кривизна, а S — площадь;

$$\tau = \int_{\partial V^2} k_g\, dl,$$

где k_g — геодезич. кривизна, а l — длина границы. Г.— Б. т. справедлива и для многообразия с кусочно гладкой границей, в этом случае

$$\tau = \int k_g dl + \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

где $\pi-\alpha_i$ есть поворот границы в угловой точке. В частности, теорема справедлива на регулярных поверхностях в E^3. К Г.—Б. т. близко подошел К. Гаусс (см. [1]), в отчетливой форме (для гомеоморфных кругу поверхностей) она опубликована О. Бонне (см. [2]).

Для некомпактного полного V^2 без края аналогом Г.— Б. т. является неравенство Кон-Фоссена (см. [3]):

$$\int_{V^2} K\,dS \leqslant 2\pi\chi.$$

Г.— Б. т. и приведенное неравенство верны также для выпуклых поверхностей и двумерных многообразий ограниченной кривизны.

Г.— Б. т. обобщается для четномерных компактных римановых многообразий V^{2p}, замкнутых или с краем:

$$\int_{V^{2p}} \Omega\,dS + \int_{\partial V^{2p}} \varphi\,dl = \frac{(2\pi)^p}{(2p-1)!!}\chi,$$

где S, l — объемы в V^{2p} и ∂V^{2p}, Ω — нек-рый полином от компонент тензора кривизны V^{2p}, φ — нек-рый полином от компонент тензора кривизны и коэффициентов второй квадратичной формы ∂V^{2p} (см. [4]). Г.— Б. т. распространена также на римановы полиэдры [5]. Другие обобщения Г.— Б. т. связаны с интегральными представлениями характеристич. классов через параметры римановой метрики (см. [4], [6], [7]).

Лит.: [1] Gauss C., Werke, Bd 8, Gött., 1900; [2] Bonnet O., «J. École polytech.», 1948, t. 19, p. 1—146; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Шарафутдинов В. А., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 6, с. 1321—35; [5] Allendoerfer C. B., Weil A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, № 1, p. 101—29; [6] Ells J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, № 1, p. 142—53; [7] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 2. *Ю. Д. Бураго.*

ГАУССА — ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — одно из названий *нормального распределения*, к-рое наряду с другими названиями (Гаусса закон, гауссовское распределение, второй закон Лапласа, Лапласа Гаусса распределение и т. д.) связывает историю открытия и первых приложений распределения к различным задачам теории вероятностей с именами К. Гаусса (C. Gauss) и П. Лапласа (P. Laplace). Нормальное распределение появилось у К. Гаусса (1809) и П. Лапласа (1812) в связи с исследованиями по *ошибок теории* и *наименьших квадратов методу*. Так, в развитой К. Гауссом для задач астрономии и геодезии теории ошибок наблюдений плотность вероятностей случайных ошибок выражалась функцией

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}, \quad h > 0$$

(см. *Гаусса закон*). П. Лаплас, кроме того, получил интеграл (функцию Лапласа)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}dt$$

как приближенное значение (при больших n) вероятности того, что число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено в пределах $np-\tau\sqrt{2np(1-p)}$ и $np+\tau\sqrt{2np(1-p)}$ (так наз. предельная формула Лапласа). Однако соотношение, где нормальное распределение появляется как предельная форма биномиального с $p=q=1/2$, было найдено еще А. Муавром (A. Moivre, 1733).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89—109; [2] Laplace P. S., Théorie analitique des probabilités, P., 1812; [3] Todhunter I., A history of the mathematical theory of probability, [N. Y.], 1949. *А. В. Прохоров.*

ГАУССОВА КРИВИЗНА, полная кривизна, поверхности - произведение *главных кривизн* регулярной поверхности в данной точке.

Если

$$\mathrm{I} = ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,dudv + G\,dv^2$$

— *первая квадратичная форма* поверхности и

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2\,M dudv + N\,dv^2$$

— *вторая квадратичная форма* поверхности, то Г. к. вычисляется по формуле

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Г. к. совпадает с якобианом *сферического отображения*.

$$|K|_{P_0} = \lim_{d(s)\to 0} \frac{S}{s},$$

где P_0 — точка на поверхности, s — площадь области U, содержащей P_0, S — площадь сферич. изображения U, d — диаметр области. Г. к. положительна в *эллиптической точке*, отрицательна в *гиперболической точке* и равна нулю в *параболической точке* и в *уплощения точке*. Г. к. можно выразить только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные (см. *Гаусса теорема*). Именно,

$$K = -\frac{1}{4W^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} + \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F_u - E_v}{W}\right\},$$

где

$$W^2 = EG - F^2.$$

Так как Г. к. зависит только от метрики, т. е. от коэффициентов первой квадратичной формы, то Г. к. — инвариант *изгибания*. Г. к. играет особую роль в теории поверхностей; существует много формул для ее вычисления (см., напр., [2]).

Г. к. наз. гауссовой кривизной по имени К. Гаусса, к-рый ввел это понятие (см. [1]).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., 1957, с. 95.
Е. В. Шикин.

ГАУССОВА ПОЛУГРУППА — коммутативная полугруппа с единицей, удовлетворяющая закону сокращения, в к-рой любой необратимый элемент a разложим в произведение неприводимых (т. е. не представимых в виде произведения необратимых сомножителей) элементов, причем для любых двух таких разложений

$$a = b_1 \dots b_k \quad \text{и} \quad a = c_1 \dots c_l$$

имеет место $k = l$ и, быть может, после перенумерования сомножителей, справедливы равенства

$$b_1 = c_1\varepsilon_1, \ \dots, \ b_k = c_k\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ — обратимые элементы. Типичные примеры Г. п. — мультипликативные полугруппы отличных от нуля целых чисел, отличных от нулевого многочленов от одного неизвестного над полем. Любые два элемента Г. п. обладают наибольшим общим делителем.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.
Л. Н. Шеврин.

ГАУССОВО ЧИСЛО — целое комплексное число $a + bi$, где a и b — любые целые рациональные числа. С геометрич. точки зрения Г. ч. образуют на плоскости решетку всех точек с целыми рациональными координатами. Г. ч. впервые были рассмотрены К. Гауссом (C. Gauss) в 1832 в работе о биквадратичных вычетах. Им же были найдены основные свойства множества Γ — целых комплексных чисел.

Γ является кольцом; единицами Γ (т. е. делителями единичного элемента) будут $1, -1, i, -i$, других единиц нет. Простыми (неразложимыми в нетривиальное произведение) числами кольца Γ — гауссовыми простыми числами будут числа вида

$$\alpha = a + bi,$$

нормы (модули) $N(\alpha)=a^2+b^2=p$ к-рых есть рациональные простые числа p вида $4n+1$ и $4n+3$. Примеры простых Г. ч.: $1+2i$, $3+4i$, 3, 7 и др.

Любое число из Г однозначно раскладывается в произведение простых Г. ч. Кольца, характеризующиеся этим свойством, наз. гауссовыми кольцами, или *факториальными кольцами*.

В теории биквадратичных вычетов Г. ч. явились первым простым и важным примером расширения поля рациональных чисел.

Лит.: [1] Карл Фридрих Гаусс. Сб. статей, М., 1956.

Б. М. Бредихин.

ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС — действительный случайный процесс $X=X(t)$, $t\in T$, любые конечномерные распределения к-рого являются гауссовскими, т. е. характеристич. функции совместных распределений вероятностей случайных величин $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ при любых $t_1, \ldots, t_n\in T$ имеют вид:

$$\varphi_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(u_1,\ \ldots,\ u_n)=$$

$$=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}A(t_k)\,u_k-\frac{1}{2}\sum_{k,\ j=1}^{n}B(t_k,\ t_j)\,u_k u_j\right\},$$

где $A(t)=\mathsf{E}X(t)$ — математич. ожидание и

$$B(t,\ s)\cdot\ \mathsf{E}[X(t)-A(t)]\,[X(s)-A(s)]$$

— корреляционная функция. Распределение вероятностей Г. п. $X=X(t)$ полностью задается его математич. ожиданием $A(t)$ и корреляционной функцией $B(t,\ s)$, $s,\ t\in T$. Для любой функции $A(t)$ и любой положительно определенной функции $B(t,\ s)$ существует Г. п. $X(t)$, у к-рого среднее значение и корреляционная функция суть именно $A(t)$ и $B(t,\ s)$. Многомерный случайный процесс с векторными значениями

$$X(t)=\{X_1(t),\ \ldots,\ X_m(t)\}$$

наз. гауссовским, если гауссовскими являются совместные распределения вероятностей любых величин

$$X_{i_1}(t_1),\ \ldots,\ X_{i_n}(t_n).$$

Комплексным Г. п. $X=X(t)$, $t\in T$, наз. случайный процесс вида

$$X(t)=X_1(t)+iX_2(t),$$

где действительные $X_1(t)$, $X_2(t)$ в совокупности образуют двумерный Г. п. Иногда, говоря о комплексном Г. п. $X(t)=X_1(t)+iX_2(t)$, считают, что выполняется одно дополнительное условие:

$$\mathsf{E}X(s)\,X(t)=A(s)\,A(t),$$

где

$$A(t)=\mathsf{E}X(t).$$

Это условие вводится для того, чтобы сохранить то свойство обычных гауссовских случайных величин, согласно к-рому некоррелированность равносильна независимости; его можно переписать следующим образом:

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)]\,[X_1(s)-A_1(s)]=$$

$$=\mathsf{E}[X_2(t)-A_2(t)]\,[X_2(s)-A_2(s)]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}B(t,\ s),$$

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)]\,[X_2(s)-A_2(s)]=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}B(t,\ s),$$

где

$$B(t,\ s)=\mathsf{E}[X(t)-A(t)]\,\overline{[X(s)-A(s)]}$$

— корреляционная функция процесса $X(t)$ и

$$A_1(t)=\mathsf{E}X_1(t),\quad A_2(t)=\mathsf{E}X_2(t).$$

Действительный обобщенный случайный процесс $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, на линейном пространстве U наз. обобщенным Г. п., если его характеристич. функционал $\varphi_X(u)$ имеет вид:

$$\varphi_X(u)=e^{iA(u)-\frac{1}{2}B(u,\ u)},\quad u\in U,$$

где $A(u)=\mathsf{E}\langle u,\ X\rangle$ — математич. ожидание обобщенного процесса $X=\langle u,\ X\rangle$,

$$B(u,\ v)=\mathsf{E}\,[\langle u,\ X\rangle - A(u)]\,[\langle v,\ X\rangle - A(v)]$$

— его корреляционный функционал.

Пусть U — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,\ v)$, $u,\ v\in U$. Случайная величина X со значениями в пространстве U наз. г а у с с о в с к о й, если случайный процесс вида $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, — обобщенный Г. п. Математич. ожидание $A(u)$ является линейным непрерывным функционалом, а корреляционная функция $B(u,\ v)$ — билинейным непрерывным функционалом на гильбертовом пространстве U, причем

$$B(u,\ v)\ =\ (Bu,\ v),\quad u,\ v\in U,$$

где положительный оператор B — корреляционный оператор случайной величины $X\in U$, является ядерным. Для любых таких $A(u)$ и $B(u,\ v)$ существует гауссовская величина $X\in U$ такая, что обобщенный процесс $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, имеет средним значением и корреляционной функцией именно $A(u)$ и $B(u,\ v)$.

П р и м е р. Пусть $X=X(t)$ — Г. п. на отрезке $T=[a,\ b]$ и пусть процесс $X(t)$ измерим, причем

$$\int_a^b \mathsf{E}\,[X(t)]^2\,dt<\infty.$$

Тогда почти все траектории $X(t)$, $t\in T$, будут принадлежать пространству интегрируемых в квадрате функций $u=u(t)$ на отрезке T со скалярным произведением

$$(u,\ v)=\int_a^b u(t)\,v(t)\,dt.$$

Формула

$$\langle u,\ X\rangle=\int_a^b u(t)\,X(t)\,dt,\quad u\in U,$$

задает обобщенный Г. п. на этом пространстве U. При этом математич. ожидание и корреляционный функционал обобщенного процесса $X=\langle u,\ X\rangle$ выражаются формулами:

$$A(u)=\int_a^b u(t)\,A(t)\,dt,$$

$$B(u,\ v)=\int_a^b\int_a^b B(t,\ s)\,u(t)\,v(s)\,dt\,ds,$$

где $A(t)$ и $B(t,\ s)$ — соответствующие математич. ожидание и корреляционная функция исходного процесса $X=X(t)$ на отрезке $T=[a,\ b]$.

Почти все основные свойства Г. п. $X=X(t)$ (параметр t пробегает произвольное множество T) могут быть выражены в геометрич. терминах при рассмотрении этого процесса как кривой в гильбертовом пространстве H всех случайных величин Y, $\mathsf{E}Y^2<\infty$, со скалярным произведением $(Y_1,\ Y_2)=\mathsf{E}Y_1Y_2$, для к-рой

$$(X(t),\ 1)-A(t)$$

и

$$(X(t)-A(t),\ X(s)-A(s))=B(t,\ s).$$

Ю. А. Розанов.

Стационарные в узком смысле Г. п. могут быть реализованы посредством нек-рых динамич. систем (сдвиг в пространстве траекторий, см. [1]). Полученные динамич. системы (их иногда наз. н о р м а л ь н ы м и, сравни с нормальным распределением вероятностей) представляют интерес как примеры динамич. систем с непрерывным спектром, свойства к-рых благодаря упомянутому разложению H могут быть изучены с большой полнотой. Так были построены первые конкретные примеры динамич. систем с «неклассическими» спектральными свойствами. *Д. В. Аносов.*

Лит.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] И б р а г и м о в И. А., Р о з а н о в Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] I t ô K., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 157—69; [5] е г о ж е, «Japan. J. Math.», 1952, v. 22, p. 63—86.

ГЕГЕНБАУЭРА МНОГОЧЛЕНЫ — то же, что *ультрасферические многочлены*.

ГЕГЕНБАУЭРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование $T\{F(t)\}$ функции $F(t)$:

$$T\{F(t)\} = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\rho-1/2} C_n^{\rho}(t) F(t)\, dt = f_n^{\rho},$$

$$\rho > -1/2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $C_n^{\rho}(t)$ — многочлены Гегенбауэра. Если функция разлагается в обобщенный ряд Фурье по многочленам Гегенбауэра, то имеет место формула обращения

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(n+\rho)\,\Gamma^2(\rho)\,2^{2\rho-1}}{\pi\Gamma(n+2\rho)} C_n^{\rho}(t) f_n^{\rho}, \quad -1 < t < 1,$$

Г. п. сводит дифференциальную операцию

$$R[F(t)] = (1-t^2)F'' - (2\rho+1)tF'$$

к алгебраической

$$T\{R[F(t)]\} = -n(n+2\rho) f_n^{\rho}.$$

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., в сб.: Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

А. П. Прудников.

ГЁДЕЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ интуиционистской арифметики — специальная операция, переводящая формулы интуиционистской арифметики в формулы вида $\exists x \forall y\, A(x, y, z)$, где x, y и z — наборы переменных по вычислимым функциям специального вида. При этом выводимые формулы переводятся в истинные формулы в смысле нек-рой четко описанной семантики. Эта интерпретация, к-рая была использована К. Гёделем (K. Gödel) для нового доказательства непротиворечивости *арифметики формальной*, представляет также значительный интерес как нек-рая семантика для языка формальной арифметики.

Рассматривается бескванторная аксиоматич. теория T с бесконечным числом типов переменных. Класс переменных данного типа определяется индуктивно, а именно: 1) $x^0, y^0, z^0, \ldots$ — переменные типа 0, переменные для натуральных чисел; 2) пусть теория содержит переменные типов $t_0, t_1, \ldots, t_k$, тогда теория содержит и переменные типа t, где t есть $(t_0, \ldots, t_k)$. Переменные типа t обозначаются через $x^t, y^t, z^t, \ldots$ и рассматриваются как переменные для вычислимых в нек-ром смысле функций, перерабатывающих каждый набор функций типов $t_1, \ldots, t_k$ соответственно в функцию типа t_0. Язык T содержит термы различных типов: переменная x^t типа t является термом типа t, 0 есть терм типа 0, символ s, к-рый служит для обозначения функции прибавления единицы к натуральному числу, есть терм типа (0,0). Остальные термы образуются с помощью правил порождения: *Чёрча λ-абстракции* и примитивной рекурсии для функций произвольного типа. Атомарные формулы теории T суть равенства $(t=r)$, где t, r — термы типа 0. Формулы теории T получаются из атомарных с помощью логических связок исчисления высказываний $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$. Постулатами T являются аксиомы и правила вывода интуиционистского исчисления высказываний, аксиомы для равенства, аксиомы Пеано для 0 и S, уравнения примитивных рекурсий, аксиома применения функции, определенной λ-абстракцией, и, наконец, принцип математич. индукции, сформулированный в виде правила вывода без употребления кванторов. Через T^+ обозначим теорию T, пополненную кванторами по переменным произвольного типа и соответствующими логическими аксиомами и правилами вывода для кванторов.

Г. и. переводит всякую формулу F из T^+ (а следовательно, и всякую формулу интуиционистской арифметики) в формулу вида

$$\exists x \forall y A(x, y, z),$$

где $A(x, y, z)$ — формула без кванторов, а x, y, z — наборы переменных различных типов, z — совокупность всех свободных переменных формулы F.

Пусть F — формула интуиционистской арифметики и $\exists x \forall y\ A(x, y, z)$ — ее гёделевская интерпретация. Если F выводима в формальной интуиционистской арифметике, то может быть построен терм $t(z)$ теории T такой, что формула $A(t(z), y, z)$ выводима в T. Таким образом, непротиворечивость арифметики сводится к установлению непротиворечивости бескванторной теории T.

Интуиционистская семантика на основе Г. и. определяется следующим образом: формула F считается истинной, если найдется вычислимый терм $t(z)$ такой, что бескванторная формула $A(t(z), y, z)$ истинна при всяком вычислимом z.

Лит.: [1] Гёдель К., в сб.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 299–310.

А. Г. Драгалин.

ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ — общее название двух теорем, установленных К. Гёделем [1]. Первая Г. т. о н. утверждает, что в любой непротиворечивой *формальной системе*, содержащей минимум арифметики ($+$, $\cdot$, знаки $\forall$, $\exists$ и обычные правила обращения с ними), найдется формально неразрешимое суждение, т. е. такая замкнутая формула A, что ни A, ни $\neg A$ не являются выводимыми в системе. Вторая Г. т. о н. утверждает, что при выполнении естественных дополнительных условий в качестве A можно взять утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы. Эти теоремы знаменовали неудачу первоначального понимания программы Гильберта в области оснований математики, к-рая предусматривала полную формализацию всей существующей математики или значительной ее части (невозможность этого показала первая Г. т. о н.) и обоснование полученной формальной системы путем финитного доказательства ее непротиворечивости (вторая Г. т. о н. показала, что даже если финитными считаются все средства формализованной арифметики, этого не хватит уже для доказательства непротиворечивости арифметики).

Формально неразрешимое суждение строится методом арифметизации синтаксиса, к-рый стал одним из основных методов теории доказательств (метаматематики).

Фиксируется нумерация основных формальных объектов (формул, конечных последовательностей формул и т. д.) натуральными числами такая, что основные свойства этих объектов (быть *аксиомой*, быть *выводом* по правилам системы и т. д.) оказываются распознаваемыми по их номерам с помощью весьма простых алгоритмов. Столь же просто вычисляются по номерам исходных данных номера результатов комбинаторных преобразований (напр., подстановки терма в формулу вместо переменной). При этом оказывается возможным написать арифметич. формулу $B(a, b)$, имеющую вид $f(a, b) = 0$ (f — примитивно рекурсивная функция) и выражающую условие: b есть номер формулы, к-рая получается из формулы с номером a путем подстановки натурального числа a вместо переменной x. Если p — номер формулы $\forall b \neg B(x, b)$, то формула $\forall b \neg B(p, b)$ выражает свою собственную невыводимость. Она и оказывается формально неразрешимой. Отсюда следует, что в любой непротиворечивой системе с минимальными выразительными арифметическими возможностями имеется истинное, но не выводимое суждение указанного вида.

Вторая Г. т. о н. получается путем формализации доказательства первой Г. т. о н. Ее доказательство существенно использует особенности арифметизации синтаксиса рассматриваемой системы, а именно — требуется выводимость в этой системе формул, выражающих суждения: 1) система замкнута относительно правила сокращения посылки (*modus ponens*); 2) система замкнута относительно подстановки термов вместо предметных переменных; 3) из истинности формулы вида

$f(N)=0$, где N — натуральное число, f — примитивно рекурсивная функция, следует ее выводимость. Эти условия выполняются для естественной арифметизации, но можно, не меняя алгорифмич. характеристик арифметизации (все функции и предикаты остаются примитивно рекурсивными), изменить ее так, что формула, выражающая непротиворечивость системы (применительно к новой арифметизации), будет выводима. При этом для новой арифметизации будет нарушено условие 1).

Вторая Г. т. о н. дает критерий сравнения формальных систем: если в системе S можно доказать непротиворечивость системы T, то S не погружается в T (см. *Погружающая операция*). Так, доказывается, что *формальный математический анализ* не погружается в арифметику, *типов теория* не погружается в анализ, теория множеств Z не погружается в теорию типов.

Лит.: [1] Gödel K., «Monatshefte für Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [2] Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 2 Aufl., Bd 2, B., 1970; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Г. Е. Минц.

ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ — утверждение о полноте классического исчисления предикатов: всякая предикатная формула, истинная на всех моделях, выводима (по формальным правилам классич. исчисления предикатов). Г. т. о п. показывает, что множество выводимых формул этого исчисления в определенном смысле максимально: оно содержит все чисто логические законы теоретико-множественной математики. Доказательство К. Гёделя [1] дает способ построения контрмодели (т. е. модели для отрицания) всякой формулы A, невыводимой в *Генцена формальной системе* без сечения. Имеются также доказательства, основанные на расширениях систем формул до максимальных, а также доказательства, использующие алгебраич. методы. Теорема вместе с доказательством обобщается на исчисление с равенством. Другое направление — обобщение на произвольные множества формул: каждое непротиворечивое множество формул обладает моделью (множество M непротиворечиво, если для любых $A_1, \ldots, A_k \in M$ невыводимо $\neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k)$). Гёделевское доказательство дает для непротиворечивого множества формул модель, элементами к-рой являются термы. Такие модели составляют исходный пункт во многих исследованиях по метаматематике теории множеств. Другое приложение моделей из термов — теорема Лёвенхейма — Сколема: если счетное множество формул имеет какую-то модель, то оно имеет счетную модель. Само гёделевское доказательство проводится средствами теории множеств без аксиомы бесконечности, т. е. средствами арифметики. Отсюда получается конструктивная форма Г. т. о п. (лемма Бернайса): для каждой предикатной формулы A можно указать такую подстановку ξ арифметич. предикатов вместо предикатных переменных, что $\xi A \to \mathrm{Pr}(A)$ выводима в формальной арифметике; здесь $\mathrm{Pr}(A)$ — арифметич. формула, выражающая, что A выводима. Таким образом, для выводимости A достаточна ее истинность на той модели, к-рую задает подстановка ξ. Лемма Бернайса применяется для построения моделей формальной системы S в системе S', если в S' доказана непротиворечивость S.

Из Г. т. о п. можно извлечь также теорему об устранимости сечения (см. *Генцена формальная система*) и различные теоремы отделения, напр.: если формула, не содержащая знака равенства, выводима средствами исчисления предикатов с равенством, то она выводима в чистом исчислении предикатов; если предикатная формула выводима в арифметике со свободными предикатными переменными, то она выводима в исчислении предикатов.

Г. т. о п. допускает (при соответствующем обобщении понятия модели) обобщение на неклассич. исчисления: интуиционистские, модальные и т. п.

Лит.: [1] Gödel K., «Monatshefte für Math. und Phys.», 1930, Bd 37, S. 349—60; [2] Новиков П. С., Элементы математической логики, М., 1959; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Г. Е. Минц.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Шрёдингера представлением* и *взаимодействия представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций Ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. В Г. п. операторы A_H зависят от t, а волновые функции ψ_H не зависят от t, и связаны с соответствующими не зависящими от t операторами A_S и зависящими от t волновыми функциями $\psi_S(t)$ в представлении Шрёдингера унитарным преобразованием

$$A_H(t) = e^{i\frac{H}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H}{\hbar}t}; \quad \psi_H = e^{i\frac{H}{\hbar}t}\psi_S(t), \qquad (1)$$

где эрмитов оператор H есть полный гамильтониан системы, не зависящий от времени. Возможность введения Г. п., как и представления Шрёдингера и взаимодействия, и их эквивалентность основаны на том, что являются наблюдаемыми и имеют физич. смысл не сами по себе A или ψ, а лишь среднее значение операторов A в состоянии ψ, к-рое должно быть инвариантно относительно унитарных преобразований типа (1) и, следовательно, не должно зависеть от выбора представления. Дифференцирование (1) по t дает уравнение для операторов $A_H(t)$ в Г. п., к-рое содержит всю информацию об изменении состояния квантовой системы с течением времени t:

$$i\hbar\frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = HA_S - A_S H,$$

где операторы H и A_S, вообще говоря, не коммутируют.

Г. п. названо по имени В. Гейзенберга (W. Heisenberg), к-рый ввел его в 1925 в матричной формулировке квантовой механики. *В. Д. Кукин.*

ГЕЙНЕ — БОРЕЛЯ ТЕОРЕМА об открытом покрытии — см. *Бореля — Лебега теорема.*

ГЕЙТИНГА ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, Гейтинга исчисление,— название трех формальных систем конструктивной логики, предложенных А. Гейтингом [1]. Первая из них — гейтинговское, или интуиционистское, исчисление высказываний — формализация принципов конструктивной логики высказываний; вторая — гейтинговское, или интуиционистское, исчисление предикатов — формализация конструктивной логики предикатов; третья — гейтинговская, или интуиционистская, арифметика — формализация принципов элементарной конструктивной теории чисел. Задуманные первоначально как формализации соответствующих разделов интуиционистской логики и математики, эти системы не содержат, однако, никакой чисто интуиционистской специфики.

Логические Г. ф. с. (исчисление высказываний и исчисление предикатов) получаются из обычных вариантов соответствующих классич. систем с полным комплектом ($\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) логических связок (см. *Логические исчисления*) путем замены «неконструктивного постулата» (обычно это *исключенного третьего закон* $A \vee \neg A$ или *двойного отрицания закон* $\neg\neg A \supset A$) на *противоречия закон* $(A \& \neg A) \supset B$. Гейтинговская арифметика получается тем же способом из классической *арифметики формальной*. Генценовские логистические (секвенциальные) системы (см. *Генцена формальная система*) для Г. ф. с. обычно отличаются от соответствующих классич. систем ограничением: все *секвенции*, входящие в вывод, односукцедентны.

Г. ф. с. корректны относительно (различных вариантов) конструктивного понимания математич. суждений: в частности, формулы, выводимые в этих системах, рекурсивно реализуемы и имеют истинные *Гёделя интерпретации*. Для Г. ф. с. допустимы интуиционистские (см. *Интуиционизм*) приемы оперирования с логическими связками, содержащими конструктивную задачу: из выводимости формулы вида $\exists x A(x)$ (формулы вида $A \vee B$) следует выводимость формулы $A(t)$ при нек-ром t (соответственно, одной из формул A, B). При этом в случае арифметики рассматриваемые формулы должны быть замкнутыми. Справедливо также п р а в и л о М а р к о в а: из выводимости замкнутой формулы $\neg\neg\exists x R(x)$, где R — примитивно рекурсивная бескванторная формула, следует выводимость $R(N)$ при нек-ром N.

Гейтинговская арифметика удовлетворяет условиям *Гёделя теоремы о неполноте*. В ней невыводим принцип Маркова $\neg\neg\exists x R \supset \exists x R$ для конкретной примитивно рекурсивной формулы R, хотя этот принцип истинен как при конструктивном понимании суждений в смысле Маркова — Шанина, так и при интерпретации Гёделя. Неполнота логических Г. ф. с. относительно интерпретации реализуемости следует из наличия невыводимой, но реализуемой, пропозициональной формулы. Вопрос о полноте гейтинговского исчисления высказываний относительно гёделевской интерпретации остается (1977) открытым.

Всякая формула, выводимая в Г. ф. с., выводима в соответствующей классич. системе. Обратное утверждение опровергается на примере (закон исключенного третьего), однако имеется погружение классич. систем в Г. ф. с., не меняющее формул (если рассматривать их с точностью до эквивалентности в классич. системе) и сохраняющее не только доказуемость формул, но и структуру доказательств: всякий вывод формулы A из списка Γ в классич. системе легко перестраивается в вывод формулы A^- из списка Γ^- в соответствующей Г. ф. с. Здесь A^- обозначает результат дописывания $\neg\neg$ перед всеми подформулами формулы A (в случае исчисления высказываний достаточно вставить $\neg\neg$ только перед самой формулой A). Таким образом, формулы вида A^- выводимы классически тогда и только тогда, когда они выводимы в Г. ф. с., что дает доказательство относительной непротиворечивости для классич. систем. Сохраняющее структуру выводов погружение Г. ф. с. в классич. системы невозможно, однако имеется погружение Г. ф. с. в классич. системы с дополнительной связкой $\square$ («доказуемо»).

В исчислении предикатов все связки независимы. В арифметике $\neg$ выражается через $\supset$, а $\vee$ — через $\exists$, $\&$, $\supset$. Можно сконструировать логическую связку, через к-рую выражаются все остальные, напр. $(((p \vee q)\&r) \vee (\neg p\&(r \equiv \forall x \exists y s(x,y))))$. Теоретико-множественная теория моделей для Г. ф. с. использует и н т е н с и о н а л ь н ы е м о д е л и, в к-рых истинность высказывания не определяется раз и навсегда, а зависит от рассматриваемого «момента времени». Для изучения гейтинговского исчисления высказываний используются *псевдобулевы алгебры*.

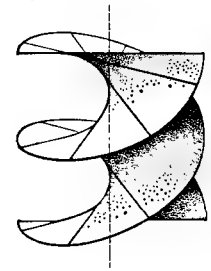
В современной теории доказательств Г. ф. с. изучаются в основном как части систем, включающих более мощные принципы конструктивной математики (принцип Маркова, реализуемость) или интуиционистской математики (брауэровский принцип непрерывности, *бар-индукция* и т. д.).

Лит.: [1] H e y t i n g A., «Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse», 1930, Bd 16, № 1, S. 42—56, 57—71, № 10—12, S. 158—69; [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] К а р р и Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [4] F i t t i n g M., Intuitionistic logic model theory and forcing, Amst.— L., 1969.

Г. Е. Минц.

ГЕКСАЭДР — шестигранник. Напр., пятиугольная пирамида. Правильный Г. есть куб.

ГЕЛИКОИД — *винтовая поверхность*, описываемая прямой, к-рая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, пересекает ось движения под постоянным углом α и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha=\pi/2$ Г. наз. прямым или минимальным (см. рис.). При $\alpha\neq\pi/2$ Г. наз. косым.



Уравнение Г. в параметрич. форме имеет вид

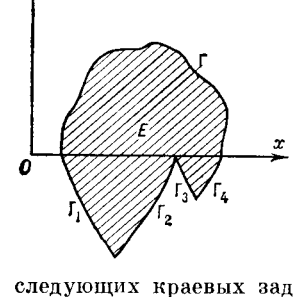
$$x=\rho\cos t,\quad y=\rho\sin t,\quad z=f(\rho)+kt.$$

А. Б. Иванов.

ГЕЛЛЕРСТЕДТА ЗАДАЧА — краевая задача для уравнения типа Чаплыгина вида

$$K(y)\,z_{xx}+z_{yy}=0,$$

в к-ром функция $K(y)$ возрастает, $K(0)=0$, $yK(y)>0$ при $y\neq0$. Искомая функция $z(x, y)$ задается на границе, состоящей из достаточно гладкого контура и кусков характеристик. Рассматриваемое уравнение эллиптично в полуплоскости $y>0$, параболично на линии $y=0$ и гиперболично при $y<0$. Гиперболич. полуплоскость покрывается двумя семействами характеристик, удовлетворяющих уравнениям $y'=[-K(y)]^{-1/2}$ и $y'=-[-K(y)]^{-1/2}$. На линии $y=0$ характеристики одного семейства переходят в характеристики другого семейства.



Пусть E — односвязная область с границей, состоящей из достаточно гладкого контура Γ при $y\geqslant0$ и из кусков характеристик Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 при $y\leqslant0$, причем Γ_1, Γ_3 — характеристики одного семейства, а Γ_2, Γ_4 — другого (см. рис.). В E справедлива теорема существования и единственности решений следующих краевых задач: функция $z(x, y)$ задается на $\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_4$; функция $z(x, y)$ задается на $\Gamma+\Gamma_2+\Gamma_3$.

Впервые эти задачи были изучены (для $K(y)=\operatorname{sgn} y\cdot|y|^{\alpha}$, $\alpha>0$) С. Геллерстедтом [1] методами, развитыми Ф. Трикоми [2] для *Трикоми задачи*, и представляют собой обобщение последней. Г. з. имеют важные приложения в околозвуковой газовой динамике. Г. з. и родственные им задачи исследовались для нек-рых многосвязных областей и для линейных уравнений, содержащих младшие члены (см. [3]).

Лит.: [1] Gellerstedt S., «Arkiv för mat., astr. och fysik», 1938, Bd 26A, № 3, p. 1—32; [2] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [3] Смирнов М. М., Уравнения смешанного типа, М., 1970.

Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРА МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — совокупность методов суммирования числовых рядов; введены О. Гёльдером [1] как обобщение *средних арифметических метода суммирования*. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

суммируется методом Гёльдера (H, k) к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}H_n^k=s,$$

где

$$H_n^0=s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,$$

$$H_n^k=\frac{H_0^{k-1}+H_1^{k-1}+\ldots+H_n^{k-1}}{n+1},$$

$k=1, 2, \ldots$ В частности, $(H, 0)$-суммируемость ряда означает его обычную сходимость; $(H, 1)$ есть метод средних арифметических. Методы (H, k) – вполне *регулярные методы суммирования* при любом k и совместны для всех k (см. *Совместность методов суммирования*). С увеличением k сила метода возрастает: если ряд суммируем методом (H, k) к сумме s, то он суммируем к той же сумме методом (H, k') при любом $k'>k$. Метод (H, k) при всех k равносилен и совместен с *Чезаро методом суммирования* того же порядка k. Если ряд суммируем методом (H, k), то его члены a_n необходимо удовлетворяют условию $a_n=o(n^k)$.

Лит.: [1] Hölder O., «Math. Ann.», 1882, Bd 20, S. 535—549; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ГЁЛЬДЕРА НЕРАВЕНСТВО — 1) Г. н. для сумм. Пусть $\{a_s\}$, $\{b_s\}$ – нек-рые множества комплексных чисел, $s\in S$, где S – конечное или бесконечное множество индексов. Справедливо Г. н.

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant \left(\sum_{s\in S} |a_s|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{s\in S} |b_s|^q\right)^{1/q}, \quad (1)$$

где $p>1$, $1/p+1/q=1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $|a_s|^p=C|b_s|^q$, а $\arg(a_s b_s)$ и C не зависят от $s\in S$. При $p=q=2$ Г. н. для сумм наз. *Коши неравенством*. В предельном случае при $p=1$, $q=+\infty$ Г. н. имеет вид

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant \left(\sum_{s\in S} |a_s|\right) \sup_{s\in S} |b_s|.$$

При $0<p<1$ знак Г. н. меняется на обратный. Г. н. для сумм допускает обращение (М. Рисс, M. Riesz): если

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant AB$$

при всех $\{a_s\}$ таких, что

$$\sum_{s\in S} |a_s|^p \leqslant A^p,$$

то

$$\sum_{s\in S} |b_s|^q \leqslant B^q.$$

Для сумм более общего вида Г. н. имеет вид

$$\left|\sum_{s\in S} \rho_s a_{1s} a_{2s} \ldots a_{ms}\right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{s\in S} \rho_s |a_{ks}|^{p_k}\right)^{1/p_k}, \quad \rho_s \geqslant 0,$$

если

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_m}=1, \quad p_k\geqslant 1, \quad 1\leqslant k\leqslant m. \quad (2)$$

2) Г. н. для интегралов. Пусть S – измеримое по Лебегу множество n-мерного евклидова пространства R^n и функции

$$a_k(s)=a_k(s^1, s^2, \ldots, s^n), \quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

принадлежат $L_{p_k}(S)$, причем выполнено условие (2). Тогда справедливо Г. н.

$$\left|\int_S a_1(s) \ldots a_m(s)\, ds\right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\int_S |a_k(s)|^{p_k}\, ds\right)^{1/p_k}.$$

При $m=p=q=2$ это есть *Буняковского неравенство*. Для интегрального Г. н. справедливы замечания (о предельном случае и о знаках), аналогичные замечаниям для Г. н. (1).

В Г. н. множество S может быть любым множеством, на некоторой алгебре подмножеств которого задана конечно аддитивная функция μ (например, мера), а функции $a_k(s)$, $1\leqslant k\leqslant m$, μ-измеримы и μ-интегрируемы в степени p_k.

3) Обобщенное Г. н. Пусть S – произвольное множество и пусть на совокупности всех положительных числовых функций $a(s)$: $S\to R^1$ задан (конечный или бесконечный) функционал φ: $a(s)\to\varphi(a)$, удовлетворяющий условиям: а) $\varphi(0)=0$; б) $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ для всех чисел $\lambda>0$; в) при $0<a(s)\leqslant b(s)$ выполняется неравенство $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$; г) $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$. Если

при этом выполняются условия (2), то справедливо обобщенное Г. н. для функционала:

$$\varphi(|a_1, \ldots, a_m|) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left[\varphi\left(|a_k|^{p_k}\right)\right]^{1/p_k}.$$

Лит.: [1] Hölder O., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1889, № 2, p. 38—47; [2] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965.
Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРА УСЛОВИЕ — неравенство, в к-ром приращение функции оценивается через приращение ее аргумента. Функция $f(x)$, определенная в области E n-мерного евклидова пространства, удовлетворяет в точке $y \in E$ Г. у. с показателем α (порядка α), где $0<\alpha\leqslant 1$, и коэффициентом $A(y)$, если

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A(y)\,|x-y|^{\alpha} \qquad (1)$$

для всех $x \in E$, достаточно близких к y. Это Г. у. наз. иногда изотропным Г. у. Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет на множестве $E' \subset E$ (изотропному) Г. у. с показателем α, если Г. у. (1) выполнено для всех $y \in E'$. В случае, когда

$$A = \sup_{y \in E} A(y) < \infty,$$

Г. у. наз. равномерным на E, а A — коэффициентом Гёльдера функции $f(x)$ на E. Г. у. наз. также непрерывностью по Гёльдеру. Величина

$$|f|_{\alpha} \equiv |f,\ E|_{\alpha} = \sup_{x,\ y \in E} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

наз. α-полунормой Гёльдера ограниченной функции на множестве E. Полунорма Гёльдера, как функция от f, логарифмически выпукла:

$$|f|_{\alpha t+\beta(1-t)} \leqslant |f|_{\alpha}^{t}\ |f|_{\beta}^{1-t}.$$

Неизотропное Г. у. вводится аналогично Г. у. (1) и имеет вид:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j^i (x^j-y^j)\right|^{\alpha_i},$$

где $0<\alpha_i\leqslant 1$, а $\det(a_j^i)\neq 0$. Функции, удовлетворяющие неизотропному Г. у., непрерывны и имеют по направлению ковектора $a^i=(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ показатель Гёльдера α_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Для числовых функций одного действительного переменного условие вида (1) было введено Р. Липшицем (R. Lipschitz, 1864) в связи с исследованиями по тригонометрич. рядам. В этом случае Г. у. часто наз. условием Липшица порядка α с константой Липшица A. Для числовых функций $n(\geqslant 2)$ действительных переменных Г. у. было введено О. Гёльдером (O. Hölder) при исследовании дифференциальных свойств ньютонова потенциала.

Г. у. естественным образом переносится на случай отображений метрич. пространств. Говорят, что отображение $f: X \to E$ метрич. пространства X в метрич. пространство E удовлетворяет в точке $x_0 \in X$ Г. у. с показателем α и коэффициентом $A(x_0)$, если существует такая окрестность $U(x_0) \subset X$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\rho_E(f(x),\ f(x_0)) \leqslant A(x_0)\,\rho_X^{\alpha}(x,\ x_0).$$

Здесь ρ_X и ρ_E — метрики пространств X и E. Аналогично вводится Г. у. на множестве $X' \subset X$, равномерное на X Г. у. и α — полунормы Гёльдера.

Векторные пространства функций, удовлетворяющих тому или иному Г. у., образуют *Гёльдерово пространство.*
Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — *банахово пространство* ограниченных и непрерывных функций $f(x)=f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенных на множестве E

n-мерного евклидова пространства и удовлетворяющих на E *Гёльдера условию*.

Г. п. $C_m(E)$, $m \geqslant 0$ — целое, состоит из m раз непрерывно дифференцируемых на E функций (непрерывных при $m=0$).

Г. п. $C_{m+\alpha}(E)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $m\geqslant 0$ — целое, состоит из функций, m раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $m=0$), все m-е производные к-рых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

Норма в $C_m(E)$ и $C_{m+\alpha}(E)$ вводится следующим образом:

$$|f|_m = \|f, E\|_m = \sum_{|k|=0}^{m} \sup_{x\in E} |f^{(k)}(x)|,$$

$$|f|_{m+\alpha} = \|f, E\|_{m+\alpha} = |f|_m + \sum_{|k|=m} \|f^{(k)}, E\|_\alpha,$$

где $k=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_j \geqslant 0$ — целые,

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n, \quad f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Основные свойства Г. п. для ограниченной связной области ($\overline{E}$ — замыкание E):

1) $C_{m+\beta}(\overline{E})$ вложено в $C_{k+\alpha}(\overline{E})$, если $0 \leqslant k+\alpha \leqslant m+\beta$, k, m — целые, $0<\alpha\leqslant 1$, $0<\beta\leqslant 1$. При этом $|f|_{k+\alpha} \leqslant A|f|_{m+\beta}$ и постоянная A не зависит от $f \in C_{m+\beta}(\overline{E})$.

2) Единичный шар пространства $C_{m+\beta}(\overline{E})$ компактен в $C_{m+\alpha}(\overline{E})$, если $0<\alpha<\beta$. Следовательно, любое ограниченное множество функций из $C_{m+\beta}(\overline{E})$ содержит последовательность функций, сходящихся в метрике $C_{m+\alpha}(E)$ к функции пространства $C_{m+\alpha}(\overline{E})$.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Л. П. Кипцов.

ГЕЛЬМГОЛЬЦА УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + cu = 0,$$

где c — постоянное число. К Г. у. приводит изучение установившихся колебательных процессов. При $c=-0$ Г. у. переходит в *Лапласа уравнение*. В случае, если в правой части Г. у. стоит функция $f(x)$, это уравнение наз. неоднородным Г. у.

Для Г. у., являющегося уравнением эллиптич. типа, в ограниченной области ставятся обычные краевые задачи (Дирихле, Неймана и др.). Те значения c, для к-рых существует не равное тождественно нулю решение однородного Г. у., удовлетворяющее соответствующему однородному краевому условию, наз. собственным значением оператора Лапласа (соответствующей краевой задачи). В частности, для задачи Дирихле все собственные значения положительны, а для задачи Неймана — неотрицательны. Для значений c, совпадающих с собственными значениями, решение краевой задачи для Г. у. заведомо неединственно. Если же значения c отличны от собственных, то теорема единственности справедлива.

При решении краевых задач для Г. у. применяются обычные методы теории эллиптич. уравнений (сведение к интегральному уравнению, вариационный метод, метод конечных разностей).

В случае неограниченной области с компактной границей для Г. у. ставятся внешние краевые задачи, к-рые при $c<0$ имеют единственное решение, стремящееся к нулю на бесконечности. При $c>0$ стремящееся к нулю на бесконечности решение Г. у., вообще говоря, не является единственным. В этом случае для выделения единственного решения ставят дополнительные условия (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*, *Предельного поглощения принцип*).

Для регулярного в области G решения Г. у. справедлива следующая формула среднего значения

$$\frac{1}{\text{mes}\,\Omega}\int_{\Omega} u d\sigma = \\ = u(x_0)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1} (r\sqrt{c})^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r\sqrt{c}),$$

где Ω — сфера радиуса r с центром в точке x_0, целиком лежащая в области G, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция* порядка ν.

Г. у. рассматривалось Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz), к-рый получил первые теоремы о решении краевых задач для этого уравнения в 1860.

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1 (3 изд.), т. 2 (2 изд.), М.—Л., 1951; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966.

Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.

ГЕЛЬФАНДА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — отображение, сопоставляющее элементу a коммутативной банаховой алгебры A функцию $\hat{a}$ на пространстве X максимальных идеалов алгебры A. Существует взаимно однозначное соответствие между точками пространства X и гомоморфизмами алгебры A в поле комплексных чисел. Если произвести соответствующее отождествление, то Г. п. осуществляется по формуле $\hat{a}(x) = x(a)$. В частном случае *групповой алгебры* локально компактной абелевой группы (со сверткой в качестве умножения на алгебре) Г. п. совпадает с преобразованием Фурье (подробнее см. *Банахова алгебра*). Г. п. введено И. М. Гельфандом [1].

Лит.: [1] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1941, т. 9 [51], с. 3—24.

Е. А. Горин.

ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ — понятие теории статистического *выборочного метода*. В математич. статистике Г. с. наз. множество к.-л. однородных элементов, из к-рого по определенному правилу выделяется нек-рое подмножество, наз. в ы б о р к о й. Напр., при *статистическом контроле качества*, связанном с уничтожением контролируемых изделий, в роли Г. с. выступает множество всех изделий, подлежащее общей характеризации (в смысле долговечности, соответствия принятым нормам, допускам и т. д.); при этом в простейших случаях контролируемая выборка извлекается из Г. с. случайно (наугад). С точки зрения теории вероятностей выбор «наугад» означает, что если Г. с. содержит N элементов и отбирается выборка из n элементов ($n<N$), то выбор должен быть осуществлен таким образом, чтобы для любой группы из n элементов вероятность быть извлеченной равнялась $n!\,(N-n)!\,N!$. Именно такое правило отбора осуществляется при определении выигравших лотерейных номеров из общего числа всех лотерейных билетов, рассматриваемого как Г. с., к-рая по своему смыслу необходимо является конечным множеством.

В математич. статистике принято результаты к.-л. однородных наблюдений наз. выборкой даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию Г. с., указанному выше. Напр., результаты измерения к.-л. физич. постоянной, подверженные случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной Г. с. Предполагается, что принципиально можно произвести любое число таких измерений; полученные фактически результаты считают выборкой из бесконечного множества возможных результатов, называемого Г. с. При этом предполагают, что правило отбора задается функцией распределения $F(x)$, так что вероятность получить результат измерения, принадлежащий полуинтервалу $(a, b]$, выражается разностью $F(b)-F(a)$.

Понятие бесконечной Г. с. не является логически безупречным и необходимым. Для решения статистич. задач нужна не сама Г. с., а лишь те или иные характеристики соответствующей функции распределения $F(x)$. С точки зрения теории вероятностей выборка из

бесконечной Г. с. представляет собой наблюдаемые значения нескольких случайных величин, имеющих заданный закон распределения. В частности, если эти величины независимы и подчиняются одному и тому же распределению, то их наблюденные значения наз. простой выборкой. При таком истолковании термина «выборка» введение дополнительного понятия Г. с. оказывается излишним. *Л. Н. Большев.*

ГЕНЕРАТРИСА — см. *Производящая функция.*

ГЕНЗЕЛЕВО КОЛЬЦО — коммутативное локальное кольцо, для к-рого выполняется *Гензеля лемма*, или, в другом определении, для к-рого выполняется теорема о неявной функции. Для локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ последнее означает, что для любого унитарного многочлена $P(X)\in A[X]$ и простого решения $a_0\in A$ уравнения $P(X)=0$ по модулю $\mathfrak{m}$ (т. е. $P(a_0)\in\mathfrak{m}$ и $P'(a_0)\notin\mathfrak{m}$) существует $a\in A$, $P(a)=0$ и $a\equiv a_0 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Примерами Г. к. являются полные локальные кольца, кольца сходящихся степенных рядов (и в более общем смысле, *аналитические кольца*), кольцо алгебраических степенных рядов (т. е. рядов из $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, алгебраических над $k[X_1, \ldots, X_n]$). Локальное кольцо, целое над Г. к., есть Г. к.; в частности, факторкольцо Г. к. есть Г. к. Для любого локального кольца A существует общая конструкция — такая локальная гензелева A-алгебра ${}^hA$, что для любой локальной гензелевой A-алгебры B существует единственный гомоморфизм A-алгебр ${}^hA\to B$. Алгебра ${}^hA$ локального кольца A является строго плоским A-модулем, $\mathfrak{m}{}^hA$ будет максимальным идеалом алгебры ${}^hA$, поля вычетов A и ${}^hA$ канонически изоморфны, пополнения A и ${}^hA$ (в топологиях локальных колец) совпадают. Так, гензелевой A-алгеброй для $k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ является кольцо алгебраических степенных рядов от $X_1, \ldots, X_n$. Если A — нётерово (соответственно приведенное, нормальное, регулярное, превосходное) кольцо, то таким же будет и ${}^hA$. Напротив, если A — целостное кольцо, то ${}^hA$ может не быть целостным; более точно, существует биективное соответствие между максимальными идеалами целого замыкания кольца A и минимальными простыми идеалами ${}^hA$.

Г. к. с сепарабельно замкнутым полем вычетов наз. строго локальным (или строго гензелевым) по причине локальности его спектра в этальной топологии схем; аналогично конструкции построения гензелевой A-алгебры ${}^hA$ имеется функтор строгой гензелевой A-алгебры ${}^{sh}A$. Понятие Г. к. можно вводить для полулокального кольца и даже в более общем смысле для пары кольцо — идеал.

Г. к. можно характеризовать как кольцо, над которым любая конечная алгебра есть прямая сумма локальных колец. Г. к. введены в [1]; общая теория Г. к. и конструкция гензелевой A-алгебры разработаны в [2].

В теории этальных морфизмов и этальной топологии гензелева A-алгебра понимается как индуктивный предел этальных расширений кольца. В коммутативной алгебре взятие гензелевой A-алгебры часто заменяет операцию пополнения, играющую важную роль при локальном исследовании объектов.

Лит.: [1] Azumaya G., «Nagoya Math. J.», 1951, v. 2, p. 119—50; [2] Nagata M., Local rings, N. Y.— L., 1962; [3] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, № 32, ch. 4. *В. И. Данилов.*

ГЕНЗЕЛЯ ЛЕММА — утверждение, полученное К. Гензелем [1] при создании теории *р-адических чисел* и нашедшее затем большое применение в *коммутативной алгебре*. Говорят, что для локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ выполняется лемма Гензеля, если для любого унитарного многочлена

$P(X) \in A[X]$ и разложения $\overline{P}(X) = q_1(X) \cdot q_2(X)$ его редукции по модулю $\mathfrak{m}$ в произведение двух взаимно простых многочленов

$$q_1(X) \in (A/\mathfrak{m})[X], \quad q_2(X) \in (A/\mathfrak{m})[X]$$

существуют такие многочлены

$$Q_1(X) \in A[X], \quad Q_2(X) \in A[X],$$

что

$$P(X) = Q_1(X) \cdot Q_2(X), \quad Q_1(X) = q_1(X), \quad \overline{Q}_2(X) = q_2(X)$$

(здесь черта обозначает образ при редукции $A \to A/\mathfrak{m}$). В частности, для любого простого корня α редуцированного многочлена $\overline{P}(X)$ существует решение $a \in A$ уравнения $P(X) = 0$, удовлетворяющее условию $\overline{a} = \alpha$. Г. л. выполняется, напр., для полного локального кольца. Г. л. позволяет сводить решение алгебраич. уравнения над полным локальным кольцом к решению соответствующего уравнения над его полем вычетов. Так в кольце Z_7 7-адических чисел из Г. л. следует разрешимость уравнения $X^2 - 2 = 0$, так как это уравнение имеет два простых корня в поле F_7 из семи элементов. Локальное кольцо, для к-рого выполняется Г. л., наз. *гензелевым кольцом*.

По поводу Г. л. в некоммутативном случае см. [3].

Лит.: [1] Hensel K., «J. reine und angew. Math.», 1904, Bd 27, S. 51—84; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Zassenhaus H., «Arch. Math.», 1954, Bd 5, № 4—6, S. 317—25. *В. И. Данилов.*

ГЕНЦЕНА ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА — логико-математич. исчисление, служащее для формализации и исследования содержательных доказательств, оперирующих с допущениями (гипотезами). Введены Г. Генценом (G. Gentzen, [2]). Г. ф. с. делят на системы естественного вывода (или натуральные, имитирующие форму обычных математич. умозаключений и потому особенно подходящие для формализованной записи их) и секвенциальные (или логистические, направленные на анализ возможных доказательств данной формулы, на получение результатов о нормальной форме доказательств и их использование в *доказательств теории* и в теории доказательства теорем на ЭВМ). Иногда Г. ф. с. отождествляют с системами секвенциального типа; тем не менее натуральные Г. ф. с. могут использовать *секвенции*, а секвенциальные Г. ф. с. иногда оформляют в виде исчисления формул, а не секвенций; иногда все Г. ф. с. считают натуральными, т. к. все они в той или иной степени отражают обычные приемы оперирования с логич. связками и допущениями.

Натуральные Г. ф. с. содержат правила введения логич. символов и правила удаления символов. Логич. аксиомы немногочисленны (обычно одна — две). Напр., натуральный вариант классич. исчисления предикатов для языка $\{\forall, \supset, \neg\}$ задается аксиомой $A \to A$, правилами введения

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)} (\supset^+), \quad \frac{A, \Gamma \to B \quad A, \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \neg A} (\neg^+),$$

$$\frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x)} (\forall^+),$$

где b не входит в Γ и $\forall x A(x)$; правилами удаления

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Sigma \to (A \supset B)}{\Gamma, \Sigma \to B} (\supset^-), \quad \frac{\Gamma \to \forall x A(x)}{\Gamma \to A(t)} (\forall^-),$$

$$\frac{\Gamma \to B \quad \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \Delta} (\neg^-), \quad \frac{\Gamma \to \neg\neg A}{\Gamma \to A} (\neg\neg^-),$$

где t — произвольный терм, и структурными правилами:

$$\frac{\Gamma \to C}{A, \Gamma \to C} \text{ (утончение)},$$

$$\frac{A,\ A,\ \Gamma \to C}{A,\ \Gamma \to C}\ (\text{сокращение повторений}),$$

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B,\ \Sigma \to C}{\Gamma,\ B,\ A,\ \Sigma \to C}\ (\text{перестановка}).$$

Секвенция, находящаяся под чертой, наз. заключением правила, а секвенции, находящиеся над чертой, — посылками. Аксиома $A \to A$ изображает введение допущения A; правило $(\supset^+)$ иллюстрирует освобождение от допущения: формула B верхней секвенции зависит от допущения A, формула $A \supset B$ нижней секвенции уже не зависит от A. Г. ф. с. натурального типа задается иногда в виде исчисления формул (а не секвенций) с неявной записью зависимости от допущений: вывод в таком исчислении — это древовидный граф, в вершинах к-рого могут находиться произвольные формулы (не обязательно аксиомы), а все переходы производятся по правилам вывода. Эти правила получаются вычеркиванием антецедентов из соответствующих правил натуральной системы, описанной с помощью секвенций, причем в случае, когда происходит освобождение от допущений, добавляются соответствующие условия, напр.

$$\frac{A \quad B}{A \,\&\, B}\ (\&^+), \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\ (\supset^+).$$

Считается, что вхождение V формулы в такой вывод зависит от допущения D, если D не является аксиомой, находится на вершине вывода над V, и в ветви, ведущей от рассматриваемого вхождения D к V, не происходит освобождения от допущения D. При истолковании такого вывода каждому вхождению формулы C сопоставляется секвенция $\Gamma \to C$, где Γ — полный список допущений, от которых зависит рассматриваемое вхождение формулы C. Связь натуральных Г. ф. с. с обычными (гильбертовскими) вариантами соответствующих систем устанавливается с помощью утверждения: $\Gamma \to C$ выводимо в натуральной системе тогда и только тогда, когда C выводимо из Γ с фиксированными переменными в обычной системе.

Натуральные Г. ф. с. в их первоначальной форме плохо приспособлены для поиска вывода путем анализа: при попытке выяснить, по какому правилу из каких посылок могла получиться данная формула (секвенция), возникает неоднозначность — в принципе это может быть правило введения соответствующей логич. связки или любое из правил удаления. При этом множество возможных посылок в правилах удаления потенциально неограничено (за счет варьирования формулы A в правиле $(\supset^-)$). Поэтому полезно иметь правила, обладающие свойством подформульности: в посылки входят только подформулы заключения, а бесконечность проявляется лишь за счет варьирования вида термов в правилах типа $(\forall^-)$. В секвенциальных Г. ф. с. либо все правила обладают свойством подформульности, либо это свойство нарушается лишь для одного правила — правила сечения:

$$\frac{\Gamma \to A \quad A,\ \Sigma \to \Delta}{\Gamma,\ \Sigma \to \Delta}$$

или другого правила близкого вида, напр. для правила $(\neg^-)$. Поэтому Г. ф. с., обладающие свойством подформульности, наз. также свободными от сечения или Г. ф. с. без сечения.

Пример. Свободный от сечения вариант классич. исчисления предикатов LK. Выводимые объекты — произвольные секвенции, составленные из $\{\supset, \neg, A\}$-формул. Аксиома $A \to A$.

Сукцедентные правила:

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)} (\to \supset), \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A} (\to \neg),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(b)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)} (\to \forall),$$

где b не входит в Γ и $\forall x A(x)$.

Антецедентные правила:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} (\neg \to), \qquad \frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Delta} (\forall \to),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta} (\supset \to).$$

Структурные правила: сечение, перестановка, утонение и сокращение повторений в антецеденте и сукцеденте (см. *Секвенция*).

При сравнении секвенциальных и натуральных Г. ф. с. правилам введения соответствуют сукцедентные правила, правилам удаления — антецедентные правила. При моделировании в секвенциальных Г. ф. с. правил удаления используется сечение. Свойство подформульности для LK обеспечивает основная теорема Генцена (теорема об устранимости сечения): по всякому выводу в LK можно построить вывод (той же секвенции) без сечения. Эта теорема позволяет устанавливать разрешимость бескванторных систем: из подформул данной бескванторной формулы можно составить лишь конечное число несходных секвенций (секвенции сходны, если они отличаются лишь порядком и повторениями членов в антецеденте и сукцеденте), из к-рых, в свою очередь, можно составить лишь конечное число «кандидатов» в выводы; данная формула доказуема, если среди этих кандидатов найдется вывод.

Г. ф. с. позволяют отражать содержательные особенности теории с помощью чисто структурных соображений; так, Г. ф. с. конструктивной математики часто отличаются от соответствующих классич. систем лишь использованием односукцедентных секвенций вместо произвольных. В свободных от сечения системах легко доказывается непротиворечивость (т. е. невыводимость пустой секвенции), а также выводимость одного из дизъюнктивных членов выводимой дизъюнкции.

Важным обобщением Г. ф. с. являются полуформальные системы, содержащие правила с бесконечным множеством посылок, напр. правило бесконечной индукции (ω-правило):

$$\frac{A(0), A(1), \ldots, A(N), \ldots}{\forall x A(x)}.$$

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Генцен Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, Сб. переводов, М., 1967, с. 9—76; [3] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [4] Prawitz D., Ideas and results in proof theory, в кн.: Proc. 2 Scand. logic symposium, Amst. — L., 1971.

Г. Е. Минц.

ГЕОДЕЗИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с определением гравитационного поля и фигуры Земли в единой системе координат. Используют декартову прямоугольную систему x, y, z, а также криволинейные ортогональные координаты B, L, H (см. [3]) или u, v, w, связанные с сжатым эллипсоидом вращения (из-за близости фигуры Земли к такому эллипсоиду). При этом

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B \cos L, \quad y = (N+H)\cos B \sin L \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N+H\right)\sin B, \quad N = a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2 B\right)^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где a, b — большая и малая полуоси эллипсоида, $2c$ — его фокусное расстояние

$$x = c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, \quad y = c \sin u \sin v \operatorname{ch} w,$$
$$z = c \cos u \operatorname{sh} w. \quad (2)$$

Фигуру Земли и ее поле определяют по измерениям геометрич. характера (расстояний между точками, уг-

лов между направлениями), измерениям силы тяжести, локации Луны, наблюдениям искусственных спутников Земли и внегалактических радиоисточников. При развитии наземной сети геодезич. измерений необходимо определять элементы ориентировки местных систем координат.

В выводах с внеземными данными большое значение приобретают геодезич. построения без отвеса (см. [1]). Эти построения основаны на синхронном фотографировании с нескольких пунктов подвижной цели на фоне звезд. Если известны координаты части пунктов и известны склонения и прямые восхождения звезд, сфотографированных вместе с целью, то возможно вывести координаты как сфотографированных целей, так и неизвестные координаты пунктов.

В наземном варианте, из-за искажений углов в вертикальных плоскостях влиянием атмосферной рефракции для вывода высот H точек земной поверхности, разработаны методы, связанные с использованием силы тяжести. Этими же методами определяют земное гравитационное поле. Современная теория использования силы тяжести в геодезии принадлежит М. С. Молоденскому (см. [2]). Эта теория основана на решении краевой задачи с косой производной для уравнения Лапласа. Отсчетным может служить поле потенциала U притяжения

$$U = \frac{fmi}{c} Q_0 (i \operatorname{sh} w) + \frac{\omega^2 a^2}{3} \cdot \frac{Q_2 (i \operatorname{sh} w)}{Q_2 \left(i \frac{b}{c} \right)} P_2 (\cos u),$$

близкого к земному. Здесь f — гравитационная постоянная, m — масса, близкая к массе Земли, ω — угловая скорость ее вращения, P, Q — функции Лежандра соответственно 1-го и 2-го рода. Потенциал W силы тяжести выражается через его значение W_0 в начале счета высот (уровня моря) и приращение, выводимое из геометрич. нивелирования и измерений силы тяжести вдоль его линии:

$$W = W_0 - \int g \, dh,$$

где dh — элементарное нивелирное превышение. По приращению $\int g dh$ потенциала определяют приближенную координату w_0, полагая, что нивелирование выполнено в поле потенциала силы тяжести эллипсоида, уровенного относительно этого потенциала. Для уточнения координаты w_0 (вывода высоты H) и определения внешнего земного гравитационного поля достаточно найти потенциал T, наз. возмущающим:

$$T = W - \Omega - U. \qquad (3)$$

Здесь Ω — потенциал центробежной силы, возникающий из-за вращения Земли. Краевое условие на земной поверхности для вывода потенциала получают, используя связь $dw \, dH = -g$ и вычисляя dU/dw в точке с координатой w_0. На бесконечности ($\operatorname{sh} w \to \operatorname{ch} w \to \infty$) потенциал T удовлетворяет условию $\lim T = 0$.

Решение задачи сводится к выводу плотности простого слоя также на земной поверхности, связанного с потенциалом T нек-рой зависимостью. Из этой зависимости и краевого условия выводится сингулярное интегральное уравнение 2-го рода. На это уравнение при определенных условиях распространяется альтернатива Фредгольма. Краевые условия допускают единственное решение при эллипсоидальном отсчетном поле. Если же отсчетное поле вырождается в сферическое, решением задачи становится произвольная сферич. функция 1-й степени. Из-за неизбежных ошибок измерений вводят дополнительные условия о совмещении центра инерции Земли и центра отсчетного эллипсоида, о параллельности полярной главной центральной оси инерции Земли и малой оси отсчетного эллипсоида.

Центр инерции Земли может не лежать на ее оси вращения. В частности, так будет,если из гравитационного поля Земли для уменьшения ошибок интерполяции силы тяжести выделено влияние топографич. масс. В горных районах, из-за сложности земной поверхности, численное решение представляет большие практич. затруднения.

Координаты B, L, H нек-рой точки, принимаемой за исходную при обработке измерений геометрич. характера, назначают заранее произвольно, но так, чтобы компоненты $\varphi - B$, $(\lambda - B)\cos B$ уклонения отвеса от нормали к эллипсоиду были малы. При этом вводят условия о параллельности осей вращения Земли и эллипсоида и плоскостей начальных астрономич. и геодезич. меридианов.

Величину W_0 и координаты центра инерции Земли определяют, сопоставляя решение упомянутого интегрального уравнения с наблюдениями астрономич. широт φ и долгот λ и с высотами H, выводимыми из геометрич. и астрономо-гравиметрич. нивелирования.

Из исследования орбит искусственных спутников Земли определяют отличия ее гравитационного поля от сферического, как правило, через вывод коэффициентов разложения потенциала по сферич. функциям. Традиционные методы небесной механики дополняет теория совместного определения гравитационного поля и координат станций наблюдения за спутниками.

Основы математич. теории фигуры Земли заложены И. Ньютоном (I. Newton, 1687), вычислившим сжатие земного эллипсоида при условии, что он однороден по плотности. А. Клеро (A. Clairaut, 1743) в первом приближении исследовал гравитационное поле неоднородной Земли, вращающейся в гидростатич. равновесии. Л. Эйлер (L. Euler, 1757) заложил основы теории уровенных поверхностей земного потенциала. Изучая притяжение небесных тел — сфероидов, в частности эллипсоидов вращения, П. Лаплас (P. Laplace, 1785) обобщил результаты А. Клеро о распределении силы тяжести на поверхности планеты, освободив их от предположения о гидростатич. равновесии и сохранив точность вывода А. Клеро (порядка земного сжатия — 1 : 300). При этом П. Лаплас развил теорию сферич. функций и рядов. Работы Дж. Стокса (G. Stokes), развитые и дополненные в дальнейшем многими геодезистами, служили теоретич. основой использования гравиметрич. измерений в геодезии до появления работ М. С. Молоденского. К определению фигуры Земли Дж. Стокс впервые подошел как к краевой задаче, приближенно решив первую краевую задачу для сфероида и обосновав результаты А. Клеро и П. Лапласа. Это решение Дж. Стокса опередило результаты П. Дирихле (P. Dirichlet, 1852) по решению такой задачи для сферы разложением по сферич. функциям. Дж. Стокс (1849) выразил также высоту внешней уровенной поверхности планеты над сфероидом через силу тяжести на поверхности планеты. Вывод о возможности замены притяжения тела притяжением простого слоя на поверхности тела сделан К. Гауссом (C. Gauss, 1840). Теория вращения неоднородной жидкости в гидростатич. равновесии имеет значение при совместном решении геофизич. и геодезич. задач. Основные результаты в этой области принадлежат А. М. Ляпунову.

Лит.: [1] Изотов А. А. и др., Основы спутниковой геодезии, М., 1974; [2] Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И., Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, М., 1960; [3] Морозов В. П., Курс сфероидической геодезии, М., 1969.

В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА в точке кривой $\gamma = r(t)$ на поверхности F — скорость вращения касательной к γ вокруг нормали $\boldsymbol{n}$ к F, т. е. проекция на $\boldsymbol{n}$ вектора угловой скорости вращения касательной при движении вдоль γ. Предполагается, что γ и F

регулярны и ориентированы, скорость берется относительно длины s вдоль γ. Г. к. может быть определена как кривизна проекции γ на касательную плоскость к F в рассматриваемой точке. Г. к. равна

$$k_g = \frac{(r'r''n)}{|r'|^3},$$

где штрих означает дифференцирование по t.

Г. к. входит в выражение вариации длины $L(\gamma)$ при варьировании γ на F. При закрепленных концах:

$$\delta L = -\int k_g(\mathbf{v}, \delta r)\, ds, \text{ где } \mathbf{v} = \left[n, \frac{dr}{ds}\right],$$

δr — вектор вариации кривой. Кривые, на к-рых $k_g \equiv 0$ — *геодезические линии*.

Интегральной Г. к., или поворотом кривой γ, наз. интеграл $\int k_g ds$. Связь поворота замкнутого контура с интегральной кривизной охваченной им области на поверхности дает *Гаусса — Бонне теорема*.

Г. к. принадлежит *внутренней геометрии* поверхности и допускает выражение через метрич. тензор и производные внутренних координат поверхности по параметру t кривой. Если внутренняя геометрия риманова пространства изучается в отвлечении от возможных погружений, то Г. к. остается единственной кривизной кривой и слово «геодезическая» опускается. При рассмотрении кривых в подмногообразии риманова пространства кривизна кривой может определяться во внешнем пространстве и в подмногообразии, подобно тому, как на поверхности кривая имеет обычную кривизну и Г. к.

Можно ввести понятие Г. к. для кривой γ на общей выпуклой поверхности. Если кривая γ имеет длину и каждая ее дуга имеет определенный поворот, то правой (левой) Г. к. кривой γ в точке x наз. предел отношения правого (левого) поворота дуги кривой к ее длине, при условии, что дуга стягивается в точку x.

В финслеровом пространстве определяют два понятия Г. к., различающиеся способом измерения длины вектора, заменяющего $\mathbf{v}$. На геодезических эти Г. к. равны нулю.

Ю. С. Слободян.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, геодезическая, — геометрическое понятие, обобщающее понятие прямой (или отрезка прямой) евклидовой геометрии на случай пространств более общего вида. Определения Г. л. в различных пространствах зависят от того, какая из структур (метрика, линейный элемент, линейная связность) лежит в основе геометрии рассматриваемого пространства. В геометрии тех пространств, где метрика считается заданной априори, Г. л. определяют как локально кратчайшие. В пространствах со связностью Г. л. определяют как кривые, у к-рых касательный вектор остается касательным при параллельном перенесении вдоль кривой. В римановой и финслеровой геометриях, где первоначально задается линейный элемент (иначе говоря,— метрика в касательном пространстве в каждой точке рассматриваемого многообразия), а длины кривых получаются последующим интегрированием, Г. л. определяют как экстремали функционала длины кривой.

Впервые Г. л. изучались И. Бернулли (J. Bernoulli) и Л. Эйлером (L. Euler) при отыскании кратчайших на регулярных поверхностях в евклидовом пространстве. На таких линиях обращается в нуль *геодезическая кривизна;* главная нормаль этих кривых параллельна нормали к поверхности. При изгибаниях Г. л. сохраняются. Движение консервативной механич. системы с конечным числом степеней свободы описывается Г. л. в соответственно подобранном римановом пространстве.

В римановых пространствах Г. л. изучены наиболее полно. Пусть M^n есть n-мерное риманово пространство

с метрич. тензором g_{ij} класса C^k, $k \geqslant 2$. Определение Г. л. как экстремали позволяет написать ее дифференциальные уравнения в произвольных локальных координатах x^i, $i=1, 2, \ldots, n$, при любой параметризации $\gamma = \{x^i(t)\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0,$$

где

$$F = \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}, \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Другая эквивалентная форма уравнений Г. л. выводится из требования параллельности переноса вдоль γ касательного вектора $\dot{\gamma} = \{\dot{x}^i\}$. Если t есть длина s дуги вдоль Г. л. или линейная функция от s, то

$$\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0. \tag{1}$$

Определение Г. л. уравнением (1) включает и канонич. выбор параметра. При таком определении через каждую точку x_0 проходит Г. л. $\gamma = x(t, \xi)$ с начальным касательным вектором ξ, $x(0, \xi) = x_0$, $\dot{x}(0, \xi) = \xi$. Отображение $\xi \to x(1, \xi)$ касательного пространства в точке x_0 в изучаемое пространство есть экспоненциальное отображение с полюсом x_0. Вблизи начальной точки x_0 — диффеоморфизм, вводящий в изучаемом пространстве римановы координаты.

Ряд свойств Г. л. сохраняется у кривых, определяемых уравнениями 2-го порядка $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, если, подобно (1), функция F — однородная 2-й степени по $\{\dot{x}^i\}$. Определение таких уравнений в терминах касательных расслоений приводит к понятиям *пульверизаций* и их интегральных кривых. Частным случаем последних являются Г. л. (см. [2]).

Поведение Г. л. в малом похоже на поведение прямых в евклидовом пространстве. Достаточно малая дуга Г. л. является кратчайшей среди всех спрямляемых кривых с теми же концами. Через любую точку в любом направлении проходит единственная Г. л. У каждой точки есть окрестность U, в к-рой любые две точки соединимы единственной Г. л., не выходящей из U (см. [3]).

Вопрос о том, как далеко можно продолжить из точки x_0 дугу Г. л., чтобы она оставалась кратчайшей по сравнению с близкими к ней кривыми, составляет одну из задач вариационного исчисления. Сравнение Г. л. с близкими кривыми основано на изучении второй вариации длины, к-рая исследуется путем рассмотрения поля скоростей (*Якоби поле*) в точках Г. л. $\gamma(s)$ при варьировании $\gamma(s, t)$. При любом фиксированном t кривая $\gamma(s, t)$ остается геодезической, а параметр s на ней — каноническим. Если в начале кривой γ скорость равна нулю, то те точки кривой γ, где эта скорость при каком-либо ненулевом поле Якоби оказывается нулем, наз. сопряженными точками. Г. л. остается кратчайшей по сравнению с близкими кривыми до первой сопряженной точки. Для дуги Г. л., продолженной за сопряженную точку, существует сколь угодно близкая более короткая кривая с теми же концами. Поле Якоби $\eta(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2\eta}{ds^2} + R(\dot{\gamma}, \eta)\dot{\gamma} = 0,$$

где $\dot{\gamma}$ — касательный вектор геодезической $\gamma(s)$, а $R(\dot{\gamma}, \eta)$ — *кривизны преобразование*, или, в координатах Ферми x^i, $x^1 = s$:

$$\frac{d^2\eta^i}{ds^2} + R^i_{1\,k,1}\,\eta^k = 0, \tag{2}$$

где $R^l_{ij,\,k}$ — тензор кривизны. Связь поля Якоби с кривизной обусловливает зависимость свойств геодезических от кривизны пространства. Напр., в пространст-

вах отрицательной кривизны сопряженных точек нет; если пространство еще и односвязно, то любая дуга Г. л. кратчайшая, а выходящие из точки Г. л. экспоненциально расходятся. Эти свойства играют роль в теории динамич. систем (см. *Геодезический поток*). Монотонность влияния кривизны является предметом ряда так наз. теорем сравнения. В частности, расстояние до первой сопряженной точки и длины векторов поля Якоби на этом участке (нормированных требованием $\eta(0)=0$, $\left|\frac{D\eta}{ds}\right|=1$) убывают с ростом кривизны пространства. Здесь подразумевается сравнение двух Г. л., в соответствующих по длине точках к-рых все кривизны второго пространства мажорируют любую из кривизн первого пространства [4].

В общей теории относительности уравнение (2) служит источником физического истолкования кривизны пространства-времени через поведение Г. л. (см. [5]).

При отказе от сравнения только с близкими кривыми дуга Г. л. может перестать быть кратчайшей раньше, чем пройдет сопряженную точку. Это возможно даже в односвязном пространстве, т. е. причины этого могут быть топологическими и метрическими.

Вопрос о том, как влияет кривизна на протяженность дуги, на к-рой Г. л. остается кратчайшей, играет существенную роль в изучении связей кривизны с топологич. строением пространства. Зависимость количества замкнутых Г. л. или количества разных Г. л., соединяющих две точки, от топологич. строения пространства составляет предмет *вариационного исчисления в целом* (см. [6], [4], [7]).

Семейства Г. л., рассматриваемые как возможные траектории движения, являются предметом теории динамич. систем и эргодич. теории.

В пространствах аффинной связности Г. л. определяются уравнением (1). Для них сохраняются локальные теоремы существования и единственности Г. л., соединяющих две точки, и существования выпуклой окрестности.

Г. л. с аналогичными свойствами определяются и в пространствах проективной связности, а также в случае более общих связностей на многообразиях.

Геометризация задач вариационного исчисления для функционалов, отличных от длины кривой, привела к понятию *финслерова пространства* и Г. л. в нем. Выделение основных геометрических свойств подобных пространств привело к понятию *геодезических геометрии*, которое определяется наличием и продолжаемостью Г. л.

Из метрич. пространств с нерегулярной метрикой наиболее изучены Г. л. на выпуклых поверхностях и в *двумерных многообразиях ограниченной кривизны*. Здесь Г. л. не обязательно гладкая кривая; Г. л. может не иметь продолжения, а в двумерном многообразии ограниченной кривизны может также иметь неединственное продолжение. Г. л. на выпуклой поверхности всегда имеют полукасательную; если продолжается, то только единственным образом; из точки Г. л. исходят почти во всех направлениях. В таких пространствах более естественным, чем Г. л., оказался класс *квазигеодезических линий*, к-рые служат замыканием класса геодезических (см. [8]).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [5] Синг Дж. Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963; [6] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930; [7] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1963; [8] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948.

Ю. А. Волков.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — связное множество G точек поверхности F таких, что для каждой точки x существует круг $K(x)$ с центром в x, при этом $K_G = G \cap K(x)$ имеет один из следующих видов: 1) $K_G(x) = K(x)$; 2) $K_G(x)$ — полукруг круга; 3) $K_G(x)$ — сектор круга $K(x)$, отличный от полукруга; 4) $K_G(x)$ состоит из конечного числа секторов $u_i(x)$ круга $K(x)$, не имеющих никаких общих точек, кроме x.

Точка x в первом случае наз. регулярной внутренней точкой, во втором — регулярной граничной точкой, в третьем — угловой точкой и в четвертом — узловой точкой. Г. о., компактная в себе и не имеющая узловых точек, наз. нормальной областью. Нормальная область есть или замкнутая поверхность, или поверхность с границей, состоящей из конечного числа попарно непересекающихся жордановых полигонов.

Г. о. можно рассматривать как нек-рое метрич. пространство благодаря введению так наз. G-расстояния между точками a и b (нижняя грань всех спрямляемых кривых, соединяющих a и b и лежащих целиком в G). Спрямляемая дуга в G с концами a, b наз. G-отрезком, если она связывает a с b в G кратчайшим образом. Отдельные точки считаются за G-отрезки нулевой длины. Для всех точек G-отрезка справедливо равенство: $\rho_G(a, x) + \rho_G(x, b) = \rho_G(a, b)$. G-лучом наз. луч, лежащий в Г. о., у к-рого каждая частичная дуга есть G-отрезок. G-прямой наз. множество, состоящее из двух лучей, не имеющих никаких других общих точек, кроме начала, причем каждая дуга, содержащаяся в прямой, является G-отрезком.

Г. о. имеет тогда и только тогда полную кривизну, если для всякой последовательности нормальных областей, исчерпывающих Г. о., полные кривизны стремятся к одному и тому же значению. Если гауссова кривизна области нигде не отрицательна или нигде не положительна, то область имеет полную кривизну. Если область не имеет полной кривизны, то всегда можно указать исчерпывающую последовательность нормальных областей, полные кривизны к-рых стремятся к $\pm\infty$. Если граница полной Г. о., гомеоморфной замкнутой полуплоскости, имеет лишь конечное число угловых точек и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — соответствующие углы, измеренные в Г. о., то для полной кривизны $C(G)$ справедливо неравенство

$$C(G) \leqslant \pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \omega_i).$$

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы по дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

Ю. С. Слободян.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ — множество точек метризованного двумерного многообразия, удаленных на расстояние r от фиксированной точки O. Частный случай сферы в метрич. пространстве.

На регулярной поверхности и вообще в двумерном римановом пространстве Г. о. при малых r есть простая замкнутая кривая (не обязательно постоянной *геодезической кривизны)*; в каждую ее точку идет из O единственная кратчайшая (радиус), с к-рой Г. о. образует прямой угол; Г. о. ограничивает выпуклую область. При $r \to 0$ длина l Г. о. связана с *гауссовой кривизной* K в точке O соотношением

$$\frac{2\pi r - l}{r^3} \longrightarrow \frac{\pi}{3} K.$$

При больших r в точки Г. о. может идти более одного радиуса, она может ограничивать невыпуклую область, распадаться на отдельные компоненты. Г. о. часто используют в исследованиях по геометрии в целом. Свойства Г. о. изучались на общих выпуклых поверхностях и в нерегулярно метризованных многообразиях (см. [1]).

Г. о. в смысле Дарбу — замкнутая кривая постоянной геодезич. кривизны. Является стационарной кривой для изопериметрич. задачи. На поверхностях постоянной кривизны совпадает с Г. о. в обычном смысле (см. [2]).

Лит.: [1] Бураго Ю. Д., Стратилатова М. Б., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 88—114; [2] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., М.— Л., 1935.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ — *сеть*, состоящая из двух однопараметрич. семейств *геодезических линий*.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ в точке P пространства аффинной связности с объектом связности Γ_{ij}^k — любые координаты, при к-рых в точке P все $\Gamma_{ij}^k = 0$. Если равенства $\Gamma_{ij}^k = 0$ выполняются во всех точках нек-рой кривой, то говорят о Г. к. вдоль кривой (см. *Ферми координаты*). В римановом пространстве с метрич. тензором g_{ij} Г. к. x^k часто определяют условиями $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$, эквивалентными в этом случае условию $\Gamma_{ij}^k = 0$. Для симметрич. связности, в частности римановой, существуют Г. к. в любой точке и вдоль любой регулярной дуги кривой без самопересечений. Для поверхности F в евклидовом пространстве Г. к. есть декартовы прямоугольные координаты проекции на касательную к F плоскость; если проектирование вести на развертывающуюся поверхность Q, огибаемую касательными к F плоскостями вдоль кривой, то внутренние декартовы координаты на Q будут координатами Ферми на F.

В Г. к. у ковариантной производной поля тензора в точке P координаты равны обычным производным от координат тензора. Это можно принять за определение ковариантной производной, следуя идее Э. Картана (E. Cartan) о перенесении в более общие пространства геометрич. объектов или операций евклидовой геометрии с помощью специальных систем координат, в к-рых в наибольшей степени исключено влияние неевклидовости. На этой же идее основано использование Г. к. в пространстве-времени общей теории относительности, где они связаны с локально инерциальными системами отсчета; их рассмотрение играет заметную роль в физической интерпретации теории.

Геометрически условия $\Gamma_{ij}^k = 0$ означают, что прямым $x^i = \xi^i t$ ($\xi^i = \text{const}$, t — параметр) в области изменения координат соответствуют в рассматриваемом пространстве кривые $\gamma(t)$, имеющие в точке P нулевой вектор

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \left\{\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right\}.$$

Если Г. к. таковы, что прямым всех направлений в точке P соответствуют геодезические, на к-рых повсюду $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$, то x^i наз. римановыми координатами.

Ю. А. Волков.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК — поток $\{S_t\}$, фазовым пространством к-рого служит многообразие TM^n касательных векторов к риманову (более общо, к финслерову) многообразию M^n (так наз. конфигурационному многообразию потока), а движение определяется следующим образом. Пусть $v \in TM^n$ — касательный вектор к M^n в точке $x \in M^n$ и длина его $|v| \neq 0$. Пусть через x проведена геодезич. линия γ на M^n в направлении v и x_t есть точка на γ, отстоящая от x (по γ) на расстоянии $t|v|$ (считая положительным то направление на γ, к-рое в точке x совпадает с направлением вектора v). Тогда $S_t v = v_t = \frac{d}{dt} x_t$. Если же $|v| = 0$, то $S_t v \equiv v$. При этом оказывается, что $|v_t| = \text{const}$, поэтому векторы единичной длины образу-

ют в TM^n инвариантное относительно $\{S_t\}$ подмногообразие W^{2n-1}; часто под Г. п. понимают ограничение потока $\{S_t\}$ на W^{2n-1}. В локальных координатах Г. п. описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, имеющей в римановом случае вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\ (x_t)\ \frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0,$$

где x^i есть i-я координата точки x_t, а Γ^i_{jk} суть *Кристоффеля символы* 2-го рода. Г. п. сохраняет естественную *симплектическую структуру* на TM^n, а его ограничение на W^{2n-1} — соответствующую *контактную структуру*. Г. п. играют очевидную роль в геометрии (см. также *Вариационное исчисление в целом*); кроме того, к ним после нек-рой замены времени можно свести описание движения ряда механич. систем согласно *Мопертюи принципу*.

Д. В. Аносов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — фигура, состоящая из трех различных точек и попарно соединяющих их *геодезических линий*. Точки наз. вершинами, геодезические - сторонами. Г. т. может рассматриваться в любом пространстве, где есть геодезические.

Если стороны Г. т., лежащего в гомеоморфной открытому кругу области, составляют простой замкнутый контур, то к Г. т. присоединяют внутреннюю область. На регулярной поверхности сумма углов Г. т. минус π (*избыток треугольника*) равна интегральной кривизне внутренней области (см. [1]).

Для метрич. пространства часто рассматривают плоский треугольник с теми же длинами сторон, что у Г. т. Это позволяет вводить различные понятия угла между кратчайшими в метрич. пространствах. В двумерном случае после введения измерения углов можно через избытки Г. т. вводить интегральную кривизну как функцию множества. Сети из Г. т. служат источником аппроксимации метрик многогранными метриками (см. [2]).

Имеются оценки отличия угла Г. т. в изучаемом пространстве от соответствующего угла в треугольнике с теми же длинами сторон на плоскости или на поверхности постоянной кривизны (см. [1], [3], [4]).

Лит.: [1] Гаусс К., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в кн.: Об обоснованиях геометрии, М., 1956; [2] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны. (Основы внутренней геометрии поверхностей), М.—Л., 1962 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 63); [3] Александров А. Д., Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [4] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия метрического пространства (G-пространства), к-рое характеризуется единственностью продолжения *геодезических линий*, определяемых как локально кратчайшие.

G-пространство определяется следующей системой аксиом:

1) G есть метрич. пространство; $\rho(x, y)$ — расстояние в нем.

2) G конечно компактно, т. е. в G ограниченные бесконечные множества имеют предельные точки.

3) G выпукло в смысле Менгера, т. е. для точек $x\neq y$ есть отличная от них точка z такая, что

$$\rho(x, z)+\rho(z, y)=\rho(x, y).$$

4) Для каждой точки a есть такое $r>0$, что в шаре $\rho(a, x)<r$ для точек $x\neq y$ найдется отличная от них точка z с $\rho(x, y)+\rho(y, z)=\rho(x, z)$ (аксиома локального продолжения).

5) Если в аксиоме 4) нашлось две точки z_1 и z_2 и $\rho(y, z_1)=\rho(y, z_2)$, то $z_1=z_2$ (аксиома единственности продолжения).

В класс G-пространств попадают, в частности, *римановы пространства* и *финслеровы пространства*. G-пространства, в к-рых продолжение геодезической возможно в целом и любой участок геодезической остается кратчайшей, наз. прямыми пространствами. К ним относятся, напр., пространства Евклида, Лобачевского, Минковского, любое односвязное риманово пространство неположительной кривизны. В прямом пространстве и в G-пространстве нек-рого специального типа (эллиптическом) геодезическая определяется двумя точками.

В общих G-пространствах, в отличие от пространства Минковского, сфера не всегда выпукла. Перпендикулярность, определяемая через кратчайшие до геодезических, в отличие от пространства Евклида, не обязательно симметрична. В терминах G-пространств формулируются признаки, выделяющие пространства Евклида, сферическое пространство, пространство Минковского.

Теория G-пространств показала, что многие результаты дифференциальной геометрии не связаны с условиями дифференцируемости. Эта теория углубила изучение финслеровых пространств; позволила исследовать метризации аффинного и проективного пространств, превращающих прямые в геодезические; рассмотреть свободу выбора сети геодезических за счет метризации. Ряд нерешенных вопросов связан с возможным топологич. строением G-пространств (см. [1]).

Лит.: [1] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗА — утверждение, определяющее движение пробной свободной частицы в теории гравитации Эйнштейна (т. е. в общей теории относительности). В ньютоновской физике частица наз. свободной, если на нее не действуют никакие силы (в том числе и гравитационные). В общей теории относительности понятие силы гравитации как четырехмерного вектора отсутствует и гравитационные свойства определяются римановой структурой пространства-времени. Соответственно, в общей теории относительности движение частицы в гравитационном поле (но без влияния каких-либо негравитационных сил) рассматривается как свободное. Точная формулировка Г. г. такова: мировая линия пробной свободной частицы с ненулевой массой покоя является неизотропной геодезической пространства-времени; мировая линия пробной свободной частицы с нулевой массой покоя (фотон, нейтрино) является изотропной геодезической пространства-времени.

Г. г. является естественным обобщением закона инерции классической механики. Дифференциальные уравнения геодезических (см. *Геодезическая линия*) являются уравнениями движения в общей теории относительности.

Входящее в формулировку Г. г. понятие пробной частицы означает, что не рассматриваются эффекты, связанные с конечными размерами частиц и их внутренним строением, а создаваемое частицей гравитационное поле считается пренебрежимо малым. Пробная частица является идеализированным, предельным случаем реальной частицы, и в весьма широком и естественном классе способов совершения этого предельного перехода удается получить Г. г. как следствие уравнений Эйнштейна [3]. Это обстоятельство существенно отличает общую теорию относительности от всех предшествовавших полевых физич. теорий, в к-рых, повидимому, уравнения движения принципиально не могут быть получены из уравнений поля.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961, гл. 6; [2] Синг Дж.-Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963, гл. 3; [3] Эйнштейн А., Работы по теории относительности, Собр. научн. трудов, т. 2, М., 1966, № 117.

Д. Д. Соколов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ кривой γ на поверхности F в E^3 — скорость вращения касательной плоскости к F вокруг касательной к γ. Скорость считается относительно длины s дуги при движении точки касания вдоль γ. Кривая γ и поверхность F предполагаются регулярными и ориентированными. Г. к. на F определяется точкой и направлением кривой и равно кручению идущей в этом направлении геодезической. Г. к. равняется

$$\tau_g = \left(\frac{dr}{ds}\, \boldsymbol{n}\, \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right) = \tau + \frac{d\varphi}{ds} = (k_2 - k_1)\sin\alpha\cos\alpha,$$

где r — радиус-вектор кривой, $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к F; τ — обычное кручение γ; φ — угол между соприкасающейся плоскостью кривой и касательной плоскостью к поверхности; k_1 и k_2 главные кривизны поверхности; α — угол кривой с главным направлением кривизны k_1. *Ю. С. Слободян.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ в точке x — подмногообразие M^k гладкого многообразия M^n (риманова или с аффинной связностью) такое, что *геодезические линии* многообразия M^n, касающиеся M^k в точке x, имеют с M^k касание не ниже 2-го порядка. Это свойство выполнено во всех точках, если любая геодезическая в M^k является и геодезической в M^n. Такие Г. м. M^k наз. вполне геодезическими многообразиями. *Ю. А. Волков.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, проективное отображение,— отображение f, переводящее геодезические линии пространства U в геодезические линии пространства V. Г. о. $f: U \to V$, где U и V — пространства, в к-рых определены геодезические, локально гомеоморфно (диффеоморфно, если U, V — гладкие многообразия).

Пространство, локально допускающее Г. о. на евклидово пространство, наз. проективно плоским. Г. о. одного риманова пространства на другое существует в исключительных случаях. Из римановых пространств проективно плоски только пространства постоянной кривизны (см. [1]). Описание всех неримановых проективно плоских метрических пространств составляет четвертую проблему Гильберта (см. [2]).

В теории пространств аффинной связности вместо Г. о. говорят о геодезич. преобразовании связности, имея в виду переход к другой связности на том же многообразии с сохранением геодезических. Переход от связности $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ к связности $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ есть Г. о. при условии $\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \delta^i_k\psi_j + \delta^i_j\psi_k$, где ψ_l — поле ковектора. Чтобы пространство с аффинной связностью было проективно плоским, необходимо и достаточно обращение в нуль тензора Вейля.

Лит.: [1] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с нем., т. 2, М., 1948; [2] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *Ю. А. Волков.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ — длина кратчайшей *геодезической линии*, соединяющей две точки (или два множества). В вариационном исчислении Г. р.— значение исследуемого функционала на экстремали, соединяющей две рассматриваемые точки.

ГЕОКРИОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математич. задачи, возникающие при изучении процессов и явлений, происходящих в мерзлых почвах и горных породах, географич. распространения и условий формирования сезонномерзлых и многолетнемерзлых горных пород (вечной мерзлоты). Интересные Г. м. з. возникают при изучении проблемы взаимодействия температурных и влажностных полей в зонах с подвижными границами раздела фаз. Характерной особенностью Г. м. з. является то, что процессы тепло- и массообмена, происходящие при промерзании и оттаивании пород, тесно связаны между собой. Задача сводится к системе квазилинейных уравнений параболич. типа, поскольку

тепло- и влагообменные характеристики среды существенно зависят от искомых функций. Типичными примерами подобных задач являются исследование промерзания влагонасыщенных тонкодисперсных пород, к-рое сопровождается миграцией влаги к фронту промерзания и пучением, а также исследование оттаивания грубодисперсных пород, сопряженное с инфильтрацией и фильтрацией влаги. Особое значение для инженерной геологии имеет решение многомерной *Стефана задачи*, для областей со сложной конфигурацией, в частности о чаше протаивания при гражданском и промышленном строительстве. Решение вопросов историч. геокриологии приводит к необходимости исследования многофронтовой задачи Стефана с учетом образования зон и вырождения их в точку. Важное значение при этом имеет увязка процессов промерзания и оттаивания в верхних слоях литосферы с радиационно-тепловым балансом. *В. И. Дмитриев.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ — последовательность чисел, каждое из к-рых равно предыдущему, умноженному на нек-рое постоянное для данной прогрессии число $q \neq 0$ (знаменатель прогрессии). Г. п. наз. возрастающей, если $q>1$, убывающей, если $0<q<1$; если $q<0$, то Г. п.— знакочередующаяся. Любой член Г. п. a_j выражается через ее первый член a_1 и знаменатель q формулой

$$a_j = a_1 q^{j-1},$$

а сумма первых n членов Г. п. (знаменатель к-рой не равен 1) — формулой

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}.$$

Если $|q|<1$, то при неограниченном возрастании числа n сумма S_n стремится к пределу $S=\frac{a_1}{1-q}$. Это число S наз. суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Выражение

$$a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^n + \ldots, \text{ при } |q| < 1,$$

— простейший пример сходящегося ряда — геометрический ряд, число $a_1(1-q)$ является суммой геометрич. ряда.

Термин «Г. п.» связан со свойством любого члена Г. п. с положительными членами: $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$, т. е. любой член есть *геометрическое среднее* между предыдущим и последующим ее членами. *О. А. Иванова.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности событий, связанных со взаимным расположением геометрич. фигур, случайно размещенных на плоскости или в пространстве. Простейший пример: в область A на плоскости наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадет в область B, лежащую внутри A? Принимая, что искомая вероятность зависит лишь от «формы» области, но не от ее «положения» внутри A, приходят к выводу, что она единственным образом определяется как отношение площади B к площади A.

Сделанное допущение об инвариантности рассматриваемых вероятностей относительно группы преобразований евклидова пространства, включающей сдвиги, вращения и отражения, типично для большинства задач о Г. в. Ответ обычно получается в форме отношения инвариантной меры множества «благоприятных случаев» к инвариантной мере множества «всех возможных случаев» (см. *Интегральная геометрия*); аналогия с классич. определением вероятности здесь очевидна. Можно отметить, что в связанном с Г. в. *Бертрана парадоксе* только один ответ удовлетворяет условию инвариантности.

Первым примером подсчета Г. в. была *Бюффона задача*, положившая начало идее случайности в геометрии. 200-летняя история развития этой идеи слагается из периодов энтузиазма и интенсивной разработки, сменяемых периодами недооценки и падения интереса к предмету. Наблюдающийся во 2-й пол. 20 в. подъем в этой области привел к значительному расширению круга рассматриваемых моделей (напр., к изучению случайных множеств, полей прямых, т. н. полей волокон и т. п.), и теория Г. в. стала частью нового раздела теории вероятностей — *стохастической геометрии*.

Лит.: [1] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [2] Stochastic Geometry, ed. E. E. Harding, D. G. Kendall, L., 1974. *Ю. В. Прохоров.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ — решение нек-рых геометрич. задач при помощи различных инструментов (линейки, циркуля и др.), к-рые предполагаются абсолютно точными. В зависимости от выбора инструментов определяется цикл задач, к-рые могут быть разрешены этими средствами. Основным набором инструментов для Г. п. являются циркуль и линейка. Задача на построение разрешима при помощи циркуля и линейки, если координаты искомой точки могут быть записаны в виде выражений, содержащих конечное число операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня, примененных к координатам заданных точек (см., напр., *Деления круга многочлен*). Если таких выражений не существует, то задача не может быть решена при помощи циркуля и линейки. К этим задачам относятся, напр., *удвоение куба*, *трисекция угла*, *квадратура круга*. Любая задача на построение, разрешимая при помощи циркуля и линейки, может быть решена при помощи и других наборов инструментов: одним циркулем — так наз. Мора—Маскерони построения (G. Mohr, 1672; L. Mascheroni, 1797); линейкой с двумя параллельными краями, к-рая может быть заменена угольником (A. Adler, 1890); линейкой и окружностью, заданной в плоскости чертежа с отмеченным центром,— Понселе — Штейнера построения (V. Poncelet, 1822; J. Steiner, 1833).

Лит.: [1] Адлер А., Теория геометрических построений, пер. с нем., 3 изд., Л., 1940; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС — множество симплексов в евклидовом и гильбертовом пространствах, удовлетворяющее нек-рым условиям. Конечным геометрическим комплексом наз. конечный набор замкнутых симплексов в евклидовом пространстве, причем любые два симплекса либо не имеют общих точек, либо пересекаются по общей грани. Два Г. к. считаются изоморфными, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, обеспечивающее взаимно однозначное соответствие между всеми их симплексами. Подкомплексом Г. к. наз. любая часть его симплексов. Всякий Г. к. изоморфен подкомплексу нек-рого симплекса достаточно высокой размерности. Размерностью конечного Г. к. наз. наибольшая из размерностей составляющих его симплексов.

Бесконечный геометрический комплекс определяется с точностью до изоморфизма как набор симплексов нек-рого, не обязательно счетномерного, гильбертова пространства; при этом вершины симплексов являются концами векторов нек-рого ортонормированного базиса. Каждый Г. к. определяет топологич. пространство, состоящее из всех точек его симплексов и называемое полиэдром Г. к. Размерностью бесконечного Г. к. наз. верхняя грань размерностей его симплексов. В случае бесконечного Г. к. топология полиэдра, индуцированная его вложением в объемлющее гильбертово пространство,

не является единственной, совместимой с обычной топологией на всех его симплексах; примером служит слабая топология.

Е. Г. Скляренко.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РОД — численный инвариант неособых алгебраич. многообразий. В случае алгебраич. кривых Г. р. совпадает с родом кривой. Для алгебраич. поверхностей Г. р. был впервые определен с различных точек зрения А. Клебшем (A. Clebsch) и М. Нётером (M. Noether) во 2-й пол. 19 в. Последним была доказана также бирациональная инвариантность Г. р. Геометрич. род неособого проективного алгебраич. многообразия X над алгебраически замкнутым полем k есть, по определению, размерность пространства регулярных дифференциальных форм степени $n=\dim X$. В этом случае Г. р. X обозначается $p_g(X)$. Согласно теореме двойственности Серра

$$p_g(X)=\dim_k H^n(X, \mathcal{O}_X),$$

где $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок многообразия X. Число $p_g(X)-1$ совпадает с размерностью канонической системы многообразия X. Г. р. играет важную роль в критерии рациональности алгебраических поверхностей (см. *Рациональная поверхность*), а также в общей классификации алгебраических поверхностей. Г. р. бирационально изоморфных гладких проективных многообразий совпадают.

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТЕОРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, основанный на теории представления групп. Применение метода внешних дифференциальных форм позволяет ввести дифференциальные критерии Г. о. т., превращающие ее в эффективный аппарат дифференциально-геометрич. исследования пространств с фундаментальными группами, а также обобщенных пространств (расслоенных пространств, пространств со связностью, дифференцируемых многообразий, снабженных различными дифференциально-геометрич. структурами).

Если каждому элементу S r-членов группы Ли G поставлено в соответствие преобразование каждой точки M, принадлежащей нек-рой области D топологич. пространства E, причем нулевому элементу группы S_0 соответствует тождественное преобразование (отображение) пространства в себя, а последовательное выполнение преобразований при помощи двух элементов S_u и S_v равносильно преобразованию, осуществляемому при помощи произведения этих элементов, и в данном пространстве введена надлежащим образом система координат, то говорят, что группа G локально представлена в пространстве E как группа преобразований. Пространство E называется *пространством представления группы* G, или *пространством с фундаментальной группой* G.

Геометрическим объектом (г. о.) с данной фундаментальной группой G, **или** г. о., присоединенным к группе G (кратко G-*объектом*), наз. точка пространства представления данной группы G. Само это пространство наз. пространством г. о. в широком смысле слова, или *обобщенным однородным пространством*. Группа преобразований пространства г. о., реализующая его фундаментальную группу, наз. фундаментальной группой этого г. о. Два г. о. в одном и том же пространстве представления группы G наз. эквивалентными, если один из них может быть преобразован в другой с помощью преобразования фундаментальной группы G. Система интранзитивности наз. пространством г. о. в собственном смысле. Пространство представления группы G наз. однородным пространством с фундаментальной группой G, если в нем реализовано истинное транзитивное представление

этой группы. Во всяком пространстве истинного представления конечной группы существует репер, состоящий из конечного числа точек.

Пусть в пространстве г. о. X реализовано истинное транзитивное представление. Подвергая пространство представления и с ним репер R всевозможным преобразованиям фундаментальной группы G, получают полное семейство (пространство) реперов, в к-ром осуществляется просто транзитивное представление группы G. Это пространство отождествляется с групповым или параметрич. пространством группы G. Если принять его произвольную точку (репер) за исходную и сопоставить ей единичный элемент группы G, то все точки этого пространства приводятся во взаимно однозначное соответствие с элементами группы G. Групповые параметры могут рассматриваться как параметры подвижного репера.

Между реперами семейства и элементами группы может быть установлено также и взаимно однозначное соответствие, при к-ром каждому элементу S_a группы приведен в соответствие репер R_a, получаемый из произвольно зафиксированного начального (абсолютного) репера R правым (левым) сдвигом при помощи элемента S_a: $R_a = RS_a$. Текущему элементу S_u будет соответствовать текущий «подвижной» репер R_u. Каждая точка X пространства представления группы G определяется относительно репера R своими координатами $\tilde{X}^K$, $K=1, \ldots, N$, наз. абсолютными координатами, или абсолютными компонентами, г. о. X. Относительными компонентами X_u^K г. о. по отношению к реперу $R_u = S_u^{-1}R$ наз. абсолютные компоненты г. о., в к-рый рассматриваемый объект X превращается при помощи преобразования, переводящего подвижный репер R_u в абсолютный репер R : $X^K = S_u\tilde{X}^K$ и $X^K = f^K(u^s, \tilde{X}^J)$ (где u^s — групповые параметры r-членной группы $s=1, \ldots, r$). Относительные компоненты X^K фиксированного г. о. удовлетворяют вполне интегрируемой системе дифференциальных уравнений

$$dX^K - \xi_s^K \omega^s = 0, \qquad (1)$$

где $\omega^s = \omega^s(u, du)$ — левоинвариантные формы группы G и $\xi_s^K = \xi_s^K(X^J)$. Система (1) наз. системой дифференциальных уравнений инвариантности г. о., а также системой дифференциальных уравнений представления группы G с инвариантными формами ω^s. Функции ξ_s^K наз. основными определяющими г. о. функциями (или определяющими представление функциями). Система вида (1) тогда и только тогда является системой дифференциальных уравнений инвариантности г. о. с относительными компонентами X^K и группой преобразований G, когда коэффициенты ξ_s^K являются функциями только от переменных X^K и данная система (1) вполне интегрируема (основная теорема Г. о. т.). Необходимыми и достаточными условиями полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений инвариантности г. о. является выполнение структурных уравнений Ли для определяющих объект функций $\xi_s^J(X^K)$:

$$\frac{\partial \xi_p^J}{\partial X^K}\xi_q^K - \frac{\partial \xi_q^J}{\partial X^K}\xi_p^K = C_{pq}^s \xi_s^J, \quad p, q, s = 1, \ldots, r.$$

Дифференциальные формы

$$\Delta X^J \equiv dX^J - \xi_s^J(X)\,\omega^s$$

наз. структурными формами представления (или структурными формами г. о. с относительными компонентами X^J). Размерность N пространства представления г. о. наз. рангом объекта X. Необходимым условием истинного

транзитивного представления r-членной группы в пространстве объекта X является соотношение $N \leqslant r$. Число $\rho = N - R$, где R — ранг матрицы (ξ_s^K), наз. жанром г. о. Жанр ρ совпадает с числом независимых абсолютных инвариантов г. о.

Система форм

$$\Delta X^J,\ \Omega^J_{K_1},\ \ldots,\ \Omega^J_{K_1 \ldots K_a},\ \ldots,$$

где

$$\Omega^J_{K_1 \ldots K_a} = -\frac{\partial^a \xi_s^J}{\partial X^{K_1} \ldots \partial X^{K_a}}\,\omega^s, \quad a = 1, 2, \ldots,$$

вполне интегрируема. Для фиксированной точки X_0 пространства представления группы G

$$\Delta X_0^J \equiv -\xi_s^J(X_0)\,\omega^s = 0,$$

а возникающие формы

$$\bar{\Omega}^J_{K_1 \ldots K_a} = \Omega^J_{K_1 \ldots K_a}\Big|_{X^J = X_0^J = \text{const}}$$

удовлетворяют структурным уравнениям линейной группы.

Число r_m линейно независимых форм среди форм

$$\bar{\Omega}^J_{K_1},\ \ldots,\ \bar{\Omega}^J_{K_1 \ldots K_m}$$

является арифметич. инвариантом пространства представления группы G. Число $\rho_m = r - r_m$ наз. характером изотропии m-го порядка пространства представления группы G. Числа ρ_a образуют невозрастающую последовательность. Всегда существует такое наименьшее число q, что

$$\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_{q-1} \geqslant \rho_q = \rho_{q+1} = \ldots.$$

Число q также является арифметич. инвариантом пространства представления группы G и наз. порядком нелинейности г. о. X.

Если система дифференциальных уравнений инвариантности г. о.

$$dX^J - \xi_s^J(X^K)\,\omega^s = 0 \tag{2}$$

содержит подсистему

$$dX^\alpha - \xi_s^\alpha(X^\beta)\,\omega^s = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n_1 < N,$$

то система компонент X^α определяет г. о. — подобъект г. о. с относительными компонентами X^J.

Если два г. о. X и Y присоединены к одной и той же группе, причем все относительные компоненты Y^α одного объекта могут быть представлены как определенные аналитич. функции от относительных компонент X^J второго объекта:

$$Y^\alpha = Y^\alpha(X^K), \tag{3}$$

то говорят, что объект Y охватывается объектом X. Г. о. X наз. охватывающим г. о., а объект Y — охваченным г. о. Два г. о. X_1 и X_2 наз. подобными, если каждый из них охватывает другой. Ранги, жанры, характеристики и типы подобных г. о. совпадают. Частный случай подобных г. о. дают изомеры — г. о., компоненты к-рых отличаются только порядком следования. Если система дифференциальных уравнений инвариантности г. о. алгебраически разрешима относительно всех инвариантных форм ω^s группы G, то этим объектом можно охватить любой другой объект, присоединенный к группе G.

Система функций (3) тогда и только тогда будет системой относительных компонент г. о., когда в системе дифференциальных уравнений, к-рой удовлетворяют функции Y^α, коэффициенты разложения по формам ω^s будут функциями только от этих компонент Y^α, т. е.

$$dY^\alpha - \eta_s^\alpha(Y^\beta)\,\omega^s = 0. \tag{4}$$

Если в дифференциальных уравнениях

$$dX^a - \xi^a_s(X^J)\,\omega^s = 0,\quad a = 1,\ \ldots,\ n_2 < N,$$

к-рым удовлетворяют компоненты X^a г. о. с относительными компонентами X^J, функции $\xi^a_s(X^J)$ однородны относительно компонент X^a, то система функций X^a наз. у с е ч е н н ы м г. о.

Пусть имеется г. о. X и охваченный им объект Y, т. е. $Y^\alpha = Y^\alpha(X^J)$; тогда

$$Y^\alpha_K \equiv \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K} = F^\alpha_K(X^J).$$

Совокупность относительных компонент охватывающего г. о. X^J, охваченного г. о. Y^α и частных производных Y^α_K вторых по первым является системой относительных компонент нового охваченного г. о.:

$$\left\{X^J,\ Y^\alpha,\ \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K}\right\}. \tag{5}$$

При этом, если для X^J и Y^α выполняются уравнения (2), (4) соответственно, то

$$dY^\alpha_K - \left(\frac{\partial \eta^\alpha_s}{\partial Y^\beta}\,Y^\beta_K - \frac{\partial \xi^J_s}{\partial X^K}\,Y^\alpha_J\right)\omega^s = 0.$$

Г. о. (5) наз. п р о и з в о д н ы м г. о.

Г. о. наз. л и н е й н ы м, или к в а з и т е н з о р н ы м о б ъ е к т о м, если группа преобразований его компонент линейна, т. е.

$$\tilde{X}^J = B^J_K(u)\,X^K + B^J(u).$$

Если $B^J = 0$, то г. о. наз. л и н е й н ы м о д н о р о д н ы м о б ъ е к т о м, или т е н з о р о м. Г. о. — линейный объект тогда и только тогда, когда основные определяющие его функции имеют вид:

$$\xi^J_s = K^J_{sK}X^K + K^J_s,$$

где K^J_{sK}, K^J_s — постоянное. Г. о. является линейным однородным объектом тогда и только тогда, когда $K^J_s = 0$, т. е.

$$\xi^J_s = K^J_{sK}X^K.$$

Однокомпонентный тензор X наз. и н в а р и а н т о м. Дифференциальные уравнения инварианта имеют вид $dX - XK_s\omega^s = 0$, где K_s — постоянные. Если не все K_s равны нулю, инвариант наз. о т н о с и т е л ь н ы м. При $K_s = 0$ инвариант наз. а б с о л ю т н ы м.

Если V_n n-мерное дифференцируемое многообразие и u^i — локальные координаты точки $u \in U \subset V_n$, где U — некоторая область этого многообразия, то всегда можно ввести вполне интегрируемую систему n линейных линейно независимых дифференциальных форм θ^i, первыми интегралами к-рой являются координаты u^i. Это означает, что

$$\theta^i = u^i_k du^k$$

и

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k.$$

Рассмотрим систему r линейных линейно независимых форм ω^α, удовлетворяющих следующим структурным уравнениям

$$D\omega^\alpha = \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}(u)\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \theta^k \wedge \omega^\alpha_k,$$

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots = n+1,\ \ldots,\ n+r.$$

Формы ω^α имеют р а с с л о е н н у ю с т р у к т у р у по отношению к формам θ^i и при $u^i = u^i_0$, т. е. при $\theta^k = 0$, становятся инвариантными формами r-членной группы Ли G со структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}(u^i_0)$.

Говорят, что на V_n задано (локально) поле г. о. $\{X\}$, присоединенного к группе G (поле G-объекта), если в каждой точке $u \in U$ этого многообразия, определен г. о. $\{X\}$, присоединенный к нек-рой группе Ли G (G-объект). При этом

$$\tilde{\Phi}^J = \tilde{\Phi}^J(u^1, \ldots, u^n),$$

где $\tilde{\Phi}^J (J = 1, \ldots, N)$ — абсолютные координаты объекта $\{X\}$. Следовательно

$$d\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^J_k \theta^k.$$

Иначе, система функций X^J, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\Delta X^J = dX^J - \Xi^J_\alpha (X^K)\, \omega^\alpha - X^J_k \theta^k = 0, \qquad (6)$$

наз. полем г. о., присоединенного к группе G, если система $\Delta X^J = 0$, $\theta^k = 0$ вполне интегрируема. Г. о. $\{X\}$ наз. образующим объектом поля, а функции X^J при $\theta^k = 0$ становятся относительными компонентами г. о. $\{X\}$. Уравнения наз. дифференциальными уравнениями поля г. о. $\{X\}$. Поле г. о. определяет сечение в присоединенном расслоенном пространстве, базой к-рого являются V_n, а слоями — пространства данного геометрич. объекта.

Функции $\Xi^J_s (X^K)$ наз. основными определяющими полефункциями, коэффициенты X^J_k — дополнительными определяющими функциями поля г. о. (или пфаффовыми производными поля). Совокупность функций X^J, X^J_k также является системой относительных компонент г. о., к-рый наз. продолжением г. о. $\{X\}$, или продолженным г. о. первого порядка г. о. $\{X\}$.

Система дифференциальных уравнений (6) поля г. о. правильно продолжаема по формам θ^k. Это означает, что в результате внешнего дифференцирования системы получается квадратичная система вида

$$\Delta X^J_i \wedge \theta^i = 0,$$

где

$$\Delta X^J_i \equiv dX^J_i - \Xi^J_{i\alpha} (X^K, X^K_k)\, \omega^\alpha.$$

Система

$$\Delta X^J_i = X^J_{ik} \theta^k \qquad (7)$$

вместе с системой (6) образует систему дифференциальных уравнений поля продолженного г. о. Система (6) — (7), в свою очередь, правильно продолжаема. После q-го продолжения получается система дифференциальных уравнений поля продолженного г. о. порядка q с относительными компонентами

$$\{X^J, X^J_k, \ldots, X^J_{k_1 \ldots k_q}\}.$$

Если группа G, к к-рой присоединен г. о., является дифференциальной группой $GL^p(n, R)$ порядка p, то г. о. наз. дифференциально-геометрическим объектом, а поле такого объекта — полем дифференциально-геометрического объекта.

Если образующий объект поля охватывает другой объект (охватывается другим объектом), то поле первого наз. охватывающим (охваченным), а поле второго — охваченным (охватывающим).

Если на дифференцируемом многообразии V_n задано поле г. о., то V_n наз. оснащенным, а заданное поле и образующий его объект — оснащающим полем и, соответственно, объектом.

Поле оснащающего г. о. индуцирует на V_n дифференциально-геометрич. структуру (G-структуру в широком смысле слова). Поэтому оснащающий объект

наз. также и структурным объектом. Тип структуры определяется типом структурного объекта.

Лит.: [1] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949, с. 135—221; [2] Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, М., 1953 («Тр. Моск. матем. об-ва», т. 2).

Н. М. Остиану.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — *локальное кольцо* алгебраич. многообразия или пополнение такого кольца. Коммутативное кольцо, получаемое из кольца многочленов над полем применением операций пополнения, локализации и факторизации по простому идеалу, наз. алгебро-геометрическим кольцом [3]. Локальное кольцо неприводимого алгебраич. многообразия после пополнения не приобретает нильпотентных элементов [2]. Такое свойство локального кольца наз. аналитической приведенностью. Имеет место аналогичный факт о локальных кольцах нормальных многообразий [1]: пополнение локального кольца нормального алгебраич. многообразия является нормальным кольцом (аналитическая нормальность). Известны примеры локальных нётеровых колец, не являющихся аналитически приведенными или аналитически нормальными [4]. Псевдогеометрическим кольцом наз. нётерово кольцо, любое факторкольцо к-рого по простому идеалу является японским кольцом. Область целостности A наз. японским кольцом, если ее целое замыкание в конечном расширении поля частных есть конечный A-модуль (см. [5]). Класс псевдогеометрических колец замкнут относительно локализаций и расширений конечного типа; к нему относятся кольцо целых чисел и все полные локальные кольца. См. также *Превосходное кольцо*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Chevalley C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 57; [3] Samuel P., Algébre locale, P., 1953; [4] Nagata M., Local rings, N. Y.— L. 1962; [5] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, № 32, ch. 4.

В. И. Данилов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК — понятие, иногда используемое в геометрии. Обычно под Г. м. т. понимают множество точек (образующих кривую или поверхность), выделяемых из всех точек пространства к.-л. геометрич. требованием. Напр., эллипс может быть определен как Г. м. т. плоскости, для к-рых сумма расстояний до двух данных точек есть величина постоянная.

А. Б. Иванов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, геометро-оптическое приближение,— ряд вида

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(x, y, z)}{(-i\omega)^s} e^{i\omega\tau(x, y, z)-i\omega t},$$

к-рый формально удовлетворяет уравнению, описывающему волновой процесс (или системе уравнений, тогда u_s — векторы).

Для решения краевых задач теории колебаний (см. *Дифракции математическая теория*) разработан так наз. *лучевой метод* [2], позволяющий строить Г. п. Существует гипотеза, что получающиеся в результате ряды представляют собой асимптотич. разложение искомых решений там, где члены Г. п. не имеют особенностей. В частных случаях эту гипотезу удалось доказать. Имеется и нестационарный аналог Г. п.

Построение функций u_s основано на рассмотрении поля лучей, т. е. экстремалей функционала (см. *Ферма принцип*)

$$\int \frac{ds}{c(x, y, z)},$$

где $c(x, y, z)$ — скорость в рассматриваемой изотропной физич. среде, ds — элемент длины дуги. Пусть пара

параметров α, β характеризует луч, параметр τ — точки на луче, причем

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c(x, y, z)}.$$

Параметры α, β, τ можно взять за криволинейные координаты. Переход от криволинейных координат α, β, τ к декартовой прямоугольной дается формулой

$$\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \tau) \quad \boldsymbol{r}(x, y, z).$$

Поверхности $\tau = \text{const}$ ортогональны лучам. В тех точках, где поле лучей не имеет особенностей, отлична от нуля величина

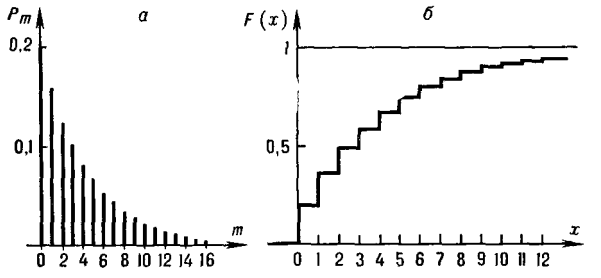
$$J = \left| \left[\frac{\partial r}{\partial \alpha}, \frac{\partial r}{\partial \beta} \right] \right|,$$

к-рая наз. геометрическим расхождением. Величина J входит в рекуррентные соотношения, связывающие функции u_s между собой, и играет фундаментальную роль во всех построениях Г. п.

Лит.: [1] Фридлендер Ф., Звуковые импульсы, пер. с англ., М., 1962; [2] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

В. М. Бабич.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение дискретной случайной величины, принимающей



Геометрическое распределение: *а* — вероятности p_m, *б* — функция распределения ($p=0{,}2$).

целые неотрицательные значения $m = 0, 1, \ldots$ с вероятностями $p_m = pq^m$, где параметр распределения $p = 1 - q$ есть нек-рое число из интервала $(0, 1)$. Характеристич. функция:

$$f(t) = \frac{p}{1 - qe^{it}},$$

математич. ожидание: q/p, дисперсия: q/p^2; производящая функция:

$$P(t) = \frac{p}{1 - qt}.$$

Г. р. имеет случайная величина, равная числу независимых испытаний до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а неудачи q. Свое название Г. р. получило от порождающей его геометрич. прогрессии.

В. М. Калинин.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ — число, равное арифметич. корню n-й степени из их произведения, т. е.

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Г. с. всегда меньше *арифметического среднего*, кроме случая, когда все взятые числа равны между собой; тогда их Г. с. равно их же арифметич. среднему. Г. с. двух чисел наз. средним пропорциональным.

ГЕОМЕТРИЯ — часть математики, первоначальным предметом к-рой являются пространственные отношения и формы тел. Г. изучает пространственные отношения и формы, отвлекаясь от прочих свойств реальных предметов (плотность, вес, цвет и т. д.). В последующем развитии предметом Г. становятся также и

другие отношения и формы действительности, сходные с пространственными. В современном общем смысле Г. объемлет любые отношения и формы, к-рые возникают при рассмотрении однородных объектов, явлений, событий вне их конкретного содержания и к-рые оказываются сходными с обычными пространственными отношениями и формами. Напр., рассматривают расстояния между функциями, отвлекаясь от того, каковы специальные свойства этих функций и какие реальные процессы эти функции описывают (см., напр., *Метрическое пространство*, *Функциональный анализ*).

Исторический очерк. Возникновение Г. относится к глубокой древности. Оно было обусловлено практич. потребностями (измерением земельных участков, объемов тел). Простейшие геометрич. сведения и понятия были известны еще древним египтянам (нач. 2-го тыс. до н. э.). Геометрич. утверждения формулировались тогда в виде правил, логич. доказательства к-рых либо отсутствовали, либо были примитивными. Начиная с 7 в. до н. э. и до 1 в. н. э., развитие Г. происходило в основном в Др. Греции. Здесь накапливались сведения о метрич. соотношениях в треугольниках, измерениях площадей и объемов, пропорциях и подобии фигур, конич. сечениях, задачах на построение. В то время появились уже сравнительно строгие логич. доказательства геометрич. утверждений. Собранием известных фактов Г. и их логической систематизацией явились «*Начала*» *Евклида* (ок. 300 до н. э.). В этом сочинении были сформулированы основные положения (аксиомы) Г., из к-рых при помощи логич. рассуждений выводились различные свойства простейших фигур на плоскости и в пространстве. Здесь впервые сложились основы аксиоматич. метода. Развитие астрономии и геодезии (1—2 вв. н. э.) привело к созданию плоской и сферич. *тригонометрии*.

Дальнейшее развитие Г., вплоть до 17 в., происходило не столь интенсивно. Возрождение наук и искусств в Европе способствовало развитию Г. Теория перспективы, задача к-рой состояла в изображении тел на плоскости (см. *Начертательная геометрия*), была в центре внимания художников и архитекторов. Эта потребность привела к зарождению *проективной геометрии* — раздела Г., в к-ром изучаются свойства фигур, инвариантные относительно так наз. проективных преобразований.

Совершенно новый подход к решению геометрич. вопросов был предложен в 1-й пол. 17 в. Р. Декартом (R. Descartes). Им был создан метод *координат*, позволивший привлечь в Г. методы алгебры, а в последующем и анализа. Начиная с этого момента Г. бурно развивается. Появляется *аналитическая геометрия*, в к-рой методами алгебры исследуются кривые и поверхности, задаваемые алгебраич. уравнениями. Применение в 18 в. Л. Эйлером (L. Euler) и Г. Монжем (G. Monge) методов математич. анализа в Г. заложило основы классической *дифференциальной геометрии*. Ее ведущие разделы: теория кривых и теория поверхностей — интенсивно развивались и обобщались в работах К. Гаусса (C. Gauss) и др. геометров. В результате взаимодействия Г. с алгеброй и анализом в дальнейшем возникли специальные исчисления, удобные для использования в Г. и др. разделах математики (*векторное исчисление*, *тензорное исчисление*, метод *дифференциальных форм*).

Разделы Г., не опирающиеся на методы алгебры и анализа и оперирующие непосредственно с геометрич. образами, получили назв. *синтетической геометрии*.

Предмет, основные разделы геометрии, связь с другими областями математики. Свои первоначальные шаги Г. делала как физич. наука, ее первые результаты описывали свойства физически наблюдаемых величин. Затем, до 2-й пол. 19 в., предметом Г. были

отношения и формы тел пространства, свойства к-рого определялись аксиомами, сформулированными Евклидом (см. *Евклидова геометрия*). Пространство Евклида столь хорошо отражает простейшие физич. наблюдения, что до 19 в. оно как бы отождествлялось с физич. пространством. В 1826 Н. И. Лобачевский построил Г. (см. *Лобачевского геометрия*), в основу к-рой была положена система аксиом, отличающаяся от системы аксиом Евклида только аксиомой о параллельных прямых. В результате появилась логически непротиворечивая Г., существенно отличная от евклидовой. Стало ясно, что в математике возможно построение разнообразных пространств с содержательной Г. (см., напр., *Неевклидовы геометрии*). Наряду с этим сложилась идея многомерного пространства. Следующим новым шагом в Г. была идея Б. Римана (B. Riemann), к-рый в 1854 сформулировал обобщенное понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений и ввел пространства, измерение расстояний (метрика) в к-рых производится по нек-рому заданному закону «бесконечно малыми шагами». Иными словами, задается определенная функция, к-рая выражает длину пути точки через дифференциалы координат при малом ее смещении. Развитие идеи Римана привело к дальнейшим разнообразным обобщениям способов задания метрики и рассмотрению Г. соответствующих пространств (см. *Риманово пространство*, *Финслерово пространство*). При исследовании физич. пространства, различных механич. систем или вообще систем каких-либо однородных физич. объектов выбор подходящего математич. пространства и сопоставление его элементов объектам изучаемой системы зависят от характера этой системы. Качество такого математич. моделирования проверяется опытом. Разные объекты или одни и те же объекты при разной детальности исследования могут требовать разных пространств. В общей физич. теории пространства-времени-тяготения (см. *Относительности теория*) используется одна из разновидностей римановой Г.

Одним из стимулов развития и систематизации Г. явилась ее связь с теорией групп. Ф. Клейн (F. Klein) в *эрлангенской программе* (1872) так определил содержание Г.: дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы. Напр., теория инвариантов ортогональной группы определяет евклидову Г. В такую классификацию хорошо укладываются также *аффинная геометрия*, *конформная геометрия*, проективная геометрия. Но риманова Г. не может быть определена таким образом. В связи с этим Э. Картан (E. Cartan) ввел пространства, в к-рых соответствующая группа преобразований действует только локально, в бесконечно малой окрестности; таковы римановы пространства и пространства с различной *связностью*. Групповой подход с точки зрения непрерывных групп преобразований был предложен С. Ли (S. Lie).

Параллельно в конце 19 в. развивался логич. анализ основ Г. Выяснение непротиворечивости, минимальности и полноты систем аксиом Г. суммировано Д. Гильбертом (D. Hilbert) в книге «Основания геометрии» (1899) (см. *Основания геометрии*).

Современное понимание пространства как непрерывной совокупности однородных объектов (явлений, состояний, фигур, функций) обусловлено глубокой взаимосвязью Г. с другими областями математики. Наиболее отчетливо эта связь проявилась в развитии Г. в 20 в., когда Г. стала широко разветвленной, а ее границы в связи с усилением единства математики стали менее четкими. Теперь пространство в математике понимается как множество, снабженное нек-рой структурой, т. е. нек-рыми отношениями между его элементами или подмножествами. Изучение простейшей весьма

общей структуры, позволяющей говорить о непрерывности, привело к выделению из Г. большой самостоятельной части математики — *топологии*. Г. предполагает наличие более богатых структур. При использовании аналитич. аппарата дополнительные структуры (связности, метрики, конформные и симплектич. структуры и т. п.) задают обычно с помощью тензорных (в частности — векторных) или иных полей.

Исследование ряда геометрич. структур относится и к другим частям математики. Это связано с преобладающим методом исследования. Так, *алгебраическая геометрия* изучает алгебраич. многообразия и связанные с ними алгебраич. и арифметич. проблемы. Алгебраизация геометрич. закономерностей позволяет строить Г. над произвольными полями (в том числе над конечными — конечные Г.). Эти разделы — части алгебры. Бесконечномерные пространства изучаются в функциональном анализе. Однако во всех этих областях математики остается полезным геометрич. способ мышления, при к-ром непосредственно оперируют наглядными образами, без перехода к исчислениям.

Наиболее традиционным предметом Г. остаются пространства, являющиеся многообразиями с той или иной дополнительной структурой, многообразия различных фигур, в частности — подмногообразий в них и полей разного рода объектов на многообразиях. Многие разделы Г. можно характеризовать типом пространств и типом объектов в них, являющихся предметом исследования. Напр., глобальная Г. дифференцируемых многообразий изучает многообразия с гладкими структурами, гладкие многообразия и гладкие поля на них, причем изучает их в целом, на полных многообразиях. *Геометрия в целом* изучает сходные вопросы для кривых и поверхностей при допущении негладкости и особенностей; она ведет свое начало от теории *выпуклых тел*, основы к-рой были заложены Г. Минковским (H. Minkowski). В *интегральной геометрии* исследуются меры на совокупностях геометрич. объектов. *Комбинаторная геометрия* изучает расположения геометрич. фигур топологич. и метрич. средствами (напр., плотнейшие упаковки и редчайшие покрытия) в евклидовом, гиперболич. и эллиптич. пространствах разного числа измерений.

Развитие Г., ее приложения, развитие геометрич. восприятия абстрактных объектов в различных областях математики и естествознания свидетельствуют о важности Г. как одного из самых глубоких и плодотворных по идеям и методам средств познания действительности.

Лит.: [1] Александров А. Д., Геометрия, БСЭ, 3 изд., т. 6; [2] Математика, ее содержание, методы и значение, М., 1956, т. 1, с. 5—69, 180 -245; т. 2, с. 97—144; [3] Вандер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [4] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины 19 столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [5] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в 19 столетии, пер. с нем., М.— Л., 1937; [6] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; [7] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [8] Об основаниях геометрии, М., 1956; [9] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [10] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939.

См. также лит. при статьях об отдельных геометрических дисциплинах.

Э. Г. Позняк.

ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ — геометрич. теории, предметом изучения к-рых является полный геометрич. образ (вся кривая, вся поверхность, все пространство, аналогично — все поле вектора, все поле тензора или другого геометрич. объекта, аналогично — все отображение одного геометрич. образа или всего поля геометрич. объекта на другое). Термин «Г. в ц.» (Geometrie im Grossen) возник в немецкой математич. литературе в нач. 20 в. в связи с противопоставлением Г. в ц. геометрии в малом — теориям, в к-рых геометрич. образ (аналогично — поле, отображение) изучается только

в достаточно малых областях, как это имело место в классической *дифференциальной геометрии*, методы к-рой были недостаточны для нужд Г. в ц. При отсутствии указанного противопоставления, когда рассматривают только объекты в целом (в элементарной геометрии, в топологии многообразий), термин «Г. в ц.» не употребляется.

Качественное отличие свойств в целом от свойств в малом проявилось прежде всего в вопросах жесткости, изгибаемости, изометричных погружений поверхностей (напр., малый кусок выпуклой поверхности изгибаем с сохранением выпуклости, а вся поверхность выпуклого тела уже так не изгибаема); в поведении геодезич. линий (напр., в малой области две точки гладкой поверхности соединимы единственной геодезической, а на всей замкнутой поверхности — бесконечным числом геодезических); в возможности задавать метрику с определенными свойствами на различных многообразиях (напр., метрику везде положительной кривизны можно задать на полной поверхности только гомеоморфной сфере, плоскости или проективной плоскости). Такие проблемы породили самостоятельные теории, см., напр., *вариационное исчисление в целом*. Развитие более приспособленных для Г. в ц. методов современной дифференциальной геометрии открыло возможность получения многих качественных результатов и количественных соотношений в целом для регулярных геометрических структур на многомерных лишенных особенностей многообразиях.

Особенности часто неминуемо возникают при продолжении гладких погруженных многообразий или полей на них. Кроме того, решение многих экстремальных задач достигается именно на нерегулярных объектах. Поэтому многие вопросы Г. в ц. более естественно ставятся в классах, включающих нерегулярные объекты. Это требует создания методов, отличных от дифференциально-геометрических. Такие подходы, объединяющие исследование в целом с исследованием особенностей, развиты для двумерных поверхностей геометрич. школой А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. В. Погорелова, в к-рой получены наиболее законченные результаты в теории поверхностей.

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [2] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [3] Ефимов Н. В., Геометрия «в целом», в кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959; [4] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

А. Д. Александров, В. А. Залгаллер.

ГЕОМЕТРИЯ ЧИСЕЛ, геометрическая теория чисел, - раздел теории чисел, изучающий теоретико-числовые проблемы с применением геометрич. методов. Г. ч. в собственном смысле сформировалась с выходом основополагающей монографии Г. Минковского [1] в 1896. Исходным пунктом направления, развившегося в самостоятельный раздел теории чисел, явилось то обстоятельство (подмеченное Г. Минковским), что нек-рые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном евклидовом пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел.

Основной и типичной задачей Г. ч. является задача об арифметич. минимуме $m(F)$ нек-рой действительной функции

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n);$$

при этом под $m(F)$ понимается точная нижняя граница значений функции $F(x)$, когда x пробегает все целые точки (т. е. точки с целочисленными координатами), удовлетворяющие нек-рому дополнительному условию (напр., условию $x \neq 0$). В важнейших частных случаях эта задача решается теоремой Минковского о выпуклом теле, к-рая может быть сформули-

рована так: пусть $F(x)<1$ есть n-мерное выпуклое тело объема V_F, причем $F(-x)=F(x)$; тогда

$$m(F)\leqslant 2V_F^{-1/n}.$$

Значение $m(F)$ позволяет судить об условиях существования решений диофантова неравенства (см. *Диофантовы приближения*)

$$|F(x)|\leqslant c;$$

к этому вопросу сводятся многие задачи теории чисел. Особым разделом Г. ч. является геометрия *квадратичных форм*.

В Г. ч. различают два общих типа проблем, наз. однородной и неоднородной проблемами.

Однородная проблема, исследования по к-рой составляют большую часть Г. ч., посвящена изучению однородных минимумов $m(F, \Lambda)$ *лучевой функции* F в *точечной решетке* Λ. Понятие точечной решетки является основным понятием Г. ч. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — линейно независимые векторы n-мерного евклидова пространства. Множество точек

$$\{g_1a_1+\ldots+g_na_n\},$$

когда $g_1, \ldots, g_n$ пробегают независимо друг от друга все целые числа, наз. (точечной) решеткой Λ с базисом $a_1, \ldots, a_n$ и определителем

$$d(\Lambda)=|\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы лучевая функция $F=F(x)$ и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Точная нижняя граница

$$m(F, \Lambda)=\inf_{a\in\Lambda,\ a\neq 0} F(a)$$

значений функции F в точках $a\neq 0$ решетки Λ наз. минимумом функции F в решетке Λ (точнее, однородным арифметическим минимумом). Точная нижняя граница $m(F, \Lambda)$, к-рая может и не достигаться, заведомо достигается для ограниченного *звездного тела*, определяемого неравенством

$$F(x)<1.$$

Для оценки $m(F, \Lambda)$ сверху важно уметь вычислять или оценивать постоянную Эрмита $\gamma(F)$ лучевой функции F, определяемую равенством

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda} m(F, \Lambda)/\{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

где точная верхняя граница берется по множеству $\mathbb{Z}_n$ всех n-мерных решеток Λ.

Центральным пунктом Г. ч. является установление связи между $\gamma(F)$, критич. определителем (см. ниже) $\Delta(\mathfrak{S}_F)$ множества $\mathfrak{S}_F=\{x\mid F(x)<1\}$ и (если F — симметричная выпуклая лучевая функция) плотностью $\theta(\mathfrak{S}_F)$ плотнейшей решетчатой *упаковки* тела $\mathfrak{S}_F$.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы множество $\mathfrak{M}$ и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Решетка Λ наз. допустимой для $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}$-допустимой, если $\mathfrak{M}$ не содержит точек из Λ, отличных от 0. Множество $\mathfrak{M}$, имеющее хотя бы одну допустимую решетку, наз. множеством конечного типа; в противном случае $\mathfrak{M}$ наз. множеством бесконечного типа. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество конечного типа; точная нижняя граница

$$\Delta(\mathfrak{M})=\inf d(\Lambda)$$

множества определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathfrak{M}$-допустимых решеток Λ наз. критическим определителем $\Delta(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}$. Всякая $\mathfrak{M}$-допустимая решетка Λ с условием

$$d(\Lambda)=\Delta(\mathfrak{M})$$

наз. критической решеткой множества $\mathfrak{M}$. Для множества $\mathfrak{M}$ бесконечного типа, по определению, $\Delta(\mathfrak{M})=+\infty$.

Вычисление постоянной Эрмита $\gamma(F)$ лучевой функции F сводится к вычислению критич. определителя $\Delta(\mathfrak{C}_F)$ звездного тела $\mathfrak{C}_F$, определяемого условием $F(x)<1$:

$$\gamma(F)=\{\Delta(\mathfrak{C}_F)\}^{-1/n}.$$

Связь между критич. определителем и плотностью плотнейшей решетчатой упаковки устанавливается следующей теоремой Блихфельдта. Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное множество, $D\mathfrak{R}$ — соответствующее ему разностное множество (т. е. совокупность точек $\xi-\eta$, где $\xi\in\mathfrak{R}$, $\eta\in\mathfrak{R}$) и пусть Λ — решетка. Для того чтобы расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, т. е. семейство множеств $\{\mathfrak{R}+a\}$, где $a\in\Lambda$, было упаковкой, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ была $D\mathfrak{R}$-допустимой.

Плотность $\theta(\mathfrak{R})$ плотнейшей решетчатой упаковки ограниченного измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{R}$ меры $V(\mathfrak{R})$ выражается равенством

$$\theta(\mathfrak{R})=V(\mathfrak{R})/\Delta(D\mathfrak{R}).$$

Для произвольного множества $\mathfrak{M}$ и измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{R}$ меры $V(\mathfrak{R})$, удовлетворяющего условию $D\mathfrak{R}\subset\mathfrak{M}$, справедливо неравенство (другая формулировка теоремы Блихфельдта):

$$\Delta(\mathfrak{M})\geqslant V(\mathfrak{R}).$$

Если $\mathfrak{K}$ — выпуклое тело, симметричное относительно точки O, то

$$\Delta(\mathfrak{K})=V(\mathfrak{K})/2^n\theta(\mathfrak{K}),$$

где $\theta(\mathfrak{K})$ — плотность плотнейшей решетчатой упаковки тела $\mathfrak{K}$. Так что в случае симметричной выпуклой лучевой функции $F(x)$ вычисление $\gamma(F)$ сводится к вычислению плотнейшей решетчатой упаковки тела $\mathfrak{C}_F$, определяемого условием $F(x)<1$.

Важнейшим предложением Г. ч. является теорема Минковского о выпуклом теле. Пусть $\mathfrak{K}$ — выпуклое тело, симметричное относительно начала координат и имеющее объем $V(\mathfrak{K})$. Тогда

$$\Delta(\mathfrak{K})\geqslant 2^{-n}V(\mathfrak{K}). \qquad (1)$$

Иными словами, решетка Λ, для к-рой

$$V(\mathfrak{K})>2^n d(\Lambda),$$

имеет в $\mathfrak{K}$ точку, отличную от 0.

Неравенство (1) наз. неравенством Минковского; оно дает оценку снизу для критич. определителя $\Delta(\mathfrak{K})$ выпуклого тела $\mathfrak{K}$, симметричного относительно 0. Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Для достижения равенства необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\mathfrak{K})=1$. Выпуклые тела $\mathfrak{P}$, удовлетворяющие условию $\theta(\mathfrak{P})=1$, наз. параллелоэдрами. Они играют важную роль в Г. ч. и *кристаллографии математической*.

Все приложения теоремы Минковского о выпуклом теле основаны на том, что для выпуклой симметричной лучевой функции $F(x)$ и произвольной решетки Λ определителя $d(\Lambda)$ справедливо неравенство

$$m(F,\ \Lambda)\leqslant 2\{d(\Lambda)/V(\mathfrak{C}_F)\}^{1/n},$$

где

$$\mathfrak{C}_F=\{x\mid F(x)<1\}.$$

В частности, для решетки Λ_0 целых точек и лучевой функции

$$F(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\beta_i}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right|\right\}$$

справедлива теорема Минковского о линейных однородных формах. Пусть α_{ij}, β_i — действительные числа, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$; $\beta_i>0$, $|\det(\alpha_{ij})|=\Delta>0$. Если

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_n>\Delta,$$

то найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие системе линейных неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right| < \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В Г. ч. изучаются последовательные минимумы лучевой функции в решетке. Пусть $F(x)$ — лучевая функция, Λ — решетка и пусть зафиксирован индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$; i-м последовательным минимумом $m_i = m_i(F, \Lambda)$ функции F в решетке Λ наз. точная нижняя граница чисел μ, для к-рых множество $F(x) < \mu$ содержит не менее i линейно независимых точек решетки Λ. При этом

$$m_1(F, \Lambda) = m(F, \Lambda); \qquad 0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n < +\infty.$$

Справедлива оценка

$$\{m_1(F, \Lambda)\}^n \Delta(\mathfrak{S}_F)/d(\Lambda) \leqslant 1.$$

Труднее оценить сверху величину

$$\delta(F, \Lambda) = \frac{\Delta(\mathfrak{S}_F) \prod_{i=1}^{n} m_i(F, \Lambda)}{d(\Lambda)}.$$

Для этого надо уметь вычислять или оценивать сверху величину

$$\alpha(F) = \sup_{\Lambda} \delta(F, \Lambda),$$

где точная верхняя граница берется по всем n-мерным решеткам Λ. Величина $\alpha(F)$ наз. аномалией лучевой функции F, или аномалией множества $\mathfrak{S}_F$. Имеет место неравенство $\alpha(F) \geqslant 1$. Оценку $\alpha(F)$ сверху дает (см. [4], с. 254—57) следующая теорема. Пусть F есть n-мерная лучевая функция с аномалией $\alpha(F)$; тогда

$$\alpha(F) \leqslant 2^{(n-1)^2}.$$

Построены примеры, показывающие, что эта оценка, вообще говоря, не улучшаема.

Если F — выпуклая симметричная лучевая функция, то предполагается (гипотеза об аномалии выпуклого тела), что

$$\alpha(F) = 1.$$

Справедлива вторая теорема Минковского о выпуклом теле, уточняющая первую теорему. Если $F(x)$ — симметричная выпуклая лучевая функция и Λ — решетка, то

$$V(\mathfrak{S}_F) \prod_{i=1}^{n} m_i(F, \Lambda) \leqslant 2^n d(\Lambda),$$

где выпуклое тело $\mathfrak{S}_F$ определяется условием $F(x) < 1$.

Понятие последовательных минимумов и основные относящиеся к ним результаты (исключая последнюю теорему) обобщаются со звездных тел $\mathfrak{S}_F$ на произвольные множества $\mathfrak{M}$ (см. [9], с. 44—46).

Следующее предложение оценивает критич. определитель данного множества сверху: для любого измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{M}$ меры $V(\mathfrak{M})$

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant V(\mathfrak{M}); \tag{2}$$

при этом, если $\mathfrak{M}$ — симметричное относительно 0 звездное тело, то

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \{2\zeta(n)\}^{-1} V(\mathfrak{M}),$$

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \ldots. \tag{3}$$

Все доказательства этой теоремы включают в себя то или иное усреднение нек-рой функции, заданной на пространстве решеток. Наиболее естественный вывод дает (см., напр., [12]) следующая теорема Зигеля о среднем. Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Лебегу функция, заданная на n-мерном евклидовом пространстве R^n, а μ — инвариантная мера, заданная

на пространстве решеток Λ с определителем $=1$; $\mathcal{F}$ — фундаментальная область этого пространства. Тогда

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{F})}\int_{F}\left\{\sum_{\substack{a\in\Lambda\\ a\neq 0}} f(a)\right\} d\mu(\Lambda)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

В отличие от оценки снизу (1), оценки (2) и (3) не являются окончательными (уточнение см. [13]).

Оценки критич. определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ данного множества $\mathfrak{M}$ снизу и сверху приводят к оценкам $\gamma(F)$ сверху и снизу, т. е. к решению (в известном смысле) однородной задачи Г. ч. Однако часто бывает важно знать и точное значение $\gamma(F)$ или точное значение критич. определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ для заданного множества $\mathfrak{M}$ (скажем, для нормированного тела данного алгебраического числового поля). Если $\mathfrak{S}$ — заданное ограниченное звездное тело, то, в принципе, можно указать алгоритм, позволяющий свести задачу отыскания всех критич. решеток тела $\mathfrak{S}$ (а следовательно, и $\Delta(\mathfrak{S})$) к конечному числу обычных задач на экстремум нек-рых функций нескольких переменных. Однако этот алгоритм осуществим (при современном состоянии исследований) лишь для выпуклых тел $\mathfrak{S}$ при числе измерений $n\leqslant 4$ (см. [4], с. 185—86, 199—202).

Для неограниченных звездных тел $\mathfrak{S}$ нахождение $\Delta(\mathfrak{S})$, вообще говоря, значительно сложнее; это показывает явление изоляции однородных арифметич. минимумов, состоящее в следующем. Пусть F — лучевая функция в $\mathbb{R}^n$ и пусть на множестве $\mathscr{L}$ всех решеток Λ задана величина

$$\mu(\Lambda)=\mu(F,\ \Lambda)=m(F,\ \Lambda)/\{d(\Lambda)\}^{1/n}.$$

Множество $M(F)$ возможных значений $\mu(\Lambda)$ для всех $\Lambda\in\mathscr{L}$ наз. спектром Маркова лучевой функции F. Говорят, что для F имеет место явление изоляции, если множество $M(F)$ имеет изолированные точки. Множество $M(F)$ лежит на промежутке $(0,\ \gamma(F)]$. Если звездное тело $\mathfrak{S}_F$, $F(x)<1$, ограничено, то

$$M(F)=(0,\ \gamma(F)].$$

Поэтому явление изоляции возможно лишь для неограниченных звездных тел (см. [4], гл. 10). Наиболее исследован случай $n=2$

$$F_0(x)=|x_1x_2|^{1/2}. \tag{4}$$

То, что здесь возникает явление изоляции, впервые заметили (см. [14]) А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (и это был вообще первый пример явления изоляции). А. А. Марковым (1879, см. [14]) доказано, что часть спектра $M(F_0)$, лежащая правее $\sqrt[4]{4/9}$, дискретна; она имеет вид

$$\left\{\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{Q_k}\right)^{-1/4},\ k=1,\ 2,\ \ldots\right\}, \tag{5}$$

где Q_k — возрастающая последовательность целых положительных чисел, обладающих тем свойством, что найдутся целые числа R_k, S_k, удовлетворяющие условию

$$Q_k^2+R_k^2+S_k^2=3Q_kR_kS_k;$$

каждой точке спектра (5) («спектр Маркова» в узком смысле) отвечает единственная, с точностью до автоморфизмов (4), решетка Λ_k. Неопределенная форма $\varphi_k=x_1x_2$, $(x_1,x_2)\in\Lambda_k$, иногда наз. формой Маркова, а последовательность $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$ наз. цепочкой Маркова. Известно также, что левее нек-рого числа $\mu_0=\mu_0(F_0)$ спектр $M(F_0)$ совпадает с отрезком $[0,\ \mu_0]$. Явление изоляции можно описать в терминах допустимых решеток (см. [9], с. 50), что несколько обобщает это понятие.

Неоднородная проблема охватывает неоднородные диофантовы задачи, играющие большую роль в теории чисел, она составляет важный раздел Г. ч.

Пусть F — лучевая функция в $\mathbb{R}^n$, Λ — решетка определителя $d(\Lambda)$ в $\mathbb{R}^n$ и x_0 — действительная точка в $\mathbb{R}^n$. Рассматриваются величины

$$l(x_0) = l(F, \Lambda; x_0) = \inf_{x \equiv x_0(\Lambda)} F(x),$$

$$l = l(F, \Lambda) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} l(F, \Lambda; x_0),$$

где точная нижняя граница берется по всем точкам вида $x+a$, $a \in \Lambda$, а точная верхняя граница берется по всем точкам $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Величина $l(F, \Lambda)$ наз. неоднородным арифметическим минимумом функции F в решетке Λ; при этом «минимум» может и не достигаться. $l(F, \Lambda)$ есть точная нижняя граница действительных чисел $\lambda > 0$, обладающих следующим свойством: расположение $\{\lambda \mathfrak{S}_F, \Lambda\}$ множества $\lambda \mathfrak{S}_F$, где $\mathfrak{S}_F$ удовлетворяет условию $F(x) < 1$, по решетке Λ является *покрытием*, т. е.

$$\bigcup_{a \in \Lambda} (\lambda \mathfrak{S}_F + a) = \mathbb{R}^n.$$

Для лучевой функции F рассматриваются аналоги постоянной Эрмита:

$$\sigma(F) = \inf_{\Lambda} l(F, \Lambda) / \{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

$$\Sigma(F) = \sup_{\Lambda} l(F, \Lambda) / \{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

где точная нижняя (верхняя) граница берется по всем n-мерным решеткам Λ. Величина $\Sigma(F)$ обычно тривиальна (см. [4], с. 369 - 70): если множество $\mathfrak{S}_F$, $F(x) < 1$, имеет конечный объем, то

$$\Sigma(F) = +\infty.$$

Однако в одном, представляющем интерес, частном случае функции F, с величиной $\Sigma(F)$ связана неоднородная проблема Минковского.

Гипотеза Минковского о произведении неоднородных линейных форм. Пусть

$$F_n(x) = |x_1 x_2 \ldots x_n|^{1/n}.$$

Тогда

$$\Sigma(F_n) = \frac{1}{2}.$$

Исследования по этой гипотезе и ее аналогам составляют более половины всех исследований по неоднородной проблеме Г. ч. (см. *Минковского гипотеза*).

В общем случае величина $\sigma(F)$ носит характер более содержательный, чем $\Sigma(F)$. Она тесно связана со значением плотности $\tau(\mathfrak{S}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом $\mathfrak{S}_F$ (см. [7], [10]). Именно, если F — лучевая функция и множество $\mathfrak{S}_F$ ограничено, то

$$\tau(\mathfrak{S}_F) = \{\sigma(F)\}^n V(\mathfrak{S}_F).$$

Важный раздел неоднородной проблематики Г. ч. составляют так наз. теоремы переноса для данной лучевой функции F, под к-рыми понимаются неравенства, связывающие неоднородный минимум $l(F, \Lambda)$ с последовательными однородными минимумами $m_i(F, \Lambda)$ (или минимумами взаимной функции F^* относительно взаимной решетки Λ^*, и т. п.) (см. [4], с. 380—90).

Пример: пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция и пусть $F(x) > 0$ для $x \neq 0$; тогда для любой решетки Λ

$$\frac{1}{2} m_n(F, \Lambda) \leqslant l(F, \Lambda) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k(F, \Lambda).$$

Имеются обобщения Г. ч. на пространства, более общие, чем $\mathbb{R}^n$, а также на дискретные множества, более общие, чем Λ (см. [15], [10]).

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.— B., 1953; [2] его же, Diophantische Approximationen, Lpz., 1907; [3] Hancock H., Development of the Minkowski geometry of numbers, N. Y., 1939; [4] Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965; [5] Lek-

керкерker C. G., Geometry of numbers, Groningen, 1969; [6] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [7] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [8] Keller O.-H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1954; [9] Ulawka E., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1954, Bd 57, Abt. 1, S. 37—55; [10] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225; [11] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [12] Macbeath A. M., Rogers C. A., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1958, v. 54, pt. 2, p. 139—51; [13] Schmidt W., «Ill. J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 18—23; № 4, p. 714; [14] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 7—51; [15] Rogers K., Swinnerton-Dyer H. P. F., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 88, № 1, p. 227—42.

А. В. Малышев.

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА — вариант единой теории поля, последовательно сводящий все физич. объекты к геометрическим. Построение Г. осуществляется в несколько этапов.

На первом этапе строится единая теория гравитации и электромагнетизма на основе общей теории относительности. Основная задача Г. на этом этапе в упрощенной постановке состоит в следующем. Пусть задана метрика g_{ij} пространства-времени, к-рая является решением уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}(f_{\mu\sigma}, g),$$

где R_{ik} — тензор кривизны, T_{ik} — тензор энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме, $f_{\mu\sigma}$ — тензор электромагнитного поля в вакууме, удовлетворяющий уравнениям Максвелла. Требуется выразить $f_{\mu\sigma}$ через g_{ik}. В такой упрощенной постановке задача принципиально решена [1], однако полное ее решение встречает непреодоленные трудности (напр., при учете неэлектромагнитных полей).

На втором этапе строится теория элементарных частиц. Моделью пары взаимодействующих частиц считается так наз. «ручка», простейшим видом к-рой является одна из топологич. интерпретаций (см. [2]) максимального аналитич. продолжения *Шварцшильда поля*. Характеристиками элементарной частицы (напр., заряда) в этом случае являются нек-рые интегральные инварианты «ручки». Пространство-время Г.— многосвязное, а первое *Бетти число* — порядка числа частиц. Вводится понятие геона — сгустка того или иного излучения концентрации достаточной, чтобы соответствующее искривление пространства сделало этот сгусток метастабильным (т. е. существующим долгое время). В Г. предсказываются электромагнитные, нейтринные и гравитационные геоны. Понятие геона является классическим. Считается, что квантовый аналог понятия Г. представляет собой геометродинамич. описание массы элементарных частиц (экспериментально геоны не наблюдались.)

На третьем этапе строится теория сплошных сред, приводящая в общих чертах к тем же результатам, что и в обычной общей теории относительности.

Предполагается, что в Г. должен нарушаться закон сохранения барионного заряда. В качестве конкретного механизма этого нарушения можно рассматривать процесс гравитационного коллапса и последующего испарения черных дыр.

На четвертом этапе делаются попытки построить последовательную квантовую Г. Рассматриваются квантовые флуктуации метрики, причем указывается, что на расстоянии порядка $(\hbar\varkappa/c^3)^{1/2} \approx 10^{-33}$ *см* ($\hbar$ — постоянная Планка, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, c — скорость света) флуктуации могут существенно изменять топологию пространства и должны соответствовать квантовым элементарным частицам.

В настоящее время (70-е гг. 20 в.) Г. не является еще последовательно развитой теорией. Особенно затруднительно толкование спинорных полей (а не тензорных): в частности, нейтринных полей. Многие части Г. не имеют достаточного математич. обоснования.

Одной из попыток дать такое обоснование является теория суперпространства [4].

Лит.: [1] Rainich G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1925, v. 27, № 106; [2] Уилер Дж., Гравитация, нейтрино и Вселенная, пер. с англ., М., 1962; [3] Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К., Теория гравитации и гравитационных коллапс, пер. с англ., М., 1967; [4] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975.

Д. Д. Соколов.

ГЕОТЕРМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математич. задачи, возникающие при исследовании тепловых процессов, происходящих в Земле. В геотермике различают поверхностные явления, связанные с колебаниями температуры в верхних слоях Земли вследствие воздействия солнечного излучения, и глубинные явления, связанные с распределением температуры внутри Земли, обусловленным радиоактивными источниками тепла.

Г. м. з. в основном связаны с решением квазилинейных уравнений параболич. типа, коэффициенты к-рых изменяются с глубиной погружения и зависят от температуры. При изучении промерзания в верхних слоях Земли или процессов плавления в глубинных слоях учитывается фазовый переход, т. е. изменение физич. состояния среды. При этом возникает так наз. *Стефана задача* или задача о фазовом переходе. Наиболее эффективным методом численного решения этих задач является метод конечных разностей, широко используемый на практике.

Ряд задач геотермики связан с исследованием взаимодействия температурного поля с другими физич. явлениями. При анализе задач промерзания грунта с учетом подтока воды решаются совместно уравнения теплопроводности и уравнения фильтрации. Исследование температурного распределения в водной толще приводит к необходимости совместного рассмотрения уравнения теплопроводности и уравнения конвекции. Анализ термоупругих напряжений в Земле и связанных с этим эффектов расширения и деформации Земли проводится на основе совместного решения уравнения теплопроводности и уравнения упругого равновесия в гравитационном поле.

Среди Г. м. з. имеется ряд специфических задач. Так, задача об определении историч. климата Земли привела к математич. постановке обратной задачи для уравнения теплопроводности, где надо определить температуры для моментов времени $t<t_0$ по заданному распределению температуры по глубине в момент времени $t=t_0$. Решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ в области $x>0$, $-\infty<t<t_0$ определяется однозначно по заданным значениям $u(x, t_0)=\varphi(x)$, если хотя бы одна производная решения по координате x равномерно ограничена $|\partial^n u/\partial x^n|<M$ (см. [1]).

Учет влияния излучения на температурный режим Земли и др. небесных тел приводит к задаче для уравнения теплопроводности при нелинейных краевых условиях, в частности при излучении по *Стефана — Больцмана закону*. Эти задачи могут быть сведены к нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтерра (см. [1]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1935, т. 1, № 5, с. 294—300; [2] его же, «Изв. АН СССР», Отд. матем. и естеств. наук. Сер. геогр., 1937, № 3, с. 461—79; [3] его же, «Матем. сб.», 1950, в. 26(68), с. 35—56; [4] Любимова Е. А., Термика Земли и Луны, М., 1968.

В. И. Дмитриев.

ГЕОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при анализе физич. явлений, изучаемых в связи с исследованиями строения Земли. В зависимости от природы изучаемых физич. явлений различают следующие виды геофизич. исследований: гравиразведку, основанную на изучении гравитационного поля; магниторазведку, основанную на изучении постоянного магнитного поля; сейсморазведку, основанную на изучении распространения упругих колебаний;

электроразведку, основанную на изучении электрич. поля постоянного тока или переменного электромагнитного поля; радиометрию, основанную на измерении интенсивности излучения естественной или вызванной радиоактивности горных пород. Измерение полей может производиться на поверхности Земли (наземные методы), в воздухе (аэроразведка) и в скважинах (каротаж скважин) (см. [1]).

Математич. задачи, возникающие в гравиразведке и в магниторазведке, схожи. В обоих случаях прямая задача сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\Delta U = \rho(M),$$

где $U(M)$ — гравитационный или магнитный потенциал, а $\rho(M)$ — избыточная плотность или фиктивные магнитные заряды, определяемые через намагниченность горных пород. Измеряемой величиной является $\operatorname{grad} U(M)$, определяющий или изменение ускорения силы тяжести Δg, или изменение постоянного магнитного поля Земли. Измерения производятся в различных точках земной поверхности. По этим экспериментальным данным необходимо определить распределение в Земле функции $\rho(M)$. Прямая задача проста и решение выписывается в квадратурах. Основная трудность — в решении обратной задачи. Здесь широко применяются методы теории гармонич. полей и аналитич. продолжения (см. [2]).

Несколько иной характер имеют задачи, возникающие в электроразведке на постоянном токе. Хотя поле в этом случае потенциально, т. е. электрич. поле $\bar{E}$ выражается через электрич. потенциал U, однако уравнение для потенциала имеет более сложный вид:

$$\operatorname{div}[\sigma(M) \operatorname{grad} U] = -\operatorname{div} \bar{j}_0,$$

где $\bar{j}_0$ — плотность тока заданного источника, а $\sigma(M)$ — распределение удельной проводимости в Земле. Прямая задача заключается в определении на поверхности Земли электрич. поля для различных моделей строения среды [распределения $\sigma(M)$]. В обратной задаче необходимо по измеренному электрич. полю в различных точках земной поверхности найти распределение удельной проводимости $\sigma(M)$.

Еще более сложные задачи возникают в теории электроразведки для методов, использующих переменные электромагнитные поля. В этих методах измеряемой величиной являются компоненты переменного электромагнитного поля, расчет к-рых связан с решением уравнений Максвелла для неоднородных сред, т. е. когда коэффициенты уравнений являются кусочно непрерывными функциями. Обратная задача заключается в определении коэффициентов уравнений по известному электромагнитному полю. Здесь возможно несколько различных вариантов измерений. Может измеряться нестационарное поле в одной точке в зависимости от времени (временное зондирование среды) или стационарное поле заданной частоты в зависимости от изменения частоты (частотное зондирование), а также в зависимости от положения точки наблюдения (геометрич. зондирование) (см. [3]).

В сейсморазведке полная постановка задачи заключается в решении уравнения распространения упругих колебаний с кусочно непрерывными коэффициентами при условии возбуждения точечным взрывом. Решения этой задачи проведены только для простейших моделей строения среды. Однако в связи с тем, что основной измеряемой величиной в сейсморазведке является время прихода отраженных сигналов, в теории ограничиваются приближением геометрич. оптики и решают уравнение эйконала для определения траектории луча и последующим вычислением времени прихода сигнала. Время запаздывания сигнала измеряется в различных точках земной поверхности. Обратная задача заключается в

определении отражающей границы по известной зависимости времени прихода сигнала от координаты точки наблюдения (см. [4]).

Основной целью всех геофизич. исследований является решение обратной задачи, т. е. определение строения среды по измеренным характеристикам поля. Параметры, определяющие строение среды, являются коэффициентами уравнения с частными производными или правыми частями этого уравнения, к-рому удовлетворяет поле. Задача отыскания коэффициентов уравнения или правой части уравнения по решению, известному только в нек-рой части пространства, является некорректно поставленной задачей. Поэтому при решении обратных задач геофизики необходимо применение метода регуляризации, развитого А. Н. Тихоновым (см. [5]).

Основой регуляризации решения обратных задач геофизики является выбор достаточно узкого класса решений, в к-ром задача становится корректной. Этот выбор достигается построением семейства математич. моделей строения среды, к-рое с одной стороны достаточно полно описывает практич. ситуации, с другой стороны определяется небольшим числом параметров модели. В построении таких семейств математич. моделей с учетом конкретных реализаций различных методов геофизич. исследований и в зависимости от целей, стоящих перед этими исследованиями, а также в разработке эффективных алгоритмов решения прямых задач для этих моделей и заключается основная математич. проблема при решении обратных задач геофизики.

Если семейство математич. моделей построено и алгоритм решения прямой задачи известен, то общая формулировка обратной задачи будет следующей. Пусть $\boldsymbol{p}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — параметры модели, причем $\boldsymbol{p}\in P$, где P — множество допустимых значений параметров модели. Измеряемая на практике характеристика поля $U(x, \boldsymbol{p})$ в зависимости от переменной x и параметров модели $\boldsymbol{p}$ может быть рассчитана с помощью известного алгоритма прямой задачи:

$$U(x, \boldsymbol{p}) = A_x[\boldsymbol{p}],$$

где A_x — в общем случае нелинейный оператор, зависящий от переменной x как от параметра. Если $U_э(x)$ — экспериментально полученная характеристика поля, то решением обратной задачи будет $\boldsymbol{p}_{\min}$, на к-ром реализуется минимум отклонения $U(x, \boldsymbol{p})$ от $U_э(x)$, т. е.

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P} \| U(x, \boldsymbol{p}) - U_э(x) \|_U,$$

где U — пространство характеристик поля. Обычно берут среднеквадратич. норму (см. [6]).

В геофизич. исследованиях основными являются два типа моделей строения среды: полупространство с локальными неоднородностями (используется при анализе результатов методов разведочной геофизики, направленных на обнаружение неоднородностей в земной коре, напр. в рудной геофизике); слоистое полупространство, когда параметры среды изменяются только по глубине (используется при решении структурных задач геофизики).

Дальнейшее развитие математич. моделей в геофизике шло путем усложнения указанных двух типов с целью более полного описания практич. ситуаций. Напр., локальные неоднородности в слоистом полупространстве или слоистая среда с переменной толщиной слоев и т. п. Решение даже прямых задач для таких сложных моделей строения среды стало возможным только с внедрением ЭВМ. При этом широко используются конечноразностные методы, метод интегральных уравнений и проекционные методы.

Разработка эффективных алгоритмов решения прямых задач геофизики позволила проводить более точную количественную интерпретацию данных наблюдений. Проведен большой цикл расчетов прямых задач для различных семейств математич. моделей. На этой основе изданы альбомы палеток характеристик полей, с помощью к-рых решаются обратные задачи методом подбора (см. [7]). Все большее развитие получают системы автоматизированной обработки и интерпретации экспериментальных данных с помощью ЭВМ.

Лит.: [1] Федынский В. В., Разведочная геофизика, М., 1964; [2] Маловичко А. К., Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки, М., 1956; [3] Дмитриев В. И., Электромагнитные поля в неоднородных средах, М., 1969; [4] Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 3, [Л.], 1959; [5] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 1, с. 49—52; [6] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [7] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [8] Новиков П. С., там же, 1938, т. 18, с. 165—68; [9] Тихонов А. Н., там же, 1949, т. 69, № 6, с. 797—800; [10] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, № 3, с. 545—48.

В. И. Дмитриев.

ГЕРГЛОТЦА ФОРМУЛА — интегральное соотношение, устанавливающее связь между двумя замкнутыми изометричными ориентируемыми регулярными поверхностями. Пусть на поверхностях S_1 и S_2 введены локальные координаты u и v так, что по их равенству устанавливается отображение изометрии. Пусть:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

— общая для S_α, $\alpha = 1, 2$, первая квадратичная форма, K — гауссова кривизна, H_α — средние кривизны и

$$\sqrt{EG - F^2}\,(\lambda_\alpha\, du^2 + 2\mu_\alpha\, du\, dv + \nu_\alpha\, dv^2)$$

— вторые квадратичные формы поверхностей S_α. Тогда Г. ф. имеет вид:

$$\int_{S_1} \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \mu_2 - \mu_1 \\ \mu_2 - \mu_1 & \nu_2 - \nu_1 \end{vmatrix} (\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x})\, d\tau = \int_{S_2} H_2 d\tau - \int_{S_1} H_1 d\tau,$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ — радиус-вектор поверхности S_1, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к S_1, $d\tau$ — элемент площади. Получена Г. Герглотцем [1].

Лит.: [1] Herglotz G., «Abh. math. Semin. Univ. Hamburg», 1943, Bd 15, S. 127—29; [2] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158.

Е. В. Шикин.

ГЕРОНА ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, длины сторон и площадь к-рого выражаются целыми числами. Назван по имени Герона (ок. 1 в. н. э.), рассмотревшего треугольники со сторонами 13, 14, 15 и 5, 12, 13, площади к-рых соответственно равны 84 и 30. *А. Б. Иванов.*

ГЕРОНА ФОРМУЛА — формула, выражающая площадь треугольника через его стороны a, b, c:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

где $p = (a+b+c)/2$. Названа по имени Герона (ок. 1 в. н. э.). *А. Б. Иванов.*

ГЕРЦА ПРИНЦИП, прямейшего пути принцип, наименьшей кривизны принцип, — дифференциальный *вариационный принцип классической механики*, постулированный Г. Герцем [1] в качестве основного закона разработанной им механики, в к-рой, в отличие от механики Ньютона, вместо понятия силы введены представления о скрытых связях и скрытых движениях. Согласно Г. п. «всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути». Свободной системой Г. Герц наз. систему, не подверженную действию активных сил и стесненную связями, накладывающими ограничения лишь на взаимные расположения точек системы; под прямейшим путем понимается траектория, каждый элемент к-рой имеет наименьшую кривизну по сравнению с любым элементом, имеющим с рассматриваемым об-

щие начальную точку и касательную в ней и удовлетворяющим уравнениям связей. Для систем, стесненных стационарными связями и не подверженных действию активных сил, Г. п. эквивалентен *Гаусса принципу* (см. [2]).

Лит.: [1] Hertz H., Gesammelte Werke, [Bd] 3 — Die Principien der Mechanik..., Lpz., 1894 (в рус. пер.— Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959); [2] Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. I, Л., 1938.

В. В. Румянцев.

ГЕССИАН функции f — квадратичная форма

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

или

$$H(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i \bar{z}_j,$$

где $a_{ij} = \partial^2 f(p) / \partial x_i \partial x_j$ (или $\partial^2 f(p) / \partial z_i \partial \bar{z}_j$) и $f(p)$ задана на n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$ (или комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$) с координатами $x_1, \ldots, x_n$ (или $z_1, \ldots, z_n$). Введен О. Гессе (O. Hesse, 1844). С помощью локальной системы координат это определение переносится на функции, определенные на действительном многообразии класса C^2 (или на комплексном пространстве). В обоих случаях Г.— квадратичная форма, заданная на касательном пространстве, не зависящая от выбора системы координат. В теории Морса через Г. определяются понятия (не) вырожденной критич. точки, формы Морса и формы Ботта. В комплексном анализе Г. участвует в определении псевдовыпуклой области и плюрисубгармонич. функции.

Лит.: [1] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Л. Л. Иванов.

ГЕССИАН, гессиана, *алгебраической кривой* порядка n — множество точек, конические поляры к-рых распадаются на две прямые, а также множество двойных точек первых поляр. Г. неособой кривой порядка n есть кривая порядка $3(n-2)$ и класса $3(n-2)(3n-7)$. Если $f=0$ есть уравнение кривой порядка n в однородных координатах и $f_{ik} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_k$, то

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

есть уравнение Г. Гессиан кривой 3-го порядка пересекает кривую в девяти общих точках перегиба. Назв. по имени О. Гессе (O. Hesse, 1844).

А. Б. Иванов.

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА — такая точка $(p-p^*,\ q=q^*)$, принадлежащая области определения функции Гамильтона $H=H(p,\ q)$ *гамильтоновой системы*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p=(p_1,\ p_2),\ q=(q_1,\ q_2), \quad (*)$$

что решение системы (*), проходящее через эту точку, при $t \to \infty$ асимптотически приближается к нек-рому периодич. решению T_1, а при $t \to -\infty$ асимптотически приближается к другому периодич. решению T_1'. При этом само решение, проходящее через Г. т., наз. гетероклиническим.

Существует связь между гетероклинич. решениями системы (*) и двумерными инвариантными поверхностями этой системы. Если двумерная инвариантная поверхность разделяет периодич. решения T_1 и T_1', то не существует гетероклинич. решения, соединяющего эти периодич. решения. Во многих случаях справедливо и обратное. В невырожденном случае в окрестности гомоклинич. решения (см. *Гомоклиническая точка*) существует бесконечная последовательность периодич. решений, из к-рых любые два можно соединить гетероклинич. решением. Окрестность контура, составленного из конечного числа периодических и гетероклини-

нических решений системы (*) (так наз. гомоклинического контура), обладает структурой, во многом сходной со структурой гомоклинич. решения.

Сформулированное выше определение Г. т. почти дословно переносится на случай гамильтоновой системы с числом степеней свободы $n>2$, если периодич. решения T_1 и T_1' заменить инвариантными торами T_k и $T_{k'}'$ размерности k и k' соответственно, $0<k,\ k'<n$. Гетероклинич. решения играют важную роль в изучении неустойчивости в гамильтоновых системах с числом степеней свободы больше двух и в теории грубых динамич. систем (см. *Грубая система*).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики, гл. 33, Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [2] Zehnder E., «Communs Pure and Appl. Math.», 1973, v. 26, № 2, p. 131—82; [3] Мельников В. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 3—52; [4] Смейл С., «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 69—78, 88—106; [5] Шильников Л. П., «Матем. сб.», 1967, т. 74(116), № 3, с. 378—97; [6] Алексеев В. М., «Матем. сб.», 1968, т. 76(118), № 1, с. 72—134; т. 77 (119), № 4, с. 545—601; 1969, т. 78 (120), № 1, с. 3—50.

В. К. Мельников.

ГИББСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей обнаружения равновесной статистич. системы в любом из ее стационарных микроскопич. состояний. Последние обычно задаются как чистые квантовомеханич. состояния, определяемые решением ψ_n стационарного *Шрёдингера уравнения*

$$\hat{H}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x),$$

где n — полный набор квантовых чисел, фиксирующих каждое из этих состояний. Сопоставление каждому состоянию n вероятности w_n обнаружения системы в этом состоянии (для непрерывного спектра величин n — плотности вероятности) полностью определяет, вместе с набором функций ψ_n, так наз. смешанное квантовомеханич. состояние. Для такого состояния наблюдаемые величины определяются как средние по распределению w_n от квантовомеханич. средних для каждого чистого состояния n. Смешанное состояние полностью характеризуется статистич. оператором Неймана (матрицей плотности), к-рый в x — представлении имеет вид

$$(x\,|\,\rho\,|\,x')=\sum\nolimits_n w_n\psi_n^*(x')\,\psi_n(x).$$

Наблюдаемые средние определяются как

$$\langle F\rangle=\sum\nolimits_n w_n\left(\psi_n^*,\ \hat{F}\psi_n\right)=Sp\,\hat{\rho}\hat{F}.$$

В случае Г. р. смешанное состояние соответствует равновесному термодинамич. состоянию системы. Так как Г. р. имеют структуру $w_n=w(E_n, A)$, где A — совокупность термодинамич. параметров, фиксирующих микроскопич. состояние системы, то соответствующие им операторы $\hat{\rho}$ выражаются непосредственно через оператор Гамильтона, $\hat{\rho}=w(\hat{H}, A)$, $Sp\,\hat{\rho}=1$. В зависимости от выбора параметров A возможны различные формы Г. р., из к-рых наиболее распространены следующие.

Микроканоническое Г. р. Параметры A характеризуют состояние изолированной системы и включают энергию $\mathscr{E}$, объем V, внешние поля a и число частиц N (в случае многокомпонентной системы — совокупность чисел N_i). В этом случае Г. р. имеет вид

$$w_n(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N)=\Delta(\mathscr{E}-E_n)/\Gamma(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N),$$

где Г — статистический вес, определяющий нормировку распределения и равный

$$\Gamma(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N)=\sum\nolimits_n\Delta(\mathscr{E}-E_n),$$

причем сумма (или интеграл) берется по всем различным состояниям системы вне зависимости от их вырожденности по E_n. Функция $\Delta(\mathscr{E}-E_n)$ равна единице, если значение E_n попадает в энергетич. слой $\delta\mathscr{E}$ около значения $\mathscr{E}$, и нулю в противном случае. Ширина $\delta\mathscr{E}$

должна быть значительно меньше макроскопических бесконечно малых изменений энергии $d\mathscr{E}$, но не меньше интервала между уровнями энергии ΔE_n. Статистич. вес Γ определяет число микроскопич. способов, к-рыми может осуществляться данное макроскопич. состояние и к-рые предполагаются равновероятными; он связан с энтропией системы выражением

$$S(\mathscr{E}, V, a, N) = \ln \Gamma(\mathscr{E}, V, a, N).$$

К а н о н и ч е с к о е Г. р. Макроканонич. состояние системы фиксируется температурой θ и величинами V, a, N (система «в термостате»); с точки зрения приложений это наиболее удобный способ задания термодинамич. состояния. Канонич. Г. р. имеет вид

$$w_n(\theta, V, a, N) = e^{-E_n/\theta}/Z,$$

где Z — с т а т и с т и ч е с к а я с у м м а (или сумма состояний)

$$Z(\theta, V, a, N) = \sum_n e^{-E_n/\theta},$$

непосредственно связана со свободной энергией системы выражением

$$F(\theta, V, a, N) = -\theta \ln Z.$$

Б о л ь ш о е к а н о н и ч е с к о е Г. р. Параметры A фиксируют состояние системы в термостате, ограниченном воображаемыми стенками, свободно пропускающими частицы. Это θ, V, a и химич. потенциал μ (в случае многокомпонентной системы — несколько химич. потенциалов). Г. р. по микроскопич. состояниям, определяемым числом частиц N и квантовыми числами $n = n(N)$ системы N тел, имеет вид

$$w_{Nn}(\theta, V, a, \mu) = e^{-(E_n - \mu N)/\theta}/Z_{\text{Б}},$$

где $Z_{\text{Б}}$ — большая сумма состояний

$$Z_{\text{Б}}(\theta, V, a, \mu) = \sum_{Nn} e^{-(E_n - \mu N)/\theta} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/\theta} Z(\theta, V, a, N),$$

определяющая нормировку этого распределения, связана с термодинамич. потенциалом $\Omega = -pV$ (p — давление) соотношением

$$\Omega(\theta, V, a, \mu) = -\theta \ln Z_{\text{Б}}.$$

Использование какого-либо Г. р. позволяет на основе микроскопич. задания статистич. системы рассчитать характерные для нее макроскопич. средние, дисперсии и т. д., а при помощи нормировочных сумм Γ, Z или $Z_{\text{Б}}$ — определить все термодинамич. характеристики равновесной системы. Выбор того или иного Г. р. производится из соображений удобства. В статистическом предельном случае $N \to \infty$, $V/N = \text{const}$, получаемые при помощи Г. р. результаты (выраженные в одних и тех же переменных) в главных асимптотиках по N одинаковы. А так как метод Гиббса гарантирует только такие асимптотики, то все варианты Г. р. оказываются идентичными. Микроканонич. Г. р. используется в основном применительно к общим вопросам статистич. механики (параметры A не включают специфичных термодинамич. величин типа θ, μ и т. п.), канонич. Г. р. — главным образом при рассмотрении классич. систем, большое канонич. Г. р. — при исследованиях квантовых систем, когда фиксация точного числа N по технич. соображениям неудобна.

При определенных значениях параметров A, связываемых обычно с повышением θ (при фиксированных остальных параметрах) сверх определенной температуры вырождения (имеющей разные значения для каждого вида микроскопич. движения), общие Г. р. переходят в квазиклассические (по отношению к переменным, для к-рых связанное с их изменением движение невырож-

дено). В случае невырожденной системы N частиц, когда микроскопич. движение представляется как классич. движение N материальных точек, микроскопич. состояние задается фазовой точкой $n=(q, p)=(r_1, \ldots, r_N, p_1, \ldots, p_N)$, энергия определяется классич. гамильтонианом $H=H(q, p)$, а канонич. Г. р. имеет вид

$$w_{qp}(\theta, V, a, N)\,dp\,dq=\frac{1}{Z}\,e^{-H(q, p)/\theta}\,dp\,dq/N!\,(2\pi\hbar)^{3N},$$

где классич. интеграл состояний (квазиклассич. предел статистич. суммы) равен

$$Z=\frac{1}{N!}\int\frac{e^{-H(p, q)\,\theta}}{(2\pi\hbar)^{3N}}\,dp\,dq.$$

Г. р. введены Дж. Гиббсом (J. Gibbs, 1902).

Лит.: [1] Гиббс Дж. В., Основные принципы статистической механики..., пер. с англ., М., 1946; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [3] Леонтович М. А., Статистическая физика, М.— Л., 1944.

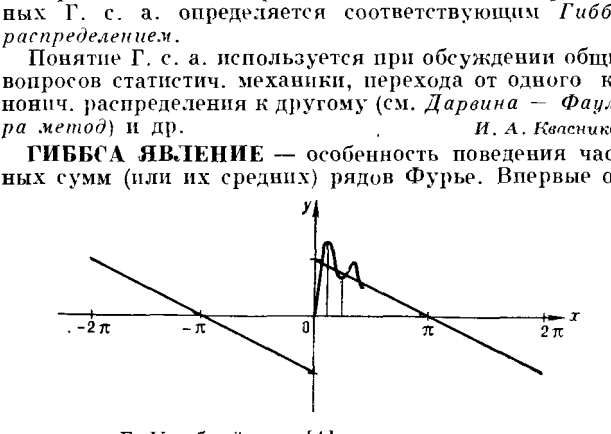
И. А. Квасников.

ГИББСА СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ — совокупность большого числа одинаковых статистич. систем, к-рые характеризуются одними и теми же значениями термодинамич. параметров, но могут находиться в различных микроскопич. состояниях. Это формальное построение позволяет интерпретировать функцию распределения по микроскопич. состояниям статистич. системы как распределение числа систем ансамбля по этим состояниям. Напр., в статистич. механике классич. систем состояние ансамбля определяется плотностью точек в фазовом пространстве — $6n$-мерном пространстве импульсов и координат системы из n частиц, каждая из точек к-рого фиксирует микроскопич. состояние системы. В зависимости от способа фиксации макроскопич. состояния систем ансамбля различают: микроканонический Г. с. а.— ансамбль изолированных систем, если задаются значения энергии системы, ее внешних параметров (объем, внешние поля и т. д.) и числа частиц в ней; канонический Г. с. а.— ансамбль систем с фиксированным числом частиц и находящихся в термостате, если вместо энергии задана температура системы; большой канонический Г. с. а.— ансамбль систем в общем термостате, но числа частиц в них не фиксированы, если заданы температура, объем, внешние поля и химич. потенциал систем. Возможны и иные варианты. Распределение по микроскопич. состояниям в различных Г. с. а. определяется соответствующим *Гиббса распределением*.

Понятие Г. с. а. используется при обсуждении общих вопросов статистич. механики, перехода от одного канонич. распределения к другому (см. *Дарвина — Фаулера метод*) и др.

И. А. Квасников.

ГИББСА ЯВЛЕНИЕ — особенность поведения частных сумм (или их средних) рядов Фурье. Впервые об-



наружена Г. Уилбрейамом [1] и значительно позже переоткрыта Дж. Гиббсом [2]. Пусть частные суммы $s_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся к $f(x)$ в нек-рой окрестности $\{x : 0<|x-x_0|<h\}$ точки x_0, в к-рой

$$a\equiv f(x_0-0)\leqslant f(x_0+0)\equiv b.$$

В точке x_0 имеет место Г. я. для $s_n(x)$, если $A<a\leqslant b<B$, где

$$A=\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0-0}} s_n(x),$$

$$B=\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0+0}} s_n(x).$$

Геометрически это означает, что графики (рис.) частных сумм $s_n(x)$ при $x\to x_0$ и $n\to\infty$ приближаются не к «ожидаемому» отрезку $[a, b]$ по оси ординат, а к строго большему отрезку $[A, B]$. Аналогично определяется Г. я. для средних от частных сумм ряда Фурье при суммировании его тем или иным методом.

Для 2π-периодич. функций f с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$ справедливы, напр., утверждения (см. [3]).

1) В точках неустранимого разрыва (и только в них) имеет место Г. я. для $s_n(x)$. В частности, если $f(x)=(\pi-x)/2$ при $0<x<2\pi$, то для точки x_0 отрезок $[a, b]=[-\pi/2, \pi/2]$, а отрезок $[A, B]=[-l, l]$, где

$$l=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\approx 1{,}85\ldots>\frac{\pi}{2}.$$

2) Существует такая абсолютная постоянная α_0, $0<\alpha_0<1$, что средние Чезаро $\sigma_n^{\alpha}(x)$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$ не имеют Г. я., а при $\alpha<\alpha_0$ оно наблюдается в каждой точке неустранимого разрыва функции f.

Лит.: [1] Willbraham H., «Cambridge and Dublin Math. J.», 1848, v. 3, p. 198—201; [2] Gibbs J. W., «Nature», 1898, v. 59, p. 200; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1965. *П. Л. Ульянов.*

ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи для систем уравнений, к-рыми описываются механич. модели течений жидкости и ее взаимодействия с ограничивающими поверхностями. Для теоретич. описания часто встречающихся турбулентных течений применяются модели частного характера (в большинстве случаев — полуэмпирического), пригодные для сравнительно узких классов течений. В теоретич. исследованиях движений жидкости, в к-рых турбулентность не является существенной, широко используется модель однородной несжимаемой жидкости. Эта модель описывается уравнениями Навье — Стокса:

$$v_t+v_k v_{x_k}-\nu\Delta v=-\operatorname{grad} p+f,$$
$$\operatorname{div} v=0,$$

где v — вектор скорости, p — давление, f — вектор внешней силы, действующей на единицу массы, ν — коэффициент кинематич. вязкости жидкости; плотность жидкости принята равной единице. Если коэффициент ν зависит от температуры, то к уравнениям Навье—Стокса добавляется следующее из закона сохранения энергии уравнение теплопроводности в движущейся среде, в к-ром учитывается выделение тепла в результате обусловленной действием вязкости диссипации механич. энергии.

Различные задачи механики жидкостей приводят к разным системам дополнительных условий (начальных, краевых), требующихся для решения уравнений Навье—Стокса. В связи со сложностью возникающих при этом математич. задач для многих классов задач механики жидкости создаются более простые механич. модели. В задачах какого-либо одного класса стремятся выделить основные факторы, от к-рых может зависеть движение, и соответственно этому в уравнениях и дополнительных условиях сохраняются лишь члены, учитывающие влияние этих факторов. В более сложных случаях в разных частях области движения и в разные отрезки времени основные определяющие факторы могут быть разными. В таких случаях описание движения в целом достигается путем склейки решений локальных

задач, осуществляемой применением к этим решениям дополнительных алгоритмов.

Весьма плодотворной для решения многих задач оказалась модель жидкости, в к-рой не учитывается наличие вязкости (т. е. $\nu=0$) — модель идеальной жидкости.

В случае потенциальных внешних сил $\boldsymbol{f}$ (напр., при учете лишь силы тяжести) особую роль играют в силу их сохраняемости потенциальные течения идеальной жидкости, для к-рых $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi$. Потенциал φ удовлетворяет при этом уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$.

Многие задачи механики жидкости сводятся в этом приближении к классич. задачам теории потенциала. Так, задача о движении тела в неограниченной покоящейся в бесконечности жидкости сводится к решению внешней задачи Неймана. Однако это решение лишь в очень немногих случаях позволяет приблизиться к описанию полей скорости и давления в реальной жидкости. Одним из таких важных случаев является плоское движение хорошо обтекаемого профиля с постоянной циркуляцией скорости вокруг него.

В вязкой жидкости благодаря действию вязкости в пограничном слое вблизи поверхности тела образуются вихри, так что за телом возникает вихревой след. В случае хорошо обтекаемых тел (напр., крыльев с острой задней кромкой, движущихся с малыми углами атаки) вихревой след при больших числах Рейнольдса очень тонок и в модельной постановке задачи в идеальной жидкости его можно заменить поверхностью разрыва потенциала (вихревой пеленой). Таким образом, возникают задачи о нахождении в области вне крыла потенциала скорости, имеющего разрыв на сходящей с задней кромки крыла поверхности, положение к-рой заранее неизвестно и определяется в процессе решения задачи. Аналитич. решение этой задачи получено лишь в линейном приближении для тонких крыльев простой формы в плане (круг, эллипс). В линейном приближении для крыльев иных форм при стационарных и нестационарных движениях разработаны методы численного решения задач. Разрабатываются численные методы расчета обтекания крыльев при нелинейных возмущениях потока.

Широкий круг проблем гидромеханики приводит к постановке задач об отыскании потенциального движения идеальной жидкости в области, ограниченной частично твердыми стенками, а частично — свободной поверхностью. Форма свободной поверхности заранее неизвестна, ее нужно определять в процессе решения задачи с помощью дополнительных условий на этой поверхности. В тех случаях, когда влиянием силы тяжести и поверхностного напряжения на движение можно пренебречь, в установившихся движениях, как следует из интеграла Бернулли, на свободной поверхности, вдоль к-рой жидкость соприкасается с областью постоянного давления, скорость жидкости постоянна. Типичными задачами с условиями такого типа являются задачи об истечении струй из отверстия в сосуде и о соударении струй, натекании на тело струи жидкости конечной толщины, глиссировании с большой скоростью тела по поверхности жидкости. К таким же задачам относятся задачи об обтекании тел неограниченным потоком со срывом струй и с образованием за телом застойных зон или кавитационных полостей с постоянным давлением. В случае плоских течений при решении всех этих задач используются техника конформных отображений, вариационный метод и метод интегральных уравнений. Решение пространственных задач значительно труднее и опирается на численные методы.

В случае нестационарных течений со свободными поверхностями, в том числе при учете силы тяжести и при учете капиллярных сил, интеграл Коши—Лагранжа дает нелинейное условие для потенциала скорости на

свободной поверхности. С этим условием связаны основные трудности решения подобных задач: вход тела в жидкость или выход тела из-под поверхности жидкости, глиссирование тела по поверхности тяжелой жидкости; движение тела, частично или полностью погруженного в тяжелую жидкость, волны на поверхности тяжелой жидкости.

При решении этих задач лишь немногие результаты получены с использованием точных методов. Значительные успехи связаны с применением приближенных асимптотич. методов. Один из основных подходов — линейная теория малых возмущений и ее уточнения. Применяемый при этом математич. аппарат охватывает почти весь линейный аппарат математич. физики.

При изучении волн на поверхности тяжелой жидкости важное значение имеет приближение «мелкой воды» — предположение о малой сравнительно с длиной рассматриваемых волн глубине бассейна. В этом приближении удается развить нелинейную теорию для волн конечной амплитуды. Эта теория сводится к системе гиперболич. уравнений с частными производными, аналогичной той, к-рая возникает в теории двумерных сверхзвуковых течений газа; многие важные результаты могут быть при этом получены методом характеристик. В квазиодномерном приближении теория мелкой воды составляет основу разделов современной гидравлики, изучающих волновые движения в реках и протяженных открытых каналах: распространение паводковых волн и волн, вызванных разрушением плотины; возникновение периодических стационарных волн в каналах с крутым дном и др.

В точной нелинейной теории волн на поверхности тяжелой жидкости методы теории функций и функционального анализа позволили решить многие вопросы существования и единственности волновых движений. В частности, доказано существование гладких двумерных периодических прогрессивных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной или конечной постоянной глубины.

Схема обтекания тела потенциальным потоком со срывом струй и с образованием за ним застойной области, в к-рой скорость жидкости равна нулю, представляет собой лишь одну из возможных схематизаций. Имеются схемы обтекания тел с областью в следе за ними, заполненной завихренной жидкостью. В связи с исследованием таких схем обтекания, а также в связи с рядом других приложений, возникла задача о склейке областей потенциального и вихревого течений жидкости, отделенных поверхностью тока, форма к-рой заранее неизвестна. В случае плоских симметричных движений при постоянной величине вихря в области завихренного течения получены нек-рые частные численные решения этой задачи.

Для изучения движений жидкости, в к-рых действие вязкости проявляется существенным образом, также разработан ряд упрощенных по сравнению с полными уравнениями Навье — Стокса математич. моделей. К числу наиболее важных и широко используемых относятся: теория медленных движений Стокса и ее уточнения; теория пограничного слоя Прандтля и ее уточнения; теория термических конвективных движений Буссинеска.

В ряде случаев движений жидкости, представляющих практич. интерес, сила инерции, действующая на элемент жидкости, мала по сравнению с силами давления или вязкости (при использовании критериев подобия этому соответствуют малые значения числа Рейнольдса), так что в первом приближении ею можно пренебречь (теория Стокса). В результате возникает задача об определении v и p в области, заполненной жидкостью, из системы линейных уравнений

$$\nu\Delta v = \operatorname{grad} p - f,$$
$$\operatorname{div} v = 0.$$

С использованием этой системы уравнений решены многие задачи о движении вязкой жидкости в жестких и деформируемых трубках и различной формы зазорах между неподвижными и подвижными поверхностями, задача о движении твердых тел и газовых пузырей в вязкой жидкости. Эти задачи служат основой гидродинамич. теории смазки и имеют важное значение в химич. технологии, в биологических и других приложениях.

Имеются успехи в строгом обосновании разрешимости уравнений Стокса при различных дополнительных условиях. В частности, доказано существование и единственность решения задачи об обтекании системы тел конечных размеров неограниченным потоком с заданной скоростью в бесконечности.

Для плоских течений уравнения Стокса сводятся к бигармонич. уравнению относительно функции тока. Граничное условие обтекания заданного контура сводится при этом к заданию на контуре самой функции тока и ее нормальной производной, так что решение задачи обтекания приводит в этом случае к хорошо изученной задаче математич. физики.

В отличие от случая пространственного обтекания в случае плоского течения (напр., при поперечном обтекании круглого цилиндра) не существует решения задачи, соответствующего заданной скорости в бесконечности. «Парадокс Стокса», а впоследствии и «парадокс Уайтхеда» (невозможность найти путем итерации следующее приближение по числу Рейнольдса и в задаче обтекания сферы) привели к развитию в гидромеханике асимптотич. методов для малых значений числа Рейнольдса, уточняющих теорию Стокса. Эти методы сращиваемых асимптотич. разложений, кроме задачи обтекания тел вязкой жидкостью при малых значениях числа Рейнольдса, нашли применение во многих других задачах механики жидкости. Идея метода в задаче обтекания тел состоит в следующем. Приближение Стокса рассматривается как главный член асимптотич. разложения при малых Re вблизи обтекаемого тела. Вдали от обтекаемого тела (на расстояниях r от тела порядка Re^{-1}) это разложение становится непригодным. Поэтому вдали от тела после введения сжатой радиальной координаты $r\mathrm{Re}$ строится другое асимптотич. разложение как возмущение равномерного потока (разложение Озеена). Устранение произвола в построенных таким образом разложениях достигается путем их «сращивания» в промежуточной области в соответствии со специально разработанной для этого процедурой.

Для решения задач обтекания тел при малых числах Рейнольдса с успехом применяются численные методы. Результаты асимптотич. вычислений в задаче обтекания сферы хорошо согласуются с численными результатами вплоть до $\mathrm{Re}\sim 60$, что близко к пределу, при к-ром в опытах еще наблюдается установившееся течение.

К движениям, в к-рых инерционные силы малы по сравнению с силами вязкости, относятся многие случаи движения жидкости сквозь пористую среду. Можно считать, что поток жидкости сквозь элемент поверхности, пересекающий достаточно большое количество пор, пропорционален градиенту давления и обратно пропорционален коэффициенту вязкости — как в случае, если бы среда состояла из ряда трубок малого диаметра. Тогда при статистически изотропной структуре среды

$$v = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p$$

(закон Дарси). Если коэффициент проницаемости среды k не зависит от координат и коэффициент вязкости жидкости μ постоянен, то скорость есть потенциальный вектор, причем потенциал удовлетворяет уравнению Лап-

ласа. Это дает возможность успешного применения методов теории потенциала для решения разнообразных практич. задач, касающихся фильтрации воды под плотинами, движений грунтовых вод вблизи побережий в связи с приливами и отливами, фильтрации нефти к скважинам и т. п.

Решения, получаемые в задачах непрерывного потенциального обтекания тел неограниченным потоком несжимаемой идеальной жидкости, удовлетворяют и полной системе уравнений Навье — Стокса, но не удовлетворяют условиям прилипания жидкости на поверхности тела. При больших значениях числа Рейнольдса слой жидкости вблизи поверхности тела, в к-ром существенно проявляется действие вязкости и благодаря наличию к-рого удается удовлетворить условию прилипания вязкой жидкости к поверхности, имеет небольшую толщину. На этом основании путем сравнительной оценки порядка величин различных членов в уравнениях Навье — Стокса эти уравнения сводятся к более простому виду — к уравнениям теории пограничного слоя (уравнения Прандтля). В уравнениях Прандтля давление не изменяется по нормали к обтекаемой поверхности, а изменение давления вдоль поверхности определяется течением идеальной жидкости вне пограничного слоя. В простейшем случае двумерного установившегося течения вдоль плоского контура уравнения Прандтля имеют вид:

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = U \frac{\partial U}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь x_1, x_2 и v_1, v_2 — координаты и, соответственно, компоненты скорости в пограничном слое вдоль поверхности и по нормали к ней, U — скорость на внешней границе слоя.

Уравнения пограничного слоя дают главный член в соответствующим образом построенном асимптотич. разложении решения уравнений Навье — Стокса для больших чисел Рейнольдса.

Уравнения пограничного слоя имеют параболич. тип с линией вырождения на контуре обтекаемого тела (там, где $v_1 = 0$). Для интегрирования уравнений пограничного слоя и получения важных в прикладном отношении характеристик течения в нем разработаны различные эффективные приближенные методы, в частности методы интегральных соотношений, основанные на использовании различных аппроксимаций распределений продольной скорости v_1 в поперечном направлении внутри слоя. Численные методы позволяют сравнительно просто получать нужные для практики результаты, в том числе и для пространственных течений, непосредственным интегрированием уравнений пограничного слоя.

Общая теория (теорема существования и единственности) разработана для случаев, когда внутри пограничного слоя на каждой нормали к обтекаемой поверхности проекция скорости жидкости на направление скорости внешнего потока не меняет знак (т. е. нет «обратных токов»).

Усовершенствование теории пограничного слоя вычислением следующих членов асимптотич. разложения для больших чисел Рейнольдса связано с использованием метода сращиваемых асимптотич. разложений. Таким образом удалось, например, определить коэффициент сопротивления пластины с точностью порядка $\mathrm{Re}^{-3/2} \ln \mathrm{Re}$ (главный член имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/2}$).

В задачах термич. конвекции движение жидкости происходит в поле потенциальных массовых сил из-за возникающих вследствие неравномерного нагревания жидкости различий в плотности ее частиц. В приближении Буссинеска для изучения конвективных движений

используется модель вязкой жидкости с постоянной плотностью, но с учетом в уравнении движения избыточной массовой силы при температурной неоднородности:

$$\boldsymbol{v}_t + v_k \boldsymbol{v}_{x_k} - \nu \Delta \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p - \alpha \Delta T \boldsymbol{f}.$$

Здесь p — превышение давления над гидростатическим, ΔT — превышение температуры над ее величиной, соответствующей невозмущенной плотности, α — коэффициент относительного объемного расширения жидкости при нагревании. Это уравнение дополняется уравнением сохранения массы и уравнением теплопроводности в движущейся среде (оба — для жидкости постоянной плотности; в уравнении теплопроводности во многих случаях не учитывается вязкая диссипация).

Нек-рые задачи о конвективных движениях рассматривались на основе полной системы уравнений Навье — Стокса с использованием численных методов для ее решения. До появления ЭВМ отсутствовала возможность решения задач механики жидкости с использованием полной системы уравнений Навье — Стокса в тех случаях, когда нелинейные члены этих уравнений не обращаются тождественно в нуль в силу особых условий течения. Имеется ряд численных алгоритмов решения уравнений Навье — Стокса, применимых для расчета течений при небольших значениях числа Рейнольдса. Трудности реализации численных алгоритмов при больших числах Рейнольдса отражают сами свойства решений уравнений Навье — Стокса в этих условиях. Так, напр., в случае стационарных краевых задач доказано существование решения при любом числе Рейнольдса, если полный поток жидкости сквозь каждую изолированную часть области, заполненной жидкостью, равен нулю. Если эта область простирается в бесконечность, то в бесконечности ставится дополнительное условие $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_\infty$. Для ограниченной области и малых чисел Рейнольдса решение краевой задачи единственно и устойчиво. При увеличении числа Рейнольдса это единственное решение теряет устойчивость, появляется новое стационарное устойчивое решение. Такая смена течений может происходить при росте Re неоднократно.

Для общего трехмерного случая доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач вблизи гладких начальных данных; вопрос об однозначной разрешимости таких задач в целом, то есть для любого промежутка времени и любых размеров области движения, не решен (1977). По-видимому, решения нестационарной задачи могут становиться с течением времени все менее и менее регулярными, переходить в «турбулентные» режимы, могут ветвиться, причем продолжение решения вдоль той или иной ветви не определяется самой моделью Навье — Стокса.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1—2, М. - Л., 1963; [2] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [3] Стокер Дж. Дж., Волны на воде, пер. с англ., М., 1959; [4] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1973.

Г. Г. Черный.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — метод описания эволюции системы и ее характерных свойств на основе макроскопич. уравнений гидродинамики. Г. п. соответствует рассмотрению системы типа газа или жидкости как непрерывной среды, когда в уравнениях гидродинамики, описывающих систему, любые приращения времени t (даже dt) всегда больше времени релаксации к локально равновесному распределению (для классич. системы — к локальному *Максвелла распределению*), т. е. всегда больше времени образования локальных термодинамич. характеристик, таких, как плотность, гидродинамич. скорость, температура и т. д., а изменения последних в

координатном пространстве настолько сглажены, что используемые в приближении приращения объемов dr не только содержат достаточное число частиц, но и образуют квазиоднородные статистические подсистемы.

С точки зрения статистич. механики, классич. уравнения гидродинамики могут быть получены из кинетич. уравнения в приближении медленных и сглаженных процессов в молекулярных масштабах (средний пробег) времени и длины. С этой целью на основе кинетич. уравнения составляются уравнения для локальной плотности (уравнения непрерывности), гидродинамич. скорости (уравнения движения) и локальной температуры (уравнения сохранения энергии), а затем в них подставляется решение для одночастичной функции распределения, соответствующее случаю малого отклонения ее от локального распределения Максвелла. В нулевом приближении это приводит к уравнениям идеальной жидкости, в первом приближении — к *Навье — Стокса уравнениям*. Этот процесс составляет основу *Чепмена — Энскога метода*.

Более общий метод основан на цепочке уравнений для временных корреляционных функций (см. *Боголюбова цепочка уравнений*) и ее решении в виде разложения по параметру, характеризующему степень неоднородности системы. Получающиеся разложения для коэффициентов переноса идентичны результатам метода Чепмена — Энскога только в тех частях, к-рые включают учет парных столкновений (эффекты тройных столкновений дают соизмеримые им вклады).

Аналогичный метод получения гидродинамич. уравнений может быть использован и для квантовых жидкостей, когда необходимо исходить из цепочки уравнений Боголюбова для квантовых корреляционных функций, или уравнений для квантовых *Грина функций*, или непосредственно из *Шрёдингера уравнения*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. тр., т. 2, Киев, 1970; [2] Уленбек Д., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965. *И. А. Квасников.*

ГИЛЬБЕРТА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия полного метрич. пространства H с метрикой $h(x, y)$, к-рое вместе с любыми двумя различными точками x и y содержит точки z и t такие, что $h(x, z)+h(z, y)=h(x, y)$, $h(x, y)+h(y, t)=h(x, t)$, и к-рое гомеоморфно выпуклому множеству n-мерного аффинного пространства A^n, причем геодезические $\gamma \in H$ отображаются в прямые A^n. Напр., пусть K — выпуклое тело пространства A^n, граница к-рого ∂K не содержит двух неколлинеарных отрезков, и пусть точки $x, y \in K$ расположены на прямой l, пересекающей в точках a, b границу ∂K, $R(x, y, a, b)$ — двойное отношение точек x, y, a, b (если $x=(1-\lambda)a+\lambda b$, $y=(1-\mu)a+\mu b$, то $R(x, y, a, b)=\frac{1-\lambda}{1-\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}$). Тогда

$$h(x, y)=\frac{1}{2}|\ln R(x, y, a, b)|$$

— метрика Г. г. (метрика Гильберта). Если K центрально симметрично, то $h(x, y)$ является метрикой Минковского (см. *Минковского геометрия*), если K — эллипсоид, то $h(x, y)$ определяет геометрию Лобачевского.

Проблема определения всех метризаций K, при к-рых геодезическими являются прямые, составляет содержание 4-й проблемы Гильберта; решена полностью в [4].

Обобщением Г. г. является так наз. геометрия геодезических (см. *Геодезических геометрия*).

Г. г. впервые была упомянута Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1894 в письме к Ф. Клейну (F. Klein).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, М.-Л., пер. с нем., 1948; [2] Проблемы Гильберта, М., 1969; [3] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [4] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

ГИЛЬБЕРТА ИНВАРИАНТНЫЙ ИНТЕГРАЛ—криволинейный интеграл от замкнутой дифференциальной формы, являющейся производной действия функционала вариационного исчисления. Для функционала

$$J(x) = \int L(t,\ x^i,\ \dot{x}^i)\,dt$$

ищется вектор-функция $U^i(t,\ x^i)$, наз. п о л е м, так, чтобы интеграл

$$J^* = \int_\gamma \left(L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i)) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} U^k(t,\ x^i)\,\frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}\right) dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}\,dx^k$$

не зависел от пути интегрирования. Если такая функция существует, то J^* наз. и н в а р и а н т н ы м и н т е г р а л о м Г и л ь б е р т а. Условие замкнутости подинтегральной дифференциальной формы порождает систему уравнений с частными производными 1-го порядка.

Г. и. и. наиболее естественным путем воссоединяет теорию Вейерштрасса и теорию Гамильтона—Якоби. Значение Г. и. и. на кривых, соединяющих точки $P_0 = (t_0,\ x_0^i)$ и $P_1 = (t_1,\ x_1^i)$, становится, в силу инвариантности J^*, функцией $S(P_1,\ P_2)$ этой пары точек и наз. д е й с т в и е м. Линия уровня $S = \text{const}$ наз. т р а н с в е р с а л ь м и поля $U^i(t,\ x^i)$. Решения уравнения $\dot{x}^i = U^i(t,\ x^i)$ являются *экстремалями* функционала $J(x)$. Обратно, если нек-рая область покрыта полем экстремалей, то интеграл J^*, построенный по функции $U^i(t,\ x^i)$, равной производной экстремали, проходящей через $(t,\ x^i)$, есть Г. и. и. Возможность подобного окружения, а значит, и построения Г. и. и., формулируется обычно в виде *Якоби условия*.

Если кривая $x^i(t)$ проходит в области, покрытой полем, через точки P_0 и P_1, соединенные также экстремалью $x_0^i(t)$, то инвариантность Г. и. и. и равенство $dx_0^i/dt = U^i(t,\ x_0^i(t))$ позволяют получить *Вейерштрасса формулу* для приращения функционала, а следовательно, и достаточное *Вейерштрасса условие* экстремума.

При закрепленной точке P_0 действие $S(P_0,\ P)$ есть функция $S(t,\ x^i)$ точки $P = (t,\ x^i)$ и $J^* = \int dS$. Переход к каноническим координатам

$$p_k(t,\ x^i) = \frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}$$

позволяет записать Г. и. и. в виде

$$J^* = \int dS = \int -H(t,\ x^i,\ p_i(t,\ x^i))\,dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} p_k(t,\ x^i)\,dx^i;$$

при этом

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k U^k - L,$$

$$\frac{\partial S(t,\ x^i)}{\partial t} + H(t,\ x^i,\ p_i(t,\ x^i)) = 0; \quad \frac{\partial S(t,\ x^i)}{\partial x^i} = p_i(t,\ x^i).$$

Эти соотношения эквивалентны уравнению Гамильтона — Якоби.

Интеграл J^* для поля геодезических был введен Э. Бельтрами [1] в 1868, а в общем случае — Д. Гильбертом [2] — [4] в 1900.

Лит.: [1] B e l t r a m i E., «Rend. Ist. Lombardo Sci. Let.», 1868, v. 1, № 2, p. 708—718; [2] H i l b e r t D., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1900, S. 253—97; [3] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 57—63; [4] H i l b e r t D., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 351—70; [5] А х и е з е р Н. И., Лекции по вариаци-

онному исчислению, М., 1955, с. 55—6; [6] Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., 1961, с. 135—146; [7] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.— L., 1935; [8] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974.

В. М. Тихомиров.

ГИЛЬБЕРТА МНОГОЧЛЕН градуированного модуля $M=\bigoplus_n M_n$ — многочлен, выражающий при больших натуральных n размерности однородных слагаемых модуля как функцию от n. Более точно, справедлива теорема, доказанная по существу Д. Гильбертом. Пусть $A=K[X_0, \ldots, X_m]$ — кольцо многочленов над полем K, градуированное так, что X_i являются однородными элементами степени 1, и пусть $M=\bigoplus_n M_n$ — градуированный A-модуль конечного типа; тогда существует такой многочлен $P_M(t)$ с рациональными коэффициентами, что для достаточно больших n $\dim_K M_n = P_M(n)$. Этот многочлен наз. многочленом Гильберта.

Наибольший интерес представляет интерпретация Г. м. градуированного кольца R, являющегося факторкольцом кольца A по однородному идеалу I; в этом случае Г. м. доставляет проективные инварианты проективного многообразия $X=\mathrm{Proj}(R)\subset P^m$, определяемого идеалом I. В частности, степень многочлена $P_R(t)$ совпадает с размерностью многообразия X, а $p_a(X)=(-1)^{\dim X}(P_R(0)-1)$ наз. *арифметическим родом* многообразия X. Через Г. м. выражается также степень вложения $X\subset P^m$. Г. м. кольца R называют также Г. м. проективного многообразия X относительно вложения $X\subset P^m$. Если $O_X(1)$ — обратимый пучок, соответствующий этому вложению, то

$$P_R(n)=\dim_K H^0\left(X,\ O_X(1)^{\otimes n}\right)$$

для достаточно больших n.

Лит.: [1] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, B., 1933; [2] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 2, пер. с англ., М., 1963.

В. И. Данилов.

ГИЛЬБЕРТА НЕРАВЕНСТВО — теорема Гильберта о двойных рядах:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m} <$$

$$<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m^{p'}\right)^{1/p'}, \qquad (*)$$

где $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $a_n\geqslant 0$, $b_m\geqslant 0$, и ряды в правой части имеют конечные положительные суммы, причем константа $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ — точная, т. е. не может быть уменьшена. Д. Гильберт (D. Hilbert) доказал (*) без точной константы в своих лекциях по интегральным уравнениям. Его доказательство было опубликовано Г. Вейлем [1]. Точная константа найдена И. Шуром [2], а неравенство (*) с произвольным $p>1$ впервые приводится в работах Г. Харди (G. Hardy) и М. Рисса (M. Riesz) в 1925. Имеются интегральные аналоги и обобщения неравенства (*), напр., неравенство

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K^{\lambda}(x,\ y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant K^{\lambda}\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty}g^q(y)\,dy\right)^{1/q},$$

где $K(x,\ y)$ — неотрицательное ядро, однородное со степенью -1, $p>1$, $q>1$, $\lambda-1/p+1/q\leqslant 1$, $f(x)\leqslant 0$, $g(y)\geqslant 0$ и

$$K=\int_0^{\infty}u^{-1/\lambda p'}K(1,u)\,du$$

и полученный ранее [4] частный случай этого неравенства с ядром $K(x,\ y)=1/(x+y)$ (так наз. двупараметрическое Г. н.) и константой $K^{\lambda}=(\pi/\sin\lambda p')^{\lambda}$. Точность

этой константы доказана при $q'=p$. Она является также асимптотически точной при $p\to 1$ и произвольном допустимом фиксированном q. Вопрос об асимптотике константы в (*) для конечных сумм ($1\leqslant n,\ m\leqslant N$) не решен (1977); здесь известно только, что при $p=q=2$ константа равна

$$\pi-\frac{\pi^5}{2}\ (\ln N)^2+O(\ln\ln\{N(\ln N)^{-3}\}).$$

Лит.: [1] Weyl H., Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourielschen Integraltheorems, Inaugural Dissertation, Gött., 1908; [2] Schur I., «J. für Math.», Bd 140, 1911, S. 1—28; [3] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [4] Bonsall F. F., «Quart. J. Math.», 1951, v. 2, p. 135—50; [5] Levin V., «J. London Math. Soc.», 1936, v. 11, p. 119—24; [6] De Bruijn N. G., Wilf H. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 68, p. 70—3; [7] Walker P. L., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1973, v. 18, № 4, p. 293—94. *Е. К. Годунова.*

ГИЛЬБЕРТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ функции f — несобственный интеграл

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt. \tag{1}$$

Если $f\in L(-\infty,\infty)$, то функция g существует почти для всех значений x. Если $f\in L_p(-\infty,\infty)$, $p\in(1,\infty)$, тогда функция g также принадлежит $L_p(-\infty,\infty)$ и почти всюду имеет место двойственная формула [обращение преобразования (1)]:

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt, \tag{2}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx\leqslant M_p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx, \tag{3}$$

где константа M_p зависит только от p.

Формулы (1), (2) эквивалентны формулам

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt, \tag{4}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}\,dt, \tag{5}$$

в к-рых интегралы понимаются в смысле главного значения.

Г. и. функции f называется также рассмотренный в смысле главного значения интеграл

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt. \tag{6}$$

Этот интеграл часто наз. *Гильберта сингулярным интегралом*. В теории рядов Фурье функцию g, определяемую формулой (6), наз. сопряженной с f.

Если $f\in L(0,2\pi)$, то g существует почти всюду, а если f удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha\in(0,1)$, то g существует при любом x и удовлетворяет тому же условию. Если $f\in L_p(0,2\pi)$, $p\in(1,\infty)$, то g обладает тем же свойством и имеет место неравенство, аналогичное (3), в к-ром интегралы взяты на интервале $(0,2\pi)$. Таким образом, интегральные операторы, порождаемые Г. и., являются ограниченными (линейными) операторами в соответствующих пространствах L_p.

Когда f удовлетворяет условию Липшица или $f\in L_p(0,2\pi)$ и, кроме того,

$$\int_0^{2\pi}g(x)\,dx=0,$$

то имеет место двойственная формула

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt, \tag{7}$$

причем

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0.$$

В классе функций, удовлетворяющих условию Липшица, равенство (7) справедливо всюду, а в классе функций, суммируемых с p-й степенью, — почти всюду.

Каждую из выписанных выше двойственных формул [напр. (4), (5)] можно рассматривать как интегральное уравнение 1-го рода; тогда вторая формула даст решение этого уравнения.

Когда функции $\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}$ и $\frac{1}{t-x}$ рассматриваются как ядра интегральных операторов, то их часто наз. *Гильберта ядром* и *Коши ядром*. Между этими ядрами в случае единичной окружности существует простая связь:

$$\frac{d\tau}{\tau-\xi}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}+i\right)dt,$$

где $\xi=e^{ix}$, $\tau=e^{it}$.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912 (2 Aufl., 1924); [2] Riesz M., «Math. Z.», 1927, Bd 27, № 2, S. 218—44; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — несобственный (в смысле главного значения по Коши) интеграл

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dt,$$

где периодич. функция $f(t)$ наз. плотностью Г. с. и., а $\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}$ — ядром Г. с. и. Если $f(t)$ суммируема, то $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду, а если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, то $\tilde{f}(x)$ существует при любом s и удовлетворяет тому же условию. Если $f(x)$ суммируема с p-й степенью, $p>1$, то $\tilde{f}(x)$ обладает тем же свойством и

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\tilde{f}(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant M_p\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

где M_p — постоянная, не зависящая от $f(x)$. Кроме того, имеет место формула обращения Г. с. и.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt.$$

Функция $\tilde{f}(x)$ наз. сопряженной с $f(x)$.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; [2] Riesz M., «Math. Z.», 1927, Bd 27, № 2, S. 218—44; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА СИСТЕМА АКСИОМ евклидовой геометрии — система аксиом, предложенная в 1899 Д. Гильбертом (см. [1]). Со времени первой публикации Г. с. а. Д. Гильберт внес в систему аксиом различные изменения и уточнения.

Основными (неопределяемыми, понятиями в Г. с. а. являются объекты: точки, прямые и плоскости и отношения между ними, выражаемые словами: «принадлежит», «между», «конгруэнтен». Природа основных объектов и отношений между ними может быть какой угодно, лишь бы эти объекты и отношения удовлетворяли указанным аксиомам.

Г. с. а. содержит 20 аксиом, к-рые разбиты на пять групп.

I группа состоит из восьми аксиом принадлежности (соединения), к-рые описывают отношение «принадлежит». I_1. Для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих двух точек. I_2. Для двух различных точек существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих двух точек. I_3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой. I_4. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует плоскость, проходящая через каждую из этих трех точек. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка. I_5. Для любых трех

точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих трех точек. I_6. Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка прямой a лежит в плоскости α. I_7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку. I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

II группа содержит четыре аксиомы порядка, описывающие отношение «между». II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — различные точки одной прямой и B лежит также между C и A. II_2. Для любых двух точек A и B на прямой AB существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C. II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими. II_4 (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда, если прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка AC или через внутреннюю точку отрезка BC.

III группа содержит пять аксиом конгруэнтности, к-рые описывают отношение «конгруэнтен» (это отношение Гильберт обозначает знаком $\equiv$). III_1. Если даны отрезок AB и луч OX, то на луче OX существует точка B' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку OB', то есть $AB \equiv OB'$. III_2. Если $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$, то $A'B' \equiv A''B''$. III_3. Пусть AB и BC — два отрезка на прямой, не имеющие общих внутренних точек, а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка на той же или на другой прямой, тоже не имеющие общих внутренних точек. Тогда, если $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$. III_4. Пусть даны угол AOB, луч $O'A'$ и полуплоскость Π', ограниченная прямой $O'A'$. Тогда в полуплоскости Π' существует один и только один луч $O'B'$ такой, что $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$. Кроме того, каждый угол конгруэнтен самому себе. III_5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеем: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV группа состоит из двух аксиом непрерывности. IV_1 (аксиома Архимеда). Пусть AB и CD — два каких-нибудь отрезка. Тогда на прямой AB существует конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и A_3 и т. д., причем отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и B лежит между A и A_n. IV_2 (аксиома Кантора). Пусть на какой-либо прямой a дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$, удовлетворяющая двум условиям: а) каждый последующий отрезок есть часть предыдущего, б) для любого наперед заданного отрезка CD найдется натуральное число n такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

V группа содержит одну аксиому о параллельных. Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

(У Д. Гильберта IV группа — аксиома о параллельных, V группа — аксиомы непрерывности.)

Все остальные понятия евклидовой геометрии определяются с помощью основных понятий Г. с. а., а все предложения о свойствах геометрич. фигур, не содержащиеся в Г. с. а., должны быть доказаны чисто логич. выводом из этих аксиом (или предложений, полученных таким же путем).

Г. с. а. обладает свойством полноты; она непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел. Если в Г. с. а. заменить аксиому о

параллельных ее отрицанием, то полученная новая система аксиом тоже непротиворечива (система аксиом геометрии Лобачевского), т. е. аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом Г. с. а. Можно установить независимость нек-рых других аксиом Г. с. а. от остальных аксиом этой системы.

Г. с. а. является первым достаточно строгим обоснованием *евклидовой геометрии*.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971.
В. Т. Базылев.

ГИЛЬБЕРТА СХЕМА — конструкция в алгебраич. геометрии, позволяющая снабжать множество замкнутых подмногообразий проективного пространства с заданным *Гильберта многочленом* структурой алгебраич. многообразия. Более точно, пусть X — проективная схема над локально нётеровой схемой S и $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ — функтор, сопоставляющий каждой S-схеме S' множество замкнутых подсхем схемы $X' = X \times_S S'$, плоских над S'. Функтор $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ представим локально нётеровой схемой, к-рая наз. схемой Гильберта S-схемы X и обозначается через $\mathrm{Hilb}\,(X/S)$ (см. [4]). По определению *представимых функторов* в алгебраич. геометрии, для любой S-схемы S' имеет место биекция $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S') = \mathrm{Hom}_S(S', \mathrm{Hilb}\,(X/S))$. В частности, если S — спектр поля k, а $X = P^n_k$ — проективное пространство над k, то множество рациональных k-точек схемы $\mathrm{Hilb}\,(P^n_k/k)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством замкнутых подмногообразий в P^n_k.

Для любого полинома $P(z) \in Q[x]$ с рациональными коэффициентами функтор $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ содержит подфунктор $\mathrm{Hilb}^P_{X/S}$, выделяющий в множестве $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S')$ подмножество подсхем $Z \subset X \times_S S'$ таких, что для любой точки $s' \in S'$ слой $Z_{s'}$ проекций Z на S' имеет $P(z)$ в качестве своего многочлена Гильберта. Функтор $\mathrm{Hilb}^P_{X/S}$ представим схемой $\mathrm{Hilb}^P\,(X/S)$, проективной над S. Схема $\mathrm{Hilb}\,(X/S)$ является прямой суммой схем $\mathrm{Hilb}^P\,(X/S)$ по всем $P \in Q(z)$. Для любой связной базисной схемы S схема $\mathrm{Hilb}^P(X/S)$ также связна [2].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Дьёдонне Ж., Керролл Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Grothendieck A., «Seminaire Bourbaki», ann. 13, N. Y.—Amst., 1966, p. 1—28; [4] Hartshorne R., «Publ. math. IHES», 1966, t. 29, p. 261—304; [5] Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 10, 1972, с. 47—113.
И. В. Долгачев.

ГИЛЬБЕРТА ТЕОРЕМА — 1) Г. т. о базисе: если A — коммутативное *нётерово кольцо* и $A[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов от $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в A, то и $A[X_1, \ldots, X_n]$ — нётерово кольцо. В частности, в кольце многочленов от конечного числа переменных над полем или над кольцом целых чисел любой идеал порождается конечным числом элементов (имеет конечный базис). Именно в такой форме теорема была доказана Д. Гильбертом [1] и играла вспомогательную роль в доказательстве основной *Гильберта теоремы* об инвариантах. Впоследствии Г. т. о базисе получила широкое распространение в коммутативной алгебре.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534.
В. И. Данилов.

2) Г. т. о неприводимости: пусть $f(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_k)$ — неприводимый многочлен над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$; тогда существует бесконечное множество значений $t^0_1, \ldots, t^0_k \in \mathbb{Q}$ переменных $t_1, \ldots, t_k$, при к-рых многочлен $f(t^0_1, \ldots, t^0_k, x_1, \ldots, x_n)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Так, многочлен $f(t, x) = t - x^2$ остается неприводимым для всех t^0 ($t^0 \neq a^2$, $a \in \mathbb{Q}$) и только для них. Полученная Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1892, эта теорема обобщалась затем на случай многочленов над

нек-рыми другими полями (напр., над полем конечного типа над своим простым подполем [2]).

Г. т. о неприводимости применяется в исследованиях, связанных с *Галуа теории обратной задачей* и *алгебраических многообразий арифметикой*. Пусть над полем $K=k(t_1,\ldots,t_n)$ рациональных функций от $t_1,\ldots,t_n$ существует такое расширение E/K с группой Галуа G, что поле k алгебраически замкнуто в E и к нему применима Г. т. о неприводимости. Тогда можно так выбрать значения переменных $t_1,\ldots,t_n$ в поле k, что получающееся расширение поля k будет иметь группой Галуа группу G. Используя это соображение, Д. Гильберт построил в [1] расширения поля $\mathbb{Q}$ с симметрической и знакопеременной группами. При этом, в случае симметрич. группы за E берется поле рациональных функции от n переменных, а в качестве K — подполе поля симметрич. функций, к-рое само будет полем рациональных функций. Обобщая этот подход, Э. Нётер (E. Noether) рассмотрела произвольную подгруппу $G\subset S_n$ и расширение E соответствующего поля инвариантов E относительно группы G (см. [3]). Г. т. о неприводимости дает возможность построить расширение поля k с группой Галуа G, если только поле E^G есть поле рациональных функций над $\mathbb{Q}$. Вопрос о выполнимости последнего условия (п р о б л е м а Н ё т е р), тесно связан с *Люрота проблемой*. Лишь в 1969 Р. Суон (R. Swan) показал, что в общем случае ответ на него отрицательный (см. [4], [6]).

Г. т. о неприводимости применяется также при построении рациональных точек абелевых многообразий A над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В силу теоремы Морделла — Вейля группа рациональных точек A является конечно порожденной, и возникает вопрос о значении ее ранга r. Используя Г. т. о неприводимости, А. Перон (A. Neron) построил многообразия A размерности g и ранга больше или равного $3g+6$ (см. [2]).

Лит.: [1] H i l b e r t D., «J. reine und angew. Math.», 1892, Bd 110, S. 104—29; [2] L a n g S., Diophantine Geometry, N. Y., 1962; [3] Ч е б о т а р е в Н. Г., Теория Галуа, М.— Л., 1936, с. 18—32, 90—94; [4] M a r t i n e t J., «Seminaire Bourbaki», 1969/1970, B., 1971; [5] S c h i n z e l A., в кн: «Actes du Congrès International des Mathématiciens», t. 1, P., 1971; [6] В о с к р е с е н с к и й В. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 82, с. 151—61.

А. Н. Паршин.

3) Г. т. о н у л я х (о к о р н я х): пусть k — поле, $k[X_1,\ldots,X_n]$ — кольцо многочленов над k, $\overline{k}$ — алгебраич. замыкание поля k и F, $F_1,\ldots,F_m$ — многочлены из $k[X_1,\ldots,X_n]$. К о р н е м многочлена $F(X_1,\ldots,X_n)$ наз. последовательность $(c_1,\ldots,c_n)$ элементов из $\overline{k}$, удовлетворяющая условию $F(c_1,\ldots,c_n)=0$. Если каждый общий корень многочленов $F_1,\ldots,F_m$ является корнем многочлена F, то существует такое целое число r, зависящее только от $F_1,\ldots,F_m$, что F^r принадлежит идеалу, порожденному $F_1,\ldots,F_m$, то есть

$$F^r=A_1F_1+\ldots+A_mF_m,$$

где $A_1,\ldots,A_m$ — нек-рые многочлены. Получена Д. Гильбертом [1].

Г. т. эквивалентна утверждению, что для любого собственного идеала $\mathfrak{a}$ кольца $k[X_1,\ldots,X_n]$ существует корень, общий для всех многочленов из $\mathfrak{a}$. Таким образом, Г. т. может рассматриваться как далеко идущее обобщение основной теоремы алгебры. На Г. т. можно смотреть и как на утверждение о том, что любой простой идеал кольца $k[X_1,\ldots,X_n]$ является пересечением максимальных идеалов, его содержащих; это приводит к понятию *Джекобсона кольца*.

При геометрич. интерпретации корни идеала $\mathfrak{a}\subset k[X_1,\ldots,X_n]$ соответствуют алгебраич. точкам аффинного многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{a}$. Из Г. т. следует, что на любом непустом аффинном многообразии имеется алгебраич. точка. Таким образом, множество алгебраич. точек всюду плотно на многообразии, и потому однозначно его определяет — при-

чина, по к-рой при изучении алгебраич. многообразий часто ограничиваются алгебраич. точками.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., ч. 2, 2 изд., М.— Л., 1947; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

4) Г. т. о поверхностях отрицательной кривизны: в трехмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Доказана Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1901; см. [1]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948. *Е. В. Шикин.*

5) Г. т. о сизигиях — теорема о конечности цепи *сизигий* градуированного модуля над кольцом многочленов (в классич. формулировке см. [1]).

Пусть A — нётерово кольцо, M — нётеров A-модуль, и $x_1, \ldots, x_n$ — система образующих модуля M. Модулем сизигий (соотношений) $S(M)$ модуля M наз. модуль соотношений для $x_1, \ldots, x_n$, т. е. A-модуль векторов $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in A$, удовлетворяющих условию: $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$. Индуктивно определяется i-й модуль сизигий $S_i(M)=S(S_{i-1}(M))$ модуля $M(S_1(M)=S(M))$. Иначе это можно описать с помощью точной последовательности, наз. цепью сизигий:

$$0 \longrightarrow S_i(M) \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где $F_0, \ldots, F_{i-1}$ — свободные A-модули конечного типа. В современном изложении Г. т. о сизигиях допускает следующую формулировку: если A — локальное регулярное кольцо размерности m, то m-й модуль сизигий любого нётерова A-модуля является свободным модулем. Это эквивалентно тому, что любой A-модуль имеет свободную резольвенту длины m, или что A имеет глобальную проективную размерность m. Это свойство характеризует регулярные кольца [2].

Глобальный вариант Г. т. о сизигиях: над регулярным кольцом A (напр., над кольцом многочленов) любой A-модуль конечного типа имеет проективную (но уже не обязательно свободную) резольвенту конечной длины.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] Serre J.-P., в кн.: Proceedings of the International — Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo, 1955, p. 175—89; [3] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963. *В. И. Данилов.*

6) Г. т. о циклических расширениях (теорема Гильберта 90): пусть K — цикличе. расширение с циклической группой Галуа $G(K/k)$ поля k и σ — образующая группы $G(K/k)$; тогда норма $N_{K/k}(\beta)$ элемента $\beta \in K$ равна единице в том и только в том случае, если существует ненулевой элемент $\alpha \in K$, удовлетворяющий условию $\beta=\alpha\cdot\sigma(\alpha)^{-1}$. Аналогично, след $\mathrm{Tr}_{K/k}(\beta)$ равен нулю тогда и только тогда, когда β может быть представлено в виде $\beta=\alpha-\sigma(\alpha)$, $\alpha \in K$ (см. [1], [2], [3]).

Г. т. может рассматриваться как следствие более общего утверждения о когомологиях групп Галуа (см. [4]). Именно: если K — расширение Галуа группы k с группой Галуа G, то мультипликативная группа K^* поля K превращается в G-модуль, и первая группа когомологий $H^1(G, K^*)$ равна нулю. Аналогично, $H^q(G, K)=0$ при $q \geqslant 1$ (см. *Галуа когомологии*).

Другим обобщением Г. т. является теория спуска Гротендика; одно из применений ее в *этальной топологии*, также известное под назв. «теорема Гильберта 90», утверждает, что этальные когомологии $H^1(X_{\text{et}}, G_m)$ схемы X со значениями в пучке мультипликативных групп G_m изоморфны группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ классов обратимых пучков на X [5].

Лит.: [1] Hilbert D., «Jahresbericht der D. M. V.», 1897, Bd 4, S. 175—546; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [4] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [5] Artin M., Grothendieck A., Cohomologie étale des schemas, Seminaire IHES, 1963—64.
В. И. Данилов.

7) Г. т. о существовании абсолютного экстремума: пусть

$$I=\int F\,dt$$

есть функционал вариационной задачи в параметрич. форме, где $F=F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ — положительно определенная функция 1-й степени по $(\dot{x}, \dot{y})$, трижды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам для всех (x, y) из области G и всех $(\dot{x}, \dot{y})$, удовлетворяющих условию $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$. Кроме того, предполагается, что $F(x, y, \xi, \eta)>0$ для всех $(x, y)\in G$ и $\xi^2+\eta^2=1$ (т. е. функционал I положительно определен), а также, что множества $\Phi(x, y)=\{(\xi, \eta) : F(x, y, \xi, \eta)\leqslant 1\}$ строго выпуклы по (ξ, η) для всех (x, y) из выпуклой замкнутой подобласти G_0 (т. е. функционал I регулярен, или эллиптичен).

При этих предположениях для любых двух точек (x_0, y_0) и (x_1, y_1) из G_0 найдется кривая, доставляющая функционалу I абсолютный минимум среди всех спрямляемых кривых.

Г. т. получена Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1899).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955.
В. М. Тихомиров.

8) Г. т. об инвариантах — теорема, устанавливающая конечнопорожденность алгебры всех многочленов на комплексном векторном пространстве форм степени d от r переменных, инвариантных относительно действия полной линейной группы $GL(r, \mathbb{C})$, определяемого линейными заменами этих переменных. Первое доказательство теоремы, использующее *Гильберта теорему* о базисе и формальные процессы *инвариантов теории*, дано в [1]. Д. Гильберт [2] конструктивно доказал эту теорему и получил оценку сверху для степеней образующих указанной алгебры инвариантов (что, в принципе, дает возможность их выписать явно).

Г. т. является первой основной теоремой теории инвариантов для d-й симметрич. степени стандартного представления $GL(r, \mathbb{C})$. Доказательство Г. т. стимулировало постановку вопроса о конечнопорожденности алгебр инвариантов для подгрупп группы $GL(r, \mathbb{C})$, а также постановку 14-й проблемы Гильберта. Используя теорию интегрирования на группах, Г. Вейль (H. Weyl) доказал конечнопорожденность алгебры инвариантов для любых конечномерных представлений компактных групп Ли и комплексных полупростых групп Ли (см. [3]).

Г. т. принято называть также следующее ее обобщение: если R — алгебра конечного типа над полем k, G — геометрически *редуктивная группа* ее k-автоморфизмов и R^G — подалгебра всех G-инвариантных элементов в R, то R^G также имеет конечный тип над k (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] его же, «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [4] Mumford D., Geometric invariant theory, B.—Hdlb.—N.Y., 1965; [5] Nagata M., «J. Math. Kyoto Univ.», 1963/64, v. 3.
В. Л. Попов.

ГИЛЬБЕРТА ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — общая теория линейных интегральных уравнений II рода

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x), \qquad (1)$$

построенная Д. Гильбертом [1] на базе созданной им теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Основная идея Г. т. и. у. состоит

в следующем. Пусть имеется полная ортонормированная система функций $\{\omega_n(x)\}$ на интервале (a, b) и пусть

$$\varphi_p = \int_a^b \varphi(t)\,\omega_p(t)\,dt,$$

$$f_p = \int_a^b f(t)\,\omega_p(t)\,dt,$$

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,\omega_p(t)\,\omega_q(t)\,dx\,dt.$$

Решение интегрального уравнения (1) эквивалентно решению бесконечной системы линейных алгебраич. уравнений:

$$\varphi_p + \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\varphi_q = f_p, \quad p = 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$

При этом имеются в виду только те решения этой системы, для к-рых

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 < +\infty,$$

т. е. система рассматривается в *гильбертовом пространстве*. Исследование системы (2) в гильбертовом пространстве позволяет изучить свойства уравнения (1).

В Г. т. и. у. были обоснованы экстремальные свойства собственных значений интегральных уравнений с *эрмитовыми ядрами*.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2 Aufl., Lpz.— B., 1924.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА ЯДРО — ядро *Гильберта сингулярного интеграла*, т. е. функция

$$\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}, \quad 0 \leqslant x, \ s \leqslant 2\pi.$$

Между Г. я. и *Коши ядром* в случае единичной окружности существует простая связь:

$$\frac{dt}{t-\tau} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2} + i\right)dx,$$

где $t = e^{ix}$, $\tau = e^{is}$.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА—КАМКЕ ПРОБЛЕМА — задача о совместности системы *диофантовых уравнений* варингова типа:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n = N_n,\\ &x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_s^{n-1} = N_{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_1 + x_2 + \ldots + x_s = N_1, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где переменные $x_1, \ldots, x_s$ принимают целые неотрицательные значения, на числа N_n, N_{n-1}, ..., N_1 наложены нек-рые дополнительные ограничения (см. [3]), s — достаточно большое число, зависящее только от заданного натурального числа n.

Г. — К. п., поставленная в 1900 Д. Гильбертом (см. [1]), решена Э. Камке, к-рый доказал существование решений системы (*). Асимптотич. формула для числа решений этой системы была получена К. К. Марджанишвили в 1937 с помощью *Виноградова метода* оценок тригонометрич. сумм.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 281–300; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Марджанишвили К. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1937, с. 609—31.

Б. М. Бредихин.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — ограниченный линейный интегральный оператор T, действующий из пространства $L_2(X, \mu)$ в $L_2(X, \mu)$ и представимый в виде

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)\,f(y)\,\mu(dy), \quad f \in L_2(X, \mu),$$

где $K(\cdot, \cdot) \in L_2(X \times X, \mu \times \mu)$ — ядро оператора (см. [1]).

Впервые такого рода операторы рассматривались Д. Гильбертом (D. Hilbert) и Э. Шмидтом (E. Schmidt)

в 1907. Г.— Ш. и. о. является вполне непрерывным оператором (см. [2]). Сопряженный к нему оператор также есть Г.— Ш. и. о. с ядром $\overline{K(y, x)}$ [3]. Г.— Ш. и. о. будет *самосопряженным оператором* тогда и только тогда, когда $K(x, y)=\overline{K(y, x)}$ для почти всех $(x, y)\in X\times X$ (относительно $(\mu\times\mu)$). Для самосопряженного Г.— Ш. и. о. и его ядра имеют место разложения

$$(Tf)(x)=\sum_n \lambda_n (f, \varphi_n)\varphi_n, \quad f\in L_2(X, \mu), \qquad (1)$$

$$K(x, y)\sim\sum_n \lambda_n\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}, \qquad (2)$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система собственных функций оператора T, отвечающих собственным значениям $\lambda_n\neq 0$; ряд (1) сходится по норме $L_2(X, \mu)$, а ряд (2) сходится по норме $L_2(X\times X, \mu\times\mu)$ (см. [4]). В условиях *Мерсера теоремы* ряд (2) сходится абсолютно и равномерно (см. [5]).

Если

$$\int_X |K(x, y)|^2\mu(dy)\leqslant C \text{ для всех } x\in X,$$

то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно (см. [4]).

Линейный оператор

$$T: L_2(a, b)\to L_2(a, b)$$

является Г.— Ш. и. о. тогда и только тогда, когда T есть bo-линейный оператор (см. [6]). Если μ есть σ-конечная мера, то линейный оператор

$$T: L_2(X, \mu)\to L_2(X, \mu)$$

является Г.— Ш. и. о. тогда и только тогда, когда существует такая функция $M(\cdot)\in L_2(X, \mu)$, что для всех $f\in L_2(X, \mu)$ неравенство

$$|(Tf)(x)|\leqslant M(x)\|f\|$$

справедливо для почти всех $x\in X$ (относительно меры μ) [7]. Таким образом, Г.— Ш. и. о. образуют двусторонний идеал в банаховой алгебре всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2(X, \mu)$ в $L_2(X, \mu)$.

Г.— Ш. и. о. играют важную роль в теории интегральных уравнений и в теории краевых задач (см. [8], [9]), так как операторы, возникающие во многих задачах математич. физики, либо сами являются Г.— Ш. и. о., либо их итерации нек-рого порядка обладают этим свойством. Естественным обобщением Г.— Ш. и. о. является *Гильберта — Шмидта оператор*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 2, пер. с англ., М., 1966; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Stone M. H., Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis, N. Y., 1964; [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; [5] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [6] Канторович Л. В. [и др.], Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950; [7] Weidmann J., Manuscripta Math., 1970, v. 2, № 1, p. 1—38; [8] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [9] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965.

В. Б. Коротков.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА НОРМА — норма линейного оператора T, действующего из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1, имеющая вид $|T|=\left(\sum_{\alpha\in A}\|Te_\alpha\|^2\right)^{1/2}$, где $\{e_\alpha, \alpha\in A\}$ — ортонормированный базис в H. Г.— Ш. н. удовлетворяет всем аксиомам нормы и не зависит от выбора базиса; ее свойства: $\|T\|\leqslant|T|$, $|T|=|T^*|$, $|T_1T_2|\leqslant\|T_1\|\,|T_2|$; $\|T\|$ — норма оператора T в гильбертовом пространстве; если $H_1=H$, то

$$|T|=\left\{\sum_{\alpha, \beta\in A}|(Te_\alpha, e_\beta)|^2\right\}^{1/2}.$$

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 2, пер. с англ., М., 1966; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

В. Б. Коротков.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА ОПЕРАТОР — оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H такой, что для любого ортонормированного базиса $\{x_i\}$ в H выполнено условие:

$$\| A \|^2 = \sum_i \| Ax_i \|^2 < \infty$$

(достаточно, однако, справедливости этого для нек-рого базиса). Г.— Ш. о. является *компактным оператором*, для s-чисел к-рого $s_i(A)$ и для собственных чисел $\lambda_i(A)$ имеет место:

$$\sum_i | \lambda_i(A) |^2 \leqslant \sum_i s_i^2(A) = \| A \|^2 = \operatorname{tr}(A^*A);$$

при этом A^*A оказывается *ядерным оператором* (здесь A^* — оператор, сопряженный к A, а $\operatorname{tr} C$ — след оператора C). Совокупность всех Г.— Ш. о. пространства A образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Если $R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$ резольвента A, а

$$\det\nolimits_2(E - zA) = \prod_i (1 - z\lambda_i(A)) e^{z\lambda_i(A)}$$

— его регуляризованный характеристический определитель, то выполнено неравенство Карлемана

$$\left| \det\nolimits_2\left(E - \frac{1}{\lambda} A\right) R_\lambda(A) \right| \leqslant |\lambda| \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\| A \|^2}{|\lambda|^2}\right)\right].$$

Типичный представитель Г. — Ш. о.— *Гильберта — Шмидта интегральный оператор* (откуда и название).

М. И. Войцеховский.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x), \qquad (*)$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность всех собственных значений симметричного ядра $K(x, s)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, $\{\varphi_n(x)\}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных функций, а (f, φ_n) есть скалярное произведение произвольной суммируемой с квадратом функции $f(x)$ и функции $\varphi_n(x)$.

Теорема Гильберта — Шмидта. Если ядро $K(x, s)$ есть суммируемая с квадратом функция двух переменных, то ряд $(*)$ сходится в среднем к функции

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds.$$

Если существует такая постоянная C, что для всех x из (a, b) выполняется неравенство

$$\int_a^b | K(x, s) |^2 ds \leqslant C,$$

то Г. Ш. р. сходится абсолютно и равномерно.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА — ЭЙЛЕРА ПРОБЛЕМА — обобщение проблемы Гольдбаха — Эйлера (см. *Гольдбаха проблема*) о представимости всякого натурального четного числа >2 в виде суммы двух простых.

Проблема Гильберта — Эйлера сформулирована Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. [1], с. 38) как часть проблемы простых чисел (восьмой проблемы Гильберта). Именно, Д. Гильберт высказал гипотезу, что решение проблемы распределения простых чисел позволит решить как проблему Гольдбаха — Эйлера, так и более общую проблему о разрешимости в простых числах линейного диофантова уравнения

$$ax + by + c = 0$$

с данными целыми попарно взаимно простыми коэффициентами.

Частным случаем Г.— Э. п. является проблема близнецов. Во всех частных случаях, кроме тривиальных,

Г.— Э. п. (к 1977) не решена. См. *Аддитивные проблемы*.

Лит.: [1] Проблемы Гильберта, М., 1969. *С. М. Воронин.*

ГИЛЬБЕРТОВ КИРПИЧ — подпространство *гильбертова пространства* l_2, состоящее из всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, для к-рых $0 \leqslant x_n \leqslant (1/2)^n$, $n=1,2, \ldots$. Г. к. является *компактом* и топологически эквивалентен (гомеоморфен) тихоновскому произведению счетной системы отрезков, т. е. *тихоновскому кубу* $I^{\aleph_0}$.

Г. к. является *универсальным пространством* в классе метризуемых пространств со счетной базой (т е о р е м а У р ы с о н а). *Б. А. Пасынков.*

ГИЛЬБЕРТОВА АЛГЕБРА — алгебра A с инволюцией над полем комплексных чисел, снабженная невырожденным скалярным произведением $(|)$, причем выполняются следующие аксиомы: 1) $(x|y)=(y^*|x^*)$ для всех $x, y \in A$; 2) $(xy|z) \cdot (y|x^*z)$ для всех $x, y, z \in A$; 3) для всех $x \in A$ отображение $y \to xy$ пространства A в A непрерывно; 4) множество элементов вида xy, $x, y \in A$, всюду плотно в A. Примерами гильбертовых алгебр являются алгебры $L^2(G)$ (относительно свертки), где G — компактная топологич. группа, и алгебра операторов Гильберта — Шмидта в данном гильбертовом пространстве.

Пусть A — Г. а., H — гильбертово пространство пополнение A, U_x и V_x — элементы алгебры ограниченных линейных операторов в H, являющиеся продолжениями по непрерывности умножений слева и справа на x в A. Отображение $x \to U_x$ (соответственно $x \to V_x$) есть невырожденное представление алгебры A (соответственно алгебры с инволюцией, противоположной A) в гильбертовом пространстве H. Слабое замыкание семейства операторов U_x (соответственно V) является а л г е б р о й Н е й м а н а в H; она наз. левой (соответственно правой) алгеброй Неймана данной Г. а. A и обозначается $U(A)$ (соответственно $V(A)$); $U(A)$ и $V(A)$ являются коммутантами друг друга; это — полуконечные алгебры Неймана. Любая Г. а. однозначно определяет нек-рый точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $U(A)$; обратно, если дана алгебра Неймана $\mathfrak{A}$ и точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{A}$, то можно построить Г. а. такую, что левая алгебра Неймана этой Г. а. изоморфна $\mathfrak{A}$, и след, определяемый на $\mathfrak{A}$ Г. а., совпадает с исходным (см. [1]). Таким образом, Г. а. является средством изучения полуконечных алгебр Неймана и следов на них; нек-рое обобщение понятия Г. а. позволяет изучать аналогичными средствами не обязательно полуконечные алгебры Неймана (см. [2]).

Лит.: [1] D i x m i e r J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 ed., P., 1969; [2] T a k e s a k i M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, B., 1970. *А. И. Штерн.*

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — *векторное пространство* H над полем комплексных (или действительных) чисел вместе с комплексной (действительной) функцией (x, y), определенной на $H \times H$ и обладающей следующими свойствами.

1) $(x, x)=0$ в том и только в том случае, если $x=0$;

2) $(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$;

3) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$, $x, y, z \in H$;

4) $(\alpha x, y)=\alpha (x, y)$, $x, y \in H$, α — комплексное (действительное) число;

5) $(x, y)=\overline{(y, x)}$, $x, y \in H$;

6) если $x_n \in H$, $n=1, 2, \ldots$ и если

$$\lim_{n, m \to \infty} (x_n - x_m, x_n - x_m) = 0,$$

то существует такой элемент $x \in H$, что

$$\lim_{n \to \infty} (x - x_n, x - x_n) = 0;$$

элемент x наз. пределом последовательности (x_n);

7) H — бесконечномерное векторное пространство. Функция (x, y), удовлетворяющая аксиомам 1) — 5), наз. скалярным произведением, или внутренним произведением, элементов x и y. Величина $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ наз. нормой (или длиной) элемента $x \in H$. Имеет место неравенство $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Если ввести в H расстояние между элементами $x, y \in H$ при помощи равенства $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то H превращается в *метрическое пространство*.

Два Г. п. H и H_1 наз. изоморфными (или изометрически изоморфными), если существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x_1$, $x \in H$, $x_1 \in H_1$, между H и H_1, сохраняющее линейные операции и скалярное произведение.

Г. п. составляют наиболее распространенный и важный для приложений класс бесконечномерных векторных пространств. Они представляют собой естественное обобщение понятия конечномерного векторного пространства со скалярным произведением (т. е. конечномерного евклидова пространства, или конечномерного унитарного пространства). Именно, если в конечномерном векторном пространстве (над полем действительных или комплексных чисел) задано скалярное произведение, то свойство 6), наз. полнотой Г. п., выполняется автоматически. Бесконечномерные векторные пространства H со скалярным произведением наз. предгильбертовыми пространствами; существуют предгильбертовы пространства, в к-рых свойство 6) не выполняется. Всякое предгильбертово пространство может быть дополнено до Г. п.

Иногда в определение Г. п. не включается условие бесконечномерности, т. е. предгильбертовым пространством наз. векторное пространство над полем комплексных (или действительных) чисел со скалярным произведением, а Г. п. наз. полное предгильбертово пространство.

Примеры Г. п. 1) Комплексное пространство l^2 (или l_2). Элементами этого Г. п. являются бесконечные последовательности комплексных чисел $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ со сходящейся суммой квадратов модулей:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < +\infty;$$

скалярное произведение определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k.$$

2) Пространство $l^2(T)$ (обобщение примера 1)). Пусть T — произвольное множество. Элементами Г. п. $l^2(T)$ являются комплекснозначные функции $x(t)$ на T, отличные от нуля не более чем в счетном множестве точек $t \in T$ и такие, что ряд

$$\sum_{t \in T} |x(t)|^2$$

сходится. Скалярное произведение определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{t \in T} x(t) \overline{y(t)}.$$

Всякое Г. п. изоморфно пространству $l^2(T)$ для нек-рого соответствующим образом подобранного T.

3) Пространство $L^2(S, \Sigma, \mu)$ (или $L_2(s, \Sigma, \mu)$) комплекснозначных функций $x(s)$, определенных на множестве S с вполне аддитивной положительной мерой μ (заданной на σ-алгебре Σ-подмножеств множества S), измеримых и имеющих интегрируемый квадрат модуля:

$$\int_S |x(s)|^2 \, d\mu(s) < +\infty.$$

В этом Г. п. скалярное произведение определяется равенством

$$(x(s), y(s)) = \int_S x(s) \overline{y(s)} \, d\mu(s).$$

4) *Соболева пространство* $W_l^2(\Omega)$, обозначаемое также $H_{(l)}$ (см. *Вложения теоремы*).

5) Г. п. функций со значениями в Г. п Пусть H — нек-рое Г. п. со скалярным произведением (x, y), $x, y \in H$. Пусть, далее, Ω — произвольная область в R_n, а $f(x)$, $x \in \Omega$ — функция со значениями в H, измеримая в смысле Бохнера (см. *Бохнера интеграл*) и такая, что

$$\int_\Omega \|f(x)\|_H^2 \, dx < \infty,$$

где dx — мера Лебега на Ω (вместо меры Лебега можно взять любую другую положительную счетно аддитивную меру). Если на этом множестве функций определить скалярное произведение

$$(f(x),\ g(x))_\perp = \int_\Omega (f(x),\ g(x))\, dx,$$

то получится новое Г. п. H_1.

6) Множество непрерывных *Бора почти периодических функций* на прямой образует предгильбертово пространство, если скалярное произведение определяется равенством

$$(x(t),\ y(t)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{y(t)}\, dt.$$

Существование предела вытекает из теории почти периодич. функций. Это пространство пополняется *Безиковича почти периодическими функциями* класса B^2.

Пространства l^2 и L^2 были введены и изучены Д. Гильбертом [1] в основополагающих работах по теории интегральных уравнений и бесконечных квадратичных форм. Определение Г. п. было дано Дж. Нейманом [3], Ф. Риссом [4] и М. Стоуном [13], к-рые положили также начало его систематич. изучению.

Г. п. является естественным обобщением обычного трехмерного пространства евклидовой геометрии, и многие геометрич. понятия имеют интерпретацию в Г. п., что позволяет говорить о геометрии Г. п. Два вектора x, y из Г. п. H наз. ортогональными (обозначение $x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Два линейных многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из H наз. ортогональными ($\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$), если каждый элемент из $\mathfrak{M}$ ортогонален каждому элементу из $\mathfrak{N}$. Ортогональным дополнением множества $A \subset H$ называется множество $B = \{x \mid (x, A) = 0\}$, т. е. множество элементов $x \in H$, ортогональных ко всем элементам из A. Оно обозначается $H \ominus A$ или, если H подразумевается, $A^\perp$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ произвольного множества $\mathfrak{M}$ из H есть замкнутое линейное многообразие. Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в Г. п. (называемое также подпространством), то всякий элемент $x \in H$ единственным образом может быть представлен в виде суммы $x = y + z$, $y \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{N}$. Это разложение наз. теоремой об ортогональном дополнении и записывается обычно в виде

$$H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}.$$

При этом теорема справедлива также в случае, если H есть предгильбертово пространство, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в H. В связи с этим уместно отметить, что нек-рые другие утверждения теории Г. п. справедливы полностью или частично и в предгильбертовых пространствах. Однако практически это обстоятельство не очень существенно, ибо встречающиеся в приложениях пространства либо полны, либо известно, как их пополнить.

Множество $A \subset H$ наз. ортонормированным множеством, или ортонормированной системой, если любые различные два вектора из A ортогональны и если норма каждого вектора $y \in A$ равна единице. Ортонормированное множество наз. полным ортонормированным множест-

в о м, если не существует ненулевого вектора из H, ортогонального ко всем векторам этого множества. Если $\{y_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность скаляров, то ряд

$$\sum_i \alpha_i y_i$$

сходится в том и только в том случае, когда

$$\sum_i |\alpha_i|^2 < \infty;$$

при этом

$$\left\| \sum_i \alpha_i y_i \right\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2$$

(т е о р е м а П и ф а г о р а в Г. п.).

Пусть A — ортонормированное множество в Г. п. H, а x — произвольный вектор из H. Тогда $(x, y) \neq 0$ для всех $y \in A$, за исключением конечного или счетного множества векторов. Ряд

$$Px = \sum_{y \in A} (x, y)\, y$$

сходится, и его сумма не зависит от порядка расположения его ненулевых членов. Оператор P является о п е р а т о р о м о р т о г о н а л ь н о г о п р о е к т и р о в а н и я, или п р о е к т о р о м, на замкнутое линейное многообразие, порождаемое множеством A.

Множество $A \subset H$ наз. о р т о н о р м и р о в а н н ы м б а з и с о м л и н е й н о г о м н о г о о б р а з и я $\mathfrak{N} \subseteq H$, если A содержится в $\mathfrak{N}$ и если для любого $x \in \mathfrak{N}$ имеет место

$$x = \sum_{y \in A} (x, y)\, y,$$

т. е. любой вектор $x \in \mathfrak{N}$ разлагается по системе A, или может быть представлен при помощи векторов системы A. Набор чисел $\{(x, y) | y \in A\}$ наз. н а б о р о м к о э ф ф и ц и е н т о в Ф у р ь е элемента x по базису A. Каждое подпространство Г. п. H (в частности, само H) имеет ортонормированный базис.

В $l^2(T)$ ортонормированным базисом является набор функций $\{x_t,\ t \in T\}$, определяемых формулой $x_t(s) = 1$ при $s = t$, $x_t(s) = 0$ при $s \neq t$. В пространстве $L^2(s, \Sigma, \mu)$ разложение вектора по базису принимает вид разложения функции по системе ортогональных функций — важный метод решения задач математич. физики.

Для ортонормированного множества $A \subset H$ следующие утверждения эквивалентны: A полно; A является ортонормированным базисом для H; $\|x\|^2 = \Sigma_{y \in A} |(x, y)|^2$ для любого $x \in H$.

Все ортонормированные базисы данного Г. п. имеют одну и ту же мощность. Этот факт позволяет определить размерность Г. п. Именно, р а з м е р н о с т ь ю Г. п. наз. мощность произвольного ортонормированного базиса в нем. Иногда эта размерность наз. г и л ь б е р т о в о й р а з м е р н о с т ь ю (в отличие от л и н е й н о й р а з м е р н о с т и Г. п., т. е. мощности базиса Гамеля (Хамеля) — понятия, не учитывающего топологич. структуру Г. п.). Два Г. п. изоморфны в том и только в том случае, когда они имеют одну и ту же размерность. С понятием размерности связано понятие д е ф е к т а, или к о р а з м е р н о с т и, п о д п р о с т р а н с т в а. Именно, дефектом подпространства H_1 Г. п. H наз. размерность ортогонального дополнения $H_1^{\perp} = H \ominus H_1$. Подпространство, дефект к-рого равен 1, т. е. ортогональное дополнение к-рого одномерно, называется г и п е р п р о с т р а н с т в о м. Параллельное ему плоское множество называется г и п е р п л о с к о с т ь ю.

Некоторые из геометрич. понятий требуют использования терминологии линейных операторов в Г. п.; к ним относится, в частности, понятие р а с т в о р а линейных многообразий. Р а с т в о р о м м н о г о о б р а з и й M_1 и M_2 в Г. п. H наз. норма $\theta(M_1, M_2)$ разности операторов, проектирующих H на замыкание этих линейных многообразий.

Простейшие свойства раствора:

а) $\theta(M_1, M_2) = \theta(\bar{M}_1, \bar{M}_2) = \theta(H \ominus \bar{M}_1, H \ominus \bar{M}_2)$;

б) $\theta(M_1, M_2) \leqslant 1$,

причем в случае строгого неравенства $\dim M_1 = \dim M_2$.

Во многих задачах, относящихся к Г. п., участвуют лишь конечные наборы векторов Г. п., т. е. элементы конечных линейных многообразий Г. п. Поэтому понятия и методы линейной алгебры играют в теории Г. п. большую роль. Векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в Г. п. наз. л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и, если равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k = 0,$$

где α_k — скаляры, возможно лишь в том случае, когда все α_k равны нулю. Для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы их *Грама определитель* был отличен от нуля. Счетная последовательность векторов $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ наз. л и н е й н о н е з а в и с и м о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю, если линейно независима каждая ее конечная часть. Каждая линейно независимая последовательность может быть ортогонализирована, т. е. может быть построена такая ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots$, что для каждого n *линейные оболочки* множеств $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ совпадают. Это построение наз. п р о ц е с с о м о р т о г о н а л и з а ц и и (о р т о н о р м а л и з а ц и и) Г р а м а — Ш м и д т а и осуществляется следующим образом:

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}, \quad h_2 = g_2 - (g_2, e_1)\, e_1, \quad e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}, \ \ldots,$$

$$h_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} (g_n, e_k)\, e_k, \quad e_n = \frac{h_n}{\|h_n\|}, \ \ldots.$$

В множестве Г. п. определены операции прямой суммы и тензорного произведения Г. п. П р я м о й с у м м о й Г. п. H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, где каждое H_i обладает соответствующим скалярным произведением, наз. Г. п.

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n,$$

определяемое следующим образом: в векторном пространстве $H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ — прямой сумме векторных пространств $H_1, \ldots, H_n$ — задается скалярное произведение равенством

$$([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)_{H_i}.$$

При $i \neq j$ элементы из H_i и H_j в прямой сумме

$$H = \sum_{i=1}^{n} \oplus H_i$$

взаимно ортогональны, и проектирование H на H_i совпадает с ортогональным проектированием H на H_i. Понятие прямой суммы Г. п. обобщается на случай бесконечного множества прямых слагаемых. Пусть для каждого ν из нек-рого множества A индексов задано Г. п. H_ν. П р я м о й с у м м о й Г. п. наз. (и обозначается $\sum_{\nu \in A} \oplus H_\nu$) совокупность H всех определенных на A функций $\{x_\nu\}$, обладающих тем свойством, что $x_\nu \in H_\nu$ для каждого $\nu \in A$, и $\sum_{\nu \in A} \|x_\nu\|^2 < \infty$. При этом в H линейные операции определяются равенством

$$\{x_\nu\} + \{y_\nu\} = \{x_\nu + y_\nu\}, \quad \alpha\{x_\nu\} = \{\alpha x_\nu\},$$

и скалярное произведение — равенством

$$(\{x_\nu\}, \{y_\nu\}) = \sum_{\nu \in A} (x_\nu, y_\nu)_{H_\nu}.$$

При таком способе введения линейных операций и скалярного произведения прямая сумма

$$H = \sum_{\nu \in A} \oplus H_\nu$$

становится Г. п.

Другой важной операцией в множестве Г. п. является тензорное произведение. Тензорным произведением Г. п. H_i, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. Г. п., определяемое следующим образом. Пусть $H_1 \odot H_2 \odot \ldots \odot H_n$ — тензорное произведение векторных пространств $H_1, \ldots, H_n$. В векторном пространстве $H_1 \odot H_2 \odot \ldots \odot H_n$ существует единственное скалярное произведение такое, что

$$(x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n,\ y_1 \odot y_2 \odot \ldots \odot y_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i, y_i)_{H_i}$$

для всех $x_i, y_i \in H_i$. Векторное пространство становится, таким образом, предгильбертовым пространством, пополнение к-рого есть Г. п., обозначаемое $H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_n$ или $\prod_{i-1}^{n} \otimes H_i$ и наз. тензорным произведением Г. п. H_i.

Г. п. образуют важный класс *банаховых пространств*: любое Г. п. H есть банахово пространство относительно нормы $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, причем для любых двух векторов x, $y \in H$ имеет место равенство параллелограмма:

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 (\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Равенство параллелограмма выделяет класс Г. п. среди банаховых пространств, т. е. если в действительном нормированном пространстве B для любой пары элементов x, $y \in B$ имеет место равенство параллелограмма, то функция

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)$$

удовлетворяет аксиомам скалярного произведения и тем самым превращает B в предгильбертово пространство (а если B — банахово, то — в Г. п.). Из равенства параллелограмма следует, что Г. п. есть равномерно выпуклое пространство. Как в любом банаховом пространстве, в Г. п. можно определить две топологии — сильную (нормированную) и слабую. Эти топологии различны, но Г. п. сепарабельно в сильной топологии тогда и только тогда, когда оно сепарабельно в слабой топологии; выпуклое множество (в частности, линейное многообразие) в Г. п. сильно замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.

Как и в теории общих банаховых пространств, в теории Г. п. важную роль играет понятие сепарабельности. Г. п. сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетную размерность. Г. п. l^2 и $H_{(l)}$ сепарабельны. Г. п. $l^2(T)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда T не более чем счетно; Г. п. $L^2(s, \Sigma, \mu)$ сепарабельно, если мера μ имеет счетный базис. Г. п. B^2 не сепарабельно.

Любой ортонормированный базис в сепарабельном Г. п. H является одновременно безусловным базисом Шаудера в H, рассматриваемом как банахово пространство. Однако в сепарабельных Г. п. существуют и не ортогональные базисы Шаудера. Так, справедлива теорема (см. [7]): пусть $\{f_k\}$ — полная система векторов в Г. п. H и пусть λ_n и Λ_n — наименьшее и наибольшее собственные значения *Грама матрицы*

$$\{\alpha_{jk}\}_{j,\ k=1}^{n}, \quad \alpha_{jk} = (f_k, f_j).$$

Если

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda_n > 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n \to \infty} \Lambda_n < \infty,$$

то 1) последовательность $\{f_k\}$ есть базис в H; 2) существует биортогональная к $\{f_k\}$ последовательность $\{g_k\}$, к-рая также является базисом в H.

Как и в любом банаховом пространстве, описание множества линейных функционалов на Г. п. и исследование свойств этих функционалов имеет большое значение. Линейные функционалы в Г. п. устроены особенно просто. Всякий линейный функционал f в Г. п. H однозначно записывается в виде $f(x) = (x, x^*)$ для всех

$x \in H$, где $x^* \in H$; при этом $\|f\| = \|x^*\|$. Пространство H^* линейных функционалов f на H, сопряженное к H, изометрически антиизоморфно H (т. е. соответствие $f \to x^*$ изометрично, аддитивно и антиоднородно: $\alpha f \to \bar{\alpha} x^*$). В частности, Г. п. рефлексивно; поэтому справедливы следующие утверждения: Г. п. слабо секвенциально полно; для того чтобы подмножество Г. п. было относительно слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.

Основным содержанием теории Г. п. является теория линейных операторов в Г. п. Само понятие Г. п. сформировалось в работах Д. Гильберта [2] и Э. Шмидта [14] по теории интегральных уравнений, а абстрактное определение Г. п. было дано в работах Дж. Неймана [3], Ф. Рисса [4] и М. Стоуна [13] по теории эрмитовых операторов. Теория операторов в Г. п. представляет особый важный раздел общей теории операторов по двум причинам.

Во-первых, теория самосопряженных и унитарных операторов в Г. п. является не только самой разработанной частью общей теории линейных операторов, но и имеющей исключительно широкие приложения в других областях функционального анализа и в ряде других разделов математики и физики. Теория линейных операторов в Г. п. позволяет рассмотреть многие задачи математич. физики с единой общей точки зрения; прежде всего — вопросы, относящиеся к собственным значениям и собственным функциям. Кроме того, теория самосопряженных операторов в Г. п. служит математич. аппаратом квантовой механики: при описании квантовомеханич. системы наблюдаемые (энергия, импульс, координаты и т. п.) интерпретируются как самосопряженные операторы в нек-ром Г. п., а состояние системы задается элементом этого Г. п. В свою очередь, задачи квантовой механики до настоящего времени оказывают влияние на развитие теории самосопряженных операторов, а также теории алгебр операторов в Г. п.

Во-вторых, интенсивно развивающаяся теория *несамосопряженных операторов* в Г. п. (в частности, циклических, нильпотентных, одноклеточных, сжимающих, спектральных и скалярных операторов) является важной моделью теории линейных операторов в более общих пространствах.

Важный класс линейных операторов в Г. п. образуют всюду определенные непрерывные операторы, наз. также ограниченными операторами в Г. п. Если ввести в множестве $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H операции сложения, умножения на число и умножения операторов, а также норму оператора, по обычным правилам (см. *Линейные операторы*) и определить *инволюцию* в $\mathfrak{B}(H)$ как переход к *сопряженному оператору*, то $\mathfrak{B}(H)$ становится *банаховой алгеброй* с инволюцией. Важнейшими классами ограниченных операторов в Г. п. являются *самосопряженные операторы*, *унитарные операторы* и *нормальные операторы*, так как они обладают специальными свойствами по отношению к скалярному произведению. Эти классы операторов хорошо изучены; основным инструментом в их изучении являются простейшие из ограниченных самосопряженных операторов, а именно: операторы ортогонального проектирования, или ортогональные проекторы, часто называемые просто *проекторами*. Способ, позволяющий строить любые ограниченные самосопряженные, унитарные и нормальные операторы в комплексном Г. п. с помощью проекторов, дается *спектральным разложением* соответствующих операторов, особенно простым в случае сепарабельного Г. п.

Более сложным разделом теории линейных операторов в Г. п. является теория неограниченных операторов. Важнейшими неограниченными операторами в Г. п. являются замкнутые линейные операторы с плотной областью определения; в частности, неограниченные

самосопряженные и нормальные операторы. Между самосопряженными и унитарными операторами в Г. п. существует взаимно однозначное соответствие, определяемое *Кэли преобразованием*. Большое значение имеет (в частности, в теории линейных дифференциальных операторов) класс *симметричных операторов* в Г. п. и теория самосопряженных расширений симметричных операторов.

Неограниченные самосопряженные и нормальные операторы в комплексном Г. п. H также допускают спектральное разложение. Спектральное разложение является большим достижением теории самосопряженных и нормальных операторов в Г. п. Оно соответствует классич. теории приведения эрмитовых и нормальных комплексных матриц в n-мерном унитарном пространстве. Именно спектральное разложение и связанное с ним операторное исчисление для самосопряженных и нормальных операторов обеспечивают теории операторов в Г. п. широкую область применения во многих разделах математики.

Для ограниченных самосопряженных операторов в l_2 спектральное разложение было найдено Д. Гильбертом [1], к-рый также ввел важное понятие *разложения единицы* для самосопряженного оператора. В современный период известно несколько подходов к спектральной теории самосопряженных и нормальных операторов. Один из наиболее глубоких дает теория банаховых алгебр. Спектральное разложение для неограниченного самосопряженного оператора было найдено Дж. Нейманом [3]. Его работе предшествовали важные исследования Т. Карлемана [8], к-рый получил спектральное разложение для случая симметрического интегрального оператора, а также впервые обнаружил, что между симметрическими ограниченными и неограниченными операторами полной аналогии нет. На важность понятия самосопряженного оператора впервые обратил внимание Э. Шмидт (см. [3], с. 62).

Следует отметить, что как для исследований Д. Гильберта, так и для более поздних исследований большое значение имели работы П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Т. И. Стилтьеса по классической *моментов проблеме*, *Якоби матрицам* и *непрерывным дробям* (см. [9]).

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; N. Y., 1953; [2] Besicovitch A. S., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] von Neumann J., «Math. Ann.», 1929, Bd 102, S. 49—131; [4] Riesz F., «Acta Sci. Math. Szeged», 1930, v. 5, № 1, p. 23—54; [5] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [6] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [7] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [8] Carleman T., Sur les équations intégrales singulieres a noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923; [9] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, М., 1961; [10] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., М., 1962; [11] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; [12] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [13] Stone M., Linear transformation in Hilbert space and their applications to analisis, N. Y., 1932; [14] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 3 изд., М., 1972.

Б. М. Левитан.

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ — *гильбертово пространство* E над полем комплексных чисел, снабженное непрерывной билинейной (точнее полуторалинейной) формой G, к-рая, вообще говоря, не является положительно определенной. Форму G часто наз. G-метрикой. Наиболее важным частным случаем Г. п. с и. м. является так наз. J-пространство: Г. п. с и. м., в к-ром форма G определяется нек-рой эрмитовой инволюцией J в E по формуле $G(x, y)=(Jx, y)$. В этом случае форма G обозначается также буквой J и наз. J-метри-

кой. Инволюция J допускает представление в виде $J=P_+-P_-$, где P_+, P_- — ортогональные проекторы в E, и $P_++P_-=I$; число $\varkappa=\min(\dim P_+, \dim P_-)$ наз. рангом индефинитности J-метрики или J-пространства. Если $\varkappa<+\infty$, то Г. п. с и. м. (E, J) наз. *Понтрягина пространством* $\Pi_\varkappa$; см. также *Пространство с индефинитной метрикой*.

Два Г. п. с и. м. (E, G) и (E_1, G_1) наз. метрически эквивалентными, если существует линейный гомеоморфизм U гильбертова пространства E на пространство E_1, переводящий форму G в форму G_1. G-метрика, порождаемая обратимым эрмитовым оператором G по формуле $G(x, y)=(Gx, y)$, наз. регулярной; после введения нового скалярного произведения, метрически эквивалентного старому, регулярная G-метрика становится J-метрикой. Каждое Г. п. с и. м. с эрмитовой формой G может быть G-изометрически (т. е. с сохранением формы G) погружено в нек-рое J-пространство [2], [3].

Главные направления в теории Г. п. с и. м.— те же, что и в общих пространствах с индефинитной метрикой, но со значительным уклоном в спектральную теорию. Геометрия Г. п. с и. м. существенно богаче, чем у общих пространств с индефинитной метрикой. Так, в случае J-пространств имеется эффективное описание максимальных подпространств L среди всех неотрицательных (неположительных, нейтральных): это те L, для к-рых $P_+L=P_+E$ (соответственно $P_-L=P_-E$; выполнено хотя бы одно из этих равенств). Отсюда — аналог закона инерции квадратичных форм: если $E=L_+\dotplus L_-$ — канонич. разложение J-пространства в сумму семидефинитных подпространств, то $\dim L_\pm=\dim P_\pm E$. Подпространство L является максимальным неотрицательным тогда и только тогда, когда L имеет угловой оператор K относительно E_+, т. е. $L=\{x+Kx : x\in E_+\}$, и $\|K\|\leqslant 1$.

В J-пространствах развита теория базисов, к-рая помогает изучать геометрию Г. п. с и. м., а также операторы в них. J-ортонормированный базис J-пространства (E, J) есть базис в гильбертовом пространстве E, удовлетворяющий условиям $(Je_k, e_n)=\pm\delta_{kn}$; $\kappa, n=1, 2, \ldots$ Для того чтобы J-ортонормированная последовательность $\mathcal{E}$ была базисом Рисса пространства E, необходимо и достаточно, чтобы $E=M_+\dotplus M_-$, где $M_\pm$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\{e_k : (Je_k, e_k)=\pm 1\}$. Если $\mathcal{E}$ — J-ортонормированный базис в E, то разложение $E=M_+\dotplus M_-$ есть канонич. разложение J-пространства E. Большую группу геометрич. задач в Г. п. с и. м., возникающих в теории операторов в этих пространствах, составляют вопросы, связанные со структурой и свойствами так наз. дуальных пар подпространств Г. п. с и. м. (E, J), т. е. таких пар N, P подпространств в E, что N и P взаимно J-ортогональны, причем N-неположительное, а P — неотрицательное подпространства. Дуальная пара наз. максимальной, если N и P — максимальные семидефинитные подпространства.

Теория операторов в Г. п. с и. м. Метрика G считается эрмитовой и невырожденной, а встречающиеся операторы — плотно заданными. Пусть для оператора T с областью определения D_T определен G-сопряженный оператор T^c равенством

$$G(Tx, y)=G(x, T^cy), \quad x\in D_T, \quad y\in D_{T^c}.$$

При этом $T^c=G^{-1}T^*G$ и

$$D_{T^c}=G^{-1}\{GE\cap T^{*-1}(TE\cap GE)\}.$$

Оператор T наз. G-самосопряженным, если $T=T^c$, и G-симметричным, если $G(Tx, y)=G(x, Ty)$; $x, y\in D_T$. Корневые подпространства

(линеалы) $L_\lambda(T)$ и $L_\mu(T)$, $\lambda \neq \bar{\mu}$, G-симметричного оператора T G-ортогональны; в частности, если $\lambda \neq \bar{\lambda}$, то $L_\lambda(T)$ — нейтральное подпространство (линеал).

Если G — регулярная метрика, то спектр $\sigma(T)$ G-самосопряженного оператора T симметричен относительно действительной оси; если — не регулярная, то это, вообще говоря, не так. J-самосопряженность оператора T равносильна самосопряженности JT. Если ζ, $\bar{\zeta} \in \sigma(T)$, то *Кэли преобразование* $U = (T - \zeta I) \times (T - \bar{\zeta} I)^{-1}$ есть J-унитарный оператор, т. е. такой, что $UJU^* = U^*JU = J$. Спектр U симметричен относительно окружности $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Начиная с работы Л. С. Понтрягина [1], основным вопросом теории является вопрос о существовании семидефинитных инвариантных подпространств. Пусть T — ограниченный оператор в J-пространстве E и $(JTx, Tx) \geqslant 0$ при $(Jx, x) \geqslant 0$, $x \in E$ (так наз. плюс-оператор); если P_+TP_- — вполне непрерывный оператор, то существует максимальное неотрицательное T-инвариантное подпространство L. Этот результат приложим, в частности, к J-унитарным операторам U в пространствах $\Pi_\varkappa$, где он служит основой так наз. метода дефинизации — построения операторного полинома $p(U)$, переводящего E в семидефинитное подпространство. Этот прием позволяет получать, напр., аналоги обычного спектрального разложения для J-унитарных и J-самосопряженных операторов в пространствах $\Pi_\varkappa$.

Теория операторов в Г. п. с и. м. существенно используется в теории канонич. систем обыкновенных дифференциальных уравнений; напр., критерий устойчивости для таких уравнений следующим образом записывается в терминах оператора монодромии U: для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала максимальная U-инвариантная дуальная пара подпространств. Другой основной потребитель описанной теории — спектральная теория квадратичных операторных пучков, важная во многих задачах математич. физики.

О теории представлений в Г. п. с и. м. см. [4].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [2] Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 3—56; [3] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., там же, 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [4] Наймарк М. А., Исмагилов Р. С., Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 73—105; [5] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972 (Справочная математическая библиотека).

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ГИПЕРБОЛА — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей обе его полости. Г. есть множество точек M плоскости (см.

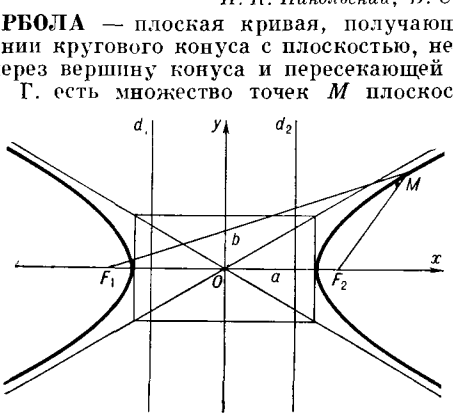


рис.), модуль разности расстояний к-рых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов Г.) постоянен и равен $2a < F_1F_2$. Расстояние между фокусами Г. наз. фокусным расстоянием его принято обозначать через $2c$. Середина отрезка F_1F_2 наз. центром

Г. Прямая, на к-рой лежат фокусы Г., наз. действительной (или фокальной) осью Г. Прямая, проходящая через центр Г. перпендикулярно к действительной оси Г., наз. мнимой осью Г. Мнимая и действительная оси Г. являются ее осями симметрии. Число $e=c/a<1$ наз. эксцентриситетом Г. Диаметром Г. наз. любая прямая, проходящая через центр Г. Середины параллельных хорд Г. лежат на диаметре. Директрисой Г., соответствующей данному фокусу F, наз. прямая d, перпендикулярная к действительной оси Г., отстоящая от центра на расстояние a/e и лежащая от центра по одну сторону с фокусом F. У Г.— две директрисы. Г. имеет две асимптоты:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Г. есть центральная *линия второго порядка*. Ее канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a и $b=\sqrt{c^2-a^2}$ — полуоси Г., а x, y — текущие координаты. Уравнение касательной к Г. в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Фокальный параметр Г. (половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси Г.) равен b^2/a. При помощи фокального параметра p можно записать уравнение Г. в виде

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где ρ, φ — полярные координаты, $\pi-\varphi_0<\varphi<\pi+\varphi_0$, $2\varphi_0$ — угол между асимптотами.

При $a=b$ Г. наз. равнобочной, или равносторонней, Г. Асимптоты равнобочной Г. взаимно перпендикулярны; если их принять за оси координат, то уравнение равнобочной Г. примет вид

$$y=\frac{k}{x},$$

т. е. равнобочная Г. представляет собой график обратно пропорциональной зависимости. *А. Б. Иванов.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — *Лобачевского геометрия.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА, гиперболическая мера,— метрика в области комплексной плоскости, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, инвариантная относительно автоморфизмов этой области.

Гиперболическая метрика в круге $E: |z|<1$ определяется линейным элементом

$$d\sigma_z=\frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

где $|dz|$ — линейный элемент евклидовой длины. Введение Г. м. в круге E приводит к модели *Лобачевского геометрии.* Роль прямых в данной модели играют дуги евклидовых окружностей, ортогональных к $|z|=1$, лежащие в E; роль бесконечно удаленной точки играет окружность $|z|=1$. Движениями в ней служат дробно-линейные преобразования круга E на себя. Гиперболическая длина кривой L, лежащей в круге E, определяется формулой

$$\mu_E(L)=\int_L\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Гиперболическое расстояние между точками z_1 и z_2 круга E равно

$$r_E(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z_1\bar{z}_2|+|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|-|z_1-z_2|}.$$

Множество точек круга E, гиперболич. расстояние к-рых от данной точки z_0, $z_0 \in E$, не превосходит заданного числа R, $R>0$, т. е. гиперболический круг в E с гиперболич. центром в точке z_0 и гиперболич. радиусом R, является евклидовым кругом с центром, отличным от z_0 при $z_0 \neq 0$.

Гиперболическая площадь области B, лежащей в E, определяется формулой

$$\Delta_E(B) = \iint_B \frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}, \quad z = x+iy.$$

Величины $\mu_E(L)$, $r_E(z_1, z_2)$ и $\Delta_E(B)$ инвариантны относительно дробно-линейных преобразований круга E на себя.

Гиперболическая метрика в любой области D плоскости z, имеющей не менее трех граничных точек, определяется как перенесенная в D при конформном отображении $\zeta = \zeta(z)$ области D на круг E: $|\zeta|<1$ гиперболич. метрика круга E: ее линейный элемент определяется формулой

$$d\sigma_z = \frac{|\zeta'(z)|\,|dz|}{1-|\zeta(z)|^2}.$$

Область, имеющую не более двух граничных точек, уже нельзя конформно отобразить на круг. Величина

$$\rho_D(z) = \frac{|\zeta'(z)|}{1-|\zeta(z)|^2}$$

наз. плотностью Г. м. области D. Гиперболич. метрика области D не зависит ни от выбора отображающей функции, ни от выбора ее ветви и вполне определяется областью D и положением точек в D. Гиперболич. длина кривой L, лежащей в D, находится по формуле

$$\mu_D(L) = \int_L \rho_D(z)\,|dz|.$$

Гиперболическое расстояние между точками z_1 и z_2 области D равно

$$r_D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}| + |\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|}{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}| - |\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|},$$

где $\zeta(z)$ — любая функция, конформно отображающая D на круг E. Гиперболическим кругом в области D, как и в случае круга $|z|<1$, наз. множество точек области D, гиперболич. расстояние к-рых от данной точки области D (гиперболич. центра) не превосходит заданного положительного числа (гиперболич. радиуса). Если область D многосвязна, гиперболич. круг в D есть, вообще говоря, многосвязная область. Гиперболическая площадь области B, лежащей в D, находится по формуле

$$\Delta_D(B) = \iint_B \rho_D^2(z)\,dx\,dy.$$

Величины $\mu_D(L)$, $r_D(z_1, z_2)$ и $\Delta_D(B)$ являются инвариантами относительно конформных отображений области D (одно из основных свойств Г. м. в D).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962.

Г. В. Кузьмина.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

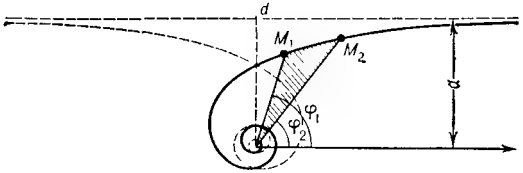
Состоит из двух ветвей, симметричных относительно прямой d (см. рис.). Полюс является асимптотич. точкой. Асимптота — прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от нее на расстоянии a. Длина дуги между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$:

$$l = a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограниченного дугой Г. с. и двумя радиус-векторами ρ_1 и ρ_2, соответствующими углам φ_1 и φ_2:

$$S = \frac{a^2(\rho_1 - \rho_2)}{2}.$$

Г. с. и *архимедова спираль* могут быть получены друг из друга инверсией относительно полюса O. Г. с. — частный случай так наз. алгебраич. спиралей (см. *Спирали*).



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — 1) Г. т. поверхности — точка, в к-рой соприкасающийся параболоид является гиперболич. параболоидом. В Г. т. индикатриса кривизны представляет собой пару сопряженных гипербол. *Е. В. Шикин.*

2) Г. т. динамической системы — такая точка $x=x^*$, принадлежащая области определения системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad (*)$$

что $f(x^*)=0$, а матрица A, равная значению $\partial f/\partial x$ в точке $x=x^*$, имеет k собственных значений с положительной действительной частью и $n-k$ собственных значений с отрицательной действительной частью, $0<k<n$. В окрестности Г. т. существует $(n-k)$-мерная инвариантная поверхность S_+, образованная решениями системы (*), к-рые при $t\to\infty$ асимптотически приближаются к точке $x=x^*$, и k-мерная инвариантная поверхность S_-, образованная решениями системы (*), к-рые асимптотически приближаются к точке $x=x^*$ при $t\to-\infty$. Поведение траекторий системы (*) в достаточно малой окрестности Г. т. характеризуется следующей теоремой [4]: существует гомеоморфизм нек-рой окрестности Г. т. в нек-рую окрестность точки $u=0$, $u=(u_1, \ldots, u_n)$, переводящий траектории системы (*) в траектории линейной системы $\dot{u}=Au$.

Г. т. для диффеоморфизма, обладающего неподвижной точкой, определяется требованием отсутствия равных по модулю единице собственных значений у линейной части диффеоморфизма в рассматриваемой неподвижной точке. Таким образом, Г. т. системы (*) остаются Г. т. диффеоморфизма, порождаемого сдвигом вдоль траекторий системы (*).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.—Л., 1947; [2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

В. К. Мельников.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ — тригонометрия на плоскости Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*). Пусть a_i, $i=1, 2, 3$,— длины сторон треугольника на плоскости Лобачевского, а α_i — углы этого треугольника. Справедливо следующее основное соотношение (теорема косинусов), связывающее a_i и α_i:

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_2 - \operatorname{sh} a_2 \operatorname{sh} a_3 \cos\alpha_1.$$

Из него вытекают все остальные соотношения Г. т.; напр., так наз. теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\operatorname{sh} a_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\operatorname{sh} a_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\operatorname{sh} a_3}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, определяемые формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус.}$$

Иногда рассматривается также гиперболический тангенс:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Другие обозначения: $\sinh x$, $\operatorname{Sh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{Ch} x$, $\operatorname{tgh} x$, $\tanh x$, $\operatorname{Th} x$. Графики см. на рис. 1.

Основные соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

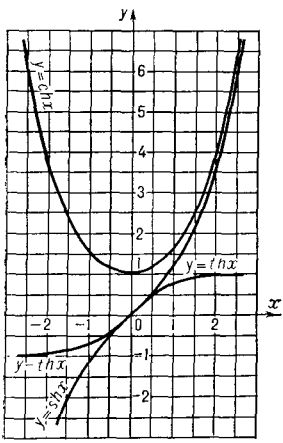


Рис. 1.

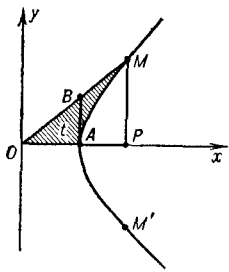


Рис. 2.

Геометрическая интерпретация Г. ф. аналогична интерпретации тригонометрических функций (рис. 2). Параметрич. уравнения гиперболы

$$x = \operatorname{ch} t, \qquad y = \operatorname{sh} t$$

позволяют истолковать абсциссу $x = OP$ и ординату $y = PM$ точки M равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как гиперболич. косинус и синус; гиперболич. тангенс — отрезок AB. Параметр t равен удвоенной площади сектора OAM, где AM — дуга гиперболы. Для точки M' (при $y < 0$) параметр t отрицателен.

Обратные гиперболические функции определяются формулами:

$$\operatorname{Ar sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\operatorname{Ar ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Ar th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Производные и основные интегралы от Г. ф.:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{th} x} + C.$$

Во всей плоскости комплексного переменного z Г. ф. $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ могут быть определены рядами:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

таким образом,

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad i \operatorname{sh} z = \sin(iz).$$

Имеются обширные таблицы для Г. ф. Значения Г. ф. можно получить также из таблиц для e^x и e^{-x}.

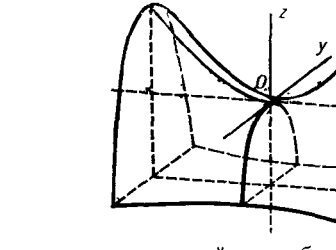
Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968; [2] Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, М., 1958; [3] Таблицы e^x и e^{-x}, М., 1955.

В. И. Битюцков.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*. В надлежащей системе координат (см. рис.) уравнение Г. п. имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где} \quad p,\ q > 0.$$

Сечения Г. п. плоскостями, параллельными плоскостям xOz и yOz, являются параболами, а сечения плоскостями, параллельными плоскости xOy, — гиперболами (плоскостью xOy — двумя прямыми). Ось симметрии Г. п. наз. его о с ь ю; точка пересечения Г. п. с осью наз. в е р ш и н о й Г. п. Если $p = q$, то Г. п. имеет две оси симметрии. Г. п. — *линейчатая поверхность*;



уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку (x_0, y_0, z_0) Г. п., имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}},$$

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{-\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит *гипербола*. Канонич. уравнение Г. ц. имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ в д а н н о й т о ч к е $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дифференциальное уравнение с частными производными, для к-рого однозначно разрешима задача Коши при начальных данных, заданных в окрестности точки M на любой нехарактеристич. поверхности. В частности, дифференциальное уравнение с частными производными, для к-рого конус нормалей не имеет мнимых полостей, будет Г. т. у. Дифференциальное уравнение

$$L(u) = H(D_1, D_2, \dots, D_n)\, u + F(D_1, D_2, \dots, D_n)\, u + G(x) = 0, \qquad (*)$$

где $D_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, $H(D_1, D_2, \dots, D_n)$ — однородный многочлен степени m, а многочлен F имеет

степень, меньшую чем m, наз. Г. т. у., если его характеристич. уравнение

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$$

имеет n различных и действительных решений относительно одной из величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ при заданных остальных. Любое уравнение (*) 1-го порядка ($m=1$) с действительными коэффициентами есть Г. т. у. Для уравнений 2-го порядка

$$L(u) = u_{tt} - \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + Fu + G = 0$$

гиперболичность гарантируется положительной определенностью квадратичной формы

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Б. Л. Рождественский.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ — методы решения уравнений гиперболич. типа на основе вычислительных алгоритмов.

Различные математич. модели во многих случаях приводят к дифференциальным уравнениям гиперболич. типа. Такие уравнения имеют точные аналитич. решения только в редких случаях. Наиболее распространенными являются численные методы. Они находят широкое применение при решениях задач механики сплошной среды и, в частности, уравнений газовой динамики (см. *Газовой динамики численные методы*), к-рые по своей структуре являются квазилинейными.

Численные методы решения уравнений гиперболического типа можно разделить на две группы: 1) методы с явным выделением особенностей решения; 2) методы сквозного счета, в к-рых особенности решения явно не выделяются, а получаются в процессе счета как области с резким изменением решений.

К первой группе относится, напр., метод характеристик, к-рый используется только для решения уравнений гиперболич. типа (он нашел широкое применение при решении задач газовой динамики).

Методы второй группы дают собственно разностные схемы. Пусть, напр., имеется гиперболич. уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (1)$$

где A есть $(m \times m)$-матрица, имеющая m различных действительных собственных значений, $w = w(x, t)$ — вектор-функция с m компонентами. Матрица A может быть либо функцией от x, t, и тогда (1) есть линейная гиперболич. система, либо зависеть также от $w = w(x, t)$ (квазилинейная система). Пусть, в последнем случае, система уравнений (1) приводима к дивергентному виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \psi,$$

где F есть вектор-функция от w, x, t такая, что $A = dF/dw$, ψ — вектор-функция от w, x, t. В наиболее важном случае A, F и ψ зависят только от w. Для системы уравнений (1) может быть поставлена задача Коши:

$$w(x, 0) = w_0(x)$$

с соответствующими краевыми условиями.

Как правило, основой построения разностных схем является аппроксимация соответствующего дифференциальному уравнению интегрального закона сохранения с помощью некоторых квадратурных формул на контуре интегрирования разностной ячейки. В случае гладких решений аппроксимация интегрального закона сохранения равносильна прямой аппроксимации соответствующего дифференциального уравнения. Разностные схемы должны удовлетворять требованиям аппроксимации и устойчивости. Эти требования независимы и в определенном смысле вступают в противо-

речие одно с другим. Для случая дивергентных систем дифференциальных уравнений существенным является условие дивергентности (или консервативности) разностной схемы. Кроме того, разностные схемы должны удовлетворять еще ряду необходимых требований — диссипативности, экономичности и т. д. Двухслойная явная разностная схема для линейного уравнения типа (1) имеет вид:

$$w_j^{n+1} = \Lambda w_j^n,$$

где Λ — финитный оператор, т. е. представляется в виде:

$$\Lambda = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha T_1^\alpha,$$

B_α есть $(m \times m)$-матрицы с коэффициентами, зависящими от τ, h, x, t; $t = n\tau$, $x = jh$; τ, h — шаги разностной сетки по осям t и x соответственно; числа q_1 и q_2 не зависят от τ, h; $\varkappa = \tau h$, T_1 — оператор сдвига по x.

Условия аппроксимации приводят к соотношениям:

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha = I,$$

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} \alpha B_\alpha = \varkappa A,$$

I — единичная матрица.

Неявная разностная схема может быть записана в виде:

$$\Lambda_1 w_j^{n+1} = \Lambda_0 w_j^n,$$

где Λ_1 и Λ_0 — финитные операторы:

$$\Lambda_k = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha^k T_1^\alpha, \quad k = 0, 1,$$

B_α^k есть $(m \times m)$-матрицы, зависящие от τ, h, x, t, причем оператор Λ_1 содержит по крайней мере две ненулевые матрицы B_α^1. Оператор Λ_1 предполагается обратимым, но его обратный не является финитным.

По свойствам аппроксимации разностные схемы можно подразделить на два класса: условно аппроксимирующие и абсолютно аппроксимирующие. Условно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при τ, h, стремящихся к нулю при нек-рой зависимости между τ и h: $\tau = \varphi(h)$. Абсолютно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при стремлении τ, h к нулю по любому закону.

В случае условной аппроксимации разностное уравнение может аппроксимировать различные дифференциальные уравнения при различных законах предельного перехода. Так, напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \tag{2}$$

рассмотрим две разностные схемы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \\ &\bar{u}_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \tag{4}$$

При законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h} = \text{const}$$

разностная схема (3) аппроксимирует уравнение (2), а при законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

— уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \mu = \frac{h^2}{2\tau}.$$

Разностная схема (4) аппроксимирует уравнение (2) абсолютно.

Аналогично, разностные схемы подразделяются на условно устойчивые и абсолютно устойчивые. Так, разностная схема (4) устойчива, если выполнено следующее условие (условие Куранта):

$$\frac{\tau a}{h} \leqslant 1,$$

т. е. условно устойчива. С другой стороны, неявная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0$$

устойчива при любых соотношениях между τ и h, т. е. абсолютно устойчива.

Явные разностные схемы просты в реализации, но являются или условно устойчивыми или условно аппроксимирующими. В случае абсолютно аппроксимирующей разностной схемы условие устойчивости явной схемы имеет, как правило, вид

$$\tau \leqslant \text{const} \cdot h^{\beta} (\beta \geqslant 1),$$

что приводит к излишне мелкому шагу τ и неоправданному увеличению объема вычислений. Абсолютно устойчивые и абсолютно аппроксимирующие схемы находятся только в классе неявных схем.

Неявные разностные схемы более сложны в реализации при переходе с одного временного слоя на другой, но зато шаг τ может быть выбран сколь угодно большим и тем самым может определяться исключительно требованием точности.

Теоремы сходимости для разностных схем, аппроксимирующих линейные дифференциальные уравнения, позволяют сводить исследование сходимости разностной схемы к исследованию ее устойчивости.

Исследование аппроксимации разностной схемы соответствующего гиперболич. уравнения сравнительно просто в случае гладких решений, носит локальный характер и по существу сводится к разложению в ряд Тейлора; в случае же разрывных решений это — сложная задача, сводящаяся к проверке интегральных законов сохранения. Исследование устойчивости является значительно более сложной задачей.

Для разностных схем, аппроксимирующих гиперболич. уравнения с постоянными коэффициентами, устойчивость исследуется методом Фурье, а именно, оценивается норма образа Фурье оператора шага разностной схемы. Так как спектральный радиус матрицы образа Фурье оператора шага не превосходит нормы матрицы, то отсюда следует необходимый критерий устойчивости: для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы спектральный радиус образа Фурье оператора шага не превосходил величины $1+O(\tau)$, где τ — шаг разностной схемы по оси t. Это условие является необходимым и для разностных схем с переменными коэффициентами и при ряде дополнительных ограничений является достаточным условием устойчивости разностной схемы. Для исследования устойчивости разностных схем с переменными коэффициентами, а также для нек-рых нелинейных уравнений применяются: метод мажорантных или априорных оценок; локальный алгебраич. метод.

Метод априорных оценок аналогичен соответствующему методу для дифференциальных уравнений, но в разностном случае его реализация встречает большие трудности, что связано со спецификой разностного анализа, в к-ром, в отличие от априорных оценок в теории дифференциальных уравнений, многие соотношения принимают громоздкий вид.

Простейшей мажорантной оценкой является оценка для разностных схем с положительными коэффициентами.

Напр., пусть для уравнения (2) с $a=a(x)$ рассматривается разностная схема:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0, \quad a_j=a(jh). \tag{5}$$

Тогда при условии

$$0\leqslant 1-\varkappa_j\leqslant 1, \quad \varkappa_j=\frac{\tau a_j}{h},$$

справедлива оценка

$$\|u^{n+1}\|\leqslant\|u^n\|,$$

где

$$\|u^n\|=\max_j|u_j^n|.$$

Отсюда следует равномерная устойчивость схемы (5) в пространстве C. Оценка переносится на разностные схемы, аппроксимирующие гиперболич. системы уравнений в инвариантах.

Весьма важный, хотя и ограниченный класс разностных схем составляют разностные схемы с положительными коэффициентами и матрицами (так наз. м а ж о р а н т н ы е с х е м ы). Если коэффициенты таких разностных схем есть симметричные, положительные матрицы, липшиц-непрерывные по x, то такие схемы устойчивы в пространстве L_2. Как правило, это разностные схемы первого порядка аппроксимации, в к-рых производные аппроксимируются односторонними разностями. При аппроксимациях более высокого порядка, когда берутся центральные разности, как правило, положительные коэффициенты не получаются. В этом случае используют априорные оценки более общего типа в пространствах W_2^p.

Пусть, напр., (1) — система уравнений акустики, где

$$w=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix}0 & a\\1 & 0\end{pmatrix};$$

причем функции $a(x,\ t)$, $u(x,\ t)$, $v(x,\ t)$ периодичны по x с периодом 2π. Априорная оценка для разностной схемы

$$\left.\begin{aligned}\frac{u^{n+1}(x)-u^n(x)}{\tau}&=a\frac{v^{n+1}(x+h)-v^{n+1}(x)}{h},\\ \frac{v^{n+1}(x)-v^n(x)}{\tau}&=\frac{u^{n+1}(x)-u^{n+1}(x-h)}{h}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

имеет вид

$$\|E^{n+1}\|^2\leqslant\frac{1+b_1\tau}{1+b_2\tau}\|E^n\|^2,$$

где

$$\|E\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(u^2+av^2)\,dx,$$

$$b_1=\sup_{x,\ n,\ \tau}\left|\frac{a^{n+1}(x)-a^n(x)}{\tau a^n(x)}\right|,$$

$$b_2=\sup_{x,\ n,\ h}\left(\frac{1}{\sqrt{a^{n+1}(x+h)}}\left|\frac{a^{n+1}(x+h)-a^{n+1}(x)}{h}\right|\right).$$

Приведенная оценка доказывает устойчивость разностной схемы (6) и аналогична энергетич. неравенству для системы уравнений акустики.

В основе локально алгебраич. метода лежит изучение свойств локального разностного оператора, получаемого из соответствующего разностного оператора с переменными коэффициентами «замораживанием» коэффициентов. Тем самым анализ устойчивости разностного оператора с переменными коэффициентами заменяется анализом целого семейства операторов с постоянными коэффициентами. Локальный критерий устойчивости является обобщением метода «замораживания» коэффициентов, используемого в теории дифференциальных уравнений.

К локальному критерию устойчивости примыкает диссипативный критерий устойчивости. Разностная схема наз. диссипативной порядка ν (ν — четное число), если существует такое $\delta>0$, что

$$|\rho| \leqslant 1-\delta|\xi|^{\nu},$$
$$|\xi| = |kh| \leqslant \pi,$$

где ρ — максимальное по модулю собственное число матрицы перехода (образ Фурье оператора шага) разностной схемы, k — дуальное переменное. Тогда, если разностная схема имеет порядок аппроксимации $2r+1$ ($2r+2$), $r=0, 1, 2, \ldots$, и является диссипативной порядка $2r+2$ ($2r+4$), то для гиперболических систем дифференциальных уравнений 1-го порядка с эрмитовыми матрицами разностная схема будет устойчива в L_2.

При исследовании устойчивости разностных схем для нелинейных гиперболич. уравнений (в частности, уравнений газовой динамики) применяется метод дифференциального приближения, к-рый заменяет анализ разностной схемы анализом ее дифференциального приближения.

Например, дифференциальное приближение разностной схемы (4) для уравнения (2) строится следующим образом: разложение в (4) функции

$$u_j^{n+1} = u(jh,\ (n+1)\tau),$$
$$u_{j-1}^{n} = u((j-1)h,\ n\tau)$$

в ряды Тейлора относительно точки $x=jh$, $t=n\tau$ по параметрам τ и h приводит к Г-форме дифференциального представления разностной схемы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\tau^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} +$$
$$+ a\frac{\partial u}{\partial x} + a\sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} h^l}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial x^l} = 0. \qquad (7)$$

Исключение в (7) производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3},\ \ldots$$

приводит к П-форме дифференциального представления разностной схемы (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}, \qquad (8)$$

где C_l — некоторые коэффициенты, зависящие от τ, h, a; причем $C_l = O(\tau^{l-1}, h^{l-1})$. Исключение в (7) и (8) членов порядка $O(\tau^2, h^2)$ приводит соответственно к Г-форме первого дифференциального приближения разностной схемы (4):

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и к П-форме первого дифференциального приближения разностной схемы (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$C_2 = \frac{ah}{2}\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right). \qquad (9)$$

В линейном случае для ряда разностных схем показано, что из корректности первого дифференциального приближения следует устойчивость соответствующей разностной схемы. Так, в рассмотренном выше случае разностной схемы (4) корректность уравнения (9) означает, что $C_2 \geqslant 0$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие $a\tau/h \leqslant 1$ устойчивости схемы (4). Члены с четными производными в уравнении (8) ответственны за диссипативные свойства разностной схемы, а с нечетными производными — за дисперсионные свойства разностной схемы.

Под диссипацией разностной схемы (4) понимается величина

$$d=1-|\rho|^2=1-e^{\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{\tau}{h^{2l}}C_{2l}\xi^{2l}}$$

где

$$\rho=1-\frac{a\tau}{h}(1-e^{-i\xi})$$

— множитель усиления схемы; под дисперсией разностной схемы (4) — величина

$$\chi=\varkappa a\xi-\arg\rho=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\tau}{h^{2l+1}}C_{2l+1}\xi^{2l+1}.$$

Диссипативные члены в (8) определяют свойства аппроксимационной вязкости схемы (т. е. некоторого механизма сглаживания в разностной схеме). На вид диссипативных членов влияют как искусственные диссипативные члены, вводимые в исходное дифференциальное уравнение, так и структура самой разностной схемы. Первое дифференциальное приближение дает главный член аппроксимационной вязкости. Метод дифференциального приближения широко используется при исследовании разностных схем для нелинейных уравнений и позволяет объяснить эффекты неустойчивости разностных схем, наблюдаемые в конкретных расчетах и не улавливаемые локально методом Фурье.

Основой построения разностных схем в многомерных случаях являются методы расщепления (слабой аппроксимации) и дробных шагов, позволяющие сводить интегрирование исходного многомерного уравнения к интегрированию уравнений более простой структуры (см. *Дробных шагов метод*).

Получают развитие методы решения гиперболич. уравнений, основанные на методе конечных элементов, к-рый можно рассматривать как разностный метод на специальной нерегулярной сетке.

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., 1973; [2] Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972; [3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений..., М., 1968; [4] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [5] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 5, с. 1173–87; [6] Сердюкова С. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 1, с. 52–55.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО гладкой динамической системы $\{S^t\}$ — компактное подмножество F фазового многообразия M, целиком состоящее из траекторий, в окрестности каждой из к-рых поведение (по отношению к ней) всех соседних траекторий (включая и те, к-рые не лежат в F) напоминает поведение траекторий возле *седла*. Точнее, Г. м. гладкой динамич. системы $\{S^t\}$ — это такое компактное инвариантное подмножество F фазового многообразия M, что в каждой точке $x\in F$ в касательном пространстве T_xM к M имеются подпространства E^s_x и E^u_x, для к-рых выполняются следующие два условия. 1) Действие дифференциалов $\tilde{S}^t_x: T_xM\to T_{S^tx}M$ отображений $S^t: M\to M$ в точке x на векторы $\xi\in E^s_x$, $\eta\in E^u_x$ удовлетворяет неравенствам (см. *Дифференцирование отображений*):

$$|\tilde{S}^t_x\xi|\leqslant a|\xi|e^{-ct}\text{ при }t\geqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\xi|\geqslant b|\xi|e^{-ct}\text{ при }t\leqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\eta|\leqslant a|\eta|e^{ct}\text{ при }t\leqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\eta|\geqslant b|\eta|e^{ct}\text{ при }t\geqslant 0$$

с нек-рыми константами a, b, $c>0$, не зависящими от x. 2) Если $\{S^t\}$ — каскад (т. е. время t принимает целочисленные значения), то

$$T_xM=E^s_x\oplus E^u_x,$$

а если $\{S^t\}$ — поток, то

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_x \oplus E^n_x,$$

где E^n_x — одномерное подпространство, натянутое на вектор фазовой скорости (тем самым предполагается, что последний нигде на F не обращается в нуль). Кроме того, для удобства нек-рых формулировок бывает целесообразно причислить к Г. м. такие положения равновесия потоков, для к-рых собственные значения матрицы линеаризованной системы расположены вне мнимой оси.

Подпространство E^s_x наз. *устойчивым*, E^u_x — *неустойчивым*, E^n_x — *нейтральным*. Точки $y \in M$, для к-рых $S^t y$ неограниченно сближается с $S^t x$ при $t \to \infty$, образуют нек-рое гладкое многообразие W^s_x, касающееся E^s_x в точке x; оно наз. *устойчивым многообразием точки* x. Объединение W^s_x для всех x, лежащих на одной траектории, наз. *устойчивым многообразием* этой *траектории*. Аналогично вводятся неустойчивые многообразия точки и траектории.

Классич. пример Г. м. потока — периодич. траектория, для к-рой лишь один мультипликатор уравнения в вариациях равен по модулю единице. У нек-рых систем все фазовое пространство является Г. м. (см. *У-система*). Много примеров Г. м. было обнаружено при изучении динамич. систем классич. происхождения (напр., в небесной механике, см. [1]). В общем виде Г. м. были введены С. Смейлом (S. Smale) в 1965 (см. [2]), и с тех пор они играют важную роль в теории гладких динамич. систем, будучи как объектом исследования, так и составной частью многих примеров (см. также [3]).

Лит.: [1] Кушниренко А. Г., Каток А. Б., Алексеев В. М., Гладкие динамические системы, в кн.: Девятая летняя матем. школа, К., 1972, с. 50—341; [2] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [3] Ньютецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975.

Д. В. Аносов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ ПРИНЦИП: пусть области D и G лежат соответственно в плоскостях z и w и имеют каждая не менее чем по три граничные точки, пусть $w = f(z)$ — функция, регулярная в D и принимающая значения в G, и пусть $d\sigma_z$ и $d\sigma_w$ — линейные элементы в гиперболич. метрике областей D и G в точках соответственно z и $w = f(z)$; тогда справедливо неравенство

$$d\sigma_w \leqslant d\sigma_z.$$

Равенство в какой-либо точке $z_0 \in D$ имеет место только в том случае, если $f(z) \equiv w[\zeta(z)]$ в D, где функция $\zeta = \zeta(z)$ конформно отображает область D на круг $E: |\zeta| < 1$, а функция $w = w(\zeta)$ конформно отображает круг E на область G. Г. м. п. обобщает *Шварца лемму* на многосвязные области, в к-рых может быть определена гиперболич. метрика.

В формулировке Г. м. п. предположение регулярности функции $f(z)$ в D может быть заменено более общим предположением: $f(z)$ — аналитич. функция, определенная в D каким-либо своим элементом и продолжимая в D по любому пути.

Этот же принцип можно сформулировать также относительно поведения гиперболич. длины кривых, гиперболич. расстояния или гиперболич. площади при указанном отображении. Именно, если L — спрямляемая кривая в D, то (в обозначениях статьи *Гиперболическая метрика*)

$$\mu_G(f(L)) \leqslant \mu_D(L).$$

Если z_1 и z_2 — две точки области D, то

$$r_G(f(z_1),\ f(z_2)) \leqslant r_D(z_1,\ z_2).$$

Если B — область в D, то

$$\Delta_G(f(B)) \leqslant \Delta_D(B).$$

В каждом из этих неравенств равенство достигается только в указанном выше случае.

Приведенный выше результат относительно гиперболич. расстояния показывает, что при отображении $w=f(z)$ образ гиперболич. круга с центром в точке $z_0 \in D$ содержится в гиперболич. круге с центром в точке $w_0=f(z_0)$ того же гиперболич. радиуса.

Этот результат распространяет на случай многосвязных областей следующий факт теории конформного отображения (инвариантная форма леммы Шварца): при отображении круга $E: |z|<1$ регулярной в нем функцией

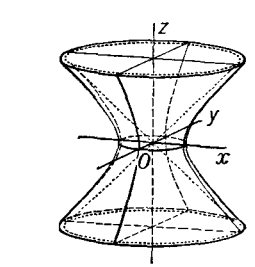
$$w=f(z), \quad |f(z)|<1$$

в E, гиперболич. расстояние между образами точек z_1 и z_2 круга E не превосходит гиперболич. расстояния между самими точками z_1 и z_2 и равно этому расстоянию только в случае дробно-линейного преобразования круга E на себя.

Г. м. п. следующим образом связан с *Линделёфа принципом*. Если области D и G обладают функциями Грина и односвязны, то оба принципа совпадают. Если же D односвязна, а G многосвязна, то Г. м. п. дает более точную оценку области, в к-рой содержится образ гиперболич. круга в D, определяемого неравенством $g_D(z, z_0)>\lambda$ при отображении $w=f(z)$ (где через $g_D(z, z_0)$ обозначена функция Грина области D с логарифмич. полюсом в точке $z_0 \in D$). Кроме того, Г. м. п. применим и тогда, когда нельзя говорить о принципе Линделёфа, напр., в случае области, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, но не имеющей функции Грина.

Г. В. Кузьмина.

ГИПЕРБОЛОИД — незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*. Существуют два вида Г.: однополостный Г. и двуполостный Г.



В надлежащей системе координат (см. рис.) уравнение однополостного Г. имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а двуполостного — вид:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Числа a, b и c (и отрезки такой длины) наз. полуосями Г. В сечении Г. плоскостями, проходящими через ось Oz, получаются гиперболы. Сечения Г. плоскостями, перпендикулярными оси Oz, являются эллипсами. Сечение однополостного Г. плоскостью $z=0$ наз. горловым эллипсом. Г. имеет три плоскости симметрии. Конус, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

наз. асимптотическим конусом. Если $a=b=c$, то Г. наз. правильным. Г., у к-рого две полуоси равны, наз. Г. вращения. Однополостный Г. есть линейчатая поверхность; уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку

(x_0, y_0, z_0) однополостного Г., имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{-\frac{bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c},$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — решение *гипергеометрического уравнения*

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0. \qquad (1)$$

Г. ф. может быть определена с помощью так наз. ряда Гаусса:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)={}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)=F(\beta, \alpha; \gamma; z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}, \qquad (2)$$

где α, β, γ — параметры, принимающие любые действительные или комплексные значения, кроме $\gamma=0, -1, -2, \ldots$, z — комплексное переменное, $(x)_n\equiv x(x+1)\ldots(x+n-1)$. Функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ наз. гипергеометрической функцией 1-го рода. Второе линейно независимое решение гипергеометрич. уравнения (1)

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma; z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\gamma)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$$

наз. гипергеометрической функцией 2-го рода.

Ряд (2) сходится абсолютно и равномерно при $|z|<1$; сходимость распространяется и на единичную окружность, если $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$; при $0\leqslant\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<1$ сходится во всех точках единичной окружности, кроме $z=1$. Однако существует аналитич. продолжение Г. ф. (2) во внешность единичной окружности $|z|>1$ с разрезом $(1, \infty)$ (см. [1]). Функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — однозначная аналитическая в комплексной плоскости z с разрезом $(1, \infty)$. Если α или β — нуль или целое отрицательное число, то ряд (2) обрывается на конечном числе членов и Г. ф. представляет собой полином относительно z.

При $\gamma=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, Г. ф. не определена, однако

$$\lim_{\gamma\to-n}\frac{F(\alpha, \beta; \gamma; z)}{F(\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}F(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z).$$

Элементарные соотношения. Шесть функций

$$F(\alpha\pm1; \beta; \gamma; z),\quad F(\alpha, \beta\pm1; \gamma; z)\quad F(\alpha, \beta; \gamma\pm1; z)$$

наз. смежными с Г. ф. $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$. Между функцией $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ и любыми двумя смежными с ней существует линейная зависимость. Напр.,

$$\gamma F(\alpha, \beta-1; \gamma; z)+(\alpha-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=$$
$$=\gamma F(\alpha-1, \beta; \gamma; z).$$

15 формул такого типа впервые были найдены К. Гауссом (C. Gauss, см. [2], [3]). Ассоциированные функции $F(\alpha+m, \beta+n; \gamma+l; z)$, где m, n, l — целые числа, могут быть получены повторными применениями соотношений Гаусса. Имеют место формулы дифференцирования

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha, \beta; \gamma; z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z).$$

Уравнение (1) имеет 24 решения вида

$$z^{\rho}(1-z)^{\sigma}F(\alpha', \beta'; \gamma'; z'),$$

где ρ, σ, α', β' и γ' — линейные функции α, β и γ, z и z' связаны дробно-линейным преобразованием. Любые три решения линейно зависимы (см. [2]). Существуют квадратичные, кубичные и более высокого порядка преобразования (см. [2] — [5]).

Основные интегральные представления. Если $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$ и $|\arg(1-z)| < \pi$, то имеет место формула Эйлера:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt. \qquad (3)$$

Разлагая $(1-tz)^{-\alpha}$ в биномиальный ряд и применяя контурные интегралы для бета-функции, можно получить другие интегральные представления (см. [2]). Интеграл (3) и другие аналогичные формулы, определяющие аналитич. функцию от z, однозначную во всей плоскости z, также могут служить для аналитич. продолжения функции $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ в область $|\arg(-z)| < \pi$. Существуют и другие аналитич. продолжения (см. [1], [2]).

Асимптотическое поведение Г. ф. при больших значениях $|z|$ полностью описывается с помощью формул, дающих аналитич. продолжение в окрестность точки $z = \infty$ (см. [1] — [3]). Если α, β, z — фиксированные числа и $|\gamma|$ достаточно велико, $|\arg\gamma| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то при $|z| < 1$:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} + O(|\gamma|^{-n+1}).$$

При $|z| > 1$ имеется аналогичное выражение.

Для фиксированных α, γ и z, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, $0 < |z| < 1$, и $\beta \to \infty$, $-\frac{3\pi}{2} < \arg \beta z < \frac{\pi}{2}$,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{\beta z}{\beta}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta z)_n}{(\gamma)_n n!}\right][1 + O(|\beta|^{-1})].$$

См. также [2], [5], [6].

Представления функций через Г. ф. Элементарные функции:

$$(1+z)^n = F(-n, 1; 1, -z),$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z),$$

$$e^z = \lim_{b\to\infty} F\left(1, b; 1; \frac{z}{b}\right),$$

$$\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$\operatorname{arctg} z = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right),$$

$$\sin nz = n \sin z F\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 z\right);$$

$$\cos nz = F\left(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n; \frac{1}{2}; \sin^2 z\right);$$

полные эллиптич. интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right),$$

$$E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right);$$

присоединенные функции Лежандра:

$$P_n^m(z) = \frac{(z+1)^{m/2}}{(z-1)^{m/2}} \frac{1}{\Gamma(1-m)} F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Чебышева:

$$T_n(z) = F\left(-n,\ n;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Лежандра:

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \tfrac{1-z}{2}\right);$$

ультрасферические многочлены:

$$\frac{n!}{(2a)_n} C_n^{(a)}(z) = F\left(-n,\ n+2a;\ a+\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Якоби:

$$\frac{n!}{(a+1)_n} P_n^{(a,\,b)}(z) = F\left(-n,\ a+1+b+n;\ a+1;\ \tfrac{1-z}{2}\right).$$

Обобщения Г. ф. Обобщенной Г. ф.

$$pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \cdots (\gamma_q)_n} z^n$$

наз. решение гипергеометрич. уравнения $(q+1)$-го порядка (см. [2]). Имеются и другие обобщения Г. ф., напр., на случай многих переменных (см. [2]).

Лит.: [1] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, [т. 1], пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [3] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971; [4] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1835, Bd 15, S. 39—83, 127—72; [5] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, N. Y., 1964; [6] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2, Трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [7] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [8] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959, доп. 1; [9] An index of mathematical tables, 2 ed., v. 1, 2, Oxford, 1962.

Э. А. Чистова.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД, ряд Гаусса,— ряд вида

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n. \quad (*)$$

Г. р. имеет смысл, если γ не равно нулю или целому отрицательному числу; он сходится при $|z|<1$. Если, кроме того, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta)>0$, то Г. р. сходится и при $z=1$. В этом случае справедлива формула Гаусса

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Аналитич. функция, определяемая с помощью Г. р., наз. *гипергеометрической функцией.*

Обобщенным гипергеометрическим рядом наз. ряд вида

$$pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \cdots (\gamma_q)_n} z^n,$$

где $(x)_n = x(x+1)\ldots(x+n-1)$. В этих обозначениях ряд $(*)$ записывается как ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$. *Э. А. Чистова.*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, заданное формулой

$$p_m = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m = 0, 1 \ldots, \qquad (*)$$

где M, N и n — целые неотрицательные числа и $M \leqslant N$, $n \leqslant N$ (здесь C_a^b — биномиальный коэффициент). Г. р. обычно связано с выбором без возвращения, а именно: формула $(*)$ указывает вероятность получения ровно m «отмеченных» элементов в случайной выборке объема n из генеральной совокупности, содержащей N

элементов, среди к-рых M «отмеченных» и $N-M$ «неотмеченных» элементов. При этом вероятность (*) определена лишь для

$$\max(0,\ M+n-N) \leqslant m \leqslant \min(n,\ M).$$

Однако определение (*) можно использовать при всех $m \geqslant 0$, т. к. можно считать, что $C_a^b = 0$ при $b > a$, поэтому равенство $P_m = 0$ нужно понимать как невозможность получить в выборке m «отмеченных» элементов. Сумма значений p_m, распространенная на все выборочное пространство, равна 1. Если обозначить $M/N = p$, то (*) можно переписать в иной форме:

$$p_m = C_n^m \frac{A_{Np}^m A_{Nq}^{n-m}}{A_N^n},$$

где

$$A_a^b = C_a^b b! \quad \text{и} \quad p + q = 1.$$

Если p постоянна и $N \to \infty$, то имеет место биномиальное приближение

$$p_m \sim C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Среднее значение Г. р. не зависит от N и совпадает со средним *пр.* соответствующего *биномиального распределения* Дисперсия Г. р.

$$\sigma^2 = npq \frac{N-n}{N-1}$$

не превосходит дисперсии биномиального закона $\sigma^2 = npq$. При $N \to \infty$ моменты любого порядка Г. р. стремятся к соответствующим значениям моментов биномиального распределения. Производящая функция Г. р. имеет вид:

$$P(x) = \frac{A_{N-M}^n}{A_N^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{A_M^j A_n^j}{A_{N-M-n+j}^j} \frac{x^j}{j!}.$$

Ряд в правой части представляет собой *гипергеометрическую функцию* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, где $\alpha = -n$, $\beta = -M$, $\gamma = N - M - n + 1$ (этому обстоятельству распределение обязано своим названием). Вероятность (*) и соответствующая функция распределения табулированы в широких пределах.

Лит.: [1] Lieberman G. I., Owen D. B., Tables of the Hypergeometric Probability Distribution, Stanford, 1961; [2] Оуэн Д. Б., Сборник статистических таблиц. Обработка таблиц, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

А. В. Прохоров.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, уравнение Гаусса,— линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$z(z-1)w'' + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma]w' + \alpha\beta w = 0, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = \text{const}, \tag{1}$$

или, в самосопряженной форме,

$$[z^\gamma (z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma} w']' + \alpha\beta z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} w = 0.$$

Переменные z, w и параметры α, β, γ в общем случае могут принимать любые комплексные значения. После подстановки

$$w = z^{-\gamma/2}(z-1)^{(\gamma-\alpha-\beta-1)/2} u$$

получается приведенная форма уравнения (1):

$$u'' + \left[\frac{1-\lambda^2}{4z^2} + \frac{1-\nu^2}{4(z-1)^2} - \frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{4z(z-1)}\right] u = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = 1-\gamma$, $\mu = \alpha-\beta$, $\nu = \gamma-\alpha-\beta$.

Уравнение (1) подробно изучал К. Гаусс [1] в связи с развитой им теорией *гипергеометрических рядов*, но еще раньше это уравнение (и его решение) рассматривал Л. Эйлер (L. Euler).

Решения уравнения (1) выражаются через *гипергеометрическую функцию* $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. Если γ не равно

целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$w = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; z) + \\ + C_2 z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z), \qquad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; представление (3) справедливо в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$. В частности, в действительном случае формула (3) дает общее решение уравнения (1) на интервале $0<z<1$. Для целых значений γ общее решение имеет более сложный вид (возможно существование членов, содержащих логарифмы).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (1) можно выбирать и иные функции, отличные от указанных в (3). Напр., если α β не равно целому числу, то

$$w = C_1 (-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; z^{-1}) + \\ + C_2 (-z)^{-\beta} F(\beta-\gamma+1, \beta, \beta-\alpha+1; z^{-1})$$

есть общее решение уравнения (1) в комплексной плоскости z с разрезом $(0, \infty)$ (см. [2], [3]).

Г. у. включает как частные случаи ряд дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях; многие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка преобразованием неизвестной функции и независимой переменной приводятся к уравнению (1) (см. [4]). Особенно большое значение имеет близкое уравнению (1) *вырожденное гипергеометрическое уравнение*. Отношение $s(z)$ двух линейно независимых решений уравнения (2) удовлетворяет *Шварца уравнению*, тесно связанному с задачей конформного отображения полуплоскости на треугольник, ограниченный тремя дугами окружностей. Изучение обратной функции $z(s)$ приводит к понятию *автоморфной функции* (см. [5]).

Имеются линейные уравнения высших порядков, свойства решений к-рых аналогичны свойствам гипергеометрич. функции: решение уравнения $(q+1)$-го порядка

$$\left[z\frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma_j-1\right) - \right. \\ \left. - z\prod_{i=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_i\right)\right] w = 0$$

есть обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q(\alpha_i, \gamma_j, z)$, содержащая $p+q$ параметров. В частности, обобщенное Г. у. 3-го порядка, имеющее решение ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2; z)$, можно представить в форме

$$z^2(1-z)w''' + [1+\gamma_1+\gamma_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z]zw'' + \\ + [\gamma_1\gamma_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)z]w' - \\ - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 w = 0.$$

Лит.: [1] Gauss C., «Comm. recentiores Soc. Göttingen», 1812, Bd 2; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [5] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950. *Н. Х. Розов.*

ГИПЕРГОМОЛОГИЙ ФУНКТОР — набор функторов $\mathcal{L}_nF$ на категории комплексов, связанный с нек-рым функтором F. Именно, пусть $F: A \to B$ — ковариантный аддитивный функтор из абелевой категории A с достаточным числом проективных объектов в абелеву категорию B. Пусть далее $K.$ — цепной комплекс со значениями в A и $L..$ — резольвента Картана — Эйленберга комплекса $K.$, состоящая из проективных объектов. Тогда бикомплекс $F(L..)$ определяет гомологии $H_n(F(L..)) = \mathcal{L}_nF(K.)$ и две сходящиеся к ним спект-

ральные последовательности с начальными членами

$$'E^2_{p,\,q} = H_p\,(L_q F\,(K.)) \quad \text{и} \quad ''E^2_{p,\,q} = L_p F\,(H_q\,(K.)).$$

Эти гомологии и спектральные последовательности функториально зависят от $K.$ и наз. соответственно функторами гипергомологий для F и спектральными функторами гипергомологий для F. Г. ф. $\mathcal{Z}$. F является гомологич. функтором на категории комплексов в следующих важных случаях: когда F перестановочен с индуктивными пределами; когда объекты категории A имеют проективные резольвенты длины $\leqslant n$; если рассматривать его на категории комплексов с положительными степенями.

Двойственным образом определяются функторы гиперкогомологий.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961.

В. И. Данилов.

ГИПЕРГРАФ — обобщение понятия *графа*. Г. задается множеством V, элементы к-рого наз. вершинами, и семейством $\mathcal{E}$ подмножеств множества V, называемых ребрами Г.; Г. обозначается $(V, \mathcal{E})$. Понятие Г. является вариантом давно известных понятий *комплекса*, *блок-схемы*, а также понятия *сети*.

Две вершины u и v Г. наз. смежными, если существует ребро, содержащее эти вершины. Вершина v и ребро E Г. наз. инцидентными, если $v \in E$. Г. H с n вершинами и m ребрами можно задать матрицей инцидентности, т. е. матрицей $\|a_{ij}\|$ размера $n \times m$, в к-рой столбцы соответствуют ребрам, а строки — вершинам Г. и

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in E_j, \\ 0, & \text{если } v_i \notin E_j, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m.$$

Всякой прямоугольной матрице M из нулей и единиц можно сопоставить Г., для к-рого M является матрицей инцидентности. Г. H^* наз. двойственным по отношению к Г. H, если матрица инцидентности Г. H^* получается транспонированием матрицы инцидентности Г. H. Число ребер Г., инцидентных данной вершине, наз. степенью вершины. Степенью ребра наз. число вершин Г., инцидентных этому ребру. Г. $(V', \mathcal{E}')$ наз. подграфом Г. $(V, \mathcal{E})$, если $V' \subseteq V$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ и вершина v из V' и ребро E из $\mathcal{E}'$ инцидентны в Г. $(V', \mathcal{E}')$ тогда и только тогда, когда они инцидентны в Г. $(V, \mathcal{E})$.

Г. можно изобразить на плоскости, сопоставляя вершинам Г. точки плоскости, а ребрам — связные области, охватывающие вершины, инцидентные этим ребрам. Напр., Г. H с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ и семейством ребер

$$\mathcal{E} = \{E_1 = \{v_1\},\ E_2 = \{v_1, v_3\},\ E_3 = \{v_1, v_2, v_3\},$$
$$E_4 = E_5 = \{v_2, v_4\},\ E_6 = \{v_3, v_4, v_5\},\ E_7 = \varnothing\}$$

можно изобразить на плоскости, как показано на рис.

Г. H можно представлять *графом двудольным* $K(H)$, в к-ром вершины одной доли U_1 соответствуют вершинам Г., а вершины другой доли U_2 — ребрам Г. H. При этом две вершины u' из U_1 и u'' из U_2 соединены в графе $K(H)$ ребром, если вершина Г., соответствующая вершине u', инцидентна ребру Г., соответствующему вершине u''. Г. является графом, если каждое ребро его имеет степень, равную 2. Важным частным случаем понятия «Г.» является *матроид*. Многие понятия тео-

рии графов, такие, как связность, планарность, хроматич. число, числа внутренней и внешней устойчивости, переносятся и на Г. На Г. переносятся также многие утверждения, справедливые для графов.

Лит.: [1] Зыков А. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 6, с. 89—154; [2] Berge C., Graphes et hypergraphes, P., 1970.

А. А. Сапоженко.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ФУНКЦИЯ — функция $w(z)$ гиперкомплексного переменного z (см. *Гиперкомплексное число*) над полем действительных чисел, т. е. функция на конечномерной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$. В более узком смысле под Г. п. ф. понимается функция $w(z)$ со значениями в той же алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. функция $w(z)$ может быть представлена в виде

$$w(z)=\sum_{k=0}^{n-1} e_k u_k,$$

где e_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$,— базис алгебры $\mathfrak{A}$, а $u_k=u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $k=0, 1, \ldots, n-1$,— система n действительных функций от n действительных переменных. Теория Г. п. ф. наиболее развита в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра *кватернионов*.

Аналитические (регулярные) Г. п. ф. представляют собой обобщения в различных направлениях аналитич. функций одного комплексного переменного. При этом, в силу неэквивалентности различных определений аналитичности в случае произвольной алгебры, существуют различные понятия аналитической Г. п. ф.

В современных исследованиях наибольшее внимание привлекают регулярные Г. п. ф. в смысле Фютера, или F-аналитические Г. п. ф. (см. [1]). Г. п. ф. $w(z)$ наз. праворегулярной Г. п. ф. в точке z_0, если в этой точке справедливо дифференциальное уравнение (условие Фютера)

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^{(k)} e_k=0,$$

где

$$w^{(k)}=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}e_h$$

— частная производная функции w по x_k, причем все производные предполагаются непрерывными. Функция $w(z)$ наз. леворегулярной Г. п. ф., если

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k w^{(k)}=0.$$

В случае некоммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ эти понятия не равносильны. Сумма и разность праворегулярных Г. п. ф. праворегулярны, но для произведения и частного это неверно. Степени переменного z не праворегулярны. Имеются ряды Тейлора и Лорана по специально построенным аналогам степеней. Условие Фютера равносильно обращению в нуль дифференциала $\delta\omega=0$ гиперкомплексной дифференциальной формы $\omega=wdz$ (для леворегулярных Г. п. ф.— формы $\omega=dzw$); отсюда получается специфическая интегральная теорема.

Аналитической по Шеффересу Г. п. ф. [2] в точке z_0 для случая коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ наз. Г. п. ф., у к-рой дифференциал в этой точке может быть записан в виде

$$dw=\varphi(z)dz,$$

где производная $\varphi(z)=dw/dz$ не зависит от dz. Это условие для коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ равносильно тому, что $d\omega=0$, и интеграл $\int wdz$ не зависит от пути; Г. п. ф., аналитические по Шеффересу, F-регулярны тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k^2=0.$$

Г. п. ф. $w(z)$ наз. аналитической по Хаусдорфу [3] в точке z_0, если ее дифференциал dw есть линейная функция от dz, то есть

$$dw = \sum_{i,\ k=0}^{n-1} \varphi_{ik} e_i\, dz\, e_k,$$

где φ_{ik} — действительные функции от $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Аналог степенных рядов здесь строится проще, но интеграл зависит от пути. Для коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ определения Хаусдорфа и Шефферса эквивалентны.

Лит.: [1] Fueter K. R., «Elem. Math.», 1948, Bd 3, S. 89—94; [2] Scheffers G., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig Math.-phys. Kl.», 1893, Bd 45, S. 828—48; [3] Hausdorff F., там же, 1900, Bd 52, S. 43—61; [4] Кристалинский Р. Х., «Уч. зап. Смоленского пед. ин-та», 1965, вып. 14, с. 91—95. *Е. Д. Соломенцев.*

ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО — элемент конечномерной алгебры с единицей над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (ранее называвшейся гиперкомплексной системой). Исторически Г. ч. возникли как обобщение *комплексных чисел*. Действия над комплексными числами соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости (сдвигу, вращению, растяжению и их комбинациям). При попытках построить числа, к-рые играли бы для трехмерного пространства роль комплексных чисел для плоскости, выяснилось, что здесь не может быть полной аналогии; это привело к созданию и развитию теории систем Г. ч.

Гиперкомплексная система ранга n получается введением умножения в n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего аксиомам алгебры над полем. Пусть 1 — единица гиперкомплексной системы и $1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ — некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$. Г. ч.

$$\bar{\alpha} = a_0 - a_1 i_1 - \ldots - a_n i_n$$

из гиперкомплексной системы U наз. сопряженным Г. ч.

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n.$$

Пусть $U^{(2)} = \{u_1 + u_2 e\}$, где $u_1,\ u_2 \in U$, а e — некоторый новый символ. Множество $U^{(2)}$ можно превратить в гиперкомплексную систему, определяя сложение формулой

$$(u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) e$$

и умножение формулой

$$(u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) = (u_1 v_1 - \bar{v}_2 u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \bar{v}_1) e.$$

Гиперкомплексная система $U^{(2)}$ наз. удвоением гиперкомплексной системы U.

Примеры гиперкомплексных систем: действительные числа, комплексные числа, *кватернионы*, *Кэли числа* (в этом перечне каждая следующая система получается из предыдущей удвоением). Другие примеры — системы *двойных и дуальных чисел*, Г. ч. вида

$$A = a_0 \cdot 1 + \sum_{\gamma=1}^{2^{n-1}} a_\gamma\, i_\gamma,$$

при $n = 4$, наз. числами Клиффорда — Липшица (эти Г. ч. являются элементами *Клиффорда алгебр* ранга 2^n). Важным примером гиперкомплексных систем являются полные матричные алгебры над $\mathbb{R}$.

Иногда в определение системы Г. ч. включают требование ассоциативности умножения или отождествляют понятие алгебры и гиперкомплексной системы.

Лит.: [1] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973; [2] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973. *Н. Н. Вильямс.*

ГИПЕРПЛОСКОСТЬ в векторном пространстве X над полем K — образ (при сдвиге) векторного подпространства M, дополнение к к-рому одномерно, т. е. множество π вида $x_0 + M$ при нек-ром $x_0 \in X$. Г. при $x_0 = 0$ иногда наз. однородной. Подмно-

жество $\pi \subset X$ является Г. в том и только в том случае, когда

$$\pi = \{x : f(x) = \alpha\} \qquad (*)$$

для $\alpha \in K$ и нек-рого ненулевого линейного функционала $f \in X^*$. При этом f и α определяются M с точностью до общего множителя $\beta \neq 0$.

В топологич. векторном пространстве любая Г. либо замкнута, либо всюду плотна; для замкнутости π, определяемой формулой (*), необходима и достаточна непрерывность функционала f. *М. И. Войцеховский.*

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ — 1) Обобщение понятия обычной поверхности трехмерного пространства на случай n-мерного пространства. Размерность Г. на единицу меньше размерности объемлющего пространства.

2) Если M и N — дифференцируемые многообразия, $\dim N - \dim M = 1$ и определено погружение $f : M \to N$, то $f(M)$ — Г. в N. Здесь f — дифференцируемое отображение, дифференциал к-рого df в любой точке $x \in M$ является инъективным отображением пространства M_x, касательного к M в точке x, в пространство $N_{f(x)}$, касательное к N в точке $f(x)$. *В. Т. Базылев.*

3) Г. а л г е б р а и ч е с к а я — подмногообразие алгебраич. многообразия, локально задаваемое одним уравнением. Г. а. в аффинном пространстве A_k^n над полем k задается глобально одним уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Г. а. W в проективном пространстве P_k^n задается уравнением

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

где F — однородная форма от $n+1$ переменных. Степень m этой формы наз. с т е п е н ь ю (п о р я д к о м) г и п е р п о в е р х н о с т и. Замкнутая подсхема W схемы V наз. г и п е р п о в е р х н о с т ь ю, если соответствующий пучок идеалов $I_W \subset O_V$ является пучком главных идеалов. Для связных неособых алгебраич. многообразий это условие означает, что коразмерность W в V равна единице. Для каждой неособой Г. а. $W \subset P_k^n$ порядка m (обозначаемой часто через V_n^m) имеют место следующие факты:

канонич. класс K_W равен $(m-n-1)H_W$, где H_W — класс гиперплоского сечения W;

группы когомологий $H^i(W, O_W) = 0$ для $i \neq 0$, $n-1$, а

$$\dim_k H^{n-1}(W, O_W) = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!};$$

при $n \geqslant 3$ фундаментальная группа (алгебраическая или топологическая, если $k = \mathbb{C}$) $\pi_1(W) = 0$;

при $n \geqslant 4$ группа Пикара $\mathrm{Pic}(W) \simeq Z$ и порождается классом гиперплоского сечения. *И. В. Долгачев.*

4) Г. а н а л и т и ч е с к а я (Г. а.) — множество S в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, к-рое в окрестности каждой своей точки $\zeta \in S$ задается уравнением $f_\zeta(z, t) = 0$, где функция $f_\zeta(z, t)$ непрерывна по параметру $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и при каждом фиксированном t голоморфна по z в независящей от t окрестности $U_\zeta \ni \zeta$, причем $\Sigma |\partial f / \partial z_j| \neq 0$ для всех $(z, t) \in U_\zeta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Другими словами, Г. а. есть множество в $\mathbb{C}^n$, к-рое локально является объединением непрерывного однопараметрич. семейства комплексноаналитич. поверхностей комплексной коразмерности 1. Напр., если функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $\mathrm{grad}\, f \neq 0$ в D, то множества $|f| = 1$, $\mathrm{Re} f = 0$ и т. п. являются Г. а.

Дважды гладкая гиперповерхность S в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ является Г. а. тогда и только тогда, когда ее форма Леви тождественно на S равна нулю или когда S локально псевдовыпукла с обеих сторон. *Е. М. Чирка.*

ГИПЕРПРОСТРАНСТВО н а д т о п о л о г и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м X — пространство, точками к-рого являются элементы нек-рого семейства $\mathfrak{M}$

подмножеств пространства X с той или иной топологией. Обычно $\mathfrak{M}$ — кольцо множеств, хотя априори это не предполагается.

Пример. $P(X)$ — Г. всех подмножеств пространства X; базу топологии образуют множества $\{M,\ F\subset M\subset G\}$ при условии, что F замкнуто в X, G открыто в X и $F\subset G$.

Наиболее распространенным является Г. 2^X, состоящее из всех замкнутых подмножеств топологич. пространства X; предбазу *экспоненциальной топологии* на 2^X образуют множества $\{F, F\subset G\}$ и $\{F, F\cap H\neq\varnothing\}$, где G и H открыты в X, а F пробегает 2^X. Аналогично определяется топология в следующих Г.: во множестве $\mathfrak{S}(X)$ всех бикомпактных подмножеств пространства X, во множестве $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ всех конечных подмножеств пространства X, во множестве $K(X)$ всех подконтинуумов (связных бикомпактов) континуума X и т. п. Эти пространства могут рассматриваться как подпространства Г. 2^X, взятого с экспоненциальной топологией. Если X — *равномерное пространство*, то множество 2^X наделяется естественной равномерной структурой; получающееся при этом равномерное пространство обозначается через $H(X)$. Если X — бикомпакт, то Г. 2^X, $\mathfrak{S}(X)$ и $H(X)$ гомеоморфны между собой и являются бикомпактами. Если X — компактное метризуемое пространство, то таково же и 2^X. Если X — континуум, то 2^X и $K(X)$ — тоже континуумы.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1—2, М., 1966—69; [2] Michael E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 71, № 1, p. 152—82; [3] Пономарев В. И., «Матем. сб.», 1959, т. 48(90), № 2, с. 191—212.

Б. А. Ефимов.

ГИПЕРЦЕНТР — член Z_α верхнего центрального ряда группы G. Первый Г. Z_1 есть *центр группы*; если определены все Z_β, $\beta<\alpha$, то $Z_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}Z_\beta$, если α — предельное порядковое число; Z_α есть полный прообраз центра факторгруппы $G/Z_{\alpha-1}$, если α непредельное. Г. группы локально нильпотентны.

В. М. Копытов.

ГИПЕРЦИКЛ в геометрии Лобачевского — то же, что *эквидистанта*.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — неособая проективная модель аффинной кривой $y^2=f(x)$, где $f(x)$ — многочлен без кратных корней, нечетной степени n (случай четной степени $2k$ сводится к случаю нечетной — $(2k-1)$). Поле функций на Г. к. (поле гиперэллиптич. функций) есть квадратичное расширение поля рациональных функций; в этом смысле оно является простейшим полем алгебраич. функций после поля рациональных функций. Г. к. характеризуются условием существования одномерного линейного ряда g^1_2 дивизоров степени 2, определяющего морфизм Г. к. на проективную прямую степени 2. Род Г. к. равен $(n-1)/2$, поэтому для различных нечетных n Г. к. бирационально неэквивалентны между собой. При $n=1$ получается проективная прямая, при $n=3$ — эллиптич. кривая. По традиции кривые рода 0 или 1 к Г. к. не причисляются. На Г. к. рода $g>1$ отношения регулярных дифференциальных форм порождают подполе рода 0 и это свойство вполне характеризует Г.к.

Лит.: [1] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

В. Е. Воскресенский.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — частный случай *абелева интеграла*

$$\int R(z, w)\,dz, \tag{1}$$

где R — рациональная функция от переменных z, w, связанных алгебраич. уравнением частного вида

$$w^2=P(z), \tag{2}$$

здесь $P(z)$ — многочлен степени $m \geqslant 5$ без кратных корней; при $m=3, 4$ получаются *эллиптические интегралы*, случай $m=5,6$ иногда наз. ультраэллиптическим.

Уравнению (2) соответствует двулистная компактная риманова поверхность F рода $g=(m-2)/2$, если m — четно, и рода $g=(m-1)/2$, если m — нечетно; таким образом, в случае Г. и. $g \geqslant 2$. На F функции z, w, а следовательно и $R(z, w)$, однозначны. Интеграл (1), рассматриваемый как определенный, задается на F как криволинейный интеграл от аналитич. функции, взятый вдоль нек-рого спрямляемого пути L, причем, вообще говоря, задание только начальной и конечной точек пути L не вполне определяет значение интеграла (1).

Как и в общем случае абелевых интегралов, любой Г. и. можно выразить в виде линейной комбинации элементарных функций и канонических Г. и. I, II, III родов, имеющих свой специфич. вид. Так, нормальные Г. и. I рода являются линейными комбинациями Г. и. I рода вида

$$\int \frac{z^{\nu-1}\,dz}{w}, \quad \nu=1, 2, \ldots, g,$$

где $(z^{\nu-1}/w)dz$, $\nu=1, 2, \ldots, g$,— простейший базис абелевых дифференциалов I рода для случая гиперэллиптич. поверхности F. Явные выражения для абелевых дифференциалов II и III родов и для соответствующих Г. и. также легко выписываются (см. [2]). В основных чертах теория Г. и. совпадает с общей теорией абелевых интегралов.

Все рациональные функции $R(z, w)$ от z и w образуют гиперэллиптическое поле алгебраич. функций, соответствующее данному уравнению (2) и имеющее род g. Всякая компактная риманова поверхность рода $g=1$ или $g=2$ допускает эллиптическое или гиперэллиптич. поле, соответственно. Однако уже при $g=3$ существуют компактные римановы поверхности F более сложной структуры, не обладающие этим свойством.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955, гл. 5; [3] Neumann K., Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Lpz., 1884. *Е. Д. Соломенцев.*

ГИПОТЕНУЗА — сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

ГИПОЦИКЛОИДА — плоская кривая, траектория точки окружности, катящейся по другой окружности и имеющей с ней внутреннее касание. Параметрич. уравнения:

$$x=(R-r)\cos\theta + r\cos\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y=(R-r)\sin\theta - r\sin\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

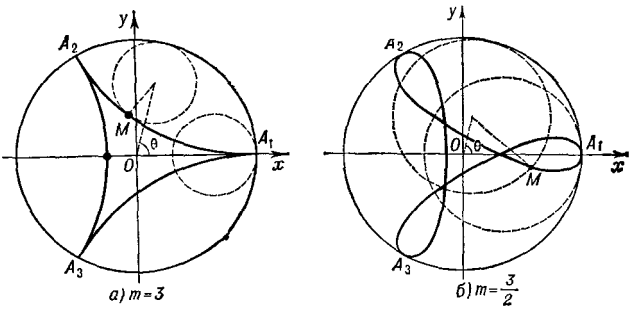
где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, θ — угол, стягиваемый дугой между точками касания окружностей. В зависимости от величины модуля $m=R/r$ получаются Г. различной формы. При m целом кривая состоит из m непересекающихся ветвей (см. рис. *а*). Точки возврата $A_1, \ldots, A_m$ имеют полярные координаты $\rho=R$, $\varphi=2k\pi/m$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается; при m рациональном Г. (см. рис., *б*) — замкнутая алгебраич. кривая. Длина дуги от точки $\theta=0$:

$$l=\frac{8R(m-1)}{m^2}\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{4R(m-1)}{m^2(m-2)}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Если точка находится не на катящейся окружности, а лежит вне (внутри) ее, то кривая наз. удлиненной (укороченной) гипоциклоидой или гипотрохоидой (см. *Трохоида*). При $m=2$

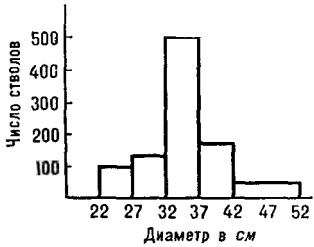


Г. - отрезок прямой, при $m=3$ — *Штейнера кривая*, при $m=4$ — *астроида*. Г. относится к так наз. *циклоидальным кривым*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ГИСТОГРАММА — один из видов графич. представления экспериментальных данных. Г. строится следующим образом. Весь диапазон наблюденных значений $X_1, \ldots, X_n$ нек-рой случайной величины X делится на k интервалов группировки (обычно равных) точками $x_1, \ldots, x_{k+1}$; подсчитывается число наблюдений m_i, приходящихся на интервал $[x_i, x_{i+1})$ и определяется частота $h_i = m_i/n$. На оси абсцисс отмечаются точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$, и отрезки $x_i x_{i+1} (i=1, \ldots, k)$ принимаются за основания прямоугольников с высотами, равными $h_i/(x_{i+1}-x_i)$. В случае равных интервалов $[x_i, x_{i+1})$ высоты прямоугольников принимаются равными либо h_i, либо m_i. Пусть, напр., измерение стволов 1000 елей дало результаты:



Гистограмма распределения диаметров стволов 1000 елей. Длина интервала группировки 5 *см*.

диаметр в *см* . .	22—27	27—32	32—37	37—42	42—52
число стволов .	100	130	500	170	100

Г. для этого примера изображена на рисунке.

В. Н. Чугуева.

ГИШАРА КОНГРУЭНЦИЯ, конгруэнция Г,— конгруэнция прямых, у к-рых фокальные сети образованы линиями кривизны фокальных поверхностей. Одна из поверхностей центров каждой фокальной поверхности несет фокальную сеть из геодезич. линий. Сферич. отображение развертывающихся поверхностей Г. к. является чебышевской сетью. Фокальные поверхности Г. к. наз. поверхностями Гишара. Г. к. наз. по имени К. Гишара (C. Guichard, 1889), к-рый впервые ее рассмотрел.

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ГЛАВНАЯ КРИВИЗНА — *нормальная кривизна* поверхности в главном направлении, т. е. в направлении, где она достигает своего экстремального значения. Г. к. k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0, \qquad (*)$$

где E, F и G — коэффициенты *первой квадратичной*

формы, а L, M и N — *второй квадратичной формы* поверхности, вычисленные в данной точке.

Полусумма Г. к. k_1 и k_2 поверхности равна *средней кривизне*, а произведение — *гауссовой кривизне* поверхности. Уравнение (*) может быть записано в виде

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

где H — средняя, K — полная кривизны поверхности в данной точке.

Г. к. k_1 и k_2 связаны с нормальной кривизной $\tilde{k}$ в произвольно выбранном направлении ф о р м у л о й Э й л е р а:

$$\tilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол, образуемый выбранным направлением с главным направлением для кривизны k_1. *Е. В. Шикин.*

ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ — нормаль к кривой, проходящая через точку M_0 кривой L и лежащая в соприкасающейся плоскости к L в точке M_0. Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — параметрич. уравнение кривой и значение параметра t_0 соответствует точке M_0, то уравнение Г. н. в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0) + \lambda \boldsymbol{r}''(t_0).$$

Е. В. Шикин.

ГЛАВНАЯ ТРАНСЛЯЦИЯ — отображение φ *алгебраической системы* $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega \rangle$ в себя, имеющее вид

$$\varphi\colon x \to F(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n),$$

где F — символ основной операции из Ω и $a_1, \ldots, a_n$ — фиксированные элементы множества A. *Д. М. Смирнов.*

ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА — однородный дифференциальный оператор, образуемый из данного отбрасыванием всех членов, не содержащих производных максимального порядка. Для дифференциального оператора

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha,$$

главная часть есть $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$. Иногда Г. ч. д. о. определяется с введением дополнительных весов, приписываемых дифференцированиям по различным аргументам. Например, в дифференциальном операторе $D_1 - D_2^2 + aD_2$ главная часть определяется иногда как $D_1 - D_2^2$. *А. А. Дезин.*

ГЛАВНОГО ТИПА ОПЕРАТОР С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ и п о с т о я н н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и — оператор $A(D)$, главная часть к-рого $P(D)$ (см. *Главная часть дифференциального оператора*) удовлетворяет условию:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial P(x)}{\partial x_j} \right|^2 \neq 0 \qquad (*)$$

для любого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Другая формулировка условия: всякая действительная характеристическая относительно $P(D)$ плоскость должна быть простой характеристикой. Условие (*) является необходимым и достаточным для *доминирования* $A(D)$ по отношению к произвольному оператору меньшего порядка. Операторы с совпадающей главной частью $P(D)$ имеют одинаковую силу тогда и только тогда, когда выполнено условие (*). В случае переменных коэффициентов условие принадлежности $A(D)$ к главному типу формулируется обычно с помощью специальных неравенств, оценивающих производные функций с компактным носителем через значения оператора. Поточечное выполнение условия (*) и дополнительное условие на порядок *коммутатора* $[P(x, D)P(x, D)]$ достаточны для принадлежности $A(D)$ к главному типу. *А. А. Дезин.*

ГЛАВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное аналитич. расслоение, на слоях

к-рого просто транзитивно и аналитически действует структурная группа Ли; то есть Г. а. р. есть четверка (P, B, G, π), где P, B — *аналитические пространства* над полем k, $\pi : P \to B$ аналитич. отображение, G — группа Ли над k, аналитически действующая справа на P, причем для каждого элемента базы B существуют окрестность U и аналитич. изоморфизм

$$\varphi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$$

такой, что

$$\varphi(x, gh) = \varphi(x, g)\, h, \quad x \in U,\ g, h \in G.$$

Каждое *векторное аналитическое расслоение* p: $V \to B$ с n-мерным слоем определяет Г. а. р. с базой B и группой $GL(n, k)$, слоем к-рого над точкой $b \in B$ является многообразие всех базисов слоя $p^{-1}(b)$. Это частный случай взаимно однозначного соответствия между аналитич. расслоениями с заданным слоем и структурной группой G и ассоциированными с ними Г. а. р. Другие примеры Г. а. р.: расслоение $H \to H/G$, слоями к-рого служат левые смежные классы группы Ли H по ее подгруппе Ли G; аналитич. *накрытие* (здесь структурная группа — группа накрытия).

Г. а. р. можно задать при помощи открытого покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ его базы B и функций перехода, т. е. аналитич. отображений

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to G, \quad i, j \in I, \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing,$$

удовлетворяющих условиям

$$g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Функции перехода образуют одномерный коцикл со значениями в пучке $\mathcal{O}^G$ ростков аналитич. отображений $B \to G$, что дает взаимно однозначное соответствие между множеством Г. а. р. с базой B и группой G и множеством когомологий $H^1(B, \mathcal{O}^G)$. Классификация Г. а. р. с базой B и структурной группой G представляет собой (для неабелевой группы G) проблему, решенную лишь в нек-рых специальных случаях (по поводу соответствующей проблемы локальных модулей см. *Деформация* аналитической структуры). Связь между этой классификацией и классификацией топологических главных расслоений выражается естественным отображением

$$\alpha : H^1(B, \mathcal{O}^G) \to H^1(B, C^G),$$

где C^G — пучок ростков непрерывных отображений $B \to G$.

Пусть $k = \mathbb{C}$, а B — приведенное *Штейна пространство*, тогда отображение α биективно, и проблема классификации сводится к задаче гомотопич. топологии [4]. В частности, всякое Г. а. р., базой к-рого является некомпактная риманова поверхность, а структурная группа связна, тривиально. Результат работы [4] получен на самом деле для более широкого класса E-главных расслоений, в определении к-рых группа G заменяется некоторым аналитическим локально тривиальным расслоением $E \to B$ на комплексные группы Ли, послойно действующим на P. Существует обобщение приведенного результата на случай, когда структурная группа есть банахова комплексная группа Ли [2]. Если же B — компактная риманова поверхность, то α сюръективно, но не инъективно. В общем случае α не обязано быть ни инъективным, ни сюръективным. Для связной разрешимой группы G известны когомологич. достаточные условия инъективности или биективности отображения α [3].

Изучен также случай, когда B — компактная риманова поверхность рода p, а G — связная редуктивная алгебраич. группа. Для $p = 0$ соответствующая классификация дана в [5], для $p = 1$ при $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — в [1]. В случае $p \geqslant 2$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (см. *Векторное алгебраическое расслоение*) существенную роль играет понятие стабильного векторного расслоения. Это понятие

обобщается [6] на случай произвольной связной редуктивной группы G. Множество всех стабильных главных расслоений данного топологич. типа на компактной римановой поверхности обладает естественной структурой связного нормального комплексного пространства. Получена также частичная классификация векторных расслоений над комплексным проективным пространством $B=P^m(\mathbb{C})$ и над алгебраическими поверхностями.

О вещественных Г. а. р. (случай $k=\mathbb{R}$) см. *Вещественное аналитическое пространство*.

Лит.: [1] Atiyah M., «Proc. London Math. Soc.», 1957, v. 11, № 27, p. 417—52; [2] Bungart L., «Topology», 1968, v. 7, № 1, p. 55—68; [3] Frenkel J., «Bull. Soc. Math. France», 1957, t. 85, № 2, p. 135—220; [4] Grauert H., «Math. Ann.», 1958, Bd 135, № 3, S. 263—73; [5] Grothendieck A., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 1, p. 121—38; [6] Ramanathan A., «Math. Ann.», 1975, Bd 213, № 2, S. 129—52.

А. Л. Онищик.

ГЛАВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ — направление в точке регулярной поверхности, в к-ром *нормальная кривизна* поверхности в этой точке достигает экстремального значения. В каждой точке поверхности может быть либо два Г. н., либо любое направление является Г. н. (в *уплощения точках* и в *округления точках*). В первом случае Г. н. ортогональны, сопряжены и совпадают с направлением осей индикатрисы кривизны (см. *Дюпена индикатриса*). Если направление (d) является Г. н., то справедливо соотношение (формула Родрига):

$$d\boldsymbol{n} = -k\,d\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности, k — нормальная кривизна поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ в этом направлении. Обратно, если в нек-ром направлении (d) выполняется равенство $d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$, то (d) является Г. н. Нормальная кривизна в Г. н. наз. *главной кривизной*.

Е. В. Шикин.

ГЛАВНОЕ ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *главный G-объект* в категории алгебраич. многообразий или схем. Если S — схема, а Γ — схема групп над S, то главный G-объект в категории схем над Γ наз. Г. о. п. над S. В случае, когда S — спектр поля k и Γ — алгебраическая k-группа, Г. о. п. над Γ есть алгебраическое k-многообразие V, на к-ром Γ действует (слева), и при замене k на его сепарабельное алгебраич. замыкание $\bar{k}$, каждая точка $v\in V(\bar{k})$ определяет изоморфное отображение $g\to gv$ многообразий $V_{\bar{k}}$ и $F_{\bar{k}}$. Г. о. п. V тривиально тогда и только тогда, когда $V(k)$ не пусто. Множество классов, изоморфных Г. о. п., над гладкой алгебраич. группой Γ может быть отождествлено с множеством *Галуа когомологий* $H^1(k, \Gamma)$. В общем случае множество классов Г. о. п. над S-схемой групп Γ совпадает с множеством одномерных неабелевых когомологий $H^1(S_T, \Gamma)$, где S_T — некоторая топология Гротендика на схеме S [2].

В ряде случаев Г. о. п. вычислено. Если k — конечное поле, то каждое Г. о. п. над связной алгебраической k-группой является тривиальным (теорема Ленга). Это же утверждение верно, если k — поле p-адических чисел, а Γ — односвязная и полупростая группа (теорема Кнезера). Если $\Gamma=\Gamma_{m,S}$ — мультипликативная S-схема групп, то множество классов Г. о. п. над Γ совпадает с *Пикара группой* $\mathrm{Pic}(S)$ схемы S. В частности, если S — спектр поля, то эта группа тривиальна. Если $\Gamma=\Gamma_{a,S}$ — аддитивная S-схема групп, то множество классов Г. о. п. над Γ совпадает с группой $H^1(S, \mathcal{O})$ одномерных когомологий структурного пучка $\mathcal{O}_S$ схемы S. В частности, это множество тривиально, если S — аффинная схема. В случае, когда k — глобальное поле (т. е. поле алгебраич. чисел или поле алгебраич. функций от одного переменного), изучение множества классов Г. о. п. над алгебраической k-группой Γ основано на исследо-

вании множества Тейта — Шафаревича Ш(Г), состоящего из Г. о. п. над Г, имеющих рациональные точки во всех пополнениях k_V относительно нормирований поля k. В случае, когда Г — абелева группа над полем k, множество классов Г. о. п. над Г образует группу (см. *Вейля — Шатле группа*).

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Demazure M., Gabriel P., Groupes algebriques, t. 1, P.—Amst., 1970; [3] Lang S., Tate J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 659—84.

В. Е. Воскресенский, И. В. Долгачев.

ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ — *G-расслоение* $\pi_G : X \to B$ такое, что группа G действует свободно и совершенно на пространстве X. Значение Г. р. состоит в том, что оно позволяет строить ассоциированные (с ним) расслоения со слоем F, если задано представление G в группе гомеоморфизмов F. Дифференцируемые Г. р. с группами Ли играют важную роль в теории связностей и групп голономии. Пусть, напр., H — топологич. группа, имеющая G своей замкнутой подгруппой, H/G — однородное пространство левых смежных классов H по G, тогда расслоение π_G: $H \to H/G$ является Г. р. Пусть, далее, X_G — конструкция Милнора, т. е. соединение бесконечного числа экземпляров группы G, каждая точка к-рого имеет вид:

$$\langle g, t\rangle \sim \langle g_0 t_0,\ g_1 t_1, \dots\rangle,$$

где $g_i \in G$, $t_i \in [0, 1]$, причем только конечное число t_i отлично от нуля и $\Sigma t_i = 1$. Действие группы G на X_G, определенное формулой $h\langle g, t\rangle \sim \langle hg, t\rangle$, свободно, и расслоение $\omega_G : X_G \to X_G \bmod G$ является нумерируемым Г. р.

Каждый слой Г. р. гомеоморфен группе G.

Морфизм Г. р.— это морфизм расслоений $f : \pi_G \to \pi_{G'}$, для к-рого отображение слоев $f\pi_G^{-1}(b)$ индуцирует гомоморфизм групп

$$\theta_b = \xi'^{-1}_b f \pi_G^{-1}(b)\, \xi_b : \quad G \to G',$$

где $\xi_b(g) = gx$, $\pi_G(x) = b$. В частности, морфизм наз. эквивариантным, если $\theta_b = \theta$ не зависит от b, так что $gf(x) = \theta(g) f(x)$ для любых $x \in X$, $g \in G$; если $G = G'$ и $\theta = id$, то эквивариантный морфизм наз. G-морфизмом. Любой G, B-морфизм (т. е. G-морфизм Г. р. над B) является G-изоморфизмом.

Для любого отображения $u : B' \to B$ и Г. р. π_G: $X \to B$ *индуцированное расслоение* $u^*(\pi_G)$ является Г. р. с той же группой G, причем отображение $U : u^*(\pi_G) \to \pi_G$ является G-морфизмом, однозначно определяющим действие G на пространстве $u^*(x)$. Напр., если Г. р. π_G тривиально, то оно изоморфно Г. р. $\varphi^*(\eta)$, где η есть G-расстояние над одной точкой, φ — постоянное отображение. Обратное также верно, и потому Г. р., обладающее сечением, тривиально. Для каждого нумерируемого Г. р. $\pi_G : X \to B$ существует такое отображение $f : B \to X_G \bmod G$, что $f^*(\omega_G)$ является G-изоморфным π_G; при этом для изоморфности Г. р. $f_0^*(\omega_G)$ и $f_1^*(\omega_G)$ необходима и достаточна гомотопность f_0 и f_1. Это — основная теорема гомотопической классификации Г. р., выражающая универсальность Г. р. ω_G (полученного с помощью конструкции Милнора) по отношению к классифицирующему отображению f.

Лит.: [1] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [2] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [4] Расслоенные пространства и их приложения, сб. переводов, М., 1958; [5] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

А. Ф. Щекутьев.

ГЛАВНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ — *фундаментальное решение* $G(x, y)$ определенного во

всем пространстве E^n эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$Au=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)\,u=0, \qquad (*)$$

удовлетворяющее условиям

$$G(x,\ y)=o\left(e^{-a|x-y|}\right),\quad \frac{\partial G}{\partial x_i}=o\left(e^{-a|x-y|}\right)$$

для нек-рых положительных постоянных a и R при $|x-y|>R$.

Если коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ удовлетворяют в E^n условию Гёльдера и для $\gamma>0$ выполняется неравенство $c(x)<-\gamma$, то Г. ф. р. существует. В случае, когда коэффициенты оператора A определены в нек-рой ограниченной области с достаточно гладкой границей, их можно продолжить на все пространство E^n так, что у продолженного оператора Г. ф. р. будет существовать.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Ш. А. Алимов.

ГЛАВНЫЙ ИДЕАЛ — идеал (кольца, алгебры, полугруппы или решетки), порождаемый нек-рым одним элементом a, т. е. наименьший идеал, содержащий элемент a.

Левый Г. и. $L(a)$ кольца K, кроме самого элемента a, содержит все элементы вида

$$ka+na;$$

соответственно, правый Г. и. $R(a)$ содержит все элементы вида

$$ak+na,$$

а двусторонний Г. и. $L(a)$ — все элементы вида

$$na+ta+as+\sum_i [(k_i a)\,l_i+k_i'\,(a,\ l_i')],$$

где k, t, s, k_i, k_i', l_i, l_i' — произвольные элементы кольца K, а $na=a+\ldots+a$ (n слагаемых). В случае, когда K — кольцо с единицей, слагаемое na может быть опущено. В частности, для алгебры A над полем

$$L(a)=aA,\ R(a)=Aa,\ J(a)=AaA.$$

В полугруппе S левый, правый и двусторонний идеалы, порожденные элементом a, равны соответственно

$$L(a)=S^1a,\ R(a)=aS^1,\ J(a)=S^1aS^1,$$

где S^1 — полугруппа, совпадающая с S, если S содержит единицу, и полученная из S внешним присоединением единицы — в противном случае.

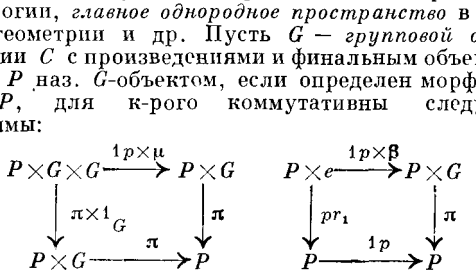
Г. и. решетки L, порожденный элементом a, совпадает с множеством таких x, что $x\leqslant a$; он обозначается обычно a^{∇}, $[a]$ или $[0,\ a]$, если решетка с нулем. Таким образом,

$$a^{\nabla}=aL=\{ax\mid x\in L\}.$$

В решетке конечной длины все идеалы главные.

В. Н. Ремесленников, Т. С. Фофанова, Л. Н. Шеврин.

ГЛАВНЫЙ G-ОБЪЕКТ в топологизированной категории — понятие теории категорий, частные случаи которого — *главное расслоение* в топологии, *главное однородное пространство* в алгебраич. геометрии и др. Пусть G — *групповой объект* категории C с произведениями и финальным объектом e. Объект P наз. G-объектом, если определен морфизм π: $P\times G\to P$, для к-рого коммутативны следующие диаграммы:



Здесь $\mu : G \times G \to G$ — морфизм группового закона на G, а $\beta : e \to G$ — морфизм единичного элемента G. Более точно, введенные выше G-объекты наз. п р а в ы м и G-о б ъ е к т а м и, аналогично дается определение л е в ы х G-о б ъ е к т о в. Примером G-объекта может служить сам групповой объект G, для к-рого отображение μ совпадает с отображением π. Такой объект наз. т р и в и а л ь н ы м G-о б ъ е к т о м. G-объекты категории C образуют подкатегорию C^G, морфизмами в к-рой служат морфизмы, перестановочные с морфизмами π. G-объект наз. ф о р м а л ь н о г л а в н ы м G-о б ъ е к т о м, если морфизмы $P \times G \xrightarrow{pr_1} P$ и $P \times G \xrightarrow{\pi} P$ индуцируют изоморфизм $\varphi = \pi pr_1 : P \times G \to P \times P$. Если T — некоторая топология Гротендика на категории C, то формально главный G-объект P наз. главным G-объектом (относительно топологии T), если существует покрытие $(U_i \to e) i \in I$ финального объекта такое, что для любого $i \in I$ произведение $G \underset{e}{\times} U_i$ изоморфно тривиальному $G \underset{e}{\times} U_i$-объекту.

П р и м е р ы. 1) Если C — категория множеств, а G — группа, то непустые G-объекты наз. G-множествами. Это множества P, для к-рых задано такое отображение $P \times G \to P$ $((p, g) \to pg)$, что для любых $g, g' \in G$ имеет место $p(gg') = (pg)g'$ и для любого $p \in P$ верно $p \cdot 1 = p$. Главный G-объект есть G-множество, в к-ром для любых $p, p' \in P$ существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $pg = p'$ (г л а в н о е о д н о р о д н о е G-м н о ж е с т в о). Если P не пусто, то выбор $p_0 \in P$ определяет отображение $g \to p_0 g$, к-рое устанавливает изоморфизм P и тривиального G-множества G. Тем самым в любой топологии формально главный G-объект является главным G-объектом.

2) Если X — дифференцируемое многообразие, H — группа Ли, то, взяв за C категорию расслоений над X, за групповой объект G проекцию $H \times X \to X$ и определив топологию в C с помощью семейств открытых покрытий, можно получить определение главного G-расслоения.

Если P — формально главный G-объект категории C, то для любого объекта X категории $Ob(C)$ множество $P(X) = \mathrm{Hom}_C(X, P)$ либо пусто, либо является главным однородным $G(X)$-множеством.

G-объект P изоморфен тривиальному G-объекту тогда и только тогда, когда существует сечение $e \to P$. Множество классов G-объектов (относительно отношения изоморфизма между ними) обозначается через $H^1(C, G)$. В случае, когда G — абелев групповой объект, множество $H^1(C, G)$ с отмеченной точкой, соответствующей классу тривиальных G-объектов, является группой и вычисляется стандартными средствами гомологич. алгебры. В общем случае вычисления $H^1(C, G)$ используют конструкции когомологий Чеха (см. *Неабелевы когомологии*).

Лит.: [1] Revêtements etales et groupe fondamental, B., 1971.

И. В. Долгачев.

ГЛАВНЫЙ РЯД д л и н ы m — такая конечная последовательность

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_m = 1$$

вложенных друг в друга нормальных подгрупп группы G, что ее нельзя включить (без повторения членов) ни в какую другую последовательность с теми же свойствами, т. е. G_{i+1} — максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в G_i в качестве собственной подгруппы, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Группа тогда и только тогда обладает хотя бы одним Г. р., когда в ней обрываются все убывающие по включению и все возрастающие по включению последовательности нормальных подгрупп. Если группа обладает Г. р., то любые два таких ряда изоморфны, т. е. имеют одинаковую

длину и между множеством факторов $G_i'G_{i+1}$ одного ряда и множеством факторов другого ряда существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответственные факторы изоморфны. *Ю. И. Мерзляков.*

ГЛАВНЫЙ ФАКТОР полугруппы — всякая факторполугруппа Риса (см. *Полугруппа*) вида $J(x)/N(x)$, где $J(x)$ — двусторонний *главный идеал* данной полугруппы, порожденный элементом x, а $N(x)=J(x)\setminus J_x$, где J_x есть $\mathcal{Y}$-класс (см. *Грина отношения эквивалентности*), содержащий x; если множество $N(x)$ не пусто, то оно является идеалом, а в случае, когда $N(x)=\varnothing$, считается $J(x)/N(x)=J(x)$. Г. ф. полугруппы наз. также идеальным фактором. Произвольный Г. ф. полугруппы есть либо полугруппа с нулевым умножением, либо 0-простая полугруппа, либо идеально простая полугруппа (см. *Простая полугруппа*); последнее имеет место тогда и только тогда, когда полугруппа обладает ядром и данный Г. ф. совпадает с ядром. Полугруппа, не имеющая Г. ф. с нулевым умножением, наз. полупростой; полупростота полугруппы эквивалентна, напр., тому, что для любого ее двустороннего идеала A выполняется равенство $A^2=A$. Всякая *регулярная полугруппа* полупроста. Если каждый Г. ф. полугруппы либо вполне 0-прост, либо вполне прост (см. *Вполне простая полугруппа*), то полугруппа наз. вполне полупростой. Полугруппа вполне полупроста тогда и только тогда, когда она регулярна и удовлетворяет любому из следующих двойственных друг другу условий: для каждого $\mathcal{Y}$-класса частично упорядоченное множество содержащихся в нем $\mathcal{L}$-классов (соответственно $\mathcal{R}$-классов) обладает минимальным элементом; при этом $\mathcal{Y}=\mathcal{D}$.

Произвольная полугруппа как бы собрана из своих Г. ф., это объясняет, в частности, особую роль, к-рую играют в теории полугрупп идеально простые и 0-простые полугруппы.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., тт. 1—2, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

ГЛАВНЫЙ ХАРАКТЕР, главный характер Дирихле, - арифметический характер χ_0, определяемый условием

$$\chi_0(n)=\begin{cases}1, & \text{если } (n, D)=1,\\ 0, & \text{если } (n, D)\neq 1,\end{cases}$$

где D — любое заданное натуральное число. Через Г. х. определяются понятия первообразного и производного характеров (см. *Дирихле характер*). *Н. Г. Чудаков.*

ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо R с единицей, в к-ром все левые и правые идеалы являются главными, т. е. имеют вид Ra и aR, соответственно, где $a\in R$. Примеры Г. и. к.: кольцо целых чисел, кольцо многочленов $F(x)$ над полем F, кольцо косых многочленов $F(x, S)$ над полем F с автоморфизмом $S: F\to F$ (элементы $F(x, S)$ имеют вид $\sum_{i=0}^{n}x^ia_i$, $a_i\in F$, сложение этих элементов обычное, а умножение определяется законами дистрибутивности и равенством $ax=xa^S$, где $a\in F$), кольцо дифференциальных многочленов $F(x, ')$ над полем F с дифференцированием $': F\to F$ (это кольцо также состоит из элементов $\sum_{i=0}^{n}x^ia_i$, $a_i\in F$, причем сложение обычное, а умножение определяется равенством $ax=xa+a'$, где $a\in F$). Г. и. к. без делителей нуля наз. областью главных идеалов. Коммутативное Г. и. к. является прямой суммой областей главных идеалов и Г. и. к., обладающих единственным простым идеалом, к-рый нильпотентен (см. [2], с. 282). Если R — область главных идеалов, то два ненулевые элемента a, b кольца R имеют наибольший общий левый делитель (a, b) и наименьшее общее правое кратное

$[a, b]$, к-рые определяются как элементы, удовлетворяющие равенствам:

$$aR = bR = (a, b)R; \qquad aR \cap bR = [a, b]R.$$

Элементы (a, b) и $[a, b]$ единственны с точностью до обратимого правого множителя. Область главных идеалов является областью с однозначным разложением на множители. Двусторонние идеалы области главных идеалов образуют относительно умножения свободную коммутативную полугруппу с нулем и единицей (свободными порождающими этой полугруппы будут максимальные идеалы кольца).

Подмодуль N свободного модуля M конечного ранга n над R является свободным модулем ранга $k \leqslant n$ над R, и в модулях M и N можно так выбрать базисы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_k$, что $b_i = e_i a_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где $e_i \in R$ и e_i является полным (т. е. $e_i R \cap Re_i \supseteq Re_j R$) делителем элементов e_j при $i < j$. Каждый конечно порожденный модуль K над R является прямой суммой циклич. модулей $R/e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant m$, где $e_i \in R$ и e_i — полный делитель e_j при $i < j$, $e_i \neq 0$. Эта теорема обобщает основную теорему о конечно порожденных *абелевых группах*. Элементы e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, из предыдущей теоремы определены однозначно с точностью до подобия (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). Эти элементы наз. инвариантными множителями модуля K. Кроме того, модуль K можно представить в виде прямой суммы далее неразложимых циклич. модулей $R/q_i R$, где $q_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Элементы q_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, определены однозначно с точностью до подобия и наз. элементарными делителями модуля K. Если область R главных идеалов коммутативна, то $q_i R = 0$ или $q_i R = p_i^{n_i} R$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где p_i — неприводимые (простые) элементы кольца R. Из предыдущих утверждений вытекают обычные свойства элементарных делителей и инвариантных множителей линейных преобразований конечномерных векторных пространств [3].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966.
Л. А. Бокуть.

ГЛАДКАЯ СХЕМА — обобщение понятия неособого *алгебраического многообразия*. Схема X (локально) конечного типа над полем k наз. гладкой схемой (над k), если схема, полученная из X с помощью замены поля констант k на его алгебраич. замыкание $\bar{k}$, является регулярной схемой, т. е. все ее локальные кольца регулярны. Для совершенного поля k понятия Г. с. над k и регулярной схемы над k совпадают. В частности, Г. с. конечного типа над алгебраически замкнутым полем есть неособое алгебраич. многообразие. В случае поля комплексных чисел неособое алгебраич. многообразие обладает структурой комплексного *аналитического многообразия*.

Схема является Г. с. тогда и только тогда, когда она может быть покрыта гладкими окрестностями. Точка схемы X наз. простой точкой схемы, если в нек-рой ее окрестности схема X есть Г. с.; в противном случае точка наз. особой точкой схемы. Связная Г. с. неприводима. Произведение Г. с. снова есть Г. с.; вообще, если Y есть Г. с. над k, а $f : X \to Y$ — *гладкий морфизм*, то X есть Г. с. над k.

Аффинное пространство A_k^n и проективное пространство $\mathbb{P}_k^n$ являются Г. с. над k; над совершенным полем любая алгебраич. группа (т. е. приведенная алгебраич. схема групп) есть Г. с. Приведенная схема над алгебраич. замкнутым полем является Г. с. на всюду плотном открытом множестве.

Если схема X задается уравнениями

$$F_i(X_1, \ldots, X_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

в аффинном пространстве A_k^m, то точка $x \in X$ будет про-

стой тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x)\right\|$ равен $m-d$, где d — размерность X в точке x (якобиевый критерий). В более общем случае, замкнутая подсхема X Г. с. Y, задаваемая пучком идеалов I, будет Г. с. в окрестности точки x в том и только в том случае, если существует система образующих $g_1, \ldots, g_n$ идеала I_x в кольце $O_{X,x}$, удовлетворяющая тому условию, что $dg_1, \ldots, dg_n$ составляют часть базиса свободного $O_{X,x}$-модуля пучка дифференциалов $\Omega_{X/k,x}$.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, t. 32; [3] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, № 1, p. 1—52.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГЛАДКАЯ ТОЧКА функции — значение аргумента x функции f, при к-ром выполнено условие:

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|}{|h|}=0.$$

Точка дифференцируемости функции является Г. т., обратное, вообще говоря, не верно. Если в Г. т. существует односторонняя производная, то существует и обычная производная. *В. Ф. Емельянов.*

ГЛАДКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой каждое значение аргумента является *гладкой точкой*. Г. ф. может быть разрывной. Если Г. ф. непрерывна на интервале, то множество точек ее дифференцируемости плотно на нем и имеет мощность континуума. Существуют непрерывные, гладкие на числовой прямой функции, не дифференцируемые почти всюду. Г. ф. имеет производную в каждой точке локального экстремума и, в силу этого, для гладких непрерывных функций остаются справедливыми основные теоремы дифференциального исчисления — теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу и др. *В. Ф. Емельянов.*

ГЛАДКИЙ КОНТИНУУМ в точке p — континуум X такой, что для каждой последовательности $x_1, \ldots, x_n \ldots$ точек из X, сходящейся к точке x, и каждого подконтинуума $K\subset X$, содержащего точки p и x, существует сходящаяся к K последовательность подконтинуумов $\{K_n\}$ в X. Континуум, гладкий в каждой своей точке, наз. гладким. *А. А. Мальцев.*

ГЛАДКИЙ МОРФИЗМ схем — обобщение на случай схем понятия семейства неособых *алгебраических многообразий*. В классич. случае морфизма комплексных алгебраич. многообразий это понятие сводится к понятию регулярного отображения (субмерсии) комплексных многообразий. Конечно представленный (локально) морфизм схем $f: X\to Y$ наз. гладким морфизмом, если f есть *плоский морфизм* и если для любой точки $y\in Y$ слой $f^{-1}(y)$ будет *гладкой схемой* (над полем $k(y)$). Схема X наз. гладкой схемой над схемой Y, или гладкой Y-схемой, если структурный морфизм $f: X\to Y$ является Г. м.

Примером гладкой Y-схемы служит аффинное пространство A^n_Y. Частный случай понятия Г. м. — *этальный морфизм*. Обратно, всякий Г. м. $f: X\to Y$ разлагается локально по X в композицию этального морфизма $X\to A^n_Y$ и проекции $A^n_Y\to Y$.

Композиция Г. м. снова есть Г. м.; аналогично обстоит дело с произвольной заменой базы. Г. м. характеризуется своим дифференциальным свойством: плоский конечно представленный морфизм $f: X\to Y$ будет Г. м. тогда и только тогда, когда пучок относительных дифференциалов есть локально свободный пучок ранга $\dim_x f$ в точке x.

Понятие Г. м. аналогично понятию *расслоения* в смысле Серра в топологии. Напр., Г. м. комплексных алгебраич. многообразий является локально тривиальным дифференцируемым расслоением. В общем случае

выполняется следующий аналог аксиомы о накрывающей гомотопии: для любой *аффинной схемы* Y', ее замкнутой подсхемы Y'_0, определяемой нильпотентным идеалом, и любого морфизма $Y' \to Y$ канонич. отображение $\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$ сюръективно.

Если $f : X \to Y$ есть Г. м., а *локальное кольцо* $\mathcal{O}_{Y,y}$ точки $y \in Y$ является регулярным (соответственно нормальным, приведенным), то таким же будет и локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ любой точки $x \in X$ с $f(x) = y$.

Лит.: [1] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, t. 32; [2] Revêtements etales et groupe fondamental, B., 1971.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГЛАДКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормированное пространство X, в к-ром для каждой точки x с $\|x\| = 1$ существует единственный функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x) = \|f\| = 1$. Пространство X гладко тогда и только тогда, когда его норма обладает *Гато дифференциалом* в каждой точке x с $\|x\| = 1$.

Л. П. Власов.

ГЛАДКОСТИ МОДУЛЬ — модуль непрерывности производной порядка $m \geqslant 1$ функции $f(x)$, определенной на банаховом пространстве X, т. е. выражение

$$\omega_m(f, \delta, X) = \sup_{\|h\|_X \leqslant \delta; x} \left\| \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i f\left(x + (m-2i)\frac{h}{2}\right) \right\|_{X^2},$$

где $(x \pm mh/2) \subset X$. При $m = 1$ Г. м. — обычный *непрерывности модуль* функции $f(x)$. Основные свойства Г. м. (для случая $X = \mathbb{C}$ — пространство непрерывных функций):

$$\omega_m(f, 0, \mathbb{C}) = 0;$$

$\omega_m(f, \delta, \mathbb{C})$ не убывает вместе с δ;

если k — целое $\geqslant 1$, то

$$\omega_m(f, k\delta, \mathbb{C}) \leqslant k^m \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

для любого $\lambda > 0$

$$\omega_m(f, \lambda\delta, \mathbb{C}) \leqslant (\lambda + 1)^m \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

если $\nu > m$, то

$$\omega_\nu(f, \delta, \mathbb{C}) \leqslant 2^{\nu - m} \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

если $\nu > m$, то

$$\omega_m(f, \delta, \mathbb{C}) \leqslant A_{\nu, m} \delta^\nu \int_\delta^a (\omega_m(f, u, \mathbb{C})/u^{\nu+1})\, du + O(\delta^\nu),$$

где $A_{\nu, m}$ и a — постоянные, не зависящие от f.

Нек-рые вопросы теории приближения функций могут получить окончательное решение только в терминах Г. м. порядка $m \geqslant 2$. В теории приближения функций важен класс непрерывных периода 2π функций, Г. м. 2-го порядка к-рых удовлетворяет условию

$$\omega_2(f, \delta, C_{2\pi}) \leqslant \delta.$$

Модуль непрерывности таких функций удовлетворяет условию

$$\omega_1(f, \delta, C_{2\pi}) \leqslant \left[\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2}+1)}\right] \delta \ln\frac{\pi}{\delta} + O(\delta),$$

$0 < \delta \leqslant \pi$, причем постоянная $1/\ln(\sqrt{2}+1)$ не может быть улучшена (см. [4]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. сочинений, т. 1, с. 37, М., 1952; [2] Marchaud A., «J. math. pures et appl.», 1927, t. 6, p. 337—425; [3] Zygmund A., «Duke Math. J.», 1945, v. 12, p. 47—76; [4] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 2, с. 283—88.

А. В. Ефимов.

ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТРАЕКТОРИЙ квадратичного дифференциала — описание поведения в целом траекторий положительного *квадратичного дифференциала* на конечной ориентированной римановой поверхности. Пусть R — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на R; пусть C — множество всех нулей и простых полюсов $Q(z)dz^2$, а H — множество всех полюсов $Q(z)dz^2$ порядка $\geqslant 2$.

Траектории $Q(z)dz^2$ образуют семейство F, обладающее многими свойствами регулярных семейств кривых. Это семейство кривых покрывает R, за исключением точек множества $C \cup H$, т. е. через каждую точку из $R \setminus (C \cup H)$ проходит единственный элемент F. Поведение траекторий $Q(z)dz^2$ в окрестности любой точки R описывается *локальной структурой траекторий* квадратичного дифференциала. При рассмотрении глобальной структуры кривых семейства F в точках $R \setminus H$ существенную роль играют следующие объединения траекторий. Пусть Φ — объединение всех траекторий $Q(z)dz^2$, имеющих предельную концевую точку в нек-рой точке множества C; Λ — подмножество Φ, являющееся объединением всех траекторий $Q(z)dz^2$, к-рые имеют одну предельную концевую точку в точке множества C и вторую предельную концевую точку в точке множества $C \cup H$.

Множество K на R наз. F-множеством относительно $Q(z)dz^2$, если каждая траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, пересекающаяся с K, полностью лежит в K. Внутреннее замыкание множества K определяется как внутренность замыкания $\bar{K}$ и обозначается $\hat{K}$. Внутреннее замыкание F-множества снова является F-множеством. Концевой областью E относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) E не содержит точек множества $C \cup H$; 2) E заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых имеет предельную концевую точку в каждом из двух возможных направлений в данной точке $A \in H$; 3) E конформно отображается функцией

$$\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$$

на верхнюю или нижнюю полуплоскость плоскости ζ (в зависимости от выбора ветви корня). Из локальной структуры траекторий $Q(z)dz^2$ следует, что точка A должна быть полюсом дифференциала $Q(z)dz^2$ не ниже 3-го порядка.

Полосообразной областью S относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) S не содержит точек множества $C \cup H$; 2) S заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых имеет в одной точке $A \in H$ предельную концевую точку в одном направлении, а в другой (возможно, совпадающей с A) точке $B \in H$ — предельную концевую точку в другом направлении; 3) S конформно отображается функцией

$$\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$$

на полосу $a < \operatorname{Im} \zeta < b$, где a, b — конечные действительные числа, $a < b$. Точки A и B могут быть полюсами $Q(z)dz^2$ порядка 2 и более.

Круговой областью $\mathcal{C}$ относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathcal{C}$ содержит единственный двойной полюс A дифференциала $Q(z)dz^2$; 2) $\mathcal{C} \setminus A$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых является замкнутой жордановой кривой, отделяющей A от границы $\mathcal{C}$; 3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\left\{ c \int [Q(z)]^{1/2}\, dz \right\},$$

дополненная значением нуль в точке A, отображает $\mathcal{C}$ конформно на круг $|w| < R$, причем точка A переходит в точку $w = 0$.

Кольцевой областью D относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) D не содержит точек множества $C \cup H$; 2) D заполнено тра-

екториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых является замкнутой жордановой кривой; 3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\left\{ c \int [Q(z)]^{1/2}\, dz \right\}$$

отображает D конформно на круговое кольцо $r_1 < |w| < r_2$, $0 < r_1 < r_2$.

Плотностной областью $\mathcal{F}$ относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее свойствами: 1) $\mathcal{F}$ не содержит точек множества H; 2) $\mathcal{F} \setminus C$ заполнено траекториями $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых всюду плотна в $\mathcal{F}$.

Справедлива основная структурная теорема (см. [2]). Пусть R — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на R, причем исключаются следующие возможные случаи и все конфигурации, получающиеся из них посредством *конформного отображения*: I. R есть z-сфера, $Q(z)dz^2 = dz^2$; II. R есть z-сфера, $Q(z)dz^2 = Ke^{i\alpha} dz\, z^2$, K — положительное, α — действительное числа; III. R есть тор, $Q(z)dz^2$ регулярен на R. Тогда: 1) $R \setminus \overline{\Lambda}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, кольцевых, круговых и плотностных областей; 2) каждая такая область ограничена конечным числом траекторий вместе с точками, в к-рых последние встречаются; каждая граничная компонента такой области содержит точку множества C, за исключением граничных компонент круговой или кольцевой области, к-рые могут совпадать с граничными компонентами R; для полосообразной области два граничных элемента, выходящие из точек множества H, разделяют границу на две части, на каждой из к-рых имеется точка множества C; 3) каждый полюс $Q(z)dz^2$ порядка $m > 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием объединения $m-2$ концевых областей и конечного числа (возможно, равного нулю) полосообразных областей; 4) каждый полюс $Q(z)dz^2$ порядка $m = 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием объединения конечного числа полосообразных областей, или окрестность, содержащуюся в круговой области.

Из этой теоремы непосредственно следует утверждение основной структурной теоремы Дж. Дженкинса (J. Jenkins) в первоначальной формулировке (см. [1]): в условиях сформулированной теоремы множество $R \setminus \overline{\Phi}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, круговых и кольцевых областей. Большое внимание в ряде исследований теории однолистных функций уделяется доказательству того факта, что для рассматриваемого квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ множество $\hat{\Phi}$ пусто. Нахождение условий, обеспечивающих пустоту множества $\hat{\Phi}$, представляет и самостоятельный интерес. Пример квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ на z-сфере, для к-рого множество $\hat{\Phi}$ пусто, дает следующая теорема о трех полюсах: если R есть z-сфера, $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на R, имеющий не более трех различных полюсов, то множество $\hat{\Phi}$ пусто.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Jenkins J. A., «Illinois Math. J.», 1960, v. 4, № 3, p. 405—12.

Г. В. Кузьмина.

ГЛОБАЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово многообразие M, каждая точка p к-рого является изолированной неподвижной точкой нек-рой инволютивной изометрии S_p многообразия M, т. е. S_p^2 есть тождественное преобразование. Пусть G — компонента единицы группы изометрий пространства M и K — стационарная подгруппа точки p. Тогда M является *однородным пространством* G, K, и отображение $\Phi : g \to S_p g S_p$ есть инволютивный авто-

морфизм группы G, причем K содержится в замкнутой подгруппе G^{Φ} всех неподвижных точек автоморфизма Φ и содержит компоненту единицы группы G^{Φ}.

Пусть g — вещественная алгебра Ли, φ — ее инволютивный автоморфизм и k — подалгебра в g, состоящая из всех φ-неподвижных элементов. Рассмотрим связную подгруппу K присоединенной группы Int (g), соответствующую подалгебре k. Если группа K компактна, то k наз. компактно вложенной подалгеброй алгебры g, а пара (g, φ) наз. ортогональной симметрической алгеброй Ли. Пусть $g=k+m$ — разложение на собственные подпространства автоморфизма φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1. Пара (g, φ) наз.: а) алгеброй компактного типа, если g компактна и полупроста; б) алгеброй некомпактного типа, если $g=k+m$ есть *Картана разложение*; в) алгеброй евклидова типа, если m — абелев идеал в g. Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра Ли и $g=k+m$ — указанное разложение. Обозначим через g^* подмножество $k+im$ комплексной оболочки g^C алгебры g. Отображение

$$\varphi^*: T+iX \longrightarrow T-iX, \qquad T \in k,\ X \in m,$$

есть инволютивный автоморфизм алгебры g^* и (g^*, φ^*) есть ортогональная симметрич. алгебра Ли, к-рая наз. двойственной к алгебре (g, φ). Если (g, φ) — алгебра компактного типа, то (g^*, φ^*) — алгебра некомпактного типа, и наоборот.

Каждое Г. с. р. п. G/K порождает ортогональную симметрич. алгебру Ли (g, φ), где g — алгебра Ли группы G, а $\varphi=(d\Phi)_e$ (e — единица группы). G/K наз. пространством компактного или некомпактного типа в соответствии с типом порождаемой им пары (g, φ). Каждое односвязное Г. с. р. п. M является прямым произведением: $M=M_0\times M_-\times M_+$, где M_0 — евклидово пространство, M_- и M_+ — Г. с. р. п. компактного и некомпактного типа соответственно. Для всякого пространства некомпактного типа кривизна в любом двумерном направлении неположительна, а для пространств компактного типа такая кривизна всюду неотрицательна. Любое пространство некомпактного типа диффеоморфно евклидову пространству.

Пусть $M=G/K$ — Г. с. р. п. компактного или некомпактного типа. Рангом l пространства M наз. максимальная размерность плоского вполне геодезич. подмногообразия в M. Пусть A и A' — два плоских вполне геодезич. подмногообразия пространства M размерности l, $q\in A$, $q'\in A'$ и X — касательный вектор к M в точке q. Тогда: 1) существует такой элемент $x\in G$, что $xA=A'$ и $xq=q'$; 2) существует такой элемент $y\in G$, что $yq=q$ и $dy(X)$ — касательный вектор к A в точке q.

Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра Ли, а k и m — собственные подпространства автоморфизма φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1. Алгебра (g, φ) наз. неприводимой, если выполняются условия: 1) g полупроста и k не содержит ненулевых идеалов алгебры g; 2) алгебра $\mathrm{ad}_g(k)$ неприводимым образом действует на m. Г. с. р. п. G/K наз. неприводимым, если порождаемая им ортогональная симметрич. алгебра Ли (g, φ) неприводима. Две ортогональные симметрич. алгебры Ли (g, φ) и (g', φ') наз. изоморфными, если существует такой изоморфизм ψ алгебры g на g', что $\psi\circ\varphi=\varphi'\circ\psi$. Классификация односвязных неприводимых Г. с. р. п. с точностью до изометрии эквивалентна классификации неприводимых ортогональных симметрич. алгебр Ли с точностью до изоморфизма.

Неприводимые ортогональные симметрич. алгебры Ли компактного типа суть: I. (g, φ), где g — компакт-

ная простая алгебра Ли и φ — любой ее инволютивный автоморфизм; II. (g, φ), где компактная алгебра g является прямой суммой двух простых идеалов, к-рые переставляются при помощи автоморфизма φ.

Неприводимые ортогональные симметрич. алгебры Ли некомпактного типа суть: III. (g, φ), где g — простая некомпактная алгебра Ли над $\mathbb{R}$, комплексная оболочка g^C к-рой является простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$, а φ — такой инволютивный автоморфизм алгебры g, что его неподвижные точки составляют максимальную компактно вложенную подалгебру; IV. (g, φ), где g — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли, а φ - сопряжение алгебры g по отношению к максимальной компактно вложенной подалгебре k, т. е. отображение $X+iY \to X-iY$, $X, Y \in k$. Кроме того, если обозначить через (g^*, φ^*) алгебру, двойственную к (g, φ), то (g, φ) типа III и IV, если (g^*, φ^*) типа I и II соответственно, и наоборот.

С каждой неприводимой ортогональной симметрич. алгеброй некомпактного типа связано в точности одно Г. с. р. п., причем это пространство односвязно. Для компактных алгебр решение соответствующей задачи значительно сложнее. Достаточно рассмотреть типы I и II. Г. с. р. п., связанные с алгебрами типа II, это в точности компактные связные простые группы Ли, снабженные римановой структурой, инвариантной относительно левых и правых сдвигов. Задача классификации Г. с. р. п., связанных с алгебрами типа I, с точностью до локальных изометрий равносильна задаче классификации инволютивных автоморфизмов простых компактных алгебр Ли. Глобальная классификация симметрических римановых пространств, связанных с данной ортогональной симметрич. алгеброй (g, φ) компактного типа, решается следующей теоремой.

Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра компактного типа, причем подалгебра k неподвижных точек автоморфизма φ не содержит идеалов алгебры g, отличных от $\{o\}$. Пусть $\tilde{G}$ — односвязная группа Ли с алгеброй Ли g, $\tilde{Z}$ — центр группы $\tilde{G}$, $\tilde{\Phi}$ — такой автоморфизм группы $\tilde{G}$, что $d\tilde{\Phi}=\varphi$ и $\tilde{K}$ — множество всех неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\Phi}$. Для произвольной подгруппы S группы $\tilde{Z}$ положим $K_S = \{g \in \tilde{G} | g^{-1}\tilde{\Phi}(g) \in S\}$. Г. с. р. п. M, связанные с (g, φ), совпадают с пространствами вида G/K, где $G=\tilde{G}/S$, $K=K^*/K^* \cap S$, снабженными любой G-инвариантной метрикой. Здесь S пробегает все подгруппы группы $\tilde{Z}$, а K^* пробегает все такие подгруппы в $\tilde{G}$, что $K \subset K^* \subset K_S$.

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Loos O., Symmetric spaces, v. 1—2, N.Y.— Amst., 1969.

А. С. Феденко.

ГЛОБАЛЬНОЕ ПОЛЕ — поле, являющееся либо конечным расширением поля рациональных функций одной переменной над конечным полем констант, либо конечным расширением поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

В. Л. Попов.

ГЛУБИНА МОДУЛЯ — одна из когомологич. характеристик модуля над коммутативным кольцом. Пусть A — нётерово кольцо, I — его идеал и пусть M есть A-модуль конечного типа. Тогда I-г л у б и н о й м о д у л я M наз. наименьшее целое число n, при к-ром

$$\operatorname{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0.$$

Г. м. обозначают $\operatorname{depth}_I(M)$, или $\operatorname{prof}_I(M)$. Другое определение может быть дано в терминах M-р е г у л я р н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и, т. е. последовательности таких элементов $a_1, \ldots, a_k$ из A, что a_i не является делителем нуля в модуле

$$M/(a_1, \ldots, a_{i-1})\, M.$$

I-глубина модуля M равна длине наибольшей M-регулярной последовательности, составленной из элементов идеала I. В случае локального кольца A за I принимают обычно максимальный идеал. Верна следующая формула:

$$\operatorname{prof}_I(M) = \inf_{\mathfrak{p} \supset I} (\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}})),$$

где $\mathfrak{p}$ означает простой идеал A, а $M_{\mathfrak{p}}$ рассматривается как модуль над локальным кольцом $A_{\mathfrak{p}}$.

Понятие Г. м. было введено в [1] под назв. г о м о л о г и ч е с к о й к о р а з м е р н о с т и. Если проективная размерность $dh(M)$ модуля M над локальным кольцом A конечна, то

$$dh(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A).$$

В общем случае $\operatorname{prof}(M)$ не превосходит размерности модуля M.

Концепция Г. м. является одним из основных инструментов исследования модулей. Так, в терминах Г. м. определяются модули и кольца Коэна — Маколея; удобным часто оказывается у с л о в и е С е р р а (S_k) на A-модуль M:

$$\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} \geqslant \inf(k, \dim M_{\mathfrak{p}})$$

для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ в A. Наконец, Г. м. тесно связана с локальными когомологиями: утверждение

$$\operatorname{prof}_I(M) \geqslant n$$

равносильно тому, что модули локальных когомологий $H^i_I(M)$ равны нулю при $i < n$.

Лит.: [1] A u s l a n d e r M., B u c h s b a u m D. A., «Proc., Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 36—38; [2] С е р р Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] G r o t h e n d i e c k A., Cohomologie locale des faisceaux coherents, et theoremes de Lefschetz locaux et globaux, B., 1971.

В. И. Данилов.

ГОДОГРАФ в е к т о р - ф у н к ц и и $x(t)$ — кривая, представляющая собой множество концов переменного вектора $x(t)$ (t — действительная переменная, напр. время), начало к-рого для всех t есть произвольная фиксированная точка О. Г. дает наглядное геометрич. представление об изменении (с изменением t) величины, изображаемой переменной вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к Г. Напр., если скорость точки является величиной, изображаемой переменным вектором $\boldsymbol{v}$, то отложив значения, к-рые имеет вектор $\boldsymbol{v}$ в разные моменты времени, от начала O, получают Г. с к о р о с т и. При этом величина, характеризующая быстроту изменения скорости в нек-рой точке M, т. е. ускорение $\boldsymbol{w}$ в этой точке, имеет для любого момента времени направление касательной к Г. скорости в соответствующей его точке.

Построение годографа скорости.

ГОДОГРАФА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование нек-рых дифференциальных уравнений математич. физики к линейному виду.

Бернулли интеграл и уравнение неразрывности плоскопараллельного потенциального установившегося движения баротропного газа ($\rho = F(p)$)

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2+v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{c^2}{\gamma - 1}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (c \text{—скорость звука для } \rho = \rho_0)$$

приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}u\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1-\frac{v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}v\right]=0, \quad (*)$$

к-рое служит для определения потенциала скоростей

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

(u, v — компоненты скорости). Введением новых независимых переменных $\tau=v^2/2\alpha$ и θ, равной углу наклона вектора скорости к оси Ox, уравнение (*) приводится к линейному виду:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right]+\frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0.$$

Это есть первое Г. п., или Чаплыгина преобразование. Второе Г. п. получается применением *Лежандра преобразования* прикосновения. В качестве новой неизвестной выбирается функция

$$\Phi=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi,$$

выраженная через u, v, к-рые вводятся вместо x, y как новые независимые переменные по формулам:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Уравнение (*) принимает линейный вид:

$$\left[1-\frac{v^2}{2\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}v^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{2\beta}{\alpha}uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}+$$
$$+\left[1-\frac{v^2}{2\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}u^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=0.$$

Г. п. применяются при решении задач теории струй и струйного обтекания криволинейных контуров газовым потоком.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.—Л., 1949; [2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 4 изд., М., 1963.

Л. Н. Сретенский.

ГОЛОМОРФ ГРУППЫ — понятие теории групп, возникшее в связи с решением следующей задачи. Можно ли включить любую данную группу G в качестве нормальной подгруппы в нек-рую другую группу так, чтобы все автоморфизмы группы G были следствиями внутренних автоморфизмов этой большей группы? Для решения такой задачи строят по группе G и ее группе автоморфизмов $\Phi(G)$ новую группу Γ, элементами к-рой являются пары (g, φ), где $g\in G$, $\varphi\in\Phi(G)$, и в к-рой определяется композиция пар по следующей формуле:

$$(g_1, \varphi_1)(g_2, \varphi_2)=(g_1g_2^{\varphi_1^{-1}}, \varphi_1\varphi_2);$$

здесь $g_2^{\varphi_1^{-1}}$ — образ элемента g_2 при автоморфизме φ_1^{-1}. Группа Γ (или изоморфная ей группа) наз. голоморфом группы G. Множество пар вида (g, ε), где ε — единица группы $\Phi(G)$, составляет подгруппу, изоморфную исходной группе G. Аналогично, пары вида (e, φ), где e — единица группы G, составляют подгруппу, изоморфную группе $\Phi(G)$. Формула показывает, что группа Γ в действительности является решением поставленной задачи.

В. Н. Ремесленников.

ГОЛОМОРФНАЯ ФОРМА степени p на комплексном многообразии M — *дифференциальная форма* α типа $(p, 0)$, удовлетворяющая условию $d''\alpha=0$, т. е. форма, к-рая в локальных координатах $z_1, \ldots, z_n$ на M записывается в виде

$$\alpha=\sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1\ldots i_p}\,dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p},$$

где $a_{i_1\ldots i_p}$ — *голоморфные функции*. Г. ф. степени p образуют векторное пространство $\Omega^p(M)$ над полем $\mathbb{C}$; $\Omega^0(M)$ — это пространство голоморфных функций на M.

На компактном *кэлеровом многообразии* M пространство $\Omega^p(M)$ совпадает с пространством $H^{p,0}(M)$ *гармонических форм* типа $(p, 0)$, откуда следует, что $2\dim\Omega^1(M)$ есть первое число Бетти многообразия [1]. Г. ф. на римановой поверхности M наз. также дифференциалами первого рода; если поверхность M компактна, то $\dim\Omega^1(M)$ равна ее роду.

Пространства $\Omega^p(M)$, $p=0, 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$, образуют локально точный комплекс относительно оператора d, наз. голоморфным комплексом де Рама. Если M — многообразие Штейна (см. *Штейна пространство*), то когомологии этого комплекса изоморфны комплексным когомологиям $H^p(M, \mathbb{C})$ и $H^p(M, \mathbb{C}) = 0$ при $p > \dim_{\mathbb{C}} M$ [2].

Аналогично определяются Г. ф. со значениями в нек-ром *векторном аналитическом расслоении* E над M (голоморфные 0-формы здесь — голоморфные сечения расслоения). Ростки Г. ф. степени p со значениями в E образуют локально свободный аналитич. пучок Ω^p_E. Комплекс Дольбо форм типа (p, q), $q=0, 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$, со значениями в E есть тонкая резольвента этого пучка, откуда

$$H^{p,q}(M, E) \cong H^q(M, \Omega^p_E)$$

(теорема Дольбо — Серра [1], [4]).

Определение Г. ф. можно распространить также на комплексные аналитич. пространства. Достаточно сделать это для локальных моделей, т. е. в случае, когда пространство X является аналитич. подпространством в области $G \subset \mathbb{C}^n$. Пучок ростков голоморфных p-форм Ω^p_X на X определяется как

$$\Omega^p_G / K^p | X,$$

где Ω^p_G — пучок ростков голоморфных p-форм в G, а K^p состоит из ростков форм вида

$$\sum_{k=1}^{r} f_k \alpha_k + \sum_{l=1}^{s} dg_l \wedge \beta_l,$$

$$f_k,\ g_l \in I,\ \alpha_k \in \Omega^p_G,\ \beta_l \in \Omega^{p-1}_G,$$

где I — пучок идеалов, задающий X. Определяется также голоморфный комплекс де Рама пространства X, к-рый, однако, не является локально точным. Для того чтобы этот комплекс был локально точен в точке $x \in X$, начиная с k-й степени, достаточно, чтобы X в окрестности точки x допускало голоморфное стягивание на локальное аналитич. множество $Y \subset X$, для к-рого $\operatorname{emdim}_x Y = k$ (см. [3]).

Лит.: [1] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Таннинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Reiffen H.-J., «Math. Z.», 1967, Bd 101, H. 4, S. 269—84; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

ГОЛОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Аналитическая функция.*

ГОЛОМОРФНО ВЫПУКЛОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО — комплексное пространство X, удовлетворяющее следующему условию: для любого компакта $K \subset X$ множество

$$\{x \in X: |f(x)| \leqslant \sup_K |f|,\ (f \in A)\},$$

где A — алгебра голоморфных функций на X, компактно. Пространство X голоморфно выпукло тогда и только тогда, когда оно допускает собственное сюръективное голоморфное отображение φ на нек-рое *Штейна пространство* (голоморфно полное пространство) $\tilde{X}$, индуцирующее изоморфизм между алгебрами голоморфных функций этих пространств. При этом отображение $\varphi: X \to \tilde{X}$ (голоморфная редукция пространства X) определено однозначно и имеет связные слои [1]. Для любого *когерентного аналитиче-*

ского пучка F на Г. в. к. п. X пространства когомологий $H^p(X, F)$ и $H_c^p(X, F)$, $p \geqslant 0$, являются отделимыми векторными топологич. пространствами [2].

Специальный класс Г. в. к. п. составляют комплексные пространства конечного типа, т. е. пространства X, для к-рых отображение голоморфной редукции биективно вне нек-рого компактного аналитич. множества (такое пространство получается из пространства Штейна путем собственной модификации, «раздувающей» конечное число точек). Комплексное пространство является пространством конечного типа тогда и только тогда, когда

$$\dim H^p(X, F) < \infty, \quad p > 0,$$

для любого когерентного аналитич. пучка F на X (см. [3]). Класс пространств конечного типа совпадает также с классом сильно 1-выпуклых комплексных пространств (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*).

Лит.: [1] Комплексные пространства, М., 1965, с. 29—44; [2] Ramis J. P., «Ann. Sc. norm. super. Pisa», 1973, v. 27, p. 933 -97; [3] Narasimhan R., «Math. Ann.», 1962, Bd 146, № 3, S. 195—216.

А. Л. Онищик.

ГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f : D \to D'$ области $D \subset \mathbb{C}^n$ в область $D' \subset \mathbb{C}^m$, при к-ром

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \longrightarrow (f_1(z), \ldots, f_m(z)),$$

где все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ голоморфны в D. При $m = 1$ Г. о. совпадает с голоморфной функцией (см. *Аналитическая функция*).

Г. о. f наз. невырожденным в точке $z \in D$, если ранг якобиевой матрицы $\|\partial f, \partial z\|$ в точке z максимален ($= \min(n, m)$). Г. о. наз. невырожденным в области D, если оно невырождено во всех точках $z \in D$. При $m = n$ невырожденность f эквивалентна условию

$$\det \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\| \neq 0.$$

При $n = m = 1$ невырожденное Г. о. есть конформное отображение. При $n = m \geqslant 2$ невырожденное Г. о., вообще говоря, не сохраняет углов между направлениями. Если Г. о. f невырождено в точке $a \in D$ и $m = n$, то f локально обратимо, т. е. существуют окрестности U, U', $a \in U \subset D$, $f(a) \in U' \subset D'$ и Г. о. f^{-1}: $U' \to U$ такие, что $f^{-1} \cdot f(z) - z$ для всех $z \in U$. Если Г. о. f взаимно однозначно отображает D на $f(D)$ и $m = n$, то f невырождено в D; при $m > n$ это неверно, напр. $z \to (z^2, z^3)$, $D = \mathbb{C}$, $D' = \mathbb{C}^2$. Если $m \leqslant n$ и f невырождено в D, то образ области D тоже является областью в $\mathbb{C}^m$; при $m > 1$ принцип сохранения области не выполняется для отображений, вырожденных в нек-рых точках, напр. $(z_1, z_2) \to (z_1, z_1 z_2)$, $D = D' = \mathbb{C}^2$.

Если M и M' — комплексные многообразия, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}$ — атласы их локальных систем координат ($\varphi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, $\varphi'_\beta : U'_\beta \to D'_\beta \subset \mathbb{C}^m$ — гомеоморфизмы; см. *Многообразие*), то отображение $f : M \to M'$ наз. голоморфным, если $\varphi'_\beta \cdot f \cdot \varphi_\alpha^{-1}$: $D_\alpha \to D'_\beta$ есть Г. о. для всех α и β. Аналогично определяются Г. о. комплексных пространств (см. *Аналитическое отображение*). См. также *Биголоморфное отображение*.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

ГОЛОМОРФНОСТИ ОБЛАСТЬ — область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, для к-рой существует функция $f(z)$, голоморфная в D и не продолжаемая голоморфно в бо́льшую область; при этом D наз. естественной областью определения функции $f(z)$. Напр., естественной областью определения функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$$

служит единичный круг, к-рый поэтому является Г. о.

в $\mathbb{C}^1$. В $\mathbb{C}^1$ всякая область есть Г. о. Напротив, в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, не всякая область есть Г. о. Так, никакая область вида $D \setminus K$, где K — компакт, содержащийся в D, не будет Г. о.

Область $D \subset \mathbb{C}^n$ наз. голоморфно выпуклой, если для каждого множества $A \subseteq D$ существует такое содержащее A множество $F_A \subseteq D$, что для любой точки $z_0 \in D \setminus F_A$ существует функция $f(z)$, голоморфная в D и такая, что

$$\sup_{z \in A} |f(z)| < |f(z_0)|.$$

Для того чтобы область D была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы она была голоморфно выпуклой (теорема Картана — Туллена). Для того чтобы область D была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $z_0 \in \partial D$ существовал барьер функция $f_{z_0}(z)$, голоморфная в D и не продолжимая голоморфно в точку z_0. Напр., если D — произвольная область в $\mathbb{C}^1$, то функция $(z - z_0)^{-1}$ есть барьер в любой точке $z_0 \in \partial D$, так что D есть Г. о.; если D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и

$$\operatorname{Re}(a,\ z - z_0) - \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} a_i (z_i - z_{0i}) \ -0$$

— опорная плоскость в точке $z_0 \in \partial D$, то функция $(a,\ z - z_0)^{-1}$ есть барьер в z_0, и поэтому всякая выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ есть Г. о.

Пересечение Г. о. есть Г. о.; всякое *биголоморфное отображение* переводит Г. о. в Г. о.; сумма возрастающей последовательности Г. о. есть Г. о. (теорема Бенке — Штейна).

Область $D \subset \mathbb{C}^n$ наз. псевдовыпуклой, если функция $-\ln \Delta_D(z)$ есть *плюрисубгармоническая функция* в D, где $\Delta_D(z)$ есть расстояние от точки $z \in D$ до ∂D. Для того чтобы область была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы она была псевдовыпуклой (теорема Ока). Достаточность условия в теореме Ока составляет содержание проблемы Леви, поставленной Э. Леви (E. Levi, в 1911). Для $n = 2$ она была решена К. Ока (K. Oka, 1942); для $n \geqslant 2$ эта проблема решена независимо К. Ока, Ф. Норге, Г. Бремерманом (F. Norguet, H. Bremermann, 1953—1954).

Г. о. с достаточно гладкой границей допускают локальное описание. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ наз. псевдовыпуклой в точке $z_0 \in \partial D$, если существует такая окрестность V точки z_0 и такая определенная в V действительная функция $\varphi(z)$ класса $\mathbb{C}^2$, что: а) $D \cap V = [z : \varphi(z) < 0,\ z \in V]$ и б) на плоскости

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi(z_0)}{\partial z_i} = 0$$

форма Гессе

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z_0)}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} a_i \bar{a}_k \geqslant 0.$$

Если в условии б) имеет место строгое неравенство для всех рассматриваемых векторов $a \neq 0$, то область D наз. строго псевдовыпуклой в точке z_0. Область D наз. (строго) псевдовыпуклой в смысле Леви, если она (строго) псевдовыпукла в каждой точке $z_0 \in \partial D$.

Если область строго псевдовыпукла в смысле Леви, то она псевдовыпукла (теорема Леви).

Г. о. функции $f(z)$, заданной в первоначальной окрестности V, может быть построена при помощи разложений в ряды Тейлора с использованием принципа голоморфного продолжения; при этом может оказаться, что в построенной области голоморфно продолженная функция $f(z)$ неоднозначна. Чтобы сделать функцию однозначной, необходимо расширить понятие области. Это достигается путем введения римановых областей (*наложения областей*, неоднолистных областей) над $\mathbb{C}^n$ (римановы области над $\mathbb{C}^1$

наз. *римановыми поверхностями*). Понятие Г. о. распространяется и на римановы области и даже на объекты более общей структуры — комплексные многообразия и комплексные пространства. Обобщение понятия Г. о. приводит к *Штейна пространствам*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [3] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968.

В. С. Владимиров.

ГОЛОМОРФНОСТИ ОБОЛОЧКА (римановой) области D — наибольшая область $H(D)$, обладающая тем свойством, что всякая функция, голоморфная в D, голоморфно продолжается в $H(D)$. Задача построения для данной области D ее Г. о. возникает в связи с тем, что в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, не всякая область есть *голоморфности область*, т. е. существуют такие области, что любая функция, голоморфная в этой области, допускает голоморфное продолжение в более широкую (вообще говоря, неоднолистную) область. Оболочка $H(D)$ есть область голоморфности и если D — область голоморфности, то $H(D)=D$.

В приложениях, в аксиоматической квантовой теории поля, возникает нетривиальная задача о построении Г. о. областей специального вида, отражающих физические требования спектральности, локальной коммутативности и лоренцовой ковариантности. При этом особенно полезными оказываются *Боголюбова теорема* «острие клина» и *непрерывности теоремы*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, 2, М., 1976.

В. С. Владимиров.

ГОЛОНОМИИ ГРУППА — одна из характеристик связности в расслоенном пространстве. Г. г. определяется для главного расслоенного многообразия P со структурной группой Ли G и базой B (обладающей счетным базисом), в к-ром задана инфинитезимальная связность Г. Одновременно она определяется для любого присоединенного к P расслоенного многообразия E, слоями к-рого являются экземпляры нек-рого пространства F представления группы Ли G.

Связность Г в P (соответственно в E) определяет для любой кусочно гладкой кривой L базы B изоморфное отображение ΓL друг на друга слоев, соответствующих началу и концу кривой L. Каждой кусочно гладкой замкнутой кривой L базы B, начинающейся и оканчивающейся в точке $x\in B$, соответствует автоморфизм слоя G_x (соответственно F_x) над точкой x. Множество этих автоморфизмов образует группу Ли Φ_x, которая наз. группой голономии связности Г в точке x.

Если база (линейно) связна, то Φ_x и $\Phi_{x'}$ изоморфны между собой для любых x и x' в B. Поэтому можно говорить о группе голономии Φ линейно связного многообразия P (или E) со связностью Г.

Г. г. Φ_x является подгруппой структурной группы G. В случае линейной связности в P эту подгруппу можно определить непосредственно. Пусть задана точка $p\in P$ в слое G_x над точкой x. Совокупность элементов $g\in G$ таких, что точки p и pg^{-1} соединимы горизонтальными кривыми в P, образует подгруппу Φ_p группы G, изоморфную Φ_x.

Ограниченной (суженной) Г. г. Φ_x^0 наз. подгруппа Г. г. Φ_x, порожденная замкнутыми кривыми, гомотопными нулю. Она совпадает с линейно связной компонентой единичного элемента Г. г. Φ_x, при этом Φ/Φ^0 не более чем счетно.

Роль Г. г. в дифференциальной геометрии расслоенных пространств выясняют следующие теоремы о линейных связностях в P.

Теорема о приведении связности. Пусть $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности; Ф — Г. г. заданной в P связности Г. Тогда структурная группа G приводима к своей подгруппе Ф, а связность Г приводима к связности в приведенном расслоении $P'(B, \Phi)$, Г. г. к-рого совпадает с Ф.

Теорема о голономии. Алгебра голономии (алгебра ограниченной Г. г.) является подалгеброй алгебры G, порожденной всеми векторами $\Omega_y(Y, Y')$, где Ω_y — форма кривизны в точке y, y пробегает множество, каждая точка к-рого может быть соединена с исходной точкой y_0 горизонтальным путем, Y и Y' — произвольные горизонтальные векторы.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

Г. Ф. Лаптев.

ГОЛОНОМНАЯ СИСТЕМА — система материальных точек, либо не стесненная никакими связями, либо стесненная только геометрич. связями, накладывающими ограничения на положения точек системы и могущими быть представленными в форме конечных соотношений вида

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0,\ s = 1, \ldots, k;\ f_s(x, t) \in C^2. \quad (1)$$

Здесь t обозначает время, x_i — декартовы координаты точек, N — число точек системы. Если $\partial f_s/\partial t \equiv 0$, то связи наз. стационарными, в противном случае - нестационарными. Всякое положение системы, для к-рого координаты точек удовлетворяют уравнениям (1), наз. возможным для данного момента t. Связи (1) налагают ограничения не только на положения x_ν, но и на скорости v_ν и ускорения w_ν точек вида

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot v_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{d^2 f_s}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot w_\nu + \ldots = 0. \quad (2)$$

Скорости и ускорения, удовлетворяющие уравнениям (2), наз. кинематически возможными в данном положении x_ν системы для данного момента t. Бесконечно малые перемещения δr_ν, удовлетворяющие условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot \delta r_\nu = 0, \quad s = 1, \ldots, k, \quad (3)$$

представляют собою возможные (виртуальные) перемещения системы, в отличие от действительных перемещений dr_ν, совершаемых системой за время dt под действием приложенных к ней сил и удовлетворяющих условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot dr_\nu - \frac{\partial f_s}{\partial t}\, dt = 0, \quad s = 1, \ldots, k. \quad (4)$$

Для стационарных связей действительные перемещения находятся среди возможных, для нестационарных — вообще говоря, не находятся. Возможные перемещения способны перевести голономную систему из одного возможного для данного t положения системы в любое другое бесконечно близкое положение, возможное для того же момента t.

Число независимых вариаций координат точек системы наз. числом ее степеней свободы, для голономной системы оно совпадает с числом $n = 3N - k$ независимых произвольных параметров q_i, с помощью к-рых уравнения (1) связей можно представить в форме конечных соотношений вида

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_n, t),\ \nu = 1, \ldots, 3N,\ x_\nu(q, t) \in C^2. \quad (5)$$

Параметры q_i носят название о б о б щ е н н ы х, или л а г р а н ж е в ы х к о о р д и н а т системы; их называют также г о л о н о м н ы м и к о о р д и н а т а м и, в отличие от н е г о л о н о м н ы х к о о р д и н а т, или к в а з и к о о р д и н а т π_s, вводимых неинтегрируемыми соотношениями вида

$$d\pi_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} dq_i, \quad a_{si}(q_i, t) \in C^1. \tag{6}$$

Связи, аналитически выражаемые уравнениями (1), носят название у д е р ж и в а ю щ и х, или д в у с т о р о н н и х с в я з е й, в отличие от н е у д е р ж и в а ю щ и х, или о д н о с т о р о н н и х с в я з е й, выражаемых неравенствами вида

$$f(x, t) \geqslant 0,$$

и накладывающих следующие условия на возможные перемещения

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot \delta r_\nu \geqslant 0.$$

Возможные перемещения системы с двусторонними связями обратимы, среди возможных перемещений систем с односторонними связями имеются необратимые (см. [1]).

Движения голономных систем описываются *Лагранжа уравнениями* (1-го и 2-го рода), *Гамильтона уравнениями* в лагранжевых координатах и импульсах, *Аппеля уравнениями*, *Пуанкаре уравнениями* или *Четаева уравнениями* в лагранжевых координатах и квазикоординатах.

Лит.: [1] С у с л о в Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М., 1944.

В. В. Румянцев.

ГОЛУБЕВА — ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМА: если $f(z)$ — комплексная суммируемая функция на замкнутой спрямляемой жордановой кривой L, расположенной в плоскости комплексного переменного z, то для существования регулярной во внутренней области D, ограниченной кривой L, функции $F(z)$, угловые граничные значения к-рой совпадают с $f(z)$ почти всюду на L, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L z^n f(z)\, dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Эти условия наз. у с л о в и я м и Г о л у б е в а — П р и в а л о в а. В. В. Голубевым [1] доказана их достаточность, а И. И. Приваловым [2] — необходимость. Иначе говоря, условия (1) необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши — Лебега (см. *Коши интеграл*) $F(z)$, построенный для функции $f(z)$ и кривой L:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

обращался в интеграл Коши — Лебега.

В более общей постановке, пусть μ — комплексная борелевская мера на L. Тогда, для того чтобы интеграл типа Коши — Стилтьеса

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

обращался в интеграл Коши — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись о б о б щ е н н ы е у с л о в и я Г о л у б е в а — П р и в а л о в а

$$\int z^n\, d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Иначе говоря, условия (2) необходимы и достаточны для существования регулярной в D функции $F(z)$ такой, что ее угловые граничные значения почти всюду по мере Лебега на L совпадают с

$$e^{-i\varphi(z)} \mu'(z),$$

где $\varphi(z)$ — угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к L в точке $z \in L$, $\mu'(z)$ — производная меры μ по мере Лебега s (длина дуги) на L.

Г.— П. т. имеет важное значение в теории *граничных свойств аналитических функций.*

Лит.: [1] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916 (см. также его кн.: Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961); [2] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

ГОЛЬДБАХА ПРОБЛЕМА — одна из известных проблем теории чисел; заключается в доказательстве того, что всякое целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Эту проблему выдвинул в 1742 Х. Гольдбах (Ch. Goldbach) в письме к Л. Эйлеру (L. Euler). В ответ Л. Эйлер заметил, что для решения проблемы достаточно доказать, что каждое четное число есть сумма двух простых. В течение долгого времени не удавалось найти никаких путей исследования Г. п. В 1923 Г. Харди и Дж. Литлвуду (G. Hardy, J. Littlewood) удалось показать, что если верны нек-рые теоремы (не доказанные и ныне) относительно L-рядов Дирихле, то всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. В 1937 И. М. Виноградов создал новый метод в аналитич. теории чисел — метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами, с помощью к-рого доказал асимптотич. формулу для количества представлений нечетного числа суммой трех простых чисел. Из этой формулы следует, что каждое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Это — одно из крупнейших достижений современной математики. Метод И. М. Виноградова позволил решить и ряд существенно более общих задач. Задача о разбиении четного числа на сумму двух простых еще (1977) не решена.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975.

А. А. Карацуба.

ГОЛЬДБАХА — ВАРИНГА ПРОБЛЕМА — задача о поведении числа $I_k(N)$ решений уравнения

$$p_1^n + \ldots + p_k^n = N,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа, $n \geqslant 1$ (см. *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*). В этой проблеме получены (к 1977) примерно те же результаты, что и в проблеме Варинга: разрешимость этого уравнения (т. е. неравенство $I_k(N) > 0$) доказана при $k = O(n \log n)$, а асимптотич. формула для $I_k(N)$ получена при $k = O(n^2 \log n)$. Указанные решения получены *Виноградова методом.*

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

А. А. Карацуба.

ГОМЕОМОРФИЗМ — взаимно однозначное соответствие между двумя топологич. пространствами, при к-ром оба взаимно обратных отображения, определяемые этим соответствием, непрерывны. Эти отображения наз. гомеоморфными, или топологическими, отображениями, а также гомеоморфизмами, а о пространствах говорят, что они принадлежат одному топологическому типу и наз. гомеоморфными, или топологически эквивалентными. Они являются изоморфными объектами в категории топологич. пространств и непрерывных отображений. Следует отличать Г. от уплотнения (в к-ром непрерывность обязательна только в одну сторону); однако уплотнение бикомпакта на хаусдорфово пространство является Г.

Примеры. 1) Функция $1/(e^x+1)$ устанавливает Г. между числовой прямой $\mathbb{R}$ и интервалом $(0, 1)$; 2) замкнутый круг гомеоморфен любому замкнутому выпуклому многоугольнику; 3) трехмерное проективное пространство гомеоморфно группе вращений про-

странства $\mathbb{R}^3$ вокруг начала и также пространству единичных касательных векторов к сфере S^2; 4) все бикомпактные нульмерные группы со счетной базой гомеоморфны канторову множеству; 5) бесконечномерные и сепарабельные банаховы пространства и даже пространства Фреше гомеоморфны между собой; 6) сфера и тор негомеоморфны.

Термин «Г.» был введен А. Пуанкаре (H. Poincaré) в 1895 (см. [3]) в применении к (кусочно) дифференцируемым отображениям областей и подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$; однако понятие было известно и ранее, напр. Ф. Клейну (F. Klein; 1872) и в рудиментарной форме А. Мёбиусу (A. Möbius — элементарное сродство, 1863). В начале 20 в. под влиянием развития теории множеств и аксиоматич. метода началось изучение Г. без предположений дифференцируемости. Такая задача, в явной форме впервые поставленная Д. Гильбертом (D. Hilbert) (см. [7], с. 31), составляет содержание пятой проблемы Гильберта. Особое значение имело установление Л. Брауэром (L. Brouwer) негомеоморфности $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ при $n \neq m$. Этим была восстановлена вера математиков в геометрич. интуицию, поколебленная результатами Г. Кантора (G. Kantor) о равномощности $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и Дж. Пеано (G. Peano) о возможности непрерывного отображения $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$, $n < m$. Введенные М. Фреше (M. Fréchet) и Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorf) понятия метрического (соответственно топологического) пространства поставили на прочный фундамент понятие Г. и позволили сформулировать понятия *топологического свойства* (свойства, не меняющегося при Г.), *топологической инвариантности* и т. п. и сформулировать задачу классификации топологич. пространств тех или иных типов с точностью до Г. В такой постановке эта задача, однако, чрезвычайно сложна уже для очень узких классов пространств. Кроме классич. случая двумерных многообразий, классификация указана лишь для нек-рых видов графов, для двумерных полиэдров, для нек-рых классов многообразий. Алгоритмически проблема классификации в общем виде вообще неразрешима, так как невозможен алгоритм для различения, напр., многообразий размерности больше 3. Поэтому обычно задача о классификации ставится в рамках более слабого отношения эквивалентности, напр. в алгебраич. топологии для *гомотопического типа* или, наоборот, для классификации пространств, снабженных какой-либо структурой. В этом случае вопрос о Г. остается все же очень важным. В топологии многообразий лишь в конце 60-х гг. разработаны методы, позволяющие изучать многообразия с точностью до Г. При этом изучение проводится здесь в тесной связи гомотопической, топологической, кусочно линейной и гладкой структур.

Другая проблема состоит в *топологической характеризации* отдельных пространств и классов пространств (т. е. их указания характеристических топологич. свойств, формулируемых на языке аксиом топологии). Она решена, напр., для одномерных многообразий, двумерных многообразий, канторова множества, кривой Серпинского, кривой Менгера, псевдодуги, пространства Бэра и др. Универсальный метод для топологич. характеризации пространств дают спектры. С их помощью получена теорема Александрова о Г. (см. [4]). Последовательностью измельчающихся подразделений охарактеризована сфера и вообще класс локально евклидовых пространств (см. [5]). Посредством спектров дано описание локально бикомпактных групп (см. [6]). Другой метод состоит в рассмотрении различных алгебраич. структур, связанных с отображениями. Так, бикомпактное пространство совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры действительных функций, заданных на нем.

Многие пространства характеризуются полугруппой непрерывных отображений в себя (см. *Гомеоморфизмов группа*). В общей топологии дается топологич. описание многих классов топологич. пространств. Представляет интерес также характеризация пространств внутри данного класса. Напр., очень полезно описание сферы как компактного многообразия, покрытого двумя открытыми клетками. Мало разработан вопрос об алгоритмич. распознавании пространств. Напр., он не решен (к 1977) для сферы S^n при $n \geqslant 3$.

Вообще, если два топологич. пространства негомеоморфны, то этот факт устанавливается указанием топологич. свойства, к-рым обладает лишь одно из них (компактность, связность и т. д.; напр., отрезок отличается от окружности тем, что он может быть разбит точкой); особое значение имеет здесь метод инвариантов. Инварианты определяются или аксиоматич. путем сразу для целого класса пространств, или алгоритмически, по конкретному представлению пространства, напр. по *триангуляции*, *Хегора диаграмме*, разложению на *ручки* и т. д. В первом случае возникает задача вычисления инварианта, во втором — доказательства топологич. инвариантности. Возможен и промежуточный случай, напр. *характеристические классы* гладких многообразий определялись сначала как препятствия к построению векторных и реперных полей, а затем стали определяться как образ касательного расслоения при преобразовании *КО*-функтора в когомологич. функтор, но в обоих случаях обе указанные задачи не решаются определением. Исторически первый пример доказательства топологич. инвариантности, именно, линейной размерности $\mathbb{R}^n$, дал Л. Брауэр (1912). Классический идущий от А. Пуанкаре метод состоит в том, чтобы дать сразу два определения: «вычислимое» и «инвариантное», и затем доказывать их совпадение. Этот прием оказался особенно успешным в теории *гомологий полиэдров*. Другой метод состоит в том, чтобы доказать, что инвариант не меняется при элементарных преобразованиях представления пространства (напр., подразделениях триангуляций). Он достигает цели, если известно, что таким образом можно получить все представления данного типа. В связи с этим, напр., в топологии полиэдра возникла т.н. основная гипотеза комбинаторной топологии. Этот метод (также идущий от А. Пуанкаре) оказался очень полезным в топологии двух и трех измерений, в частности в *узлов теории*, но он выходит из употребления (если не считать конструктивного направления) не столько в связи с тем, что указанная гипотеза оказалась неверной, сколько потому, что развитие теории категорий позволило давать определения, более отвечающие существу дела с более четкой постановкой задачи о вычислении и топологич. инвариантности. Так, инвариантность гомологий, определенных функториальным, но вычислимым образом для комплексов, следует из сравнения категорий комплексов и гомотопич. классов симплициальных отображений с категорией гомотопич. классов непрерывных отображений, что позволяет не давать отдельного определения для большей категории, а распространить его с меньшей. (Истоки этой идеи содержатся в теории степени Брауэра.) Особенно ярко преимущество нового метода проявилось в связи с указанным выше вторым определением характеристич. классов как преобразований функторов. Так, напр., вопрос о топологич. инвариантности естественным образом оказался частью вопроса о соотношении между K-функтором и его топологич. обобщением.

Если два пространства гомеоморфны, то для установления Г. общее значение имеет лишь метод спектров (и измельчающихся подразделений). С другой стороны, в том случае, когда построена классификация, вопрос решается сравнением инвариантов. На практике установление Г. часто оказывается очень трудной геометрич.

задачей, к-рую приходится решать специальными средствами. Так, Г. евклидова пространства и нек-рых его факторпространств устанавливается с помощью псевдоизотопии.

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [2] Болтянский В. Г., Ефремович В. А., «Матем. просвещение», 1957, вып. 2; [3] Пуанкаре А., Собр. соч., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [4] Александров П. С., «Тр. Матем. ин-та. АН СССР», 1959, т. 54, с. 1—136; [5] Harrold O. G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 1—16; [6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969. *А. В. Чернавский.*

ГОМЕОМОРФИЗМОВ ГРУППА — группа $\mathfrak{M}(X)$ гомеоморфных отображений топологич. пространства X на себя. Если X — компактное многообразие, то алгебраич. свойства группы $\mathfrak{M}(X)$, а именно, структура ее нормальных делителей, определяют X с точностью до гомеоморфизма (см. [1]). В частности, при $n\neq 4$ известно, что группа $\mathfrak{M}(S^n)$ есть простая группа. Это верно также для канторова множества, кривой Менгера, кривой Серпинского, множеств рациональных и иррациональных точек на прямой [2]. Для многообразия M минимальным нормальным делителем в $\mathfrak{M}(M)$ служит подгруппа, порожденная гомеоморфизмами, тождественными вне областей M.

Группа $\mathfrak{M}(X)$ может быть топологизирована различным образом (см. *Пространства отображений*). Основное значение имеют *бикомпактно открытая топология* и (если X метризуемо) тонкая C^0-топология, в к-рой окрестности тождества O_f задаются строго положительными функциями $f: X\to(0, \infty)$, причем $h\in\mathfrak{M}(X)$ входит в O_f, если $\rho(hx, x)<f(x)$ для всех x, где ρ — метрика в X. Однако группа $\mathfrak{M}(X)$ не обязана быть топологической группой в этих топологиях, так как отображение $h\to h^{-1}$ не всегда непрерывно, и даже если это так, то $\mathfrak{M}(X)$ может не быть топологич. группой преобразований, т. е. отображение $(h, x)\to hx$ может быть разрывным (см. [3]). Но если X — многообразие, то $\mathfrak{M}(X)$ является топологич. группой преобразований в обеих указанных топологиях. Изучение топологич. свойств группы $\mathfrak{M}(X)$ представляет интерес, в первую очередь, для однородного пространства X, т. е. такого, что действие группы $\mathfrak{M}(X)$ на X транзитивно. Однако такое изучение проведено далеко не полностью даже для простых многообразий. Неизвестно, напр. (к 1977), будет ли $\mathfrak{M}(X)$ бесконечномерным многообразием, хотя оно будет (для метризуемого многообразия X) локально стягиваемым в тонкой C^0-топологии (см. [4]). В частности, два достаточно близких гомеоморфизма соединимы *изотопией*. Для открытых многообразий, к-рые являются внутренностью компактных многообразий, это верно также и в бикомпактно открытой топологии.

Факторгруппа $\Gamma(X)$ группы $\mathfrak{M}(X)$ по компоненте тождества $\mathfrak{M}_0(X)$ наз. группой гомеотопий пространства X. Вообще говоря, $\mathfrak{M}_0(X)$ не совпадает с Г. г., гомотопных тождеству, но это так для двумерных и нек-рых трехмерных многообразий (напр., для S^3, $S^2\times S^1$ и др.). Гомотопич. свойства $\mathfrak{M}_0$ изучены для двумерных многообразий, что оказалось полезным для установления гомологич. свойств групп кос (см. *Кос теория*).

Особое значение в топологии многообразий имеет изучение нек-рых подгрупп группы $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, напр. подгруппы диффеоморфизмов. Это изучение затруднено тем, что подгруппы оказываются незамкнутыми, и топология факторпространств неудовлетворительна. Ввиду этого рассматривают полусимплициальные группы (*ss*-группы) Top_n, в к-рых k-мерными симплексами служат послойные гомеоморфизмы $\Delta^k\times\mathbb{R}^n$, неподвижные на нулевом сечении (где Δ^k — стандартный k-симплекс). Граничные гомеоморфизмы и вырождения определяются с помощью стандартных отображений

$\Delta^l \times \mathbb{R}^n \to \Delta^l \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяются *ss*-**моноид** G_n *ss*-группы PL_n, Diff_n, O_n (гомотопич. эквивалентностей S^{n-1} кусочно линейных, гладких и ортогональных отображений $\mathbb{R}^n$), причем

$$G_n \supset \mathrm{Top}_n \supset PL_n \supset \mathrm{Diff}_n \supset O_n,$$

и факторы G_n/Top_n и т. д. обладают естественными структурами *ss*-комплексов, что позволяет проводить изучение гомотопич. свойств этих вложений.

Изучение различных подгрупп $\mathfrak{M}(M)$ для многообразий M составляет предмет ряда дисциплин. В частности, изучение Г. г., сохраняющих определенные структуры, относится к соответствующим разделам математики. Большой интерес представляют алгебраич. задачи, связанные с группами автоморфизмов деревьев и других графов.

Лит.: [1] Whittaker J. V., «Ann. Math.», 1963, v. 78, № 1, p. 74—91; [2] Anderson R. D., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 4, p. 955—63; [3] Arens R. F., «Amer. J. Math.», 1946, v. 68, № 4, p. 593—610; [4] Чернавский А. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 3, с. 307—56.

А. В. Чернавский.

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА — такая точка ($p = p^*$, $q = q^*$), принадлежащая области определения функции Гамильтона $H = H(p, q)$ *гамильтоновой системы*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = (p_1, p_2), \; q = (q_1, q_2), \quad (*)$$

что решение системы (*), проходящее через эту точку, при $t \to \pm\infty$ асимптотически приближается к некоторому периодич. решению T_1. При этом само решение, проходящее через Г. т., наз. **гомоклиническим**.

Пусть S_+ — поверхность, образованная решениями системы (*), к-рые при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к периодич. решению T_1, а S_- — поверхность, образованная решениями системы (*), к-рые асимптотически приближаются к этому же периодич. решению при $t \to -\infty$. Тогда множество $S_0 = S_+ \cap S_-$ состоит из гомоклинич. решений. Если хотя бы вдоль одного гомоклинич. решения поверхности S_+ и S_- пересекаются (или имеют касание нечетного порядка), то множество S_0 содержит бесконечно много различных решений. Случай, когда множество S_0 состоит из счетного числа решений, является грубым, т. е. сохраняется при малом изменении функции H. Случай, когда S_0 содержит несчетное число различных решений, является негрубым, или вырожденным. При этом предполагается, что само периодич. решение T_1 и поверхности S_+, S_- сохраняются при малом изменении функции H. Это будет иметь место, напр., если периодич. решение T_1 принадлежит к гиперболич. типу (см. *Гиперболическая точка*).

Нахождение гомоклинич. решений системы (*) с произвольной функцией Гамильтона H представляет собой трудную задачу. Однако в случае, когда переменные (p, q) можно выбрать так, что справедливо равенство

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q),$$

где ε — малый параметр, а функция H_1 является 2π-периодической по переменным q, гомоклинич. решения системы (*) могут быть найдены в виде сходящихся рядов (см. [3] при ст. *Гетероклиническая точка*). Доказательства существования гомоклинич. решений у системы (*) получены при менее ограничительных предположениях о функции Гамильтона системы (*).

Данное выше определение Г. т. почти дословно переносится на случай гамильтоновой системы с числом степеней свободы $n > 2$, если периодич. решение T_1 заменить k-мерным инвариантным тором T_k, $0 < k < n$. Известно, что $(n-1)$-мерные инвариантные торы обладают гомоклинич. решениями, если эти торы принадлежат к гиперболич. типу.

Окрестность гомоклинич. решения имеет сложное строение. Так, напр., в случае системы (*) доказано,

что в окрестности гомоклиничн. решения существует счетное число периодич. решений со сколь угодно большими периодами. При этом любые два из них можно соединить гетероклиничн. решением. Гомоклиничн. решения играют важную роль в общей теории гладких динамич. систем.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики, Избр. тр., т. 1, 2, М., 1971; [2] Takens F., «Inventions math.», 1972, v. 18, p. 267—92; [3] Мельников В. К., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 5, с. 1053—56; [4] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975.

См. также лит. при ст. *Гетероклиническая точка.*

В. К. Мельников.

ГОМОЛОГИИ БАЗА (комплекса или топологического пространства) по данной группе коэффициентов — система *циклов* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, удовлетворяющая свойствам: никакая нетривиальная линейная комбинация их не гомологична нулю; всякий цикл гомологичен их нек-рой линейной комбинации.

А. А. Мальцев.

ГОМОЛОГИИ ГРУППА топологического пространства — группа, которая ставится в соответствие топологич. пространству с целью алгебраич. исследования его топологич. свойств; это соответствие должно удовлетворять определенным условиям, важнейшими из к-рых являются *Стинрода — Эйленберга аксиомы* (см. также *Гомологии теория*). Первоначально Г. г. были построены исходя из идей А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895) для полиэдров на основе их триангуляции — представления в виде симплициального комплекса (см. *Гомологии полиэдра*). Впоследствии для обобщения понятия гомологии и расширения области ее применения были созданы несколько теорий гомологии произвольных пространств, в к-рых понятие комплекса всегда используется, но в более сложной ситуации, чем в случае триангуляции. Из этих теорий две являются основными: сингулярная и спектральная. Первая строится исходя из отображений полиэдров в данные пространства и преимущественно приложима к вопросам, в к-рых полиэдры отображаются в произвольные пространства, а вторая основана на отображении любых пространств в полиэдры и особенно полезна в приложениях, в которых встречаются такие отображения.

Идея *сингулярных гомологий* восходит к О. Веблену (O. Veblen, 1921), к-рый в основу определения гомологии пространства положил системы, состоящие из полиэдров, их непрерывных отображений в данное пространство и их гомологий. Эта идея породила две теории. Непосредственное ее развитие привело к группе непрерывных классов гомологии. Более удобной, из-за того что Г. г. определяются из групп цепей, оказалась собственно сингулярная Г. г., определенная С. Лефшецем (S. Lefschetz, 1933) и сводящаяся к отображениям ориентированных симплексов в данное пространство; дальнейшее развитие этой теории привело к рассмотрению упорядоченных симплексов вместо ориентированных (С. Эйленберг, S. Eilenberg, 1944) и к кубич. гомологиям вместо симплексов, использующих кубы (Ж. П. Серр, J. P. Serre, 1951). Все указанные разновидности сингулярных Г. г. изоморфны между собой при очень общих условиях.

Спектральные гомологии, основанные на гомологиях нервов покрытий пространства, связанных в спектр естественными симплициальными отображениями нервов, введены П. С. Александровым (1925 28), рассматривавшим сначала компактные метрич. пространства и последовательности нервов конечных покрытий. Эта теория была распространена на произвольные пространства при помощи произвольных систем нервов открытых покрытий Э. Чехом (E. Čech, 1932), к-рый также опирался на конечные покрытия, что в случае некомпактных пространств не всегда пригодно. Поэто-

му с середины 40-х гг. стали пользоваться бесконечными покрытиями. Введенная Г. г. наз. группой Александрова — Чеха (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*). Другое определение Г. г. для компактных метрич. пространств, основанное на предельных процессах, дано Л. Вьеторисом (L. Vietoris, 1927) (см. *Вьеториса гомологии*). Для произвольных пространств определение группы гомологий Вьеториса опирается на рассмотрение вложенных друг в друга комплексов покрытий (так наз. вьеторисианов), симплексами к-рых являются конечные системы точек пространства, принадлежащие одному и тому же элементу покрытия. В 1935 А. Н. Колмогоровым и Дж. Александером (J. Alexander) независимо было дано построение групп когомологий, основанное на коцепях, являющихся функциями упорядоченных совокупностей точек пространства. А. Н. Колмогоровым было дано и построение Г. г., основанное на функциях множеств и двойственное предыдущему; эта Г. г. при любой группе коэффициентов изоморфна группе гомологий Стинрода (см. *Стинрода двойственность*), а при компактной группе коэффициентов — группе гомологий Александрова — Чеха. Группа гомологий Александрова — Чеха и группа гомологий Вьеториса изоморфны. Группа гомологий Вьеториса и группа когомологий Александера — Колмогорова, являясь обратным и прямым пределами соответственно двойственных спектров, заданных на одном и том же спектре вьеторисианов, двойственны одна другой. Смотря по тому, какие берутся Г. г. на нервах и вьеторисианах при построении соответствующих спектральных Г. г., получают две их разновидности — проекционную и спектровую. В проекционном случае за указанные группы берутся Г. г. цепного комплекса, являющегося пределом цепных комплексов конечных подкомплексов нервов и, соответственно, вьеторисианов, в спектровом случае - пределы Г. г. указанных подкомплексов; в случае дискретной группы коэффициентов эти группы изоморфны; для групп когомологии — двойственно.

Сингулярная и спектральная теории изоморфны в случае паракомпактных, хаусдорфовых, гомологически локально связных пространств; последнее означает, что для данной окрестности каждой точки найдется меньшая окрестность, образ сингулярной Г. г. к-рой в Г. г. данной окрестности при гомоморфизме вложения тривиален (для целочисленных Г. г. всех размерностей; в случае размерности 0 имеются в виду приведенные группы); иначе говоря, это означает, что каждая точка жестко вложена в пространство. Такими являются, напр., локально стягиваемые пространства, в частности полиэдры.

Свойства, отличающие эти теории друг от друга следующие. Сингулярная (но не спектральная) теория обладает свойством точности гомологич. последовательности и является *гомологией с компактными носителями*. Спектральная теория гомологии — точна в случае, когда она задана на категории компактных пар пространств и когда группа коэффициентов компактна. Она и была разработана впервые именно в этом случае. Спектральная (но не сингулярная) теория обладает свойством непрерывности, т. е. если данная компактная пара является обратным пределом спектра нек-рых компактных пар, то Г. г. данной пары есть предел спектра Г. г. этих пар, и свойством жесткости, т. е. Г. г. подпространства — предел спектра Г. г. его окрестностей. Эти теории отличаются также по свойствам вырезания. Сингулярная теория является единственной гомологич. теорией с данной группой коэффициентов на категории CW-комплексов со свойством аддитивности, состоящем в том, что Г. г. топологич. суммы пространств есть прямая сумма Г. г. слагаемых. Спектральная теория —

единственная частично точная теория гомологии на категории компактных пар со свойством непрерывности.

Из многочисленных других Г. г. и групп когомологий и их обобщений следует указать на экстраординарные теории Г. г., к-рые строятся методами гомологич. алгебры, Г. г. и когомологий с коэффициентами в пучках, гомологии с локальными коэффициентами, Г. г. спектрального типа, обладающие точной гомологич. последовательностью, Г. г. по модулю различных особых подпространств.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, в. 2, с. 161 — 232; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, с. 227—82; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [7] Bredon G., Theory of sheaves, N.—Y., 1970; [8] Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, пер. с нем., М., 1967; [9] Switzer R., Algebraic Topology — Homotopy and Homology, B., 1975.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, когомологии динамической системы, — один из инвариантов в *эргодической теории*, построение к-рого напоминает построение когомологий группы (см. [1]). В простейшем случае одномерных (ко)гомологий $H^1(T, X)$ каскада, получающегося итерированием автоморфизма T пространства с мерой X, определение эквивалентно следующему. Пусть $Z(X)$ — группа по сложению всех измеримых функций на X (соответственно группа по умножению измеримых функций f, для к-рых $|f(x)|=1$ почти всюду). Аддитивной (соответственно мультипликативной) (ко)границей функции f наз. функция $g(x)=f(Tx)-f(x)$ (соответственно $g(x)=f(Tx)/f(x)$). Обозначая совокупность всех (ко)границ через $B(T, X)$, можно определить аддитивную (соответственно мультипликативную) группу (ко)гомологий $H^1(T, X)$ как факторгруппу $Z(X)/B(T, X)$. Вместо всех измеримых функций могут рассматриваться и более узкие классы функций. Г. д. с. являются инвариантами траекторного изоморфизма (подробности для H^1 см. в [2]).

Пока (к 1977) Г. д. с. не вычислены ни в одном нетривиальном примере. Использование «гомологических» понятий в эргодич. теории определяется тем, что в различных конкретных случаях бывает важно знать (и иногда действительно удается выяснить), является ли та или иная определенная функция кограницей.

Лит.: [1] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, № 5, с. 67 -80; [2] Степин А. М., «Функциональн. анализ и его приложения», 1971, т. 5, № 2, с. 91—2.

Д. В. Аносов.

ГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСА — исходное понятие для различных гомологич. конструкций. Пусть A — абелева категория и $K.=(K_n, d_n)$ — цепной комплекс в категории A, т. е. семейство объектов $(K_n)_{n\in Z}$ категории A и таких морфизмов $d_n: K_n\to K_{n-1}$, что $d_{n-1}\circ d_n=0$ для всех $n\in Z$. Факторобъекты $\mathrm{Ker}\,d_n/\mathrm{Im}\,d_{n+1}$ наз. n-ми гомологиями комплекса $K.$ и обозначаются $H_n(K.)$. Семейство $(H_n(K.))_{n\in Z}$ обозначается также через $H.(K.)$. Понятие Г. к. является основой для ряда важных конструкций в гомологич. алгебре, коммутативной алгебре, алгебраич. геометрии, топологии. Так, в топологии каждое топологич. пространство X определяет цепной комплекс в категории (Ab) абелевых групп: $(C_n(X), \partial_n)$. Здесь $C_n(X)$ — группа n-мерных сингулярных цепей пространства X, а ∂_n — граничный гомоморфизм. n-е гомологии этого комплекса наз. n-ми группами сингулярных гомологий пространства X и обозначаются $H_n(X)$. Двойственным образом определяется понятие когомологий коцепного комплекса.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

И. В. Долгачев.

ГОМОЛОГИИ ПОЛИЭДРА — *гомологии теория* топологич. пространства, являющегося полиэдром. Г. п. возникли в трудах А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895) при изучении многообразий в евклидовых пространствах. Он рассматривал r-мерные замкнутые подмногообразия данного многообразия, наз. r-мерными циклами. Если в многообразии существует ограниченное $(r+1)$-мерное подмногообразие, границей к-рого является данный r-мерный цикл, то этот цикл наз. г о м о л о г и ч н ы м н у л ю в данном многообразии. Напр., окружность, концентрическая с ограничивающими кольцо окружностями, не гомологична нулю, в то время как окружность, являющаяся границей круга, содержащегося в кольце, гомологична нулю в этом кольце. Аналитическое вначале задание многообразия было заменено А. Пуанкаре представлением его, разложенным на с и м п л е к с ы, приложенные друг к другу по граням так, чтобы они образовывали к о м п л е к с. Такой метод исследования гомологии приложим к любым пространствам, триангулируемым в виде симплициального комплекса, то есть к прямолинейным полиэдрам и их гомеоморфным образам — криволинейным полиэдрам. Геометрич. смысл циклов и их гомологии при этом сохраняются. Так, 1-мерным циклом будет замкнутая ломаная, звеньями к-рой являются 1-мерные симплексы. Он гомологичен нулю, если служит границей 2-мерного подкомплекса данного комплекса. Два цикла одной и той же размерности гомологичны один другому, если вместе они ограничивают подкомплекс данного комплекса. Это есть отношение эквивалентности, что вызывает разбиение множества циклов одной и той же размерности данного комплекса на классы. Во множестве классов вводится алгебраическая структура, если за сумму двух классов принять класс, содержащий сумму циклов, произвольно выбранных из складываемых классов. Введение направления обхода, т. е. рассмотрение ориентированных симплексов приводит к понятию обратного класса. Строгое изложение этих наглядных представлений позволяет определить понятие группы Г. п.

Пусть имеется триангуляция K полиэдра P и абелева группа G. r-м е р н о й ц е п ь ю комплекса K над группой G коэффициентов наз. произвольная функция c_r, ставящая в соответствие каждому ориентированному r-мерному симплексу t^r из K определенный элемент из G, и отличная от нуля лишь для конечного числа симплексов, причем $c_r(-t^r) = -c_r(t^r)$. Складывая r-мерные цепи как линейные формы, получаем абелеву группу $C_r(K, G)$ — группу всех r-мерных цепей комплекса K над группой G коэффициентов. Исходя из понятия границы симплекса и определяя по аддитивности границу цепи, приходим к гомоморфизму

$$\partial_r : C_r(K, G) \longrightarrow C_{r-1}(K, G)$$

со свойством $\partial_{r-1}\partial_r = 0$ и цепному комплексу

$$\{C_r(K, G), \partial_r\}.$$

Цепь c_r наз. ц и к л о м, если ее граница есть нулевая цепь: $\partial_r c_r = 0$. Цикл z_r наз. о г р а н и ч и в а ю щ и м, если в K существует такая $(r+1)$-мерная цепь c_{r+1}, что $z_r = \partial_{r+1} c_{r+1}$. Ядро гомоморфизма ∂_r, т. е. группа $Z_r(K, G)$ всех r-мерных циклов, содержит образ при гомоморфизме ∂_{r+1}, т. е. подгруппу $B_r(K, G)$ всех ограничивающих r-мерных циклов. Факторгруппа $H_r(K, G)$ группы $Z_r(K, G)$ по $B_r(K, G)$ есть r-мерная группа гомологии комплекса K над группой G коэффициентов. Она принимается за r-м е р н у ю г р у п п у г о м о л о г и и $H_r(P, G)$ полиэдра P над G, так как доказывается, что все триангуляции полиэдра P имеют изоморфные r-мерные группы гомологии над G. Группа $H_r(P, G)$ при произвольном G, в силу теоремы об универсальных коэффициентах, определяется целочисленными группами $H_s(P, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел. В свою

очередь если полиэдр конечный, целочисленная группа, к-рая является абелевой группой с конечным числом образующих, имеет полную систему числовых инвариантов — число Бетти и коэффициенты кручения, т. е. ранг и коэффициенты кручения группы $H_r(P, \mathbb{Z})$.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [4] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИИ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ — теория частично точных гомологий (см. *Гомологии теория*), удовлетворяющая следующей аксиоме о компактных носителях: для каждого элемента h из r-мерной группы $H_r(X, A)$ произвольной пары пространств (X, A) в теории H существует такая компактная пара $(X', A') \subset (X, A)$, что h содержится в образе индуцированного вложением гомоморфизма

$$\mu: H_r(X', A') \to H_r(X, A).$$

Если теория H точна и имеет компактные носители, то справедлива следующая теорема: для любого элемента $h \in H_r(X', A')$, принадлежащего ядру гомоморфизма μ, существует такая компактная пара (X'', A''), что

$$(X', A') \subset (X'', A'') \subset (X, A)$$

и h принадлежит ядру гомоморфизма

$$H_r(X', A') \to H_r(X'', A'').$$

Точная теория обладает компактными носителями тогда и только тогда, когда для любой пары (X, A) группа $H_r(X, A)$ есть прямой предел $\varinjlim \{H_r(X', A')\}$, где (X', A') пробегает компактные пары, содержащиеся в (X, A). Точная теория гомологии с компактными носителями единственна на категории произвольных (некомпактных) полиэдральных пар при данной группе коэффициентов и она эквивалентна сингулярной теории. Наряду с группой $H_r(X, A)$ имеется группа

$$H_r^c(X, A) = \varinjlim \{H_r(X', A')\},$$

где (X', A') — компактные подпары из (X, A). Сингулярная группа гомологии обладает компактными носителями и изоморфна группе $H_r^c(X, A)$. В спектральной теории, кроме групп $H_r(X, A)$ гомологий Александрова — Чеха и групп $H_r^c(X, A)$ рассматривается также группа, являющаяся образом при естественном гомоморфизме

$$H_r^c(X, A) \to H_r(X, A);$$

эта группа, как и группа $H_r^c(X, A)$, удовлетворяет аксиоме о компактных носителях, но в спектральной теории группой Г. с к. н. обычно называют именно группу $H_r^c(X, A)$. Указанные три группы спектральной теории отличны друг от друга и каждая из них является объектом теоремы двойственности как при дискретной, так и при компактной группе коэффициентов (см. *Двойственность в топологии*).

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, вып. 2, с. 161—232; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИЙ ТЕОРИЯ топологических пространств — часть алгебраич. топологии, осуществляющая связь между топологич. и алгебраич. понятиями: приводя в соответствие каждому пространству определенную последовательность групп, а непрерывному отображению пространств — гомоморфизмы соответствующих групп, Г. т. по свойствам групп и их

гомоморфизмов позволяет судить о свойствах пространств и отображений. К таким свойствам относятся, напр., связности различных размерностей, для исследования к-рых Г. т. опирается на понятие ограничивания, в отличие от другой части алгебраич. топологии — теории гомотопии, к-рая для той же цели применяет деформации. Г. т. зародилась в конце 19 в. в трудах А. Пуанкаре (H. Poincaré) (см. *Гомологии полиэдра*), но аксиоматич. построение (а вместе с ним и точные границы этого долгое время расплывчатого понятия) Г. т. получила лишь в работах Н. Стинрода и С. Эйленберга (см. [3], а также *Алгебраическая топология*, *Гомологии группа*, *Стинрода — Эйленберга аксиомы*).

По этому построению теория гомологии $\{H, \partial\}$ есть совокупность трех функций: 1) относительной r-мерной группы гомологии $H_r(X, A)$ пары топологич. пространств (X, A), $A \subset X$, к-рая каждой паре (X, A) и каждому целому числу r ставит в соответствие абелеву группу $H_r(X, A)$; 2) гомоморфизма

$$H_r(f) = f_*: H_r(X, A) \longrightarrow H_r(Y, B),$$

к-рый ставится в соответствие непрерывному отображению f: $(X, A) \to (Y, B)$ и числу r и наз. гомоморфизмом, индуцированным отображением f; 3) граничного оператора ∂, к-рый каждой паре (X, A) и каждому r ставит в соответствие гомоморфизм ∂ группы $H_r(X, A)$ в группу $H_{r-1}(A)$ (так наз. а б с о л ю т н у ю г р у п п у п р о с т р а н с т в а A, являющуюся группой пары $(A, \varnothing)$). При этом указанные функции должны удовлетворять следующим аксиомам.

1. Если f — тождественное отображение, то таковым является и f_*.
2. $(gf)_* = g_* f_*$.
3. $\partial f_* = (f|A)_* \partial$.
4. А к с и о м а т о ч н о с т и. Если

$$i : A \to X \text{ и } j : X \to (X, A)$$

— отображения вложения, то последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{r-1}(A) \longrightarrow \ldots,$$

наз. г о м о л о г и ч е с к о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю, п а р ы (X, A), является точной последовательностью, т. е. везде образ входящего гомоморфизма совпадает с ядром исходящего.

5. А к с и о м а г о м о т о п и и. Если отображения

$$f, g : (X, A) \to (Y, B)$$

гомотопны, то $f_* = g_*$.

6. А к с и о м а в ы р е з а н и я. Если U — открытое подмножество пространства X и его замыкание содержится во внутренности подпространства A, то отображение вложения

$$e : (X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$$

индуцирует изоморфизм e_*.

7. А к с и о м а р а з м е р н о с т и. Если X — одноточечное пространство, то $H_r(X) = 0$ для всех $r \neq 0$.

Вместо категории всех пар пространств за область определения функции H_r можно взять произвольную *категорию* пар пространств, напр. категорию пар компактных пространств или категорию пар, состоящих из полиэдров и их подполиэдров. Однако требуется, чтобы такая категория вместе с (X, A) содержала пары $(\varnothing, \varnothing)$, $(X, \varnothing) = X$, $(A, \varnothing) = A$, (A, A), (X, X), цилиндр $(X, A) \times I$, $I = [0,1]$, и какое-либо одноточечное пространство P_0, со всеми их отображениями вложения. Кроме того, требуется, чтобы категория содержала все пары и отображения, к-рые встречаются в аксиомах или теоремах. С другой стороны, за область значений функции H_r вместо категории всех абелевых групп можно принимать и другие категории, напр. категорию топологических, в частности, компактных групп с непрерывными гомоморфизмами или категорию модулей

над нек-рым кольцом с линейными гомоморфизмами.

Аксиомы 1 и 2 означают, что H_r есть ковариантный *функтор* из нек-рой категории пар пространств в категорию групп. Аксиома 3 означает, что граничный оператор ∂ согласован с функтором H_r. Аксиома 4, связывающая функторы всех размерностей r, иногда заменяется более слабым требованием: чтобы последовательность была лишь полуточной, т. е. образ входил в ядро (см. *Точная последовательность*); важным примером частично полуточной теории гомологии является теория гомологий Александрова — Чеха. Аксиома 5 имеет эквивалентную форму: если

$$f_0, f_1 : (X, A) \to (X, A) \times I$$

— отображения, определяемые формулами $f_0(x) = (x, 0)$, $f_1(x) = (x, 1)$, то $f_{0*} = f_{1*}$. Аксиома 6, требующая инвариантность при вырезании и имеющая несколько разновидностей, указывает то свойство Г. т., к-рое отличает ее от теории гомотопии. Аксиома 7, обеспечивающая геометрич. значимость размерностного индекса r, в современных исследованиях часто пренебрегается, что порождает так наз. обобщенные теории гомологии, важным примером к-рых служит теория *бордизмов*.

Для Г. т. существует двойственная ей теория когомологии (см. *Двойственность* в топологии). Она задается: относительной r-мерной группой когомологии $H^r(X, A)$, являющейся контравариантным функтором из категории пар топологич. пространств в категорию абелевых групп с индуцированным гомоморфизмом

$$H^r(f) = f^* : H^r(Y, B) \longrightarrow H^r(X, A)$$

и кограничным оператором

$$\delta : H^r(A) \longrightarrow H^{r+1}(X, A).$$

Аксиомы формулируются так же, как и в случае гомологии, с очевидным изменением в направлении гомоморфизмов, происходящим от контравариантности; напр., аксиома точности требует, чтобы была точной когомологическая последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^{r-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^r(X, A) \xrightarrow{j^*} H^r(X) \xrightarrow{i^*} H^r(A) \longrightarrow \ldots .$$

Здесь возникают также обобщенные когомологич. теории, важными примерами к-рых служат *K-теории* и *кобордизмы*. Приводимые ниже факты Г. т. имеют когомологич. параллели.

Группой коэффициентов Г. т. или теории когомологии наз. группа $H_0(P_0)$ или соответственно $H^0(P_0)$. Группы $\tilde{H}_r(X, A)$ иногда удобно заменять так наз. приведенными группами $\tilde{H}_r(X, A)$: приведенная нульмерная группа гомологии $\tilde{H}_0(X)$ есть ядро гомоморфизма

$$l_* : H_0(X) \longrightarrow H_0(P_0),$$

индуцированного отображением $l : X \to P_0$, а приведенная нульмерная группа когомологии $\tilde{H}^0(X)$ есть факторгруппа группы $H^0(X)$ по образу $f^*(H^0(P_0))$; приведенные группы других размерностей совпадают с исходными: $\tilde{H}_r(X) = H_r(X)$, $r \neq 0$. Так, $H_0(X) \sim \tilde{H}_0(X) \oplus G$. Если $A \neq \varnothing$, то $\tilde{H}_r(X, A) = H_r(X, A)$ при всех r. Замена обычных групп приведенными позволяет получить из гомологич. последовательности приведенную гомологическую последовательность.

Аксиомы Г. т. не являются независимыми. Так, аксиома 1 есть следствие аксиом 2, 3, 4. Система аксиом совместна, как показывает пример тривиальной теории $H_r(X, A) = 0$; нетривиальными примерами являются когомологич. теория Александрова — Чеха, *сингулярн-*

ные гомологии и др. В вопросе полноты имеет место следующее: гомоморфизмом Г. т. $\{H, \partial\}$ в Г. т. $\{H', \partial'\}$ наз. такая система гомоморфизмов

$$h(X, A; r): H_r(X, A) \longrightarrow H'_r(X, A),$$

что

$$H'(f) \cdot h(X, A; r) = h(Y, B; r) \cdot H(f)$$

и

$$\partial' \cdot h(X, A; r) = h(A; r-1) \cdot \partial;$$

если все $h(X, A; r)$ — изоморфизмы, то Г. т. $\{H, \partial\}$ и $\{H', \partial'\}$ наз. изоморфными Г. т. На конечных полиэдрах Г. т. является единственной. Точнее, если $h_0 : G \to G'$ — произвольный гомоморфизм группы коэффициентов G теории $\{H, \partial\}$ в группу коэффициентов G' теории $\{H', \partial'\}$, то для каждой полиэдральной пары (X, A) существует единственный гомоморфизм

$$h(X, A; r): H_r(X, A) \longrightarrow H'_r(X, A),$$

обладающий тем свойством, что $h(P_0; 0) = h_0$, причем, если h_0 — изоморфизм, то изоморфизмами являются и все $h(X, A; r)$. Так как группы гомологии отрицательной размерности триангулируемой пары тривиальны, то для таких пар равенство $H_r(X, A) = 0$, $r<0$, имеет место и при любой Г. т. $\{H, \partial\}$. Теорема единственности справедлива и для более широких категорий пространств в случае, когда Г. т. удовлетворяет соответствующим дополнительным аксиомам.

Группы гомологии являются топологическими, а также гомотопич. инвариантами: если f есть гомотопич. эквивалентность, то f_* есть изоморфизм. Если X — стягиваемое пространство, в частности, клетка, то $H_r(X) = 0$, $r \neq 0$, и $H_0(X) \sim G$. Если $i : A \subset X$ есть гомотопич. эквивалентность, то $H_r(X, A) = 0$, и, при любом X, $H_r(X, X) = 0$. Если A — ретракт пространства X, то i_* есть мономорфизм, j_* — эпиморфизм, оператор ∂ тривиален и

$$H_r(X) \sim H_r(A) \oplus H_r(X, A).$$

Если X деформируемо в A, то i_* есть эпиморфизм, j_* тривиален, ∂ есть мономорфизм и

$$H_r(A) \sim H_r(X) \oplus H_{r+1}(X, A).$$

Пусть через $S(X)$ обозначена *надстройка* над X; имеет место изоморфизм

$$\tilde{H}_r(X) \sim \tilde{H}_{r+1}(S(X)).$$

Это дает возможность вычислить группы гомологий сфер S^n; именно: $\tilde{H}_r(S^n) = 0$ при $r \neq n$ и $\tilde{H}_n(S^n) \sim G$; следовательно, $H_r(S^n) = 0$ при $n \neq r \neq 0$, $H_r(S^n) \sim G$ при $n \neq r - 0$ или $n - r \neq 0$ и $H_0(S^0) \sim G \oplus G$.

Важную роль в Г. т. играют гомологические последовательности троек и триад. Для тройки (X, A, B), $X \supset A \supset B$, пространств граничный оператор $\partial' = k_* \partial$ определяется как композиция $k'_* \cdot \partial$, где $k' : A \to (A, B)$ есть вложение. Тогда возникает так наз. гомологическая последовательность тройки (X, A, B) (сводящаяся при $B = \varnothing$ к гомологич. последовательности пары (X, A))

$$\ldots \longrightarrow H_r(A, B) \xrightarrow{i'_*} H_r(X, B) \xrightarrow{j'_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial'} H_{r-1}(A, B) \longrightarrow \ldots,$$

где $i' : (A, B) \to (X, B)$ и $j' : (X, B) \to (X, A)$ — вложения. Эта последовательность точна. Если группы $H_r(X, A)$, $H_r(X, B)$, $H_r(A, B)$ тривиальны для всех r, то i'_*, ∂', j'_* являются соответственно изоморфизмами, и наоборот. Если X есть объединение непересекающихся замкнутых множеств X_i, $i = 1, \ldots, n$, и $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, где $A_i \subset X_i$, то $H_r(X, A)$ изоморфна прямой сумме

групп $H_r(X_i, A_i)$, $i=1, \ldots, n$. Триада $(X; A, B)$ есть пространство X с упорядоченной парой A, B подпространств. Она является собственной триадой, если вложения

$$k:(A,\ A\cap B)\longrightarrow(A\cup B.\ B),\quad l:(B,\ A\cap B)\longrightarrow(A\cup B,\ A)$$

индуцируют изоморфизмы или имеется разложение

$$H_r(A\cup B,\ A\cap B)\sim H_r(A,\ A\cap B)\oplus H_r(B,\ A\cap B).$$

Далее, для них определяется граничный оператор

$$\overline{\partial}:H_r(X,\ A\cup B)\longrightarrow H_{r-1}(A,\ A\cap B)$$

как $k_*^{-1}\cdot m_*\cdot\partial$, где $m: A\cup B\subset(A\cup B,\ B)$. Это порождает точную гомологическую последовательность триады

$$\ldots\longrightarrow H_r(A,\ A\cap B)\xrightarrow{p_*}H_r(X,\ B)\xrightarrow{q_*}H_r(X,\ A\cup B)\xrightarrow{\overline{\partial}}$$
$$\xrightarrow{\overline{\partial}}H_{r-1}(A,\ A\cap B)\longrightarrow\ldots,$$

где $p:(A, A\cap B)\to(X, B)$, $q:(X, B)\to(X, A\cup B)$ — вложения [при $B\subset A$ эта последовательность сводится к гомологич. последовательности тройки (X, A, B)].

Пусть $X=A\cup B$, $A\cap B=C$ и пусть для отображений h, h_1, $h_2:(X, C)\to(Y, D)$ имеют место соотношения $h_1|A=h|A$, $h_2|B=h|B$, $h_1(B)\subset D$, $h_2(A)\subset D$. Тогда справедливы следующие аддиционные теоремы.

1. $h_*=h_{1*}+h_{2*}$.

2. Если D стягиваемо и $f, f_1, f_2: X\to Y$ определены соответственно посредством h, h_1, h_2, то для индуцированных гомоморфизмов приведенных групп f_*, f_{1*}, $f_{2*}:\tilde{H}_r(X)\to\tilde{H}_r(Y)$ имеет место равенство $f_*=f_{1*}+f_{2*}$.

Пусть определен гомоморфизм

$$s:H_r(C)\longrightarrow H_r(A)\oplus H_r(B),$$

где $s(c)=(s_{1*}(c), -s_{2*}(c))$, $c\in H_r(C)$ и где $s_1: C\to A$, $s_2: C\to B$ — вложения, и гомоморфизм

$$t:H_r(A)\oplus H_r(B)\longrightarrow H_r(X),$$

где $t(a, b)=t_{1*}(a)+t_{2*}(b)$, $(a, b)\in H_r(A)\supset H_r(B)$, и $t_1: A\to X$, $t_2: B\to X$ — вложения. Пусть, наконец, определен гомоморфизм

$$\Delta:H_r(X)\ \to H_r(C),$$

где $\Delta=\partial u_*^{-1}v_*$ и

$$v:X\longrightarrow(X,\ B),\quad u:(A,\ C)\longrightarrow(X,\ B)$$

— вложения. Тогда получается так наз. последовательность Мейера — Вьеториса собственной триады:

$$\ldots\longrightarrow H_r(C)\xrightarrow{s}H_r(A)\oplus H_r(B)\xrightarrow{t}H_r(X)\xrightarrow{\Delta}$$
$$\xrightarrow{\Delta}H_{r-1}(C)\longrightarrow\ldots,$$

к-рая является точной и к-рая связывает гомологии пространств с гомологиями их объединения и пересечения. Отсюда, в случае $C\neq\varnothing$, можно перейти к аналогичной последовательности для приведенных групп. Из нее следует:

1. Если $A\cap B$ стягиваемо, то

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_r(A)\oplus\tilde{H}_r(B).$$

2. Если $A\cup B$ стягиваемо, то

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_r(A)\dotplus\tilde{H}_r(B).$$

3. Если A и B стягиваемы, то Δ устанавливает изоморфизм

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_{r-1}(A\cap B).$$

Использование предыдущих результатов позволяет вычислить группы гомологии различных пространств. Напр., если X — замкнутая ориентируемая поверх-

ность рода n, то $H_r(X)$ изоморфна группе коэффициентов G при $r=0,2$, прямой сумме G^{2n} $2n$ экземпляров группы G при $r=1$ и 0 — в остальных случаях. Если X — замкнутая неориентируемая поверхность рода n, то $H_r(X)$ изоморфна G при $r=0$, группе $G^{n-1}\oplus G_2$, где G_2 есть факторгруппа $G/2G$, $2G=\{2g|g\in G\}$, при $r=1$, подгруппе $T_2(G)$ группы G, состоящей из всех элементов $g\in G$ с $2g=0$ при $r=2$ и 0 — в остальных случаях. Таким образом, Г. т. дает топологич. классификацию замкнутых поверхностей. Для n-мерного действительного проективного пространства P^n группа $H_r(P^n)$ изоморфна группе G при $r=0$ или $r=n$ и нечетном, группе G_2 при r нечетном и $0<r<n$, группе $T_2(G)$ при r четном и $0<r<n$ и 0 — в остальных случаях. Группа гомологии $H_r(CP^n)$ комплексного проективного пространства CP^n размерности $2n$ изоморфна группе G при r четном и $0\leqslant r\leqslant 2n$ и 0 — в остальных случаях. Гомологич. группа $H_r(L_{p,q})$ *линзового пространства* $L_{p,q}$ изоморфна группе G при $r=0,3$, группе $G_p=G/pG$, где $pG=\{pg|g\in G\}$ при $r=1$, группе $T_p(G)$, где $T_p(G)=\{g\in G|pg=0\}$ при $r=2$ и 0 — в остальных случаях.

Из разнообразных приложений предыдущих результатов следует выделить нек-рые фундаментальные предложения. Прежде всего — инвариантность размерности: сферы, а также евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны; более того, если два полиэдра гомеоморфны, то они имеют одинаковую размерность. Далее, из равенства $f_*i_*=g_*$, где $f: X\to Y$ есть распространение данного отображения $g: A\to Y$, $A\subset X$, получаются различные признаки распространяемости и ретрагируемости отображений; напр., отображение ненулевой степени сферы S^{n-1}, $n>1$, в себя не распространимо на n-мерный шар E^n, границей к-рого является S^{n-1}, а сфера S^{n-1} не является ретрактом шара E^n ни для какого натурального n. Из этого, в свою очередь, следует теорема Брауэра о неподвижной точке: любое отображение $E^n\to E^n$ имеет неподвижную точку. Наконец, доказывается, что на S^n существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда n нечетно, а из теории триад получается ряд теорем о степенях отображений, что, в частности, позволяет по-новому доказать основную теорему алгебры.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [3] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] Hu Sze-Tsen, Homology Theory; 3 ed., N.— L., 1965; [6] Hu Sz.-Tz., Cohomology Theory, L., 1970; [7] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, основным объектом изучения к-рого являются производные функторы на различных категориях алгебраич. объектов (модулей над данным кольцом, пучков и т. д.).

Одним из истоков Г. а. явилась теория гомологий топологич. пространств, в к-рой каждому топологич. пространству X сопоставляется последовательность абелевых групп $H_n(X)$ (групп гомологий), а непрерывному отображению $f: X\to Y$ пространств — набор гомоморфизмов $f_n: H_n(X)\to H_n(Y)$ групп гомологий. Каждый n-мерный сингулярный симплекс T топологич. пространства X имеет границу, состоящую из сингулярных симплексов размерности $n-1$. Если K_n — свободная абелева группа, порожденная всеми этими n-мерными симплексами, то функция ∂, к-рая сопоставляет каждому T альтернированную сумму ∂T его граничных симплексов, определяет гомоморфизм $\partial: K_n\to K_{n-1}$, так что $\ldots\xrightarrow{\partial} K_n\xrightarrow{\partial} K_{n-1}\xrightarrow{\partial} K_{n-2}\xrightarrow{\partial}\ldots$, причем непрерывное отображение пространств индуцирует гомоморфизм соответствующих им комплексов. Некоторые свойства пространства X или отображения

$f: X \to Y$ могут быть найдены по свойствам группы H_n гомологий этого комплекса или соответствующих гомоморфизмов f_n этих групп гомологий, что в ряде случаев позволяет свести изучение топологич. объектов к изучению нек-рых алгебраич. объектов, подобно тому, как это делается в аналитич. геометрии (но с той разницей, что переход от геометрии к алгебре в теории гомологий необратим).

В свою очередь, в алгебре в связи с изучением *расширений* групп фактически рассматривались первая и вторая группы гомологий и когомологий. Значительный подготовительный материал был разработан в теории ассоциативных алгебр, алгебр Ли, теории конечномерных алгебр, теории колец, теории квадратичных форм.

В процессе изучения групп гомологий сложился прежде всего язык Г. а. Появились обозначения отображений с помощью стрелок и коммутативные диаграммы (если в графе отображений два пути, имеющие общие начало и конец, приводят к одному и тому же результату, то такую диаграмму наз. коммутативной). Часто встречались последовательности гомоморфизмов, в к-рых ядро исходящего гомоморфизма совпадало с образом входящего, такие последовательности назвали точными. Стало обычаем задавать математич. объекты одновременно с их отображениями, а наиболее предпочтительными считались соответствия между объектами, сохраняющие отображения, названные *функторами*. Основные достоинства этого языка — информативность, естественность и наглядность, быстро получили признание. Напр., в [5] язык Г. а. был использован для аксиоматич. изложения оснований алгебраич. топологии. В настоящее время язык Г. а. присутствует во многих работах, даже не использующих ее методов.

К середине 40-х гг. 20 в. Г. а. выделяется в самостоятельную область алгебры. Основная сфера применения Г. а.— категория модулей над кольцом. Большинство результатов, известных для модулей, переносится на абелевы категории с нек-рыми дополнительными ограничениями (это объясняется тем, что такие категории вкладываются в категорию модулей). Наиболее содержательное расширение области применения Г. а. было осуществлено в [4], где Г. а. была перенесена на произвольные абелевы категории с достаточным запасом инъективных объектов и стала приложимой к арифметической алгебраич. геометрии и теории функций многих переменных (см. *Гротендика категория*).

Основные функторы Г. а.— $\mathrm{Hom}(A, B)$ (группа гомоморфизмов модуля A в модуль B) и *тензорное произведение* модулей $A \otimes B$. Основа теории - изучение *производных функторов*, к-рые строятся, напр., следующим образом. Произвольный модуль A может быть представлен как фактормодуль свободного модуля F_0, затем рассматривается такое же представление F_1 для ядра предыдущего представления и т. д. В результате возникает точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Последовательность

$$\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0,$$

где все модули P_i — проективны, наз. проективной резольвентой модуля A. Применение к ней ковариантного аддитивного функтора T дает комплекс, группы гомологий к-рого наз. левыми производными функтора T и обозначаются $L_n T$. Двойственно (для контравариантного функтора) или, используя инъективные модули и инъективные резольвенты (для ковариантного функтора), строятся правые производные функторы $R^n T$. Производные функторы измеряют в нек-ром смысле отклонение функтора от точности. Они не зависят от произвола построения резольвенты. Каждой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

соответствуют две бесконечные точные последовательности производных функторов:

$$\ldots \longrightarrow L_{n+1}T(C) \longrightarrow L_nT(A) \longrightarrow L_nT(B) \longrightarrow L_nT(C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow L_{n-1}T(C) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow R^{n-1}T(C) \longrightarrow R^nT(A) \longrightarrow R^nT(B) \longrightarrow R^nT(C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}T(A) \longrightarrow \ldots$$

Для производных функторов основных функторов приняты следующие обозначения:

$$L_n(A \otimes_R B) = \operatorname{Tor}_n^R(A, B),$$
$$R^n \operatorname{Hom}_R(A, B) = \operatorname{Ext}_R^n(A, B).$$

Оба эти функтора являются функторами двух аргументов A и B, поэтому изложенная конструкция построения производного функтора к ним непосредственно неприменима. В данном случае можно фиксировать один из аргументов и строить резольвенту для другого или, взяв резольвенты для обоих аргументов, можно построить нек-рый двойной комплекс. Все эти построения приводят к одному и тому же результату. Группа $\operatorname{Ext}_R^1(A, B)$ изоморфна группе расширений модуля B с помощью модуля A (и в этом виде давно изучалась). Установление новых связей значительно расширило и продвинуло теорию расширений модулей. Группа $\operatorname{Tor}_1^R(A, Q/\mathbb{Z})$ сопоставляет каждой группе A ее периодич. часть. Обобщение этого наблюдения привело к общей теории кручения.

В общую схему производных функторов укладывается теория гомологий алгебраич. систем. Напр., пусть $\Lambda = \mathbb{Z}G$ — групповое кольцо мультипликативной группы G над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, A — левый, а B — правый Λ-модули. Изучение групп

$$H^n(G, A) = \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, A),$$

$$H^n(G, B) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(B, \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ рассматривается как тривиальный левый $\mathbb{Z}G$-модуль, составляет теорию гомологий и когомологий групп. Пусть L — алгебра Ли над полем k, UL — ее универсальная обертывающая алгебра, A есть UL-модуль. Изучение групп

$$H^n(L, A) = \operatorname{Ext}_{UL}^n(k, A),$$

где k рассматривается как тривиальный UL-модуль, составляет теорию когомологий алгебр Ли. Аналогично определяются подходящие группы когомологий и гомологий моноидов, абелевых групп, алгебр, градуированных алгебр, колец и т. д. Руководящей идеей в каждом случае служит то, что вторая группа когомологий представляет группу расширений для рассматриваемого типа алгебраич. систем.

В свою очередь, гомологии алгебраич. систем являются предметом изучения *относительной гомологической алгебры*.

В конкретных случаях вычисление производных функторов обычно достигается с помощью удачно построенной *резольвенты*. Иногда резольвента оказывается конечной (напр., длина резольвенты произвольной абелевой группы не превосходит 1). Существует давний и вполне оправданный интерес к длине самой короткой резольвенты (эта длина наз. *гомологической размерностью*). Первый значительный результат в этом направлении — *Гильберта теорема* о сизигиях (конец 19 в.). Теория гомологич. размерности — одна из активно развивающихся ветвей Г. а. Переход от модулей с различными ограничениями конечности к общему случаю часто осуществляется с помощью функторов *индуктивных пределов* ($\varinjlim$) и *проективных пределов* ($\varprojlim$). Напр., всякая группа является индуктивным пределом своих конечно порожденных подгрупп. Всякая компактная

вполне несвязная группа представима в виде проективного предела своих конечных факторгрупп. Интерес к этим группам вызван их связями с теорией Галуа. Производные этих функторов применяются в теории гомологич. размерности.

Изучаются производные функторы для неаддитивных функторов (напр., функтора, сопоставляющего абелевой группе ее групповое кольцо или симметрическую алгебру).

К основным средствам вычисления Г. а., кроме уже отмеченных резольвент, следует отнести *спектральные последовательности* и *гомологические умножения*. Спектральные последовательности, являясь наиболее мощным аппаратом исследования производных функторов, аппроксимируют группы гомологий группы группами гомологий ее подгруппы и факторгруппы. Гомологич. умножения изучают гомоморфизмы типа

$$L_nT \oplus L_mT \longrightarrow L_{n+m}T,$$

комбинирующие между собой производные функторы.

Методы Г. а. широко используются в настоящее время в самых различных разделах математики — в функциональном анализе, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнениях и др. Без Г. а. немыслимы такие разделы алгебры, как алгебраич. K-теория, алгебраич. геометрия, алгебраич. теория чисел.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [4] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [5] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [6] Итоги науки. Сер. Математика. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—36; [7] Steenrod N. E., Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological and homological algebra, pt. 2, Princeton, p. 1174—364. *В. Е. Говоров, А. В. Михалев.*

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕЦ — общее название для результатов, описывающих свойства кольца (обычно, ассоциативного и с единицей) по свойствам тех или иных *модулей* над ним и, в частности, по свойствам категории всех левых (или правых) модулей над этим кольцом (см. *Мориты эквивалентность*).

Важнейшие примеры таких результатов следующие.

1) Классич. полупростота кольца равносильна как инъективности всех левых модулей над ним, так и их проективности, а также инъективности всех левых идеалов кольца (см. [1]).

2) Коммутативное локальное нётерово кольцо регулярно тогда и только тогда, когда оно имеет конечную глобальную гомологич. размерность.

3) Регулярность (в смысле Неймана) кольца имеет место в том и только в том случае, когда все модули над ним плоские, т. е. когда кольцо имеет нулевую слабую гомологич. размерность (см. [2]).

4) Проективность всякого плоского левого модуля равносильна условию минимальности для главных правых идеалов (см. *Совершенное кольцо*).

5) Кольцо нётерово слева тогда и только тогда, когда класс инъективных левых модулей над ним описывается формулами узкого исчисления предикатов на языке теории модулей (см. [4]).

См. также *Артиново кольцо*, *Квазифробениусово кольцо*, *Когерентное кольцо*, *Полусовершенное кольцо*, *Самоинъективное кольцо*.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [3] Скорняков Л. А., «Математички весник», 1967, т. 4, № 4, с. 415—34; [4] Eklof P., Sabbagh G., «Ann. Math. Log.», 1971, v. 2, № 3, p. 251—95; [5] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *А. В. Михалев, Л. А. Скорняков.*

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — бесконечная в обе стороны точная последовательность гомологий трех комплексов, связанных короткой точ-

ной последовательностью. Пусть $0 \to K. \to L. \to M. \to 0$ — точная последовательность цепных комплексов в абелевой категории. Тогда для любого n определены морфизмы гомологий

$$\partial_n : H_n(M.) \longrightarrow H_{n-1}(K.),$$

наз. связывающими (или граничными) морфизмами. В категории модулей они определяются особенно просто: для $h \in H_n(M.)$ выбирается прообраз $x \in L_n$; тогда dx является образом нек-рого элемента $z \in Z_{n-1}(K.)$, класс гомологий к-рого есть $\partial_n(h)$. Построенная с помощью связывающих морфизмов последовательность гомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K.) \longrightarrow H_n(L.) \longrightarrow H_n(M.) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(K.) \longrightarrow \ldots$$

является точной и наз. гомологической последовательностью. Таким образом, гомологии являются *гомологическим функтором* на категории комплексов.

Двойственным образом определяется когомологическая последовательность.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960.

В. И. Данилов.

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — числовая характеристика объекта категории относительно некоторого выделенного класса объектов этой категории. Основная область применения этого понятия — категории модулей над кольцом.

Пусть $\mathfrak{B}$ — фиксированный класс объектов *абелевой категории* $\mathfrak{A}$ и A объект из $\mathfrak{B}$, тогда (проективной) гомологической размерностью объекта A относительно класса $\mathfrak{B}$ наз. наименьшее число n, для к-рого существует точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

где все B_i из $\mathfrak{B}$. Если такого n не существует, то говорят, что Г. р. равна ∞.

Пусть ${}_R\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_R$) — категория левых (правых) модулей над ассоциативным кольцом R с единицей. Тогда: а) если $\mathfrak{B}$ — класс всех проективных левых R-модулей, то соответствующая Г. р. модуля A наз. проективной размерностью и обозначается $\mathrm{p.d}_R(A)$; б) если $\mathfrak{B}$ — класс всех плоских левых R-модулей, то соответствующая Г. р. модуля A наз. слабой размерностью и обозначается $\mathrm{w.d}_R(A)$. Если $\mathfrak{A}$ — категория левых *градуированных модулей* над градуированным кольцом R, а $\mathfrak{B}$ — класс всех левых проективных градуированных R-модулей, то соответствующая Г. р. градуированного R-модуля A наз. градуированной проективной размерностью и обозначается $\mathrm{gr.\,p.\,d}_R(A)$.

Рассматривается также двойственная конструкция. Если $A \in {}_R\mathfrak{M}$, то наименьшее число n такое, что существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0,$$

где все модули Q_i инъективны, наз. инъективной размерностью модуля A и обозначается $\mathrm{i.\,d}_R(A)$.

Пусть $A \in {}_R\mathfrak{M}$, тогда следующие условия равносильны:

а) $\mathrm{i.\,d}_R(A) \leqslant n$;

б) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(B, A) = 0$ для всех $B \in {}_R\mathfrak{M}$ (см. *Функтор* Ext);

б′) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(B, A) = 0$ для всех циклических модулей B;

в) $\mathrm{Ext}^n_R(B, A)$ — точный функтор относительно аргумента B;

г) если

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow Y_n \longrightarrow 0$$

— точная последовательность и модули Y_k при $0 \leqslant k < n$ инъективны, то Y_n — инъективный модуль.

Эквивалентны между собой также условия:

а) $\mathrm{p.d}_R(A) \leqslant n$;

б) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, C) = 0$ для всех $C \in {}_R\mathfrak{M}$;

в) $\mathrm{Ext}_R^n(A, C)$ — точный справа функтор аргумента C;

г) если

$$0 \to X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$$

— точная последовательность и модули X_k при $0 \leqslant k < n$ проективны, то и X_n — проективный модуль.

Если последовательность

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

— точна, где $A', A, A'' \in {}_R\mathfrak{M}$, и

$$d' = \mathrm{p.d}_R(A'), \quad d = p.d._R(A), \quad d'' = \mathrm{p.d}_R(A''),$$

то

$$d' \leqslant \sup(d, d''-1),$$
$$d'' \leqslant \sup(d'+1, d),$$
$$d \leqslant \sup(d', d'').$$

Если $d < \sup(d', d'')$, то $d'' = d'+1$.

Число

$$\mathrm{l.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d}_R(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}$$

наз. левой глобальной размерностью кольца R.

$$\mathrm{l.gl.d.(R)} =$$
$$= \sup\{\mathrm{p.d}_R(A) \mid A \text{ — циклический левый } R\text{-модуль}\}$$
$$= \sup\{\mathrm{i.d}_R(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}.$$

Если кольцо R обладает композиционным рядом левых идеалов, то

$$\mathrm{l.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d.}(S) \mid S \in {}_R\mathfrak{M}, S \text{ — простой } R\text{-модуль}\}.$$

Число

$$\mathrm{gl.w.d.}(R) = \sup\{\mathrm{w.d.}(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}$$

наз. слабой глобальной размерностью кольца R, при этом

$$\mathrm{gl.w.d.}(R) = \sup\{\mathrm{w.d}_R(A) \mid A \in \mathfrak{M}_R\}.$$

Число

$$\mathrm{l.f.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d.}(A) \mid A \in \mathfrak{M}_R,\ \mathrm{p.d}_R(A) < \infty\}$$

наз. левой ограниченной глобальной размерностью кольца R.

Сюда же примыкают следующие размерности: если R — алгебра над коммутативным кольцом K, то проективная размерность R-бимодуля R (т. е. левого $R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$-модуля, где R^{op} — противоположное R кольцо) наз. биразмерностью алгебры R и обозначается $\mathrm{bid}\, R$; если G группа, K — коммутативное кольцо, то (ко)гомологической размерностью группы G наз. плоская (проективная) размерность модуля K над групповым кольцом KG с тривиальным действием группы G на K и обозначается $(\mathrm{hd}_K(G))\ \mathrm{cd}(G)$.

Ряд хорошо известных теорем можно переформулировать в терминах Г. р. Напр., теорема Веддерберна — Артина будет иметь вид: кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда $\mathrm{gl.d.}(R) = 0$. Кольцо R регулярно (в смысле Неймана) тогда и только тогда, когда $\mathrm{w.gl.d.}(R) = 0$. Равенство $\mathrm{bid}_K R = 0$ для алгебры R над полем K равносильно ее сепарабельности над K. Утверждение о том, что подгруппа свободной абелевой группы свободна, эквивалентно тому, что $\mathrm{gl.d.}(\mathbb{Z}) = 1$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Кольцо R, для к-рого $\mathrm{l.gl.d.}(R) \leqslant 1$ наз. наследственным слева кольцом.

Левая и правая глобальные размерности кольца R могут не совпадать. Если же R нётерово слева и справа, то

$$\text{l.gl.d.}(R) = \text{r.gl.d.}(R) = \text{w.gl.d.}(R).$$

Если $R \to S$ — гомоморфизм колец, то любой S-модуль $_S(A)$ можно рассматривать и как R-модуль, при этом:

$$\text{p.d.}_R(A) \leqslant \text{p.d.}_S(A) + \text{p.d.}_R(S),$$
$$\text{w.d.}_R(A) \leqslant \text{w.d.}_S(A) + \text{w.d.}_R({}_RS),$$
$$\text{i.d.}_R(A) \leqslant \text{i.d.}_S(A) + \text{w.d.}_R({}_SR).$$

Если кольцо R — фильтрованное, то

$$\text{l.gl.d.}(R) \leqslant \text{l.gr.gl.d. } G(R),$$

где $G(R)$ — ассоциированное градуированное кольцо.

В ряде случаев изучение Г. р. связано с мощностью рассматриваемых модулей. Это позволяет, в частности, оценивать разность между слабой и проективной размерностями модуля, а также разность между левой и правой глобальными размерностями кольца. Континуум-гипотеза равносильна утверждению о том, что

$$\text{p.d.}_{\mathbb{R}[x,\ y,\ z]}(\mathbb{R}(x,\ y,\ z)) = 2,$$

где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{R}(x, y, z)$ — поле рациональных функций, а $\mathbb{R}[x, y, z]$ — кольцо многочленов над R.

Большая часть исследований по Г. р. посвящена выявлению связей Г. р. с другими характеристиками модулей и колец. Так, Гильберта теорема о сизигиях утверждает, что

$$\text{gl.d.}K[x_1, \ldots, x_n] = n,$$

где K — поле, а $K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над K. К настоящему времени эта теорема значительно обобщена. Г. р. групповых алгебр разрешимых групп тесно связана с длиной разрешимого ряда группы и рангами ее факторов. Из равенства $\text{cd}(G) = 1$ следует, что G — свободная группа (т е о р е м а С т о л л и н г с а). Исследуются связи между Г. р. и другими размерностями модулей и колец. Напр., размерность по Круллю коммутативного кольца R совпадает с gl. d. (R) тогда и только тогда, когда все локализации кольца R по простым идеалам имеют конечную размерность Крулля. Всякое коммутативное нётерово кольцо R, для которого gl. d. $(R) < \infty$, раскладывается в конечную прямую сумму областей целостности. Локальное кольцо регулярной точки наз. в алгебраич. геометрии л о к а л ь н ы м р е г у л я р н ы м к о л ь ц о м. Глобальная размерность такого кольца совпадает с его размерностью Крулля, а также с минимальным числом образующих его максимального идеала (регулярные локальные кольца являются областями целостности с однозначным разложением на простые множители, они остаются регулярными при локализациях по простым идеалам).

Лит.: [1] К а р т а н А., Э й л е н б е р г С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] O s o f s k y B. L., Homological dimensions of modules, Providence, 1973.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ п р о с т р а н с т в а X п о г р у п п е к о э ф ф и ц и е н т о в G — наибольшее целое число n, при к-ром для нек-рого замкнутого множества $A \subset X$ отлична от нуля группа $H_n(X, A; G)$ гомологий Александрова — Чеха. Г. р. обозначается $\dim_G X$. Аналогично определяется к о г о м о л о г и ч е с к а я р а з м е р н о с т ь — наименьшее целое n, для которого отображение $H^n(X; G) \to H^n(A; G)$ эпиморфно для всех замкнутых $A \subset X$. Под г о м о л о г и ч е с к о й т е о р и е й р а з м е р н о с т и обычно подразумевается ее когомологический вариант, значительно глубже разработанный. Это объясняется тем, что когомологии Александрова — Чеха удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам*, включая точность, и потому применение когомологий оказалось бо-

лее эффективным. На категории метризуемых компактов, где между группами $H_p(X, A; G)$ и $H^p(X, A; G^*)$ имеет место *Понтрягина двойственность*, гомологический подход с коэффициентами в компактной группе G эквивалентен когомологическому подходу с коэффициентами в двойственной группе G^*; аналогично, оба подхода эквивалентны, если в качестве коэффициентов берутся элементы одного и того же поля G.

Гомологическая теория размерности берет свое начало с утверждения, полученного П. С. Александровым: соотношение $\dim X \leqslant n$, где $\dim$ – лебегова размерность, эквивалентно тому, что любое непрерывное отображение в n-мерную сферу S^n произвольного замкнутого множества $A \subset X$ может быть продолжено до отображения в S^n всего X. Отсюда было получено, что $\dim X = \dim_Z X$, если $\dim X < \infty$, а Z есть группа целых чисел. Затем Л. С. Понтрягиным было замечено, что Г. р. по разным областям коэффициентов не совпадают (вообще же, как это вытекает из формул универсальных коэффициентов, $\dim_G X \leqslant \dim X$ для любого компакта X); таким образом, Г. р. являются вместе с лебеговой размерностью нек-рыми топологич. инвариантами пространства X.

Г. р. $\dim_G X$ обладает многими свойствами обычной размерности $\dim$. Именно, если A – замкнутое подмножество из X, то $\dim_G A \leqslant \dim_G X$; если $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где каждое X замкнуто в X, то

$$\dim_G X = \max_i \dim_G X_i,$$

и т. п. Справедлива теорема Александрова о предательствии: подмножества евклидова пространства E^n, имеющие Г. р. r, (локально) зацепляются $(n-r-1)$-мерными циклами. См. также *Размерность*.

Центральное место в гомологич. размерности занимают исследования соотношений между Г. р. по различным областям коэффициентов. Возникающие в этом направлении задачи имеют много непосредственных приложений в теории размерности и тесно переплетаются с нек-рыми важнейшими задачами теории групп преобразований. Большую роль играет анализ размерности произведения; напр.,

$$\dim_G (X \times Y) = \dim_G X + \dim_G Y,$$

если G – поле рациональных чисел или поле вычетов по простому модулю, а

$$\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

для любого компакта Y ($\dim X < \infty$) тогда и только тогда, когда все размерности $\dim_G X$ совпадают с $\dim X$.

Внешний облик гомологич. теории размерности существенно изменился в связи с применением аппарата *пучков теории*, получила самостоятельное развитие когомологич. теория размерности с коэффициентами в пучках (основное определение такое же). Новые методы оказались применимыми к решению ряда задач, связанных с поведением размерности при непрерывных отображениях, а также позволили расширить область применимости теории до категории *паракомпактных пространств*.

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [2] Кузьминов В. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5(143), с. 3–49.

Е. Г. Скляренко.

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ УМНОЖЕНИЯ — операции, определенные на группах Tor и Ext. Над коммутативным кольцом K рассматриваются K-алгебры R, S и $T = R \otimes_K S$. *Производные функторы* Tor и Ext над ними можно комбинировать между собой посредством четырех гомоморфизмов, наз. гомологическими

умножениями:

$$T:\operatorname{Tor}_p^R(A,\ A')\otimes\operatorname{Tor}_q^S(C,\ C')\longrightarrow\operatorname{Tor}_{p+q}^T(A\otimes C,\ A'\otimes C'),$$

$$\perp:\operatorname{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,\ \operatorname{Hom}(A',\ C'))\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}_p^R(A',A),\ \operatorname{Ext}_S^q(C,\ C')),$$

$$\vee:\operatorname{Ext}_R^p(A,\ A')\otimes\operatorname{Ext}_S^q(C,\ C')\longrightarrow\operatorname{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,\ A'\otimes C'),$$

$$\wedge:\operatorname{Tor}_{p+q}^T(\operatorname{Hom}(A,\ C),\ A'\otimes C')\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}_R^p(A,\ A'),\ \operatorname{Tor}_q^S(C,\ C')).$$

Здесь A и A' правые или левые R-модули, C и C' правые или левые S-модули, а символ K опущен при всех функторах. Последние два гомоморфизма определены только, если алгебры R и S проективны над K и $\operatorname{Tor}_n^K(A,\ C)=0$ для всех $n>0$. При нек-рых дополнительных ограничениях можно определить внутренние умножения, связывающие Tor и Ext над одним и тем же кольцом.

Все четыре умножения могут быть получены из формул, переставляющих функторы $\otimes$ и Hom с помощью замены аргументов соответствующими резольвентами (см. [1]). Умножение $\vee$ допускает следующую интерпретацию в терминах умножений Ионеда. Пусть

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow X_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow X_p\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow C'\longrightarrow Y_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow Y_q\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

— точные последовательности R- и S-модулей, соответственно, являющиеся представителями классов конгруэнтности в $\operatorname{Ext}_R^p(A,\ A')$ и $\operatorname{Ext}_S^q(C,\ C')$. Умножая первую из них тензорно справа на C', а вторую — слева на A, получают точные последовательности

$$0\longrightarrow A'\otimes C'\longrightarrow X_1\otimes C'\longrightarrow\ldots\longrightarrow X_p\otimes C'\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow 0,$$
$$\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow A\otimes Y_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow A\otimes Y_q\longrightarrow A\otimes C\longrightarrow 0,$$

объединяемые в точную последовательность

$$0\longrightarrow A'\otimes C'\longrightarrow X_1\otimes C'\longrightarrow\ldots\longrightarrow A\otimes Y_q\longrightarrow A\otimes C\longrightarrow 0,$$

к-рую можно рассматривать в качестве представителя класса конгруэнтности в группе

$$\operatorname{Exp}_{R\otimes S}^{p+q}(A\otimes C,\ A'\otimes C').$$

Умножение $\vee$ в когомологии $H(X,\mathbb{Z})$ топологич. пространства X с коэффициентами в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ носит название умножения Колмогорова — Александера или $\cup$-умножения.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

ГОМОЛОГИЧЕСКИЙ ФУНКТОР — функтор на *абелевой категории*, определяющий нек-рую гомологич. конструкцию на этой категории. Система $H=(H_i)_i\in\mathbb{Z}$ ковариантных аддитивных функторов из абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}'$ наз. гомологическим функтором, если выполняются следующие аксиомы.

1) Для всякой точной последовательности

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0$$

в категории $\mathcal{A}$ задан морфизм $\partial_i:H_{i+1}(A'')\longrightarrow H_i(A')$, к-рый наз. связывающим, или граничным, морфизмом.

2) Последовательность

$$\ldots\longrightarrow H_{i+1}(A')\longrightarrow H_{i+1}(A)\longrightarrow H_{i+1}(A'')\xrightarrow{\partial_i}$$
$$\xrightarrow{\partial_i}H_i(A')\longrightarrow\ldots,$$

наз. гомологической последовательностью, является точной.

Пусть, напр., $\mathcal{A}=K(A\,b)$ — категория цепных комплексов абелевых групп, $(A\,b)$ — категория абелевых групп. Функторы $H_i: K(A\,b)\to(A\,b)$, ставящие в соответствие комплексу $K.$ соответствующие группы гомологий $H_i(K.)$, определяют Г. ф.

Пусть $F: \mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}'$ — нек-рый аддитивный ковариантный функтор, для к-рого определены левые производные функторы $R_iF(R_iF\ {}^{-}0,\ i<0)$. Тогда система $(R_iF)_{i\in I}$ определяет Г. ф. из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$.

Еще одним примером Г. ф. может служить *гипергомологий функтор*.

Двойственным образом определяется когомологический функтор.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ, обобщенное многообразие, – локально компактное топологич. пространство, локальная гомологич. структура к-рого аналогична локальной структуре обычных топологич. многообразий, в том числе многообразий с краем. Более точно, гомологическим n-многообразием (обобщенным n-многообразием) над группой или модулем G коэффициентов наз. локально компактное топологич. пространство X, имеющее конечную *гомологическую размерность* над G и такое, что все его локальные *гомологий группы* H_p^x при $p\neq n$ тривиальны, а при $p=n$ либо изоморфны G, либо равны нулю. Здесь H_p^x есть прямой предел групп $H_p(X,\ X\setminus U;\ G)$, взятый по всем окрестностям U точки $x\in X$, причем под H понимается теория гомологий, удовлетворяющая всем *Стинрода – Эйленберга аксиомам*, включая аксиому точности; в категории локально стягиваемых пространств теория H, рассматриваемая с компактными носителями, изоморфна сингулярной (см. *Сингулярные гомологии*). Группы H_n^x автоматически оказываются слоями нек-рого пучка $\mathcal{H}_n$ (см. *Пучков теория*), называемого ориентирующим пучком многообразия X. Г. м. X наз. ориентируемым, если пучок $\mathcal{H}_n$ изоморфен постоянному пучку $X\times G$, и локально ориентируемым, если $\mathcal{H}_n$ является локально постоянным в точках, где $H_n^x\neq 0$. Если G — кольцо главных идеалов и все H_n^x отличны от нуля, то Г. м. над G всегда локально ориентируемо. Если Г. м. над группой G локально ориентируемо, то множество всех $x\in X$, в к-рых $H_n^x\ {}^{-}0$, замкнуто, нигде не плотно и образует край Г. м. X. Локально ориентируемое Г. м. X имеет те же гомологич. свойства, что и обычные многообразия.

Например, для X верна теорема об инвариантности области, $h\dim_G X=n$, множество A' нигде не плотно в X в том и только в том случае, если $h\dim_G A\leqslant n-1$, и т. д.

Для всякого Г. м. над G имеют место естественные изоморфизмы (*Пуанкаре двойственность*)

$$H_p(X;\ G)\cong H^{n-p}(X;\ \mathcal{H}_n)$$

(когомологии с коэффициентами в пучке). Здесь p — любое целое число, но гомологич. размерность Г. м. X над G равна n, и потому изоморфизмы имеют нетривиальное содержание только при $0\leqslant p\leqslant n$. Аналогичные изоморфизмы имеют место для гомологий и когомологий с носителями в любом паракомпактифицирующем семействе (в частности, для гомологий и когомологий с компактными носителями). Условие изоморфизма между ненулевыми слоями H_n^x пучка $\mathcal{H}_n$ и группой G не является существенным. Можно также вместо группы G рассматривать любой локально постоянный пучок коэффициентов $\mathcal{G}$ со слоем G (при этом $\mathcal{H}_n$ изменится). Лю-

бое открытое подмножество $U \subset X$ является Г. м.; поэтому использование равенств

$$H_p(U;\ G) = H_p(X,\ X \setminus U;\ G),$$
$$H^q_c(U;\ G) = H^q(X,\ X \setminus U;\ G),$$

из к-рых во втором U имеет компактное замыкание, а индекс c указывает на компактность носителей, позволяет получать как частные случаи двойственности Пуанкаре изоморфизмы

$$H_p(X, X \setminus U;\ G) = H^{n-p}(U,\ \mathcal{H}_n),$$
$$H^c_p(U;\ G) \quad H^{n-p}(X,\ X \setminus U;\ \mathcal{H}_n).$$

Сопоставление точных гомологич. и когомологич. последовательностей соответствующих пар позволяет в качестве частных случаев двойственности Пуанкаре рассматривать также изоморфизмы

$$H_p(X \setminus U;\ G) = H^{n-p}(X,\ U;\ \mathcal{H}_n)$$

и

$$H_p(X,\ U;\ G) = H^{n-p}(X \setminus U;\ \mathcal{H}_n),$$

последний из к-рых является обобщением *Александера двойственности*. Аналогичные соотношения имеют место для гомологий и когомологий с носителями в нек-ром фиксированном семействе.

Пусть

$$H_p(X;\ G) = H_{p+1}(X;\ G) = 0$$

и пусть X компактно, а Y — замкнутое или открытое подмножество. Следствием предыдущих изоморфизмов и точности гомологий и когомологий является изоморфизм

$$H^c_p(X \setminus Y;\ G) = H^{n-p-1}(Y;\ \mathcal{H}_n),$$

представляющий собой *Понтрягина двойственность* при замкнутом Y и *Стинрода двойственность* при открытом Y. Отсюда и из свойства непрерывности когомологий вытекает, что изоморфизм

$$H^c_p(X \setminus Y;\ G) = H^{n-p-1}(Y;\ \mathcal{H}_n)$$

имеет место для любого подмножества $Y \subset X$ (д в о й с т в е н н о с т ь С и т н и к о в а). В случае некомпактного X вместо гомологий с компактными носителями следует рассматривать гомологии с носителями, замкнутыми во всем X. Если X компактно, то при $p = 0$ следует использовать приведенные гомологии.

Нетривиальными примерами Г. м. являются «сомножители» обычных многообразий, напр. евклидовых пространств: если для топологич. пространства X существует такое Y, что декартово произведение $X \times Y$ есть Г. м., то X и Y — тоже Г. м. Известны примеры Г. м., не являющихся локально евклидовыми ни в одной своей точке. Г. м. играют существенную роль в нек-рых вопросах теории *преобразований групп*, где они появляются в качестве пространств *орбит* или множества неподвижных точек.

Имеется когомологич. вариант определения обобщенных многообразий. Всякое к о г о м о л о г и ч е с к о е м н о г о о б р а з и е над кольцом главных идеалов G является Г. м. над G, а если G не более чем счетно, то верно и обратное.

Лит.: [1] Čech E., «Ann. Math.», 1933, v. 34, p. 621—730; [2] Lefschetz S., «Amer. J. Math.», 1933, v. 35, p. 469—573; [3] Александров П. С., «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 1—35; [4] Александров П. С., Понтрягин Л. С., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 1327—329; [5] Smith P. A., «Ann. Math.», 1939, v. 40, p. 690—712; [6] Begle E., «Amer. J. Math.», 1942, v. 64, p. 553—73; [7] Wilder R., Topology of manifolds, N. Y., 1949; [8] Borel A., «Mich. Math. J.», 1957, v. 4, p. 227—39; [9] Yang C. T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 87, p. 261—83; [10] Conner P. E., Floyd E. E., «Mich. Math. J.», 1959, v. 6, p. 33—43; [11] Raymond F., там же, 1960, v. 7, p. 7—21; [12] Bredon G. E., там же, p. 35—64; [13] Borel A., «Ann. Math. studies», 1960, № 46, p. 23—33; [14] Bredon G. E., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 63, № 4, p. 1079—81.

Е. Г. Скляренко.

ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОПОЯСЫВАНИЕ — метод, позволяющий характеризовать размерность компакта, лежащего в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, в терминах метрич. свойств дополнительного пространства. Назовем мерой существенности цикла z компакта $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ верхнюю грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых можно подобрать такой компактный носитель $\Phi_1\subseteq\Phi$ цикла z, что цикл не гомологичен нулю в $O(\Phi_1, \varepsilon)$. Назовем p-мерным г о м о л о г и ч е с к и м п о п е р е ч н и к о м $\alpha_\Gamma^p z$ цикла z открытого множества $\Gamma\ \mathbb{R}^n\setminus\Phi$ нижнюю грань p-мерных поперечников тел всех циклов, гомологичных в Γ циклу z. Здесь под p-м е р н ы м п о п е р е ч н и к о м $\alpha^p X$ компакта $X\subset\mathbb{R}^n$ понимается нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует непрерывный ε-сдвиг компакта X в p-мерный компакт (и потому полиэдр).

Всякий $(n-1)$-мерный цикл открытого множества $\Gamma\ \mathbb{R}^n\setminus\Phi$, зацепленный с каждой точкой компакта Φ, наз. м е ш к о м в о к р у г к о м п а к т а Φ.

Т е о р е м а о м е ш к а х. Пусть $r=\dim\Phi\leqslant n-1$. Тогда существует такое $\alpha>0$, что всякий мешок вокруг компакта Φ имеет $(r-1)$-мерный гомологич. поперечник, больший α, тогда как r-мерный гомологич. поперечник любого цикла в Γ равен нулю. При этом всегда имеются мешки вокруг Φ со сколь угодно малой мерой существенности. Если же $\dim\Phi=n$, то существует такое $\alpha>0$, что для всякого мешка z^{n-1} вокруг Φ выполняется $\mu z^{n-1}>\alpha$ (при этом $\alpha_\Gamma^{n-2} z^{n-1}>0$ и $\alpha_\Gamma^{n-1} z^{n-1}=0$ для всех мешков z^{n-1}).

Теорема о мешках может быть еще более усилена с помощью понятия п о я с а в о к р у г к о м п а к т а.

Т е о р е м а о п о я с а х. Пусть $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ — компакт размерности r. Существует такое $\gamma>0$, что для любого $k=1, 2, \ldots, r+1$ и любого $\varepsilon>0$ в $\Gamma=\mathbb{R}^n\setminus\Phi$ имеется $(n-k)$-мерный цикл v (пояс размерности $n-k$ вокруг Φ), при $k>1$ ограничивающий в Γ, для к-рого $\beta^{r-k+1}v<\varepsilon$, $\tau v<\varepsilon$ и, кроме того, для всякого цикла w, гомологичного циклу v в γ-окрестности последнего относительно Γ имеет место $\beta^{r-n+1}x>\gamma$; для всякой цепи x, ограниченной циклом v в Γ, имеет место $\beta^{r-n+1}x>\gamma$.

С другой стороны, если $s>r$ и $k=1, \ldots, s+1$, то при любом $\gamma>0$ всякий $(n-k)$-мерный цикл z в Γ, для к-рого $\tau z<\gamma$, гомологичен в своей γ-окрестности (относительно Γ) нек-рому циклу z' со сколь угодно малым $\beta^{s-k}z'$. Далее, если $s>r$ и $k=2, 3, \ldots, s+1$, то при произвольном $\gamma>0$ всякий $(n-k)$-мерный цикл z, ограничивающий в Γ, для к-рого $\beta^{s-k+1}z<\gamma$ (и $\tau z<\gamma$ при $s=n-1$), ограничивает в Γ цепь x с $\beta^{s-n+1}x<\gamma$. Здесь через $\beta^p x$, $p\geqslant 0$, обозначена нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует ε-сдвиг вершин цепи x, посредством к-рого цепь x вырождается до размерности p; через τx обозначена нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует ε-сдвиг вершин x, переводящий x в нулевую цепь.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

А. А. Мальцев.

ГОМОЛОГИЯ в п р о е к т и в н о й г е о м е т р и и — автоморфизм проективной плоскости, переводящий все точки нек-рой прямой (о с и Г.) в себя и имеющий точно одну неподвижную точку (ц е н т р Г.). Если центр Г. не лежит на оси Г., то Г. наз. н е о с о б е н н о й (или г и п е р б о л и ч е с к о й); если центр Г. лежит на оси Г. то — о с о б е н н о й (или п а р а б о л и ч е с к о й). Обычно Г. задается центром, осью и парой точек в соответствии Г. Г. аффинной плоскости с собственным (конечным) центром и несобственной (бесконечно удаленной) осью есть гомотетия; с несобственным центром и собственной осью — растяжение и сжатие к оси; с несобственным центром и несобственной осью — параллельный перенос; особая Г. с несобственным центром и с собственной осью есть сдвиг.

Лит.: [1] Х а р т с х о р н Р., Основы проективной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

А. Б. Иванов.

ГОМОМОРФИЗМ — морфизм в категории *алгебраических систем*. Г. — отображение алгебраич. системы $\boldsymbol{A}$, сохраняющее основные операции и основные отношения; точнее, пусть $\boldsymbol{A} = \langle A, \{o_i : i \in I\}, \{r_j : j \in J\}\rangle$ — алгебраич. система с основными операциями $o_i, i \in I$ и основными отношениями $r_j, j \in J$. Г. системы $\boldsymbol{A}$ в однотипную ей систему $\boldsymbol{A}' = \langle A', \{o_i' : i \in I\}, \{r_j' : j \in J\}\rangle$ наз. отображение $\varphi : A \to A'$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\varphi(o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = o_i'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})), \quad (1)$$

$$(a_1, \ldots, a_m) \in r_j \Rightarrow (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) \in r_j', \quad (2)$$

для всех элементов $a_1, a_2, \ldots$ из A и всех $i \in I$, $j \in J$.

Если каждому элементу i из I сопоставлен некоторый n_i-арный функциональный символ F_i, а каждому элементу j из J — m_j-местный предикатный символ P_j и в каждой системе $\boldsymbol{A}'$, однотипной системе $\boldsymbol{A}$, результат i-й основной операции o_i', примененной к элементам $x_1, \ldots, x_{n_i}$ из A', записан в виде $F(x_1, \ldots, x_{n_i})$, а вместо $(x_1, \ldots, x_{m_j}) \in r_j'$ пишут $P(x_1, \ldots, x_{m_j})$. Условия (1), (2) при этом упрощаются и принимают вид

$$\varphi(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})),$$

$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Rightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})).$$

Г. $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ наз. с и л ь н ы м, если для любых элементов $a_1', \ldots, a_{m_j}'$ из A' и для любого предикатного символа P_j, $j \in J$, условие $P_j(a_1', \ldots, a_{m_j}')$ влечет существование в A таких элементов $a_1, \ldots, a_{m_j}$, что $a_1' = \varphi(a_1), \ldots, a_{m_j}' = \varphi(a_{m_j})$, и выполняется соотношение $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$.

Для алгебр понятия Г. и сильного Г. совпадают. Для моделей существуют Г., к-рые не являются сильными, и взаимно однозначные Г., к-рые не являются изоморфизмами.

Если φ — Г. алгебраич. системы $\boldsymbol{A}$ на алгебраич. систему $\boldsymbol{A}'$ и θ — *ядерная конгруэнция* для Г. φ, то отображение $\psi : (A/\theta) \to A'$, определяемое формулой $\psi(a/\theta) = \varphi(a)$, является Г. факторсистемы $\boldsymbol{A}/\theta$ на алгебраич. систему $\boldsymbol{A}'$. Если при этом φ — сильный Г., то ψ есть изоморфизм. Это — одна из самых общих формулировок теоремы о Г.

Следует отметить, что иногда Г. наз. также морфизмы в категориях, отличных от категорий алгебраич. систем. (Напр., Г. графов, Г. пучков, Г. групп Ли).

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Chang C. C., Keisler H. J., Model theory, Amsterdam, 1973.

Д. М. Смирнов.

ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТЬ — свойство корреляции, состоящее в постоянстве условной дисперсии (в противном случае корреляция наз. г е т е р о с к е д а с т и ч н о й); этим свойством обладает, напр., нормальная корреляция.

О. В. Сарманов.

ГОМОТЕТИЯ — преобразование евклидова пространства относительно нек-рой точки O, ставящее в соответствие каждой точке M точку M', лежащую на прямой OM, по правилу

$$OM' = kOM,$$

где k — постоянное, отличное от нуля число, наз. к о э ф ф и ц и е н т о м Г. Точка O наз. ц е н т р о м Г. При $k > 0$ точки M и M' лежат на одном луче, при $k < 0$ — по разные стороны от центра. Точке O соответствует сама эта точка. Г. есть частный случай *подобия*. Две фигуры наз. г о м о т е т и ч н ы м и (а также п о д о б н ы м и и п о д о б н о р а с п о л о ж е н н ы м и, или п е р с п е к т и в н о - п о д о б н ы м и), если каждая состоит из точек, получаемых преобразованием Г. из другой фигуры относительно нек-рого центра Г.

Простейшие свойства Г.: Г. есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства в себя с одной неподвижной точкой. При $k=1$ Г. есть тождественное преобразование. Г. переводит прямую (плоскость), проходящую через центр Г., в себя, прямую (плоскость), не проходящую через центр,— в прямую (плоскость), ей параллельную; углы между прямыми (плоскостями) при Г. сохраняются. Отрезки при Г. переходят в параллельные им отрезки с длиной, уменьшенной или увеличенной в $|k|$ раз, т. е. Г. есть сжатие (растяжение) евклидова пространства к точке O. Всякая сфера при Г. преобразуется в сферу, причем центр одной переходит в центр другой.

Г. задается чаще всего (геометрически) центром Г. и парой соответственных точек или двумя парами соответственных точек. Г. есть *аффинное преобразование*, имеющее одну (и только одну) двойную точку.

В n-мерных евклидовых пространствах Г. оставляет инвариантными каждую из совокупностей S_k ($k=1, 2, \ldots, n-1$) k-мерных плоскостей пространства.

Аналогично определяется Г. в псевдоевклидовых пространствах. Г. в римановых пространствах и в псевдоримановых пространствах определяется как преобразование, переводящее метрику пространства в себя с точностью до постоянного множителя. Совокупность Г. составляет группу преобразований Ли, причем r-членная группа Г. риманова пространства содержит $(r-1)$-членную нормальную подгруппу движений. *И. П. Егоров.*

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА — обобщение *фундаментальной группы*, предложенное В. Гуревичем [1] в связи с задачей о классификации непрерывных отображений. Г. г. определены для любого $n\geqslant 1$. При $n=1$ Г. г. совпадает с фундаментальной группой. Определение Г. г. не конструктивно, и поэтому их вычисление является трудной задачей, общие методы решения к-рой были выработаны только в 50-х гг. 20 в. Значение Г. г. определяется тем, что все задачи теории гомотопий более или менее сводятся (см. *Гомотопический тип*) к задаче вычисления тех или иных Г. г.

Пусть

$$I^n=\{(t_1,\ \ldots,\ t_n);\ 0\leqslant t_1\leqslant 1,\ \ldots,\ 0\leqslant t_n\leqslant 1\}$$

— единичный n-мерный куб, I^{n-1} — его грань $t_n=0$ и J^{n-1} — объединение всех остальных его граней. Для любой пунктированной пары (X, A, x_0) (см. *Пунктированный объект*) символом $\pi_n(X, A, x_0)$ (или просто $\pi_n(X, A)$) обозначается пунктированное множество всех гомотопич. классов $[u]$ (см. *Гомотопия*) отображений

$$u:(I^n,\ I^{n-1},\ J^{n-1})\longrightarrow(X,\ A,\ x_0);$$

отмеченным элементом (нулем) этого множества служит класс постоянного отображения, переводящего весь куб I_n в точку x_0. Каждое непрерывное отображение

$$f:(X, A, x_0)\to(Y, B, y_0)$$

индуцирует нек-рый *морфизм*

$$f_*:\pi_n(X,\ A,\ x_0)\longrightarrow\pi_n(Y,\ B,\ y_0)$$

пунктированных множеств. Для любого $n\geqslant 1$ множества $\pi_n(X, A, x_0)$ и морфизмы f^* составляют нек-рый *функтор* π_n из *категории* пунктированных пар в категорию пунктированных множеств. Этот функтор гомотопически инвариантен, то есть $f_*=g_*$, когда f и g гомотопны (как отображения пунктированных пар). Кроме того, он нормирован, в том смысле, что если $X=A=x_0$, то $\pi_n(X, A, x_0)=0$.

При $n\geqslant 2$ в множество $\pi_n(X, A, x_0)$ можно ввести операцию сложения, относительно к-рой оно будет группой (при $n>2$ даже абелевой): по определению, если $x=[u]$ и $y=[v]$, то $x+y=[w]$, где w — отображение

$$(I^n,\ I^{n-1},\ J^{n-1})\longrightarrow(X,\ A,\ x_0),$$

определенное формулой

$$w(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \ldots, t_n), \text{ если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ v(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), \text{ если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases} \quad (1)$$

Получающаяся группа $\pi_n(X, A, x_0)$ наз. n-й гомотопической группой (или n-мерной Г. г.) пунктированной пары (X, A, x_0); говорят также о Г. г. пары (X, A) в точке x_0 или о Г. г. пространства X относительно подпространства A в точке x_0. Отображения f_* являются гомоморфизмами этих групп. Таким образом, при $n \geqslant 2$ можно считать, что функтор π_n принимает значения в категории групп (при $n > 2$ даже абелевых).

При $A = x_0$ группа $\pi_n(X, A, x_0)$ обозначается $\pi_n(X, x_0)$, или просто $\pi_n(X)$, и наз. абсолютной гомотопической группой пунктированного пространства (X, x_0) (или пространства X в точке x_0). Ее элементами являются гомотопич. классы отображений $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$, где $\dot{I}^n = I^{n-1} \cup \cup J^{n-1}$ — граница куба I^n. Для таких отображений формула (1) имеет смысл и при $n = 1$, так что множество $\pi_1(X, x_0)$ оказывается группой. Эта группа совпадает с классической фундаментальной группой. Обычно групповая операция в $\pi_1(X, x_0)$ наз. умножением. Эта группа, вообще говоря, неабелева, тогда как группа $\pi_2(X, x_0)$ — абелева. Для любого $n \geqslant 1$ группы $\pi_n(X, x_0)$ и соответствующие гомоморфизмы составляют нек-рый функтор из категории пунктированных пространств в категорию групп (при $n > 1$ — в категорию абелевых групп). Этот функтор является композицией $\pi_n \circ \iota$ функтора вложения $\iota : (X, x_0) \to (X, x_0, x_0)$ и построенного выше функтора π_n.

Функтор $\pi_n \circ \iota$ распространяется и на случай $n = 0$, если понимать под $\pi_0(X, x_0)$ пунктированное множество компонент линейной *связности* пространства X; нулем этого множества является компонента, содержащая точку x_0. Множество $\pi_0(X, A, x_0)$ при $A \neq x_0$ не определяется. Для упрощения формулировок множества $\pi_0(X, x_0)$ и $\pi_1(X, A, x_0)$ обычно также наз. Г. г., хотя они, вообще говоря, являются лишь пунктированными множествами.

Для любого элемента $x = [u] \in \pi_n(X, A, x_0)$ отображение $u|I^{n-1}$ представляет собой отображение $(I^{n-1}, I^{n-1}) \to (A, x_0)$ и потому определяет нек-рый элемент Г. г. $\pi_{n-1}(A, x_0)$. Этот элемент зависит только от x и обозначается символом ∂x. Получающееся отображение $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ является морфизмом пунктированных множеств (при $n > 1$ — гомоморфизмом групп) и наз. граничным гомоморфизмом, или граничным оператором. Граничный гомоморфизм вместе с гомоморфизмами i_* и j_*, индуцированными вложениями $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ и $j : (X, x_0) \to (X, A, x_0)$, позволяет написать бесконечную слева последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0).$$

Это — *точная последовательность*; она наз. точной гомотопической последовательностью пары (X, A, x_0) и обозначается обычно $\pi(X, A, x_0)$. Если $\pi_n(X, x_0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$, то гомоморфизм $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ является изоморфизмом (также для всех n).

Граничный гомоморфизм ∂ обладает свойством естественности, т. е. является морфизмом функтора π_n в функ-

тор $\pi_n \circ \iota$ [точнее, в функтор $\pi_n \circ \iota'$, где $\iota' : (X, A, x_0) \mapsto (A, x_0, x_0)$]. Это позволяет определить $\pi_n(X, A, x_0)$ как функтор, принимающий значения в категории точных последовательностей пунктированных множеств, являющихся, за исключением последних шести множеств, абелевыми группами, а за исключением последних трех множеств, — группами.

Пусть $p : E \to B$ — произвольное *расслоение* в смысле Серра и пусть $A \subset B$, $E' = p^{-1}(A)$, $e_0 \in E'$ и $b_0 = p(e_0)$. Отображение p определяет нек-рое отображение $p' : (E, E', e_0) \to (B, A, b_0)$ пунктированных пар. Для любого $n \geqslant 1$ индуцированный этим отображением гомоморфизм $p'_* : \pi_n(E, E', e_0) \to \pi_n(B, A, b_0)$ является изоморфизмом. В частности, это верно при $A = b_0$. В этом случае формула $\tau = \partial \circ (p'_*)^{-1}$ однозначно определяет нек-рый гомоморфизм $\tau : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$, где $F = p^{-1}(b_0)$ — слой расслоения p над точкой b_0. Этот гомоморфизм наз. г о м о т о п и ч е с к о й т р а н с г р е с с и е й. Он входит в точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_n) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\tau} \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \ldots$$

Эта последовательность наз. г о м о т о п и ч е с к о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю р а с с л о е н и я $p : E \mapsto B$. Сопоставление расслоению его гомотопич. последовательности приводит к нек-рому функтору на категории всех (пунктированных) расслоений.

В частном случае, когда p есть стандартное *Серра расслоение* путей над пространством X, для любого $n \geqslant 0$ имеет место изоморфизм $\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X)$, где ΩX — *петель пространство* пространства X. Этот изоморфизм наз. и з о м о р ф и з м о м Г у р е в и ч а.

Перечисленные свойства по существу однозначно определяют Г. г. $\pi_n(X, A, x_0)$, т. е. могут быть приняты за а к с и о м ы, описывающие эти Г. г. Именно, пусть $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ — произвольная последовательность гомотопически инвариантных нормированных функторов, заданных на категории пунктированных пространств, принимающих значения в категории пунктированных множеств и обладающих тем свойством, что для любого расслоения в смысле Серра $p : E \to B$ любого подмножества $A \subset B$ и любой точки $e_0 \in p^{-1}(A)$ индуцированный гомоморфизм $\pi_n(E, p^{-1}(A), e_0) \to \pi_n(B, A, p(e_0))$ является изоморфизмом. Такая последовательность наз. г о м о т о п и ч е с к о й с и с т е м о й, если для любого $n \geqslant 1$ задан морфизм ∂ функтора π_n в функтор $\pi_n \circ \iota'$ (при $n = 1$ — в $\pi_0(X, x_0)$), являющийся изоморфизмом для любой пунктированной пары (X, A, x_0), для которой $\pi_n(X, x_0) = 0$ при всех $n \geqslant 0$. Любая гомотопич. система изоморфна построенной выше гомотопич. системе, состоящей из Г. г. Более того, при $n \geqslant 3$ в пунктированные множества $\pi_n(X, A, x_0)$ (а также в множества $\pi_2(X, x_0)$) можно единственным образом ввести групповое строение (структуру группы) так, чтобы все морфизмы f_* были гомоморфизмами [это строение совпадает, стало быть, с тем, к-рое определяется формулой (1)]. В группах же $\pi_2(X, A, x_0)$ при $A \neq x_0$ и $\pi_1(X, x_0)$ можно только ввести еще инверсную групповую операцию. Все это и означает, что перечисленные выше свойства однозначно определяют Г. г. (с точностью до порядка сомножителей в некоммутативных группах).

Для любого отображения $u : (I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_2)$ и любого пути $v : I \to X$, соединяющего точку x_1 с точкой x_2, формула $g_t(x) = v(1-t)$, $x \in \dot{I}^n$, определяет нек-рую гомотопию отображения $u|\dot{I}^n$. По аксиоме о распространении гомотопии (см. *Корасслоение*) эта гомотопия может быть распространена до нек-рой гомотопии $u_t : I^n \to X$, обладающей тем свойством, что $u_0 = u$. Конечное отображение u_1 этой гомотопии переводит $\dot{I}^n$ в x_1, то есть представляет собой отображение $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_1)$. Со-

ответствующий элемент Г. г. $\pi_n(X, x_1)$ зависит только от класса $[u] \in \pi_n(X, x_2)$ отображения u и гомотопич. класса $\alpha = [v]$ пути v и обозначается символом αx (при $n=1$ — символом x^α). Семейство $G_x = \pi_n(X, x)$ определяется тем самым как локальное семейство на пространстве X, т. е. на фундаментальном группоиде этого пространства. В частности, для любой точки $x_0 \in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ оказывается группой операторов группы $\pi_n(X, x_n)$. При $n=1$ эти операторы действуют как внутренние автоморфизмы: $x^\alpha = \alpha x \alpha^{-1}$, а при $n>1$ определяют группу $\pi_n(X, x_0)$ как $\pi_1(X, x_0)$-модуль. Для любого непрерывного отображения $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ индуцированные гомоморфизмы $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ являются операторными гомоморфизмами (гомоморфизмами модулей): $f_*(\alpha x) = f_*(\alpha) f_*(x)$.

Аналогичным образом группы $G_x = \pi_n(X, A, x)$, $x \in A$ составляют локальное семейство Г. г. на подпространстве A. В частности, $\pi_1(A, x_0)$ является группой операторов Г. г. $\pi_n(X, A, x_0)$, так что при $n>2$ группа $\pi_n(X, A, x_0)$ будет $\pi_1(A, x_0)$-модулем. Группа $\pi_2(X, A, x_0)$ является скрещенным $(\pi_1(A, x_0), \partial)$-модулем (см. *Скрещенные модули*), где $\partial : \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ — граничный гомоморфизм.

Группа $\pi_1(A, x_0)$ служит группой операторов не только групп $\pi_n(X, A, x_0)$, но и групп $\pi_n(A, x_0)$, а также, в силу естественного гомоморфизма $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, — группой операторов групп $\pi_n(X, x_0)$. Относительно этого действия группы $\pi_1(A, x_0)$ все гомоморфизмы точной последовательности $\pi(X, A, x_0)$ являются операторными гомоморфизмами, так что группа $\pi_1(A, x_0)$ может рассматриваться как группа операторов последовательности $\pi(X, A, x_0)$. Это равносильно тому, что последовательности $\pi(X, A, x)$, $x \in A$ составляют локальное семейство точных последовательностей на подпространстве A.

В случае, когда дополнение $X \setminus A$ представляет собой объединение непересекающихся открытых n-мерных клеток, $\pi_1(A, x_0)$-модуль $\pi_n(X, A, x_0)$ является свободным модулем (при $n=2$ — свободным скрещенным модулем) и обладает системой свободных образующих — базисом, находящимся в биективном (не обязательно естественном) соответствии с клетками из $X \setminus A$ (т е о р е м а У а й т х е д а).

Отображения $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ находятся в биективном соответствии с отображениями $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$, где S^n — произвольная n-мерная сфера, а s_0 — нек-рая ее точка; поэтому элементы группы $\pi_n(X, x_0)$ можно рассматривать как гомотопич. классы отображений $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$. Это верно и при $n=0$. Указанное отождествление зависит от выбора нек-рого относительного гомеоморфизма $\varphi : (I^n, \dot{I}^n) \to (S^n, s_0)$. Обычно сфера S^n и гомеоморфизм φ предполагаются раз навсегда выбранными и фиксированными. В первоначальном, ставшем малоупотребительным определении Гуревича, сфера S^n не фиксировалась, а гомеоморфизм φ задавался с точностью до гомотопии. Такое задание гомеоморфизма φ равносильно заданию нек-рой ориентации сферы S^n. Таким образом, по Гуревичу, элементами группы $\pi_n(X, x_0)$ являются пунктированные гомотопич. классы отображений ориентированной n-мерной сферы в пространстве X. Множество $[S^n, X]$ непунктированных гомотопич. классов отображений $S^n \to X$ находится в биективном соответствии с *орбитами* действия группы $\pi_1(X, x_0)$ в группе $\pi_n(X, x_0)$. Если $\pi_1(X, x_0) = 0$ (или, более общим образом, если группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиально действует на группе $\pi_n(X, x_0)$, — в этом случае пространство X наз. г о м о т о п и ч е с к и n-п р о с т ы м), то $\pi_n(X, x_0)$ не зависит от точки x_0 (так что в этом случае обозначение $\pi_n(X)$ полностью оправдано). Эта группа естественным образом отождествляется с множеством $[S^n, X]$, к-рое является, стало быть, в этом случае

группой. Пространство, гомотопически n-простое для всех n, наз. а б е л е в ым.

Пусть s_n — ориентирующий класс гомологий сферы S^n и пусть $h([f])=f_*(s_n)$, $[f]\in\pi_n(X, x_0)$. Тем самым определяется нек-рый гомоморфизм $h:\pi_n(X, x_0)\to H_n(X)$, наз. г о м о м о р ф и з м о м Г у р е в и ч а. Его ядро содержит все элементы вида $\alpha x-x$, $x\in\pi_n(X, x_0)$, $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ (при $n=1$ — все элементы вида $x\alpha x^{-1}=\alpha x\alpha^{-1}x^{-1}$, т. е. содержит коммутант $[\pi_1, \pi_1]$ группы $\pi_1(X, x_0)$). Классич. теорема Пуанкаре утверждает, что при $n=1$ ядро гомоморфизма h совпадает с коммутантом $[\pi_1, \pi_1]$, так что группа $H_1(X)$ изоморфна прокоммутированной фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$. Обобщением теоремы Пуанкаре на случай $n>1$ является т е о р е м а Г у р е в и ч а, утверждающая, что если $\pi_i(X)=0$ при $i<n$, то гомоморфизм $h:\pi_n(X)\to H_n(X)$ является изоморфизмом (а гомоморфизм $h:\pi_{n+1}(X)\to H_{n+1}(X)$ — эпиморфизмом).

Аналогичным образом элементы группы $\pi_n(X, A, x_0)$ можно рассматривать как (пунктированные) гомотопич. классы отображений $(E, S)\to(X, A)$, где E — (ориентированный) n-мерный шар, а S — его граница. Если пара (X, A) гомотопически n-проста [т. е. группа $\pi_1(A, x_0)$ тривиально действует на группе $\pi_n(X, A, x_0)$], то в этом определении пунктированность можно игнорировать. Формула

$$h([f])=f_*(e_n),$$

где e_n — ориентирующий класс гомологий пары (E, S), а $[f]\in\pi_n(X, A, x_0)$, определяет г о м о м о р ф и з м Г у р е в и ч а

$$h:\pi_n(X, A, x_0)\to H_n(X, A).$$

Если $\pi_1(A, x_0)=0$ и $\pi_n(X, A, x_0)=0$ при $i<n$, то этот гомоморфизм является изоморфизмом (т е о р е м а Г у р е в и ч а д л я о т н о с и т е л ь н ы х г р у п п).

Для вычисления Г. г. конкретных пространств известны два основных метода: метод *убивающих пространств* и метод гомотопич. резольвент (см. *Гомотопический тип*, *Постникова системы*). Первый метод основывается на изоморфизме $\pi_{n+1}(X)\approx H_{n+1}(X, n)$, вытекающем из теоремы Гуревича, и определении убивающего пространства (X, n). Этот изоморфизм сводит задачу вычисления группы $\pi_{n+1}(X)$ к задаче вычисления групп гомологий $H_{n+1}(X, n)$. Пространство (X, n) расслаивается над пространством $(X, n-1)$ со слоем $K(\pi_n(X), n-1)$, а группы гомологий пространств $K(\pi, n)$ известны. Поэтому индукцией можно пытаться найти нужные группы гомологий убивающих пространств. Задача вычисления группы гомологий расслоенного пространства по группам гомологий его базы и слоя в общем виде полностью не решена (и, по-видимому, общего удовлетворительного решения не имеет), однако обширную информацию о группах гомологий пространств (X, n) можно извлечь из соответствующих спектральных последовательностей Серра. Во многих случаях этой информации достаточно для вычисления групп $H_{n+1}(X, n)\approx\pi_{n+1}(X)$, по крайней мере для нек-рых n. Существенное технич. упрощение задачи достигается на основе серровской теории классов абелевых групп и вытекающей из этой теории теоремы G_p-апроксимации, позволяющей проводить все вычисления во-первых для когомологий, а во-вторых лишь для групп коэффициентов $\mathbb{Z}\,p$. Геометрич. принципы, лежащие в основе этой техники, были недавно вскрыты Дж. Адамсом (J. Adams) и Д. Салливаном (D. Sullivan) [8] на основе понятия локализации топологич. пространств по данному простому p.

Второй (также индуктивный) метод вычисления Г. г. состоит в постепенном построении гомотопич. резольвенты пространства X. Пусть уже известен n-й член этой резольвенты [напр., если $X=S^n$, то $X_n=K(\mathbb{Z}, n)$].

Следующий член X_{n+1} должен быть расслоенным пространством над X_n со слоем $K(\pi_{n+1}(X),\ n+1)$, причем группа $H_{n+1}(X_{n+1})$ должна быть изоморфна известной группе $H_{n+1}(X)$. Это дает (на основе соответствующей спектральной последовательности) определенную информацию о группе $\pi_{n+1}(X)$, позволяющую во многих случаях полностью ее вычислить. Напр., при $X=S^n$ этим методом можно найти группы $\pi_{n+k}(S^n)$ для всех $k\leqslant 13$. В современной своей форме эти вычисления также основываются на понятии локализации.

Метод гомотопич. резольвент был доведен (см. [5]) до алгоритма, применимого к любому односвязному конечному клеточному разбиению и дающего все его Г. г. Однако этот алгоритм для практич. применения слишком сложен.

Поскольку гомотопич. теория пространств полностью эквивалентна гомотопич. теории симплициальных множеств, определение Г. г. может быть перенесено на любые (полные) симплициальные множества. Получающееся «комбинаторное» определение Г. г. (принадлежащее Д. Кану) легко может быть доведено до алгоритма. Однако и этот алгоритм для практич. вычислений слишком сложен.

Любой из описанных методов без труда устанавливает, что Г. г. произвольного односвязного пространства, имеющего конечно порожденные группы гомологий, также конечно порождены. Аналогичное утверждение для неодносвязных пространств (Г. г. конечно порождены как $\pi_1(X)$-модули), вообще говоря, неверно.

Пусть S — функтор (приведенной) *надстройки*, а Ω — функтор петель. Так как эти функторы сопряжены, то для любого X тождественное отображение $SX\to SX$ определяет нек-рое вложение $X\subset\Omega SX$. Поскольку $\pi_n(\Omega SX)\approx\pi_{n+1}(SX)$, это вложение определяет нек-рый гомоморфизм

$$E:\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(SX),$$

известный как г о м о м о р ф и з м н а д с т р о й к и. Он совпадает с гомоморфизмом, получающимся при сопоставлении произвольному (пунктированному) отображению $f:S^n\to X$ его надстройки $Sf:S^{n+1}\to SX$. Этот гомоморфизм входит в точную последовательность

$$\ldots\longrightarrow\pi_n(X)\xrightarrow{E}\pi_{n+1}(SX)\xrightarrow{H}\pi_n(\Omega SX,\ X)\xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(X)\longrightarrow\ldots$$

Эта последовательность наз. н а д с т р о е ч н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю п р о с т р а н с т в а X. Фигурирующий в ней гомоморфизм H является обобщением классического *Хопфа инварианта*.

В случае, когда X — счетное одновершинное клеточное разбиение, пространство ΩSX может быть заменено (см. [7]) приведенной степенью X_∞ разбиения X. Это показывает, что если $\pi_i(X)=0$ при $i<m$, то гомоморфизм E является изоморфизмом для всех $n<2m-1$ и эпиморфизмом при $n=2m-1$. Эта теорема известна как т е о р е м а Ф р е й д е н т а л я о н а д с т р о й к е [Г. Фрейденталь (H. Freudenthal) первым опубликовал доказательство для случая $X=S^n$, хотя теорема была известна и ранее].

Теорема Фрейденталя показывает, что при $k<2n-1$ группа $\pi_{n+k}(S^n)$ не зависит от n. Она наз. k-й с т а ц и о н а р н о й Г. г. (с т а б и л ь н о й Г. г.) с ф е р. Аналогичное явление стабилизации наблюдается для Г. г. ортогональных групп, Г. г. *Тома пространств MSO* и во многих других случаях. Общее изучение этого явления наиболее удобно проводить в рамках так наз. т е о р и и с п е к т р о в. В этой теории стационарные Г. г. появляются как Г. г. спектров. Эти группы устроены существенно проще Г. г. пространства и их изучение (и вычисление) оказывается значительно более легкой задачей. Напр., для вычисления этих групп

имеется специальный аппарат: *спектральная последовательность* Адамса.

Г. г. обобщались в самых различных направлениях. Напр., делались попытки заменить сферы другими пространствами. Здесь можно отметить торусные Г. г., позволившие проинтерпретировать *Уайтхеда произведения* как нек-рые коммутанты. Показано также, что в множество гомотопич. классов отображений $X \to Y$ тогда и только тогда можно ввести естественную по Y групповую операцию, когда X является *ко-Н-пространством*. Были определены Г. г. с коэффициентами, получающиеся при замене сфер S^n *Мура пространствами* $M(G, n)$. Это определение Г. г. с коэффициентами оказалось не очень удачным. Более удовлетворительное определение (согласующееся с общим принципом двойственности Экмана — Хилтона) было получено при замене M-пространств Мура ко-M-пространствами. Однако эти Г. г. определены не для всех G (напр., при G, являющейся аддитивной группой действительных чисел, эти группы не определены).

Детально изучен также вопрос о построении Г. г. в категориях, отличных от категории пунктированных пар. Здесь в первую очередь следует отметить построение Г. г. *триад* (см., напр., [3]), оказавшихся очень полезными при изучении гомоморфизма E. Весьма общие конструкции Г. г. были предложены в связи с исследованиями по двойственности. На основе понятия стандартной конструкции (см. [6]) построение Г. г. было перенесено на произвольные категории. Существенную роль в этом построении играют уже упоминавшиеся Г. г. симплициальных множеств.

Лит.: [1] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [2] Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2 : 2, с. 3—24; [5] Кан Д., там же, 1962, т. 6, № 1, с. 3—32; [6] Столлингс Дж., там же, 1964, 8 : 4, с. 155—57; [7] Экман Б., Хилтон П., там же, 1960, 4 : 3, с. 3—27; [8] Салливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975. *М. М. Постников*

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП — класс гомотопически эквивалентных топологич. пространств. Отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ наз. взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями, если $f \circ g \sim 1_Y$ и $g \circ f \sim 1_X$. Если выполнено только первое из этих соотношений, то g наз. гомотопически мономорфным отображением, а f — гомотопически эпиморфным отображением. Отображение тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда оно гомотопически мономорфно и эпиморфно. Если существует гомотопически эпиморфное отображение $f : X \to Y$, то говорят, что пространство Y доминирует над пространством X. Если существует гомотопич. эквивалентность $f : X \to Y$, то пространства X и Y наз. гомотопически эквивалентными, или пространствами одного гомотопического типа.

Проблема гомотопического типа состоит в нахождении необходимых и достаточных условий гомотопич. эквивалентности любых пространств. Оказывается удобным эту постановку несколько ослабить. Отображение $f : X \to Y$ наз. слабой гомотопической эквивалентностью, если оно индуцирует изоморфизм *гомотопических групп* всех размерностей. Соответственно, пространства X и Y наз. слабо гомотопически эквивалентными, если существует либо слабая гомотопич. эквивалентность $X \to Y$, либо слабая гомотопич. эквивалентность $Y \to X$. Поскольку любая гомотопич. эквивалентность является слабой гомотопич. эквивалентностью, то гомотопически эквивалентные пространства слабо гомотопически эквивалентны. Обратное верно, если про-

странства являются *клеточными разбиениями* (теорема Уайтхеда). Эта теорема основана на том, что: 1) отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда X есть *деформационный ретракт* цилиндра M_f отображения f; 2) отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда является слабой гомотопич. эквивалентностью, когда подпространство X цилиндра M_f гомотопически репрезентативно (см. *Репрезентативное подпространство*); 3) подразбиение клеточного разбиения тогда и только тогда репрезентативно, когда оно является деформационным ретрактом.

Таким образом, проблема Г. т. на категории клеточных разбиений равносильна проблеме слабого Г. т. С другой стороны, любое пространство X слабо гомотопически эквивалентно геометрич. реализации его сингулярного симплициального множества $S(X)$. Поэтому в проблеме слабого Г. т. без ограничения общности можно рассматривать лишь клеточные разбиения.

Отображения $f, g : X \to Y$ наз. n-гомотопными, если для любого клеточного разбиения K размерности $\leqslant n$ и любого отображения $\varphi : K \to X$ отображения $f\circ\varphi$ и $g\circ\varphi$ гомотопны. Если X — клеточное разбиение, это имеет место тогда и только тогда, когда $f|X^n \sim g|X^n$. Пространства, эквивалентные по отношению n-гомотопности, наз. пространствами одного n-гомотопического типа. Клеточные разбиения K и L наз. разбиениями одного n-типа (обозначение $K \underset{n}{\sim} L$), если их n-е остовы K^n и L^n имеют один и тот же $(n-1)$-гомотопический тип. Если $K \underset{n}{\sim} L$, то $K \underset{m}{\sim} L$ при любом $m \leqslant n$. Это остается справедливым и при $n = \infty$, если под ∞-типом понимать Г. т. Другими словами, понятие n-типа гомотопически инвариантно. Важность понятия n-типа для проблемы Г. т. определяется тем, что два n-мерных клеточных разбиения тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда они имеют один и тот же $(n+1)$-тип.

Пусть X — произвольное пространство (для простоты - линейно связное). Симплициальное подмножество $M(X)$ симплициального множества $S(X)$ наз. минимальным, если оно содержит все сингулярные симплексы, являющиеся отображениями в нек-рую фиксированную точку $x_0 \in X$, и если для любого симплекса $\sigma \in S(X)$, все грани к-рого принадлежат подмножеству $M(X)$, в $M(X)$ существует единственный симплекс, гомотопный σ (относительно границы стандартного симплекса). Минимальные подмножества существуют и, с точностью до изоморфизма, однозначно определяются пространством X. При этом два пространства тогда и только тогда слабо гомотопически эквивалентны, когда их минимальные симплициальные множества изоморфны. Таким образом, для решения проблемы слабого Г. т. остается лишь найти достаточно удовлетворительное описание симплициальных множеств $M(X)$.

Пусть Δ_q есть q-мерный *стандартный симплекс*, рассматриваемый как симплициальное разбиение (относительно его стандартной триангуляции) и пусть $C^n(\Delta_q, \pi)$ — группа его n-мерных *коцепей* над абелевой группой π (точнее, группа нормализованных n-мерных коцепей симплициального множества $O(\Delta_q)$). Пусть $E(\pi, n)$ - симплициальное множество, в к-ром симплексами размерности q являются коцепи из $C^n(\Delta_q, \pi)$, а операторы грани ∂_i и вырождения s_i являются коцепными отображениями, индуцированными стандартными симплициальными отображениями $e_i : O(\Delta_{q-1}) \to O(\Delta_q)$ и $f : O(\Delta_{q+1}) \to O(\Delta_q)$ (отображение e_i «выпускает» i-ю вершину, а отображение f_i «склеивает» i-ю и $(i+1)$-ю вершины). Симплексы, являющиеся коциклами, образуют в $E(\pi, n)$ некоторое симплициальное подмножество $K(\pi, n)$. Когранничный оператор $\delta : C^n(\Delta_q, \pi) \to C^{n+1}(\Delta_q, \pi)$ определяет симплициальное отображе-

ние $\delta : E(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, ядром к-рого служит подмножество $K(\pi, n)$. Отображение δ является *расслоением* (в смысле Кана) со слоем $K(\pi, n)$. Кроме того, симплициальное множество $K(\pi, n)$ является в категории симплициальных множеств объектом типа $K(\pi, n)$ (по отношению к гомотопич. группам в смысле Кана, см. *Эйленберга — Маклейна пространство*), а симплициальное множество $E(\pi, n)$ гомотопически тривиально (гомотопически эквивалентно «точке»). Таким образом, расслоение δ является симплициальным аналогом *Серра расслоения* путей над пространством типа $K(\pi, n+1)$.

Симплициальное множество $K(\pi, n)$ при $n=1$ имеет смысл и для любой (не обязательно абелевой) группы π. Получающееся симплициальное множество $K(\pi, 1)$ есть не что иное, как стандартная симплициальная *резольвента* группы π.

Пусть π_1 — мультипликативная группа операторов аддитивной группы π. Для любого коцикла a произвольного симплициального множества N над группой π_1 в группе коцепей этого множества над группой π определен кограничный оператор δ_a относительно коцикла a. Пусть σ — произвольный q-мерный симплекс из N и пусть $t_\sigma : O(\Delta_q) \to N$ — его характеристическое отображение (см. *Симплициальное множество*). Тогда в $O(\Delta_q)$ определен коцикл $t_\sigma^*(a)$. Пусть кограничный оператор относительно этого коцикла обозначен символом $\delta_{a,\sigma}$. Пусть k^{n+1} — произвольный $(n-1)$-мерный коцикл симплициального множества N над группой π относительно коцикла a. Если в прямом произведении симплициальных множеств N и $E(\pi, n)$ рассмотреть подмножество $P = P(N, k^{n+1})$, состоящее из всевозможных пар (σ, u), $\sigma \in N$, $u \in E(\pi, n)$, для к-рых $t_\sigma^*(k^{n+1}) = \delta_{a,\sigma} u$, то P будет симплициальным подмножеством. Формула $p(\sigma, u) = \sigma$ определяет надъективное (сюръективное) отображение $p : P \to N$, являющееся расслоением (в смысле Кана). Это расслоение будет обозначаться $p(N, k^{n+1})$. В случае, когда коцикл a тривиален, это есть не что иное как расслоение, индуцированное симплициальным отображением $N \to K(\pi, n+1)$, отвечающим коциклу k^{n+1}, из расслоения $E(\pi, n) \mapsto K(\pi, n+1)$. Над n-мерным остовом N^n симплициального множества N расслоение p обладает *сечением* $\sigma \to (\sigma, 0)$, и коцикл k^{n+1} является *препятствием* к распространению этого сечения на N^{n+1}. После отождествления симплексов σ и $(\sigma, 0)$ можно считать, что $N^n \subset P^n$. При этом $N^{n-1} = P^{n-1}$.

Пусть теперь имеется последовательность расслоений симплициальных множеств

$$\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{p_n} P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_1} P_1, \qquad (1)$$

начальный член P_1 к-рой является симплициальным множеством $K(\pi_1, 1)$, построенным для мультипликативной группы π_1. По определению, одномерные симплексы из P_1 находятся в естественном биективном соответствии с элементами группы π_1. Сопоставление каждому такому симплексу соответствующего элемента группы π_1 приводит в P_1 к нек-рому одномерному коциклу a_1 над группой π_1. Пусть коцикл a_n определяется в P_n индуктивной формулой $a_n = p_{n-1}^*(a_{n-1})$. Последовательность (1) наз. гомотопической резольвентой, или *Постникова системой* (первоначальное название — натуральная система), если для любого $n \geqslant 1$ симплициальное множество P_{n+1} есть множество вида $P(P_n, k_n^{n+2})$, где k_n^{n+2} — коцикл размерности $n+2$ в P_n над нек-рой π_1-группой π_{n+1} относительно коцикла a_n [и расслоение p_n есть расслоение $p(P_n, k_n^{n+2})$]. Эта последовательность наз. резольвентой симплициального множества M, если для любого $n \geqslant 1$ задано симплициальное отображение $q_n : M \to P_n$, являющееся изоморфизмом

на M^n и такое, что $p_n \circ q_{n+1} = q_n$. Резольвента определяет симплициальное множество M однозначно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, сама резольвента однозначно определяется группами $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ и циклами $k_1^3, k_2^4, \ldots, k_n^{n+2}, \ldots$. Поэтому р е з о л ь в е н т о й можно называть также и объект $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$, состоящий из групп π_n и циклов k_n^{n+2}.

Не всякое симплициальное множество M обладает резольвентой. Основная теорема теории гомотопич. резольвент утверждает, что симплициальное множество M тогда и только тогда обладает резольвентой, когда оно изоморфно минимальному симплициальному множеству $M(X)$ нек-рого топологич. пространства X. При этом $\pi_n \approx \pi_n(X)$.

Резольвента минимального множества $M = M(X)$ строится следующим образом. Пусть σ произвольный q-мерный симплекс из $M(X)$. Этот симплекс представляет собой отображение $\sigma : \Delta_q \to X$, переводящее все вершины симплекса Δ_q в точку x_0. Поэтому на любой одномерной грани (ребре) симплекса Δ_q оно определяет нек-рый элемент группы $\pi_1 = \pi_1(X, x_0)$. Таким образом на Δ_q возникает нек-рый одномерный коцикл над группой π_1, т. е. q-мерный симплекс из $P_1 = K(\pi_1, 1)$; он будет обозначаться $q_1(\sigma)$. Тем самым получено нек-рое (симплициальное) отображение $q_1 : M \to P_1$. Это отображение является изоморфизмом на M^1 и эпиморфизмом на M^2. Далее проводится индукция: пусть для нек-рого $n \geqslant 1$ уже построено симплициальное множество P_n и симплициальное отображение $q_n : M \to P_n$, являющееся изоморфизмом на M^n и эпиморфизмом на M^{n+1}. Для отображения $q_n | M^{n+1}$ существует обратное справа отображение $q_n' : P_n^{n+1} \to M^{n+1}$. Пусть k_n^{n+2} — препятствие к распространению этого отображения на M^{n+2}. Препятствие k_n^{n+2} является $(n+2)$-мерным коциклом в P_n над группой $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}(X)$ относительно коцикла a_n. Для любого $(n+1)$-мерного симплекса τ из M симплекс $q_n' q_n(\tau) - \tau'$ сравним с τ, и потому определен различающий элемент $d(\tau, \tau') \in \pi_{n+1}$ (см. *Различающая*). Пусть σ — произвольный q-мерный симплекс из M. На каждой $(n+1)$-мерной грани симплекса Δ_q он определяет некоторый $(n+1)$-мерный симплекс τ. Сопоставление этой грани элемента $d(\tau, \tau')$ приводит к некоторой $(n+1)$-мерной коцепи в Δ_q над π_{n+1}, то есть к некоторому q-мерному симплексу $r_n(\sigma)$ симплициального множества $E(\pi_{n+1}, n+1)$. Пара $q_{n+1}(\sigma) = (q_n(\sigma), r_n(\sigma))$ принадлежит симплициальному множеству $P_{n+1} = P(P_n, k_n^{n+2})$. Для завершения индукции остается заметить, что построенное отображение $q_{n+1} : M \to P_{n+1}$ симплициально, является изоморфизмом на M^{n+1} и эпиморфизмом на M^{n+2}.

Резольвента $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ строится по симплициальному множеству $M(X)$ неоднозначно: имеется произвол в выборе обратных отображений q_n'. Проще всего описать эту неоднозначность, понимая резольвенты в смысле (1). Именно, две такие резольвенты $\{\overline{P}_n, \overline{p}_n\}$ и $\{P_n, p_n\}$ тогда и только тогда возникают из одного минимального симплициального множества $M(X)$, когда они изоморфны как последовательности отображений, т. е. когда для любого $n \geqslant 1$ существует такой изоморфизм $\overline{\theta}_n : P_n \to \overline{P}_n$, что $\theta_n \circ p_n = \overline{p}_n \circ \theta_{n+1}$. Чтобы описать этот изоморфизм в терминах резольвент $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\pi_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$, следует заметить, что существование изоморфизма $\theta_1 : P_1 \to \overline{P}_1$ равносильно существованию изоморфизма групп $\vartheta_1 : \pi_1 \to \overline{\pi}_1$. При этом $\theta_1^*(\overline{a}_1) = \vartheta_1(a_1)$. Далее, для изоморфизма $\theta_n : P_n \to \overline{P}_n$ тогда и только тогда существует следующий изоморфизм $\theta_{n+1} : P_{n+1} \to \overline{P}_{n+1}$, когда существует такой ϑ_1-изоморфизм $\vartheta_{n+1} : \pi_{n+1} \to \overline{\pi}_{n+1}$ (см.

Операторный гомоморфизм) и такая коцепь $l^{n+1} \in C^{n+1}(P_n, \overline{\pi}_{n+1})$, что

$$\theta_n^*(\overline{k}_n^{n+2}) - \vartheta_{n+1}(k_n^{n+2}) = \delta_{\theta_n^*(a_n)}\, l^{n+1}. \qquad (2)$$

При этом изоморфизм θ_{n+1} определяется формулой

$$\theta_{n+1}(\sigma, u) = (\sigma, u - t_\sigma^*(l^{n+1})). \qquad (2')$$

Резольвенты $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\pi_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ тогда и только тогда возникают из одного минимального симплициального множества, когда существуют такие изоморфизмы $\vartheta_n : \pi_n \to \overline{\pi}_n$, являющиеся при $n>1$ ϑ_1-изоморфизмами, что для любого $n \geqslant 1$ выполнены соотношения (2), где θ_n изоморфизм, последовательно определяемый при $n>1$ формулой (2'), а при $n-1$ являющийся изоморфизмом, индуцированным изоморфизмом ϑ_1. В этом случае резольвенты $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\pi_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ наз. изоморфными. Гомотопической резольвентой пространства X наз. резольвента симплициального множества $M(X)$. Резюмируя, получаем, что два пространства тогда и только тогда слабо гомотопически эквивалентны, когда их гомотопич. резольвенты изоморфны; в частности, два клеточных разбиения тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда их гомотопические резольвенты изоморфны.

Если условия (2) выполнены только при $n<m$, то изоморфизмы θ_n существуют только при $n \leqslant m$. В этом случае говорят, что данные резольвенты m-изоморфны. Два клеточных разбиения тогда и только тогда имеют один и тот же n-тип, когда их гомотопич. резольвенты $(n-1)$-изоморфны.

Изложенное решение проблемы Г. т. (и n-типа) позволяет доказывать целый ряд общих теорем и существенно проясняет принципиальную сторону дела (но явное вычисление резольвент возможно лишь в немногих случаях). Из него вытекает, что для любого односвязного пространства с конечными группами гомологий гомотопич. группы могут быть эффективно вычислены. Аналогичное утверждение справедливо и для пространств, группы гомологий к-рых лишь конечно порождены (см. [2]). Тот факт, что Г. т. полностью определяется резольвентой, показывает, что любая задача теории гомотопий сводится к нек-рому утверждению о резольвентах соответствующих пространств. Это позволяет классифицировать задачи по числу коциклов k_n^{n+2}, участвующих в их решении. Если рассматриваемое пространство $(n-1)$-связно, то его резольвента начинается фактически с члена $P_n \quad K(\pi_n, n)$. Если решение данной задачи может быть сформулировано лишь с использованием первой нетривиальной группы π_n, то эта задача наз. задачей нулевой ступени [напр., задача Хопфа – Уитни о классификации отображений n-мерного полиэдра в $(n \quad 1)$-связное пространство]. Если для этого требуются группы π_n, π_{n+1} и коцикл k_n^{n+2}, то задача наз. задачей первой ступени [напр., задача о классификации отображений $(n+1)$-мерного полиэдра в $(n-1)$-связное пространство]. Аналогично определяются задачи второй, третьей и т. д. ступеней. Известны эффективные решения любых задач нулевой и первой ступеней. Это связано с тем, что для любого $(n-1)$-связного пространства можно вполне эффективно вычислить класс когомологий коцикла k_n^{n+2}; именно, он имеет вид $Sq^2\iota$, где ι – *фундаментальный класс* пространства $K(\pi_n, n)$, а Sq^2_η – при $n>2$ – *Стинрода операция*, соответствующая естественному *спариванию* $\eta : \pi_n \otimes \pi_n \to \pi_{n+1}$, а при $n-2$ – некоторый ее вариант, известный как *Понтрягина квадрат*. Для задач высших ступеней необходимо аналогичное эффективное вычисление следующих коциклов k_{n+1}^{n+3}, k_{n+2}^{n+4}, ... Каждый из этих коциклов получается из

фундаментального класса с применением нек-рой *когомологической операции* соответствующего порядка. Это, в частности, показывает, что решение любой задачи теории гомотопий может быть сформулировано в терминах определенных когомологич. операций. Однако ввиду большой сложности операций высших порядков получены лишь решения отдельных задач высших ступеней, использующие соображения специального характера. Нек-рый общий прогресс достигнут в предположении стационарности: продвинутое в этих предположениях уже довольно далеко вычисление дифференциалов спектральной последовательности Адамса равносильно вычислению нек-рых стационарных операций высоких порядков.

Теория гомотопич. резольвент может быть переформулирована в следующей, «геометризованной» форме. Р е з о л ь в е н т о й наз. произвольная последовательность расслоений в смысле Серра

$$X_{n+1} \xrightarrow{p_n} X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{p_1} X_1, \qquad (3)$$

в к-рой каждое пространство X_n обладает тем свойством, что $\pi_m(X_n)=0$ при $m>n$. Эта последовательность наз. р е з о л ь в е н т о й п р о с т р а н с т в а X, если для любого $n\geqslant 1$ заданы отображения $q_n : X\to X_n$, индуцирующие изоморфизм гомотопич. групп до размерности n и такие, что $p_n\circ q_n = q_n$. Эта резольвента с точностью до изоморфизма [понимаемого как изоморфизм последовательностей (см. *Последовательностей категория*)] определяется однозначно группами $\pi_n=\pi_n(X)$ и характеристич. классами k_n^{n+2} расслоений p_n. Резольвента существует для любого линейно связного пространства X [таковой будет, напр., геометрическая реализация «алгебраической» резольвенты (1)] и определяет это пространство с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности. Слоем расслоения $p_n : X_{n+1}\to X_n$ является пространство типа $K(\pi_{n+1}, n+1)$, и в случае, когда X гомотопически n-просто (см. *Гомотопическая группа*), напр., односвязно, это расслоение индуцировано из *Серра расслоения* путей над пространством $K(\pi_{n+1}, n+2)$ посредством нек-рого отображения $X_n\to K(\pi_{n+1}, n+2)$, представляющего (см. *Эйленберга — Маклейна пространство*, *Представимый функтор*) класс когомологий k_n^{n+2}.

Если пространство X ($n-1$)-связно, то его резольвента фактически начинается с члена $X_n = K(\pi_n, n)$. При $n>1$ удобно наряду с «абсолютными» резольвентами (3) рассматривать также так наз. р е з о л ь в е н т ы п о м о д у л ю простого числа p, определение к-рых отличается от определения резольвент (3) только тем, что гомотопич. группы заменяются их p-компонентами. Если для X найдены резольвенты по любому простому модулю p, нахождение «абсолютной» резольвенты, как правило, не представляет труда. Поэтому в задаче вычисления резольвент (включающей задачу вычисления гомотопич. групп) обычно ограничиваются «модульными» резольвентами, в вычислении к-рых могут быть использованы мощные методы теории *спектральных последовательностей* и теории когомологич. операций. Для нек-рых пространств вычисление резольвент далеко продвинуто.

Например, для сферы S^n (при n достаточно большом, чтобы выполнялись условия стационарности) известно уже довольно много первых членов ее резольвенты по модулю 2. Достаточно описать соответствующие группы π_{n+r} [то есть 2-компоненты групп $\pi_{n+r}(S^n)$] и классы когомологий k_{n+r}^{n+r+2}. Первые группы π_{n+r} имеют следующий вид

r	0	1	2	3	4	5	6	7
π_{n+r}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{16}$

Класс k_n^{n+2} имеет вид $Sq^2\iota \in H^{n+2}(\mathbb{Z}, n; \mathbb{Z}_2)$, где $\iota \in H^n(\mathbb{Z}, n; \mathbb{Z}_2)$ — фундаментальный класс. Следующий класс $k_{n+1}^{n+3} \in H^{n+3}(X_1; \mathbb{Z}_2)$ обладает тем свойством, что на слое $K(\mathbb{Z}_2, n+1)$ расслоения p_n он высекает класс $Sq^2\iota_{n+1} \in H^{n+3}(\mathbb{Z}_2, n+1; \mathbb{Z}_2)$ и однозначно этим свойством характеризуется. Аналогично, класс $k_{n+2}^{n+4} \in H^{n+4}(X_2; \mathbb{Z}_8)$ однозначно характеризуется тем, что после приведения по модулю 2 он переходит в класс $Sq^4\iota \in H^{n+4}(X_2; \mathbb{Z}_2)$. Классы k_{n+3}^{n+5} и k_{n+4}^{n+6} равны нулю, а класс $k_{n+5}^{n+7} \in H^{n+7}(X_{n+5}; \mathbb{Z}_2)$ однозначно характеризуется тем, что на слое $K(\mathbb{Z}_8, n+3)$ расслоения p_{n+2} он высекает класс $Sq^4\iota_{n+3} \in H^{n+7}(\mathbb{Z}_8, n+3; \mathbb{Z}_2)$. Наконец, класс $k_{n+6}^{n+8} \in H^{n+8}(X_{n+6}; \mathbb{Z}_{16})$ характеризуется тем, что после приведения по модулю 2 он переходит в класс $Sq^8\iota \in H^{n+8}(X_{n+6}; \mathbb{Z}_2)$.

Лит.: [1] Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч. 1, Алгебраическая теория систем, ч. 2, Натуральная система и гомотопический тип, М., 1955; [2] Браун Э. Х., «Математика», 1958, 2 : 2, с. 3—24; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970, гл. 13. *М. М. Постников.*

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП топологизированной категории — проективная система топологич. пространств, ассоциированная с *топологизированной категорией* и позволяющая определять гомотопические группы этой категории, группы гомологий и когомологий со значениями в абелевой группе и т. д.

Рассматриваются только локально связные топологизированные категории (C, τ), т. е. такие категории C, снабженные топологией Гротендика τ, любой объект к-рых представим в виде копроизведения $\sqcup_{i \in I} X_i$ неразложимых объектов X_i; I играет роль множества связных компонент топологич. пространства. Множество индексов I определено однозначно с точностью до биекции; оно обозначается $\pi_0(X)$. Сопоставление $X \mapsto \pi_0(X)$ определяет функтор из категории C в категорию множеств. Произвольное покрытие $U \to X$ объекта X в топологии (C, τ) определяет симплициальный объект $U.$ в категории C, для к-рого

$$U_n = \underbrace{U_X \times U_X \times \ldots \times U_X}_{n \text{ раз}},$$

и симплициальное множество $\pi_0(U.)$. Геометрич. реализация симплициального множества $\pi_0(U.)$ дает топологич. пространство $|U| = |\pi_0(U.)|$. Для любого измельчения $W \to X$ - покрытия U ($W \to X$ пропускается через $U \to X$) определено (с точностью до гомотопии) непрерывное отображение $|W| \to |U|$. Таким образом, объекту X сопоставляется проективная система топологич. пространств $\{|U|\}_{U \in \mathrm{Cov}(X)}$, где $\mathrm{Cov}(X)$ — семейство всех покрытий объекта X.

Это определение аналогично определению когомологий Чеха; известно, однако, что в общем случае когомологии Чеха дают «правильные» когомологии только в размерностях 0 и 1. Поэтому приведенная выше конструкция не может считаться удовлетворительной. В [1] введено понятие гиперпокрытия, обобщающее симплициальные объекты $U.$, построенные выше для покрытий $U \to X$. Это — снова симплициальный объект $K.$ в топологизированной категории (C, τ) с финальным объектом X, удовлетворяющий условиям: $K_0 \to X$ - покрытие объекта X; для любого n канонич. морфизм $K_{n+1} \to (\mathrm{cosk}_n(K.))_{n+1}$ является покрытием, где cosk_n — функтор n-го коскелета.

Сопоставление каждому гиперпокрытию $K.$ топологич. пространства $|\pi_0(K.)|$ приводит к проективной системе пространств, параметризованной гиперпокрытиями. Это и определяет гомотопический тип (а точнее — прогомотопический тип) то-

пологизированной категории (C, τ) с финальным объектом X. Группы гомотопий, гомологий и когомологий вводятся стандартным способом.

Г. т. топологизированной категории, ассоциированной со схемой, позволяет определить Г. т. схемы. Наиболее часто рассматривают случай этальной топологии X_{et} на схеме X. В этом случае Г. т. схемы X представляет собой *прообъект* категории пунктированных симплициальных множеств или категории конечных клеточных комплексов. Определяемые для таких объектов гомотопические группы $\pi_i(X)$ являются проконечными группами и наз. i-ми гомотопическими группами схемы X (см. [2]). Если X — нормальная схема, то $\pi_1(X)$ совпадает с фундаментальной группой схемы, определяемой по Гротендику [3]. Г. т. точки $X=\operatorname{Spec} k$, где k — поле, совпадает с проективным пределом пространств Эйленберга Маклейна $K(G_i, 1)$, где G_i — группа Галуа конечного расширения Галуа K_i поля k. В случае алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет место теорема сравнения: группы $\pi_i(X)$ являются проконечным пополнением обычных гомотопич. групп $\pi_i(X^{an})$ комплексного пространства X^{an}, ассоциированного с X.

Лит.: [1] Труды международного конгресса математиков (Москва, 1966), М., 1968, с. 44–56; [2] Theorie des Toposes et cohomologie etale des schimas, t. 1–3, B.—Hdlb.—N.Y., 1974; [3] Artin M., Mazur B., Etale homotopy, B.—Hdlb.—N. Y., 1969; [4] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [5] Revêtements etales et groupe fondamental (S6A1), B.— Hdlb.—N.Y., 1971.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГОМОТОПИЯ, гомотопность двух непрерывных отображений $f, g: X \to Y$, — формализация интуитивного представления о деформируемости одного отображения в другое. Точнее, отображения f и g наз. гомотопными (обозначение $f \sim g$), если существует такое семейство непрерывных отображений $f_t: X \to Y$, непрерывно зависящих от параметра $t \in [0, 1]$, что $f_0 = f$, $f_1 = g$ (фиксация отрезка $[0, 1]$ произведена здесь лишь по соображениям технич. удобства; ясно, что вместо него можно взять любой другой отрезок действительной оси). Это семейство (называемое гомотопией, связывающей f с g) является путем в пространстве $F(X, Y)$ всех непрерывных отображений $X \to Y$, связывающим точку f с точкой g, так что гомотопность отображений является специализацией на случай пространств отображений общего отношения «быть связанным непрерывным путем». Поэтому, в частности, отношение гомотопности является отношением эквивалентности, а соответствующие классы (они называются гомотопич. классами) представляют собой компоненты линейной связности пространства $F(X, Y)$. Для придания сказанному точного смысла необходимо уточнить, что означает выражение «отображения f_t непрерывно зависят от t». Самый естественный путь состоит во введении в $F(X, Y)$ топологии (или хотя бы псевдотопологии). Однако по традиции принято поступать иначе. Именно, по определению, считается, что f_t непрерывно зависит от t, если функция $f_t(t)$ непрерывна по совокупности переменных, т. е. если непрерывно отображение $F: X \times [0, 1] \to Y$, определенное формулой $F(x, t) = f_t(x)$ (это отображение также часто наз. гомотопией, связывающей f с g).

Описанные Г. иногда наз. свободными, чтобы отличить их от «связанных» Г., возникающих, когда фиксирован нек-рый класс $\mathfrak{N}$ непрерывных отображений $X \to Y$ и наложено требование, чтобы $f_t \in \mathfrak{N}$ для любого $t \in [0, 1]$. Напр., если задано подпространство $A \subset X$, то можно рассматривать связанные на A гомотопии, отличающиеся тем, что $f_t = f_0$ на A для всех t. В этом случае говорят, что отображение $f = f_0$ гомотопно отображению $g = f_1$ относительно A и пишут $f \sim g$ rel A.

Другой тип «связанных» Г. возникает, когда в X и Y выбраны подпространства $A\subset X$ и $B\subset Y$ и рассматриваются лишь отображения $f: X\to Y$, удовлетворяющие условию $f(A)\subset B$. Такие отображения наз. отображениями пары (X, A) в пару (Y, B) [обозначение $f: (X, A)\to(Y, B)$], а соответствующие Г. [т. е. гомотопии, для к-рых $f_t(A)\subset B$ для всех t] — гомотопиями отображений пар. Вместо пар можно рассматривать тройки (X, A, B) (с условием $B\subset A\subset X$ или без этого условия), четверки и т. п. Можно рассматривать, напр., Г. отображений пар относительно третьего подпространства и т. д. Возможны и принципиально другие типы «связанных» Г.

Задача установления гомотопичности («связанной» или нет) двух данных отображений $f, g: X\to Y$ равносильна задаче распространения на все $X\times[0, 1]$ непрерывного отображения в Y, заданного на $X\times 0\cup X\times 1$ (а в задаче гомотопности rel A — на $X\times 0\cup A\times[0, 1]\cup\cup X\times 1$). В этом смысле задача гомотопности является частным случаем задачи распространения. Вместе с тем в широком классе случаев (а именно, для так наз. *корасслоений*) возможность распространения на все X непрерывного отображения $A\to Y$, заданного на подпространстве $A\subset X$, зависит только от его гомотопич. класса. Эта тесная связь задачи гомотопности и задачи распространения обусловливает их совместное рассмотрение в рамках так наз. теории гомотопии. См. *Гомотопический тип*.

М. М. Постников.

ГОНИОМЕТРИЯ — часть тригонометрии, определяющая тригонометрич. функции и соотношения между ними.

ГОРДИНГА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, имеющее вид:

$$\|u\|_m^2\leqslant c_1\,\mathrm{Re}\,B[u, u]+c_2\|u\|_0^2,$$

где $u\in\mathbb{C}_0^\infty(G)$ — комплексная функция с компактным (в G) носителем, $G\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область и

$$B[u, u]=\sum_{|s|,\,|t|\leqslant m}\int_G a_{st}D^s u\bar{D}^t u\,dx$$

— интегральная квадратичная форма с непрерывными в $\overline{G}$ комплексными коэффициентами a_{st}. Достаточным условием справедливости Г. н. для любой функции $u\in\in\mathbb{C}_0^\infty(G)$ является существование такой положительной постоянной c_0, что

$$\mathrm{Re}\sum_{|s|,\,|t|\leqslant m}a_{st}\xi^s\xi^t\geqslant c_0|\xi|^{2m}$$

для любого $x\in G$ и всех действительных векторов $\xi=-(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Г. н. сформулировано и доказано Л. Гордингом [1].

Лит.: [1] Gårding L., «Math. scand.», 1953, bd. 1, № 1, s. 55—72; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

А. А. Девин.

ГОРЕНШТЕЙНА КОЛЬЦО — коммутативное нётерово локальное кольцо, имеющее конечную инъективную размерность (см. *Гомологическая размерность*). Кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов k размерности n является Г. к. тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\mathrm{Ext}_A^i(k, A)=0$ для $i\neq n$ и $\mathrm{Ext}_A^n(k, A)\simeq k$.

2) Для любой максимальной A-последовательности $x_1, \ldots, x_n$ (см. *Глубина модуля*) идеал $(x_1, \ldots, x_n)$ неприводим.

3) Функтор $M\mapsto\mathrm{Ext}_A^n(M, A)$, определенный на категории A-модулей конечной длины, изоморфен функтору $M\mapsto\mathrm{Hom}_A(M, I)$, где I — инъективная оболочка поля k.

4) Кольцо A является *Коэна — Маколея кольцом* (в частности, все локальные когомологии $H_m^i(A)=0$ для $i\neq n$) и $H_m^n(A)$ совпадает с инъективной оболочкой поля k.

5) Для любого A-модуля M конечного типа существует канонич. изоморфизм

$$H^i_m(M) \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ext}^{n-i}(M, A), H^n_m(A))$$

(л о к а л ь н а я д в о й с т в е н н о с т ь).

Примерами Г. к. являются регулярные кольца, а также их факторкольца по идеалу, порожденному регулярной последовательностью элементов (п о л н ы е п е р е с е ч е н и я).

В случае, когда Г. к. A — одномерная область целостности, Г. к. допускают следующую численную характеризацию. Пусть $\overline{A}$ — целое замыкание A в поле частных, F — *кондуктор* A в $\overline{A}$, $C = \dim_k \overline{A}/F$ и $\delta = \dim_k \overline{A}/A$. Тогда кольцо A есть Г. к. тогда и только тогда, когда $C = 2\delta$. Это равенство впервые доказано для локального кольца неприводимой плоской алгебраической кривой Д. Гореншт̈ейном [1]. Локализация Г. к. является Г. к. В связи с этим возникло расширение понятия Г. к.: нётерово кольцо (или схема) наз. к о л ь ц о м (с х е м о й) Г о р е н ш т е й н а, если все локализации этого кольца по простым идеалам (соответственно все локальные кольца схемы) являются локальными кольцами Гореншт̈ейна (в первом определении).

Лит.: [1] G o r e n s t e i n D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 72, p. 414–36; [2] С е р р Ж., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] А в р а м о в Л. Л., Г о л о д Е. С., «Матем. заметки», 1971, т. 9, № 1, с. 53—8; [4] G r o t h e n d i e c k A., Seminaire Bourbaki, 2 ed., P., 1959; [5] е г о ж е, Local cohomology, B.—Hdlb.—N.Y., 1967; [6] H a r t s h o r n e R., Residues and duality, B.—Hdlb.—N.Y., 1966; [7] B a s s H., «Math. Z.», 1963, Bd 82, № 1, S. 8—28.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — гладкое распределение на гладком расслоенном пространстве E со структурной группой Ли G (т. е. гладкое поле линейных подпространств в касательных к E пространствах), к-рое определяет связность в E в том смысле, что все горизонтальные поднятия всех кривых базы являются его интегральными кривыми. Г. р. Δ должно быть трансверсально к слоям, т. е. в любой точке $y \in E$ имеет место прямое разложение $T_y(E) = \Delta_y \dotplus T_y(F_y)$, где F_y — слой, содержащий y. Эффективные условия на трансверсальное распределение, достаточные, чтобы оно было Г. р., в общем случае весьма сложны. В частном случае, когда E является главным расслоенным пространством P, они должны гарантировать инвариантность распределения относительно действия группы G на P. В этом случае условия даются с помощью формы связности, аннулятором к-рой является Г. р., и находят свое выражение в теореме Картана — Лаптева. Из соответствующих структурных уравнений следует, что если гладкие векторные поля X и Y на P таковы, что $X_y,\ Y_y \in \Delta y$ в любой $y \in P$, то $[XY]_y$ имеет на $T_y(E_y)$ компоненту $\Omega_y(X, Y)$, где Ω — форма кривизны. Следовательно, Г. р. инволютивно тогда и только тогда, когда определяемая им связность в P плоская.

Г. р. на пространстве E, присоединенном к P, является всегда образом нек-рого Г. р. Δ на P при канонич. проекциях тех факторизаций, с помощью к-рых строится E, исходя из P. В общем случае, когда E получается факторизацией из $P \times F$ по действию G согласно формуле $(y, f) \cdot g = (y \cdot g,\ g^{-1} \cdot f)$ и следовательно возникает канонич. проекция $\pi : P \times F \to E$, каждое Г. р. на E получается как образ $\pi^* \overline{\Delta}$, где $\overline{\Delta}$ — естественное поднятие Δ с P на $P \times F$. В более частном случае, когда F является однородным пространством G/H, пространство E отождествляется с P/H и каждое Г. р. на E получается как образ $\pi^* \Delta$ при канонич. проекции $\pi : P \to P/H$.

Лит.: [1] Н о м и д з у К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [2] Б и ш о п Р., К р и т т е н д е н Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Л у м и с т е Ю. Г., «Матем. сб.», 1966, т. 69, № 3, с. 434—69.

Ю. Г. Лумисте.

ГОРЛОВОЙ ЭЛЛИПС — эллипс наименьшей площади, получающийся в пересечении однополостного *гиперболоида* плоскостью, перпендикулярной его оси.

Е. В. Шикин.

ГОРНЕРА СХЕМА — прием для нахождения неполного частного и остатка при делении многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

на двучлен $x - a$, где все коэффициенты a, a_0, ..., a_n лежат в нек-ром поле, напр., в поле комплексных чисел. Всякий многочлен $f(x)$ единственным способом представим в виде

$$f(x) = (x-a)g(x) + r,$$

где $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ есть неполное частное, а r — остаток, равный по *Безу теореме* $f(a)$. Коэффициенты $g(x)$ и r вычисляются по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{array}{l} b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\ \ldots,\ b_0 = a_1 + ab_1, \\ r = a_0 + ab_0. \end{array}\right\} \quad (*)$$

При вычислениях применяют таблицу

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0	r

верхняя строка к-рой задана, а нижняя заполняется по формулам (*). Этот способ по существу совпадает с методом Тянь-юань, применявшимся в средневековом Китае. В начале 19 в. он был заново открыт почти одновременно У. Горнером [1] и П. Руффини [2].

Лит.: [1] Horner W. G., «Philos. Trans. Roy. Soc. London A», 1819, v. 1, p. 308—35; [2] Ruffini P., «Mem. coronata della Società Italiana delle Scienze», 1802, v. 9, p. 444—526.

В. Н. Ремесленников.

ГРАВИТАЦИЯ, тяготение, — универсальное свойство притяжения между любыми телами. Изучение Г. положило начало ньютоновской классич. механике. Так, Г. Галилей, изучая квазиоднородное поле Г. у поверхности земли, сформулировал закон инерции и установил, что сила, действующая на тело, измеряется ускорением; И. Кеплер (J. Kepler) и И. Ньютон (I. Newton) изучали действие тяжелой точки с большой массой на другую точку, значительно меньшей массы, что привело И. Ньютона к открытию закона всемирного тяготения

$$f_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} r_{12}, \qquad (1)$$

где f_{12} — сила тяготения, действующая на точку с массой m_1, r_{12} — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку с массой m_2, $r = |r_{12}|$ — расстояние между точками, γ — гравитационная постоянная ($\gamma \approx (6{,}67 \pm \pm 0{,}01) \cdot 10^{-8}$ *см*^{3} *г*$^{-1}$·*сек*$^{-2}$); при этом $f_{12} = -f_{21}$. Таким образом, модуль f вектора силы тяготения равен $\gamma m_1 m_2 r^{-2}$.

При переходе от точечных масс к объемам закон тяготения Ньютона приводит к теории *ньютонова потенциала*, описывающего явление Г. в рамках нерелятивистской классич. физики. Основы этой теории заложены в формуле (1), представленное в виде

$$f_{12} = -m_2 \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = -\frac{\gamma m_1}{r},$$

где φ — потенциал поля Г., создаваемого точкой массы m_1, и следовательно, grad φ может рассматриваться как напряженность поля Г. Отсюда, при нек-рых условиях, следует, что массы, распределенные с плотностью $\rho(r)$, создают поле, определяемое уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho.$$

При этом потенциал, вне центрально-симметрически распределенных масс, совпадает с потенциалом матери-

альной точки, помещенной в центре и имеющей массу, равную сумме всех масс (теорема Ньютона). Поле ньютоновского потенциала, выполняя функции описания Г., предполагает принцип дальнодействия распространения гравитационного воздействия с бесконечной скоростью — и существование абсолютных пространства и времени, однако при этом является очень точным приближением к действительности. На теории ньютоновского потенциала базируются небесная механика, ряд вопросов астрофизики, гравиметрия, аэронавтика и космонавтика.

В заданном поле Г. тело приобретает ускорение

$$\frac{dr}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

т. е. все тела в данном поле Г. движутся с одинаковым ускорением.

Уравнение Пуассона классич. теории Г. не раскрывает внутренней структуры механизма Г. Существует много нерелятивистских гипотез о природе Г. Первые попытки объяснить причину падения тел на Земле возникли еще в древности (Платон, Аристотель); их продолжили Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci), затем Н. Коперник (N. Copernicus), Ж. Роберваль (G. Roberval), Р. Гук (R. Hooke). После И. Ньютона проблемой природы Г. занимались: И. Кант (I. Kant) (теория двух сил материи — отталкивания и притяжения), Р. Бошкович (R. Boščović) (сводивший все виды взаимодействия к одной универсальной силе), М. В. Ломоносов и Ж. Л. Лесаж (G. L. Lesage) (оперирующие особой «тяготительной материей»). Были созданы «эфирно-ударные» гипотезы Г., «кинетическая» гипотеза, «волновые», «ударные», «гидродинамические» и т. д. [8]. Все эти теории имеют главным образом лишь историч. интерес; современное же решение проблемы требует построения *квантовой теории поля* Г.— задача поставленная, но еще не решенная в современной теоретич. физике.

Ньютоновская теория Г., при высокой точности соответствия с опытом, обладает следующими недостатками: поле ньютоновского потенциала не удовлетворяет принципу близкодействия конечной скорости распространения гравитационных возмущений; классич. теория Г. не лоренц-инвариантна (см. *Лоренца преобразование*), как это имеет место, напр., для электромагнитного поля; существуют по крайней мере два астрономич. эффекта, необъяснимых количественно в классич. теории Г. (смещение перигелия Меркурия, отклонение луча света около Солнца). Эти и нек-рые другие соображения привели к созданию теории гравитации Эйнштейна — общей теории относительности, к-рая исторически строилась как дедуктивная теория, следующая из принципа эквивалентности (неотличимости поля Г. и неинерциальной системы отсчета) и принципа общей ковариантности (геометрия пространства инвариантна относительно группы непрерывно дифференцируемых невырожденных преобразований систем координат). Однако современное рассмотрение показывает, что для построения такой теории требуется более сложная система аксиом.

Общая теория относительности является ведущей современной теорией Г. С математич. точки зрения эта теория основывается на следующих положениях: геометрия физич. пространства-времени четырехмерна. Это есть геометрия *риманова пространства* V_4 с сигнатурой метрики ($-\,-\,-\,+$). Не существует гравитационных сил (как 4-векторов), а уравнения движения пробных тел в гравитационном поле определяют геодезич. линии в V_4. Для пробных тел с ненулевой массой покоя эти геодезические — неизотропные кривые, для частиц типа фотона — изотропные. Уравнения движения являются четырехмерным ковариантным анало-

том закона инерции Ньютона; ковариантного же аналога второго закона Ньютона для гравитационных сил не существует. Роль «потенциала» поля Г. играют компоненты метрич. тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, для к-рых постулируются уравнения поля Г.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}.$$

В общей теории относительности, в отличие от всех остальных физич. теорий, уравнения движения пробных тел вытекают из уравнений поля.

Общая теория относительности с большой точностью предсказывает эффект смещения перигелия Меркурия, эффект отклонения луча света вблизи диска Солнца, а также эффект космологического красного смещения. Получение новых экспериментальных данных позволило приблизиться к конкретному рассмотрению различных физич. задач. В частности, в значительной степени выяснен вопрос о гравитационных волнах [13], [14]; делаются попытки построения квантовой теории Г., общая теория относительности применяется и при описании ряда астрономич. объектов.

В современной науке имеются также иные теории Г., основанные на более общем формализме (пространствах аффинной связности и др.); релятивистская теория тяготения в плоском пространстве, аналогичная классической электродинамике.

Лит.: [1] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946; [2] Дубошин Г. Н., Теория притяжения, М., 1961; [3] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1—2, М., 1966; [4] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [5] Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, пер. с англ., М., 1962; [6] Синг Дж., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963; [7] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [8] Кагальникова И. И., История развития нерелятивистских представлений о природе гравитации, «Уч. зап. Ярославского пед. ин-та. Кафедра астрономии и теоретической физики», 1963, в. 56; [9] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [10] Петров А. З., Общая теория относительности, в сб.: Развитие физики в СССР, кн. 1, М., 1967; [11] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [12] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [13] Hanson R. A., «Phys. Rev.», 1968, № 166, p. 1263; [14] его же, там же, p. 1272.

А. З. Петров.

ГРАДИЕНТ — одно из основных понятий векторного анализа и теории нелинейных отображений.

Градиентом скалярной функции $f(t)$ векторного аргумента $t = (t^1, \ldots, t^n)$ из евклидова пространства E^n наз. производная функции $f(t)$ по векторному аргументу t, то есть n-мерный вектор с компонентами $\partial f/\partial t^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Существуют следующие обозначения Г. функции $f(t)$ в точке t_0:

$$\operatorname{grad} f(t_0), \quad \nabla f(t_0), \quad \frac{\partial f(t_0)}{\partial t}, \quad f'(t_0).$$

Г. представляет собой ковариантный вектор: компоненты Г., вычисленные в двух различных координатных системах $t = (t^1, \ldots, t^n)$ и $\tau = (\tau^1, \ldots, \tau^n)$, связаны соотношениями:

$$\frac{\partial f}{\partial t^i}(\tau(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau^j} \frac{\partial \tau_j}{\partial t^i}.$$

Вектор $f'(t_0)$, начало к-рого помещено в точку t_0, указывает направление наискорейшего роста функции $f(t)$, ортогональное линии или поверхности уровня функции $f(t)$, проходящей через точку t_0.

Производная функции в точке t_0 в направлении произвольного единичного вектора $N = (N^1, \ldots, N^n)$ равна проекции Г. функции на это направление:

$$\frac{\partial f(t_0)}{\partial N} = (f'(t_0), N) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(t_0)}{\partial t^j} N^j = |f'(t_0)| \cos\varphi, \quad (1)$$

где φ — угол между N и $f'(t_0)$. Максимум производной достигается при $\varphi = 0$, т. е. в направлении Г., и равен длине Г.

Понятие Г. тесно связано с понятием дифференциала функции. В случае дифференцируемости $f(t)$ в точке t_0 вблизи t_0

$$f(t)=f(t_0)+(f'(t_0),\ t-t_0)+o(|t-t_0|), \qquad (2)$$

то есть $df=(f'(t_0),\ dt)$. Существование в точке t_0 Г. функции $f(t)$ не достаточно для справедливости формулы (2).

Точка t_0, в к-рой $f'(t_0)=0$, наз. стационарной (критической или экстремальной) точкой функции $f(t)$. Такой точкой является, напр., точка локального экстремума функции $f(t)$ и система $\partial f(t_0)/\partial t^i=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, используется для нахождения экстремальной точки t_0.

При вычислении значения Г. справедливы формулы:

$$\operatorname{grad}(\lambda f)=\lambda \operatorname{grad} f,\ \lambda=\text{const},$$

$$\operatorname{grad}(f+g)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} g,$$

$$\operatorname{grad}(fg)=g \operatorname{grad} f+f \operatorname{grad} g,$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g \operatorname{grad} f-f \operatorname{grad} g).$$

Г. $f'(t_0)$ есть производная в точке t_0 по объему векторной функции объема

$$\Phi(E)=\int_{t\in\partial E} f(t)\,\boldsymbol{M}\,ds,$$

где E — область с границей ∂E, $t_0\in E$, ds — элемент площади ∂E, а $\boldsymbol{M}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂E. Другими словами

$$f'(t_0)=\lim\frac{\Phi(E)}{\text{объем } E} \quad \text{при } E\longrightarrow t_0.$$

Формулы (1), (2) и перечисленные выше свойства Г. указывают на инвариантный относительно выбора системы координат характер понятия Г.

В криволинейной системе координат $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, в к-рой квадрат длины элемента

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j,$$

компоненты Г. функции $f(x)$, отнесенного к ортам, касающимся координатных линий в точке x, равны

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x^j},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

где матрица $\|g^{ij}\|$ — обратная к матрице $\|g_{ij}\|$.

Понятие Г. для более общих векторных функций векторного аргумента вводится при помощи равенства (2), означающего, что Г. есть линейный оператор, действием к-рого на приращение $t-t_0$ аргумента получается главная линейная часть приращения $f(t)-f(t_0)$ вектор-функции $f(t)$. Напр., если $f(t)=(f^1(t),\ \ldots,\ f^m(t))$ есть m-мерная вектор-функция аргумента $t=(t^1,\ \ldots,\ t^n)$, то ее Г. в точке t_0 — *Якоби матрица* $J=J(t_0)$ с компонентами $\dfrac{\partial f^i}{\partial t^j}(t_0)$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, причем

$$f(t)=f(t_0)+J(t-t_0)+o(t-t_0),$$

где $o(t-t_0)$ — m-мерный вектор, длина к-рого есть $o(|t-t_0|)$. Матрица J определяется при помощи предельного перехода

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(t_0+\rho\tau)-f(t_0)}{\rho}=J\tau \qquad (3)$$

с любым фиксированным n-мерным вектором τ.

В бесконечномерном гильбертовом пространстве определение (3) равносильно определению дифференцируемости по Фреше и Г. при этом совпадает с производной Фреше.

В случае, когда $f(t)$ лежит в бесконечномерном векторном пространстве, возможны различные типы предельного перехода в (3) (см., напр., *Гато производная*).

В теории тензорных полей, заданных в области n-мерного аффинного пространства связности, при помощи Г. описывается главная линейная часть приращения компонент тензора при соответствующем связности па-

раллельном перенесении. Г. тензорного поля

$$f(t)=\left\{ f^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(t),\quad 1\leqslant i_\alpha,\ j_\beta\leqslant n \right\}$$

типа (p, q) есть тензор типа $(p, q+1)$ с компонентами

$$\left\{ \nabla_k f^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(t),\quad 1\leqslant k,\ i_\alpha,\ j_\beta\leqslant n \right\},$$

где ∇_k — оператор абсолютного (ковариантного) дифференцирования.

Понятие Г. широко применяется в различных задачах математики, механики и физики. Многие физич. поля могут быть рассматриваемы как градиентные поля (см. *Потенциальное поле*).

Лит.: [1] К о ч и н Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Р а ш е в с к и й П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ГРАДИЕНТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — *поток*, задаваемый градиентом гладкой функции f на гладком многообразии. При дифференцировании f непосредственно получается *ковариантный вектор* (напр., в конечномерном случае в координатной окрестности U с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ это будет вектор с компонентами $\partial f/\partial x^1, \dots, \partial f/\partial x^n$), тогда как вектор фазовой скорости является *контравариантным вектором*. Переход от одного к другому осуществляется с помощью к.-л. римановой метрики, от выбора к-рой (наряду с f) зависит, таким образом, определение Г. д. с.; часто у вектора фазовой скорости еще меняют знак. В приведенном примере Г. д. с. в области U описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt}=\pm\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j},\quad j=1,\ \dots,\ n,$$

где коэффициенты g^{ij} образуют матрицу, обратную по отношению к матрице коэффициентов $\|g_{ij}\|$ метрич. тензора; подразумевается, что во всех n уравнениях правая часть берется с одним и тем же знаком «плюс» или «минус». Часто под Г. д. с. понимают системы несколько более общего типа (см. [1]).

Лит.: [1] S m a l e S., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 199—206.

Д. В. Аносов.

ГРАДИЕНТНОЕ ПОЛЕ — то же, что *потенциальное поле*.

ГРАДИЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование в классической и квантовой теории поля, к-рое изменяет характеристики поля, не являющиеся наблюдаемыми (напр., потенциалы поля), и не меняет при этом имеющие физич. смысл наблюдаемые величины (напр., напряженности поля). Название «Г. п.» возникло в классич. теории электромагнитного поля, где 4-мерный вектор электромагнитного потенциала $A_n(x)$, $n=0, 1, 2, 3$, вводится в теорию неоднозначным образом, поскольку так наз. Г. п. 2-го рода:

$$A_n(x)\ \longrightarrow A'_n(x)=A_n(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \qquad (1)$$

с произвольной функцией $f(x)$, обладающей частными производными 1-го и 2-го порядков, не сказываются на значениях компонент антисимметричного тензора электромагнитного поля

$$F_{kl}=\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l},\quad k,\ l\quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

к-рые равны физически наблюдаемым компонентам векторов напряженности электрич. поля $E_\alpha=F_{\alpha 0}$, $\alpha=1,2,3$, и магнитного поля $H_1=F_{23}$; $H_2=F_{31}$; $H_3=F_{12}$. При Г. п. 2-го рода остаются неизменными уравнения поля

$$\sum_k g^{kk}\left\{\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\,\partial x^n}\right\}=0,$$

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{00}=-1.$$

т. е. имеет место свойство так наз. г р а д и е н т н о й и н в а р и а н т н о с т и т е о р и и п о л я. С помощью соответствующего выбора функции $f(x)$ можно добиться выполнения для A к.-л. дополнительного условия, к-рое наз. у с л о в и е м к а л и б р о в к и, что позволяет упростить вид уравнений поля. Напр., линейное относительно потенциала A условие Лоренца — равенство нулю 4-мерной дивергенции

$$\sum_k g^{kk} \frac{\partial A_k(x)}{\partial x^k} = 0, \qquad (2)$$

приводит к уравнению Д'Аламбера для $A_n(x)$ (см. *Д'Аламбера оператор*)

$$-\sum_k g^{kk} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k \partial x^k} = \Box A_n(x) = 0. \qquad (3)$$

Условие Лоренца не определяет полностью потенциал A, так как в теории остается инвариантность относительно так наз. с п е ц и а л и з и р о в а н н о г о Г. п. 2-го рода (1) с функцией $f_0(x)$, удовлетворяющей уравнению Д'Аламбера: $\Box f_0(x) = 0$. Однако при определенном выборе $f_0(x)$ (так наз. лоренцева система отсчета) можно добиться выполнения условия $A_0 = 0$. При этом условие Лоренца (2) сводится к условию $\operatorname{div} A = 0$ для 3-мерного вектор-потенциала, т. е. к условию поперечности электромагнитного поля. В случае комплексных полей должна иметь место также инвариантность теории относительно Г. п. 1 - г о р о д а для волновых функций поля и их производных

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha}\Phi(x);$$
$$\Phi^*(x) \longrightarrow \Phi^{*\prime}(x) = e^{-i\alpha}\Phi^*(x), \qquad (4)$$

так как все наблюдаемые динамич. величины в силу условия действительности (эрмитовости) должны выражаться только через действительные билинейные относительно Φ^* и Φ формы. Условие инвариантности теории поля относительно Г. п. 1-го рода в силу общих принципов механики означает существование нек-рых сохраняющихся наблюдаемых физич. величин — зарядов, к-рые выражаются через функции поля, или, иначе говоря, существование законов сохранения этих зарядов. Соответствующие лагранжианы и уравнения поля должны быть инвариантны относительно Г. п., иначе называемых к а л и б р о в о ч н ы м и п р е о б р а з о в а н и я м и. Напр., в случае взаимодействующих с электромагнитным полем $A_n(x)$ комплексных полей $\psi(x)$, соответствующих частицам, обладающим электрич. зарядом, лагранжианы свободных полей и лагранжиан взаимодействия и уравнения поля должны быть инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) \longrightarrow e^{if(x)}\psi(x); \quad \psi^*(x) \longrightarrow e^{-if(x)}\psi^*(x); \\ A_n(x) \longrightarrow A_n(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^n}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

т. е. относительно Г. п. (1) и (4), где фазовый множитель в (4) может зависеть от 4-мерных координат пространства-времени и должен совпадать с произвольной скалярной функцией, входящей в (1). В этом случае в системе полей $A_n(x)$ и $\psi(x)$ выполняется закон сохранения электрич. заряда. Калибровочные преобразования (5) образуют *абелеву группу* преобразований в том смысле, что калибровочная функция $f(x) = g(x) + h(x)$ описывает калибровочное преобразование, представляющее собой два калибровочных преобразования с функциями $g(x)$ и $h(x)$, произведенных в любой последовательности. При построении более общих, чем рассмотренный пример, теорий взаимодействующих полей для выполнения соответствующих законов сохранения тех или иных зарядов необходимо требовать инвариантности лагранжианов и уравнений поля относительно не-

абелевых калибровочных преобразований, в к-рых калибровочные функции $f(x)$ должны быть операторами.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957. *В. Л. Кукин.*

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД — метод минимизации функций многих переменных. Г. м. состоит в том, что последующее приближение функции $F(x)$ получается из предыдущего смещением в направлении градиента функции:

$$x^{n+1} = x^n - \delta_n \operatorname{grad} F(x^n).$$

Параметр δ_n может быть определен, напр., из условия минимума величины

$$F(x^n - \delta_n \operatorname{grad} F(x^n)).$$

См. *Спуска метод*, *Наискорейшего спуска метод*.

ГРАДУИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра A, аддитивная группа к-рой представлена в виде (слабой) прямой суммы групп A_i, $i=0, 1, 2, \ldots$, причем $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ для любых i, j. Таким образом аддитивная группа Г. а. (рассматриваемая как модуль над кольцом целых чисел) есть положительно *градуированный модуль*. Примером Г. а. может служить алгебра $A = F[x]$ многочленов над полем F, где A_i — подпространство, порожденное одночленами степени i ($A_0 = F$). Возможно более общее определение Г. а. A как такой алгебры, аддитивная группа к-рой представляется в виде прямой суммы групп A_α, где α пробегает нек-рую коммутативную полугруппу G и $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in G$. С понятием Г. а. тесно связано понятие *фильтрованной алгебры*. Действительно, на каждой Г. а. $A = \sum_{i \geqslant 0} A_i$ естественным образом определяется возрастающая фильтрация:

$$A = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathfrak{A}_k, \quad \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots, \quad \mathfrak{A}_k = \sum_{i=0}^{k} A_i.$$

Обратно, если $A = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathfrak{A}_k$ — фильтрованная алгебра ($\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots$, $\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_j \subset \mathfrak{A}_{i+j}$), то определяют Г. а. $GA = \sum_{i \geqslant 0} A_i$ ($A_i = \mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_{i-1}$, $A_0 = \mathfrak{A}_0$), к-рую наз. Г. а., а с с о ц и р о в а н н о й с A. Аналогично определяется г р а д у и р о в а н н о е к о л ь ц о.

Е. Н. Кузьмин.

ГРАДУИРОВАННЫЙ МОДУЛЬ — модуль A, представленный в виде прямой суммы своих подмодулей A_n (индекс n пробегает все целые числа; нек-рые из подмодулей A_n могут быть тривиальными). Модуль A наз. п о л о ж и т е л ь н о г р а д у и р о в а н н ы м, если $A_n = 0$ для всех $n < 0$, и о т р и ц а т е л ь н о г р а д у и р о в а н н ы м, если $A_n = 0$ для всех $n > 0$. Элементы из A_n, отличные от нуля, наз. о д н о р о д н ы м и с т е п е н и n. Подмодуль B Г. м. A наз. о д н о р о д н ы м, если он разлагается в прямую сумму подмодулей B_n таких, что $B_n \subseteq A_n$ для любого целого n. Тем самым B также оказывается Г. м. Если B — однородный подмодуль Г. м. A, то фактормодуль $\overline{A} = A/B$ также является Г. м.: $\overline{A} = \sum \overline{A}_n$, где $\overline{A}_n$ — образ подмодуля A_n при естественном гомоморфизме $A \to A/B$, $\overline{A}_n \simeq A_n / B_n$. Г. м. находят широкое применение в гомологич. алгебре.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *Е. Н. Кузьмин.*

ГРАДУС — единица измерения плоских углов, равная 1/90 части прямого угла, обозначается знаком °. Г. делится на 60 минут (60′) или 3600 секунд (3600″). Прямой угол составляет 90°, развернутый 180°. Г. употребляется также для измерения дуг окружности (полная окружность равна 360°). *Е. В. Шикин.*

ГРАМА МАТРИЦА — квадратная матрица

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \| g_{\alpha\beta} \|,$$

составленная из попарных скалярных произведений $g_{\alpha\beta} = (a_\alpha, a_\beta)$ элементов (векторов) (пред)гильбертова

пространства. Г. м. всегда неотрицательна. Она положительно определена, если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы. Справедливо обратное: любая неотрицательная (положительно определенная) $(k\times k)$-матрица есть нек-рая Г. м. (с линейно независимыми определяющими векторами).

Если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть n-мерные векторы (столбцы) n-мерного евклидова (эрмитова) пространства с обычным скалярным произведением

$$(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}a^i b^i \left(=\sum_{i=1}^{n}a^i\overline{b^i}\right),$$

то

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k)=\overline{A}^{\,T}A,$$

где A есть $(n\times k)$-матрица, составленная из столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, знак ^{T} означает операцию транспонирования матриц, а черта сверху — взятие комплексно сопряженной величины. См. также *Грама определитель*.

Л. П. Купцов

ГРАМА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель вида

$$\Gamma=\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=\det|(a_i, a_k)|,\quad i, k=1, \ldots, n,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы (пред)гильбертова пространства, а (a_i, a_k) — их скалярные произведения. Г. о. равен квадрату n-мерного объема *параллелотопа*, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$.

Г. о. является определителем неотрицательной эрмитовой формы

$$\sum_{i,\ k=1}^{n}(a_i,\ a_k)\,\xi_i\overline{\xi}_k=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i\right\|^2,$$

откуда и вытекают его основные свойства:

1) Г. о. неотрицателен, т. е. $\Gamma\geqslant 0$. Равенство $\Gamma=0$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы. Это свойство может рассматриваться как обобщение *Коши неравенства*:

$$\Gamma(a_1, a_2)\geqslant 0 \quad\text{или}\quad (a_1, a_1)(a_2, a_2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1, a_2)(a_2, a_1)=|(a_1, a_2)|^2.$$

В частности, Г. о. равен нулю, если какой-либо его главный минор (также являющийся Г. о.) равен нулю.

2) $$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)\leqslant\Gamma(a_1, \ldots, a_p)\,\Gamma(a_{p+1}, \ldots, a_n),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда подпространства $L(a_1, \ldots, a_p)$ и $L(a_{p+1}, \ldots, a_n)$ ортогональны или один из определителей $\Gamma(a_1, \ldots, a_p)$, $\Gamma(a_{p+1}, \ldots, a_n)$ равен нулю. Геометрически это неравенство означает, что объем параллелотопа не превосходит произведения объемов дополнительных граней. В частности,

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)\leqslant\Gamma(a_1)\ \ldots\ \Gamma(a_n).$$

3) $$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=\Gamma(a_1, \ldots, a_{n-1})\,h^2,$$

где

$$h=\min_{x^1, \ldots, x^{n-1}}\left\|a_n-\sum_{i=1}^{n-1}x^i a_i\right\|$$

есть расстояние от элемента a_n до подпространства $L(a_1, \ldots, a_{n-1})$, т. е. наилучшее квадратическое приближение элемента a_n полиномами вида $\sum_{i=1}^{n-1}x^i a_i$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ суть n-мерные векторы $a_i=(a_i^1, \ldots, a_i^n)$, то

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=(\det|a_i^j|)^2,\quad i, j=1, \ldots, n.$$

Г. о. введены И. П. Грамом [1] и независимо К. А. Андреевым (см. [2]) в связи с задачами разложения функций в ортогональные ряды и наилучшего квадратического приближения функций.

Г. о. применяются при решении многих задач линейной алгебры и теории функций: исследовании линейной зависимости системы векторов или функций, ортогона-

лизации системы функций, построение проекторов, а также при изучении свойств систем функций. См. также *Грама матрица*.

Г. о. являются частным случаем определителей вида

$$\Gamma\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{pmatrix} = \det |(a_i, b_j)|, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

к-рые эрмитово билинейны по отношению к векторам a_i и b_j. Если $a_i(x)$ принадлежат классу $L_2(E)$, то справедлива формула

$$\det(a_i, b_j) =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_E \cdots \int_E \det |a_i(x_j)| \det |\bar{b}_i(x_j)| \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Лит.: [1] Gram J. P., On Rækkeudviklinger bestemte ved Hjælp of de mindste Kvadraters Methode, Kopenh., 1879; [2] Андреев К. А., Избр. работы, Харьков, 1955; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ГРАМА — ШАРЛЬЕ РЯД — ряд, определяемый выражением

$$f_A(x) = f(x) + \sum_{k=3}^{n} a_k f^{(k)}(x) \qquad (1)$$

или

$$f_B(x) = \psi(x) \sum_{m=0}^{n} b_m g_m(x), \qquad (2)$$

где x — нормированное значение случайной величины.

Ряд (1) наз. Г. – Ш. р. типа A; здесь

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$f^{(k)}(x)$ есть k-я производная от $f(x)$, к-рую можно представить в виде

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k H_k(x) f(x),$$

где $H_k(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Производные $f^{(k)}(x)$ и многочлены $H_k(x)$ обладают свойствами ортогональности, благодаря чему коэффициенты a_k можно определить при помощи основных моментов r_k данного ряда распределения. Ограничиваясь первыми членами ряда (1), получают

$$f_A(x) = f(x) + \frac{r_3}{3!} f^{(3)}(x) +$$

$$+ \frac{r_4 - 3}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{r_5 - 10r_3}{5!} f^{(3)}(x) + \frac{r_6 - 15r_4 + 30}{6!} f^{(6)}(x).$$

Ряд (2) наз. Г.– Ш. р. типа B; здесь

$$\psi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

а $g_m(x)$ — многочлены, аналогичные многочленам $H_k(x)$.

Ограничиваясь первыми членами ряда (2), получают

$$f_B(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{\mu_2 - \lambda}{\lambda^2} \left[\frac{x^{[2]}}{2} - \lambda x^{[1]} + \frac{\lambda^2}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_3 - 3\mu_2 + 2\lambda}{\lambda^3} \left[\frac{x^{[3]}}{6} - \frac{\lambda}{2} x^{[2]} + \frac{\lambda^2}{2} x^{[1]} - \frac{\lambda^3}{6} \right] \right\},$$

где μ_i — центральные моменты распределения, а $x^{[i]} = x(x-1)\ldots(x-i+1)$.

Г.– Ш. р. были получены Дж. Грамом [1] и К. Шарлье [2] при исследовании функции вида

$$B_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itx} \varphi(t) \, dt,$$

принятой для интерполирования между значениями $B(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$ — общего члена биномиального распределения, где

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = \sum_{m=0}^{n} B(m) e^{itm}$$

— характеристическая функция биномиального распределения. Разложение $\ln \varphi(t)$ по степеням t приводит

к Г.— Ш. р. типа A для $B_0(x)$, а разложение $\ln \varphi(t)$ по степеням p приводит к Г.— Ш. р. типа B.

Лит.: [1] Gram J. P., «J. reine und angew. Math.», 1883, Bd 94, S. 41—73; [2] Charlier C. V. L., «Arkiv Mat., Astr., Fys.», 1914, b. 2, № 25, s. 1—17; [3] Митропольский А. К., Кривые распределения, Л., 1960.

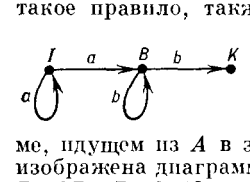
А. К. Митропольский.

ГРАММАТИКА формальная — общее название нескольких типов *исчислений*, используемых в *математической лингвистике* для описания строения естественных языков (а также нек-рых искусственных языков, в частности языков программирования). См. *Грамматика порождающая*, *Грамматика доминационная*, *Грамматика категориальная*, *Грамматика трансформационная*.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА АВТОМАТНАЯ, грамматика конечно-автоматная, грамматика с конечным числом состояний,— *грамматика бесконтекстная*, каждое правило к-рой имеет вид $A \to aB$ или $A \to a$, где A, B — вспомогательные символы, a — один из основных символов. (Иногда допускаются также правила вида $A \to \Lambda$, где Λ — пустая цепочка; класс порождаемых языков при этом расширяется только за счет языков, получаемых из прежних добавлением цепочки Λ.) Для каждой Г. а. можно построить эквивалентный ей *автомат конечный*. Класс языков, порождаемых Г. а. (автоматных языков), совпадает (при допущении правил с пустой правой частью) с классом регулярных множеств. Автоматные языки образуют собственный подкласс класса линейных языков (см. *Грамматика линейная*); так, линейный язык $\{a^n b^n | n = 1, 2, \ldots\}$ — не автоматный. Класс автоматных языков замкнут относительно объединения, пересечения, умножения, подстановки и усеченной итерации (а при наличии правил с пустой правой частью также и относительно итерации). Пересечение бесконтекстного языка с автоматным есть бесконтекстный язык.

Для наглядного изображения Г. а. используется диаграмма — ориентированный мультиграф, вершинами к-рого служат вспомогательные символы, и из вершины A в вершину B идет дуга, помеченная (основным) символом a, если в грамматике есть правило $A \to aB$; кроме того, в диаграмме имеется еще одна вершина заключительная, в к-рую из вершины — вспомогательного символа A — идет дуга, помеченная символом a, если в Г. а. есть правило $A \to a$. (При наличии правил вида $A \to \Lambda$ каждый символ A, для к-рого имеется такое правило, также считается заключительной вершиной.) Цепочка в основном словаре выводима в грамматике из вспомогательного символа A тогда и только тогда, когда она «записана» на нек-ром пути в диаграмме, идущем из A в заключительную вершину. На рис. изображена диаграмма Г. а. с правилами $I \to aI$, $I \to aB$, $B \to bB$, $B \to b$ (I — начальный символ, K — заключительная вершина), порождающей язык $\{a^n b^m | n, m = 1, 2, \ldots\}$.



Лит.: [1] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [2] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы (Поведение и синтез), М., 1970.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА БЕСКОНТЕКСТНАЯ, грамматика контекстно-свободная, КС-грамматика,— *грамматика составляющих*, все правила к-рой имеют вид $A \to \theta$, где A — вспомогательный символ и θ — непустая цепочка (так наз. бесконтекстные правила). Языки, порождаемые такими грамматиками, наз. бесконтекстными языками. Напр., язык $\{a^n b^n | n = 1, 2, \ldots\}$ порождается Г. б. с правилами $I \to aIb$, $I \to ab$ (I — начальный символ).

В определении Г. б. условие непустоты θ можно отбросить без существенного изменения класса языков

(добавляются лишь языки, получаемые из бесконтекстных присоединением пустой цепочки). Г. б.— наиболее употребительный в приложениях класс формальных *грамматик*; они широко используются для построения математич. моделей естественных языков (см. *Математическая лингвистика*) и для описания языков программирования. Класс бесконтекстных языков является собственным подклассом класса НС-языков (см. *Грамматика составляющих*; напр., НС-язык $\{a^n b^n c^n | n-1, 2, \ldots\}$ не бесконтекстный) и совпадает с классом языков, допускаемых так наз. автоматами с магазинной памятью (МП-автоматами).

Каждая Г. б. может быть эквивалентным образом приведена к стандартной бинарной форме — Г. б., все правила к-рой имеют вид $A \to BC$ и $A \to a$, а также к нормальной форме Грейбах — Г. б., все правила к-рой имеют вид $A \to aBC$, $A \to aB$ и $A \to a$ (в обоих случаях A, B, C — вспомогательные символы, a — основной символ). Бесконтекстные языки определяются также *грамматиками категориальными*, *грамматиками доминационными*, грамматиками зависимостей. Иногда для определения бесконтекстных языков используются так наз. нормальные системы уравнений в языках, представляющие собой другую форму записи Г. б. Класс бесконтекстных языков замкнут относительно объединения, умножения, подстановки и усеченной итерации (а при наличии правил с пустой правой частью и относительно итерации) и не замкнут относительно пересечения и дополнения. Г. б. Г наз. однозначной, если для каждой цепочки языка $L(\Gamma)$ имеется единственное дерево вывода в Г. Бесконтекстный язык наз. однозначным, если он порождается нек-рой однозначной Г. б.; в противном случае он наз. неоднозначным (или существенно неоднозначным, существенно неопределенным). Пример неоднозначного бесконтекстного языка —

$$\{a^n b^n c^m | n,\ m=1, 2, \ldots\} \cup \{a^m b^n c^n | n,\ m=1, 2, \ldots\}.$$

Если для любой Г. б., порождающей бесконтекстный язык L, и любого натурального n в L найдется цепочка, имеющая более n деревьев вывода в данной грамматике, говорят, что L имеет бесконечную степень неоднозначности; пример — язык $\{x\hat{x}yy\hat{y} | x, y \in \{a_1, a_2\}^+\}$, где $\hat{}$ означает обращение (т. е. если $x = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, то $\hat{x} = a_{i_k} \ldots a_{i_1}$).

Бесконтекстный язык наз. детерминированным, если он допускается нек-рым детерминированным МП-автоматом. Всякий детерминированный язык однозначен, обратное неверно: напр., однозначный язык $\{x\hat{x} | x \in \{a_1, a_2\}^+\}$ не является детерминированным.

Сложность вывода. Для любой Г. б. временная сложность и емкость вывода (см. *Грамматика порождающая*) ограничены сверху и снизу линейными функциями. Поэтому для классификации Г. б. по сложности вывода вводятся нек-рые специфич. характеристики сложности. Эти характеристики разделяются на два типа: одни из них («древесные») строятся на основе представления вывода в виде дерева (см. *Грамматика составляющих*), другие («цепочечные») основаны на учете числа или расположения вхождений вспомогательных символов в промежуточные цепочки вывода; в ряде важных случаев с «древесными» характеристиками можно связать «цепочечные», имеющие тот же порядок роста. Из «древесных» характеристик наиболее тонкую классификацию дает густота, определяемая следующим образом. 1) Каждой вершине α конечного дерева с корнем сопоставляется густота α — число $\mu(\alpha)$ такое, что: если α — концевой узел, то $\mu(\alpha)=0$; если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — все узлы, в к-рые из α идут дуги, $s>0$ и

$m = \max(\mu(\beta_1), \ldots, \mu(\beta_s))$, то: а) если $m = \mu(\beta_i)$ только для одного $i = 1, \ldots, s$, то $\mu(\alpha) = m$; б) в противном случае $\mu(\alpha) = m+1$. 2) Густота корня дерева наз. г у с т о т о й д е р е в а. 3) Если Г есть Г. б., ее густота $\mu_\Gamma(n)$ определяется аналогично временно́й сложности с заменой длины вывода густотой дерева вывода. Одинаковый с густотой порядок роста имеет (для Г. б.) а к т и в н а я е м к о с т ь $I_\Gamma(n)$, определяемая аналогично емкости с заменой длины цепочки ω_i числом вхождений в ω_i вспомогательных символов. Густота всякой Г. б. ограничена сверху логарифмич. функцией. Существуют бесконтекстные языки, для к-рых густоты любых порождающих их Г. б. имеют логарифмич. порядок роста, напр. множество всевозможных «правильных скобочных последовательностей» (т. е. последовательностей левых и правых круглых скобок, расставленных так, как это делается, напр., в арифметич. выражениях). В то же время языки, порождаемые Г. б., густоты к-рых ограничены константами, составляют обширный класс, совпадающий с замыканием класса линейных языков (см. *Грамматика линейная*) относительно подстановки. Имеются бесконечные последовательности функций, промежуточных по порядку роста между константой и логарифмом, такие, что для любых двух соседних членов последовательности найдется бесконтекстный язык, для к-рого наименьшая по порядку густота порождающей его Г. б. заключена между этими функциями. Употребляются и другие характеристики сложности вывода в Г. б.

Предметом интенсивных исследований является и у п р а в л е н и е в ы в о д о м в Г. б. Предложено много различных концепций управления выводом в Г. б. (из к-рых значительная часть переносится и на более широкие классы грамматик). Так, м а т р и ч н а я г р а м м а т и к а получается, если задано нек-рое множество конечных последовательностей правил грамматики — «матриц» и допустимыми выводами считаются те, для к-рых последовательности применяемых правил могут быть разбиты на матрицы (т. е. правила применяются только «группами»). В г р а м м а т и к е с п о р я д к о м на множестве правил задается частичный порядок и на каждом шаге разрешается применять только такие правила, для к-рых никакие предшествующие в смысле этого порядка правила не применимы к полученной к данному моменту цепочке. В п р о г р а м м и р о в а н н о й г р а м м а т и к е каждому правилу сопоставляются два множества правил - «успешное» и «безуспешное»; применение каждого правила распадается на два этапа: на первом этапе проверяется, входит ли левая часть правила в полученную к данному моменту цепочку; если да, то второй этап состоит в замене левой части правила правой и выборе из «успешного» множества правила для применения на следующем шаге; если нет, то второй этап сводится к выбору из «безуспешного» множества правила для применения на следующем шаге. Класс языков, порождаемых программированными Г. б. без правил с пустой правой частью, является собственным подклассом класса НС-языков и содержит классы языков, порождаемых матричными Г. б. и Г. б. с порядком; в то же время оба эти класса шире класса бесконтекстных языков. При наличии правил с пустой правой частью программированные Г. б. порождают произвольные рекурсивно перечислимые языки.

Алгоритмические проблемы. Существуют алгоритмы, позволяющие по любой Г. б. распознавать, является ли порождаемый ею язык пустым, соответственно конечным. В классе Г. б. нераспознаваемы, в частности, следующие свойства языков и отношения между языками: иметь пустое, соответственно конечное или бесконтекстное дополнение; быть однозначным, соответственно де-

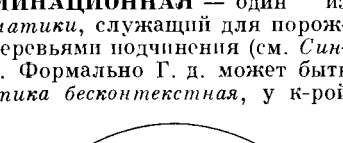
терминированным, линейным или автоматным языком; $L_1 = L_2$; $L_1 \subseteq L_2$. Существуют такие Г. б. Γ_1 и Γ_2, для к-рых нет алгоритмов, позволяющих по произвольным цепочкам x и y в основном алфавите V_1 грамматики Γ_1 (соответственно в основном алфавите V_2 грамматики Γ_2) распознавать, замещаема ли x на y относительно V_1 и $L(\Gamma_1)$ (соответственно взаимозамещаемы ли x и y относительно V_2 и $L(\Gamma_2)$; см. *Аналитическая модель языка*).

Сложность распознавания. Принадлежность цепочки языку, порождаемому заданной Г. б., может быть распознана алгоритмом Кока, допускающим реализацию на машине Тьюринга с одной лентой и одной головкой, время работы к-рой пропорционально четвертой степени длины цепочки; при увеличении числа лент или головок до трех четвертая степень может быть заменена третьей.

См. также *Грамматика автоматная*, *Грамматика линейная*.

Лит.: [1] Гинзбург С., Математическая теория контекстно-свободных языков, пер. с англ., М., 1970. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ДОМИНАЦИОННАЯ — один из видов формальной *грамматики*, служащий для порождения цепочек вместе с деревьями подчинения (см. *Синтаксическая структура*). Формально Г. д. может быть определена как *грамматика бесконтекстная*, у к-рой в каждом правиле, за исключением правил вида $I \to a$, где I — начальный и a основной символы, одно из вхождений символов в правую часть снабжено специальной меткой; при этом правая часть каждого такого правила должна содержать не менее двух вхождений символов. Система составляющих, отвечающая выводу в такой грамматике (см. *Грамматика составляющих*), становится иерархизованной, если считать главными те составляющие, к-рые «происходят» от помеченных вхождений символов в правые части правил. Каждой цепочке порождаемого грамматикой языка сопоставляется дерево подчинения, связанное с указанной иерархизованной системой составляющих (к-рая не обязана, вообще говоря, быть единственной). На рис. показано одно из деревьев подчинения, к-рое сопоставляет цепочке *aaacbbb* Г. д. с правилами $I \to a'Ib$, $I \to aIb'$, $I \to c$ (I — начальный символ, штрих служит меткой); это дерево отвечает выводу



$$(I,\ aIb',\ aaIb'b',\ aaa'Ibb'b',\ aaa'cbb'b'),$$

здесь скобками выделены нетривиальные составляющие.

Важнейший частный класс Г. д.— так наз. простые Г. д., у к-рых в правых частях правил помечаются только основные символы (грамматика рассмотренного примера — простая). Для всякой простой Г. д. существует такое натуральное число k, что в каждом дереве подчинения, к-рое эта Г. д. сопоставляет к.-л. цепочке, ни из одной вершины не выходит более k дуг. Обратно, для всякой Г. д., обладающей указанным свойством, существует эквивалентная ей простая Г. д. такая, что для каждой цепочки множества деревьев подчинения, приписываемых ей обеими грамматиками, совпадают.

Простая Г. д. наз. также грамматикой зависимостей.

Лит.: [1] Белецкий М. Н., «Кибернетика», 1967, № 4, с. 90—7; [2] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА КАТЕГОРИАЛЬНАЯ — один из видов формальной *грамматики*. Г. к. может быть определена как упорядоченная четверка $G = \langle V, W, \Phi_0, f \rangle$, где V и W — конечные множества, элементы к-рых наз. основными символами и элементарными категориями соответственно; Φ_0 —

элемент W, называемый главной категорией; f — приписывающая функция, сопоставляющая каждому основному символу конечное множество категорий выражений, образованных из элементарных категорий и синтаксич. символов [,], $\backslash$, / по следующему правилу: 1) всякая элементарная категория есть категория; 2) если Φ и Ψ — категории, то $[\Phi\backslash\Psi]$ («Φ под Ψ») и $[\Phi/\Psi]$ («Φ над Ψ») суть категории; 3) всякая категория является таковой либо в силу 1), либо в силу 2).

Если $x = a_1 \ldots a_k$, где $a_i \in V$, и $\Phi_i \in f(a_i)$, $i = 1, \ldots, k$, то говорят, что цепочка $\Phi_1 \ldots \Phi_k$ сопоставляется грамматикой G цепочке x. Над цепочкой категорий можно производить (вообще говоря, неоднозначную) операцию сокращения, состоящую в последовательной замене вхождений подцепочек вида $\Phi\,[\Phi\backslash\Psi]$ или $[\Psi/\Phi]\Phi$ вхождениями Ψ. Если нек-рая цепочка категорий ξ, сопоставляемая цепочке x, сокращается до одной категории Θ, а также если $\xi = \Theta$, то говорят, что G приписывает цепочке x категорию Θ. Язык, определяемый грамматикой G (обозначается через $L(G)$), есть множество тех цепочек основных символов, к-рым G приписывает главную категорию. Категория $[\Phi\backslash\Psi]$ (соответственно $[\Psi/\Phi]$) может интерпретироваться как оператор, действующий справа (слева) на Φ и дающий в результате Ψ. На этом основано использование Г. к. в лингвистике. Так, если элементарными категориями являются Π — «предложение» и S — «существительное», то категория $[S/S]$ может интерпретироваться как «прилагательное» (это значит, что прилагательное рассматривается как оператор, действующий на существительное слева, причем получается снова существительное, точнее группа существительного), $[S\backslash\Pi]$ — как «непереходный глагол» и т. п. Если при этом Π — главная категория, то определяемый грамматикой язык состоит из «правильных предложений».

Г. к. может быть превращена в *грамматику бесконтекстную*; для этого нужно: а) составить вспомогательный словарь W' из тех категорий, к-рые являются элементами или частями элементов значений приписывающей функции f; б) сделать Φ_0 начальным символом; в) взять в качестве правил всевозможные выражения вида $\Psi \to \Phi\,[\Phi\backslash\Psi]$ и $\Psi \to [\Psi/\Phi]\Phi$, где $[\Phi\backslash\Psi] \in W'$ (соответственно $[\Psi/\Phi] \in W'$) и вида $\Phi \to a$, где $\Phi \in f(a)$. Это позволяет сопоставлять цепочкам определяемого грамматикой языка системы составляющих стандартным способом (см. *Грамматика составляющих*). Получаемый таким образом подкласс класса бесконтекстных грамматик с лингвистич. точки зрения характеризуется тем, что в них вся «грамматическая информация» содержится в словаре. Однако для любой бесконтекстной грамматики Γ можно построить эквивалентную ей Г. к. G (т. е. такую, что $L(G) = L(\Gamma)$); при этом можно добиться, чтобы значения приписывающей функции G содержали лишь категории вида A, $[A\backslash B]$ и $[A\backslash[B\backslash C]]$, где A, B, C — элементарные категории. Имеются также простые и содержательно естественные способы получения из Г. к. *грамматики доминационной*.

Лит.: [1] Bar-Hillel L., Gaifman C., Shamir E., «Bull. Res. Council Israel», 1960, sec. F, v. 9, № 1, p. 155—66; [2] Белецкий М. Н., «Кибернетика», 1969, № 4, с. 129—35; № 5, с. 10—14; [3] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ЛИНЕЙНАЯ — *грамматика бесконтекстная*, у к-рой правая часть каждого правила содержит не более одного вхождения вспомогательного символа. Класс порождаемых такими грамматиками языков (линейных языков) является собственным подклассом класса бесконтекстных языков (так, бесконтекстный язык $\{a^n b^n a^m b^m | n, m = 1, 2, \ldots\}$ не является линейным). См. также *Грамматика автоматная*. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ПОРОЖДАЮЩАЯ, грамматика Хомского,— один из видов формальной *грамматики*; представляет собой, по существу, частный случай исчисления Поста (см. *Поста каноническая система*). Систематич. изучение Г. п. было начато в 50-х гг. 20 в. Н. Хомским (N. Chomsky), к-рый указал пути ее приложения в лингвистике и выделил наиболее важные для этих приложений классы Г. п. - *грамматики составляющих*, *грамматики бесконтекстные*, *грамматики автоматные*; те же классы оказались особенно интересными и с чисто математич. точки зрения.

Г. п. есть упорядоченная четверка $\Gamma = \langle V, W, I, R \rangle$, где V и W — непересекающиеся конечные множества, наз. соответственно основным и вспомогательным алфавитами, или словарями (их элементы наз. соответственно основными, или терминальными, и вспомогательными, или нетерминальными, символами), I — элемент W, наз. начальным символом, и R — конечное множество правил, имеющих вид $\varphi \to \psi$, где φ и ψ — цепочки (*слова*) в алфавите $V \cup W$ и $\to$ не принадлежит $V \cup W$; R наз. схемой грамматики. Если цепочки ξ и η представимы соответственно в виде $\xi = \chi_1 \varphi \chi_2$, $\eta = \chi_1 \psi \chi_2$, где $\varphi \to \psi$ — одно из правил грамматики Γ, то говорят, что η непосредственно выводима из ξ в Γ (обозначение: $\xi \underset{\Gamma}{|=} \eta$ или $\xi |= \eta$). Последовательность цепочек $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ наз. выводом ω_n из ω_1 в Γ, если $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $(\omega_{i-1} \underset{\Gamma}{|=} \omega_i)$; число n есть длина вывода. Вывод наз. полным, если $\omega_0 = I$ и ω_n не содержит вспомогательных символов. Если существует вывод цепочки η из цепочки ξ в Γ, то говорят, что η выводима из ξ в Γ. Множество цепочек в основном алфавите, выводимых в Γ из I, наз. языком, порождаемым грамматикой Γ (обозначается через $L(\Gamma)$). Две Г. п. эквивалентны, если они порождают один и тот же язык. Класс языков, порождаемых всевозможными Г. п., совпадает с классом рекурсивно перечислимых множеств цепочек.

Для оценки сложности вывода в Г. п. используются так наз. сигнализирующие функции, важнейшими из к-рых являются временна́я сложность и емкость. Временна́я сложность грамматики Γ — это функция натурального аргумента $\tau_\Gamma(n)$, значение к-рой для каждого n равно наименьшему из чисел k, обладающих тем свойством, что для любой цепочки $x \in L(\Gamma)$ такой, что $|x| \leqslant n$ ($|x|$ — длина x), существует вывод D этой цепочки из начального символа Γ, длина к-рого не превосходит k; если не существует цепочек x таких, что $x \in L(\Gamma)$ и $|x| \leqslant n$, то $\tau_\Gamma(n) = 0$. Емкость $\sigma_\Gamma(n)$ грамматики Γ определяется аналогично с заменой длины вывода $D = (\omega_0, \ldots, \omega_s)$ наибольшей из длин цепочек ω_i, $i = 0, 1, \ldots, s$.

Если M' — нек-рое множество полных выводов в грамматике Γ и L' — множество заключительных цепочек выводов, принадлежащих M', то $L' \subseteq L(\Gamma)$. Если при этом M' задано эффективно, то говорят, что задан нек-рый способ управления выводом в Γ. Изучение способов управления выводом существенно для приложений, так как возможность использовать не произвольные, а лишь нек-рые определенные выводы лучше отвечает ситуации, имеющей место в естественном языке. Управление выводом может задаваться, в частности, наложением ограничений на последовательности применяемых в выводе правил (напр., множество таких «допустимых» последовательностей правил может само порождаться нек-рой Г. п. Γ'; в этом случае язык определяется упорядоченной парой Г. п. (Γ, Γ'), к-рую наз. обобщенной грам-

м а т и к о й), или на вид входящих в выводы цепочек, или к.-л. более сложным способом (напр., применяемое на очередном шаге правило может зависеть от вида цепочки, полученной на предыдущем шаге).

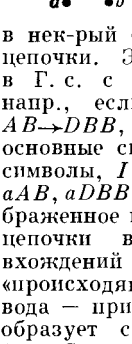
При изучении Г. п. естественно возникают алгоритмич. проблемы. Если α — свойство языков, $\mathscr{T}$ — нек-рый класс грамматик, и если существует алгоритм, позволяющий по любой грамматике $\Gamma \in \mathscr{T}$ распознать, обладает ли язык $L(\Gamma)$ свойством α, то говорят, что α р а с п о з н а в а е м о в классе $\mathscr{T}$. В классе всех Г. п. ни одно нетривиальное свойство (т. е. такое, что в соответствующем классе языков есть как языки, обладающие этим свойством, так и не обладающие им) не распознаваемо. Аналогичным образом можно говорить о распознаваемых в нек-ром классе грамматик отношениях. Возникают также проблемы иного типа, напр. о существовании для данной грамматики Γ алгоритма, позволяющего по любым n цепочкам $x_1, \ldots, x_n$ в ее основном алфавите найти значение заданного предиката $P(L, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ для $L=L(\Gamma)$, $\omega_1=x_1, \ldots, \omega_n=x_n$. В частности, если $P(L, \omega)$ означает $\omega \in L$, то речь идет об алгоритме для распознавания принадлежности произвольной цепочки языку $L(\Gamma)$. Если для грамматики Γ такой алгоритм есть, существенное значение имеет вопрос о сложности его работы, или, как говорят, о сложности распознавания языка $L(\Gamma)$.

См. также *Грамматика составляющих*, *Грамматика бесконтекстная*, *Грамматика линейная*, *Грамматика автоматная*, *Математическая лингвистика*.

Лит.: [1] Гросс М., Лантен А., Теория формальных грамматик, пер. с франц., М., 1971; [2] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [3] Hopcroft J. E., Ullman J. D., Formal languages and their relation to automata, Reading (Mass.), 1969; [4] Гладкий А. В., Диковский А. Я., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1972, т. 10, с. 107—42; [5] Маслов А. Н., Стоцкий Э. Д., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1975, т. 12, с. 155—87; [6] Стоцкий Э. Д., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 1, с. 87—101; № 3, с. 87—102.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА СОСТАВЛЯЮЩИХ, г р а м м а т и к а н е п о с р е д с т в е н н о с о с т а в л я ю щ и х, НС-грамматика, г р а м м а т и к а к о н т е к с т н а я,— частный случай *грамматики порождающей*, $\Gamma=\langle V, W, I, R\rangle$, когда каждое ее правило имеет вид $\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \theta \xi_2$, где ξ_1, ξ_2, θ — цепочки в алфавите $V \cup W$, $A \in W$ и θ непуста. Каждый шаг вывода в Г. с. состоит в замене одного вхождения символа A вхождением цепочки θ, причем возможность замены обусловлена наличием «контекста» ξ_1, ξ_2. Вхождения символов в θ потом также могут заменяться и т. д. Таким образом, вхождение символа «развертывается» в нек-рый отрезок возникающей в результате вывода цепочки. Это дает возможность представить вывод в Г. с. с помощью дерева (д е р е в а в ы в о д а): напр., если грамматика имеет правила $I \to AAB$, $AB \to DBB$, $aBB \to abB$, $A \to a$, $D \to a$, $B \to C$, $C \to c$ (a, b, c — основные символы, I, A, B, C, D — вспомогательные символы, I — начальный символ), то вывод (I, AAB, aAB, $aDBB$, $aaBB$, $aabB$, $aabC$, $aabc$) имеет дерево, изображенное на рис. Множество всех отрезков последней цепочки вывода, получающихся «развертыванием» вхождений вспомогательных символов — иначе говоря, «происходящих» от (неконцевых) вершин дерева вывода — при добавлении всех одноточечных отрезков образует систему составляющих указанной цепочки (см. *Синтаксическая структура*); отсюда и название «Г. с.». Если все одноточечные отрезки также получаются заменой вхождений вспомогательных символов, то можно получить размеченную систему составляющих, приписывая каждой составляющей в качестве



меток те вспомогательные символы, от вхождений к-рых она «происходит»; так, в приведенном выше примере для цепочки *aabc* получается размеченная система составляющих

$$((a)A\ ((a)D\ (b)B)A\ (c)B,C)I$$

(здесь границы составляющих указаны скобками, после правых скобок записаны метки). Приписывание цепочкам размеченных систем составляющих лежит в основе лингвистич. приложений Г. с. Так, грамматика, имеющая (в числе прочих) правила

$$\text{ПРЕДЛ}\to S_{\text{муж, ед, им}}\tilde{V}^3,\quad \tilde{V}^3\to V^{t3}S_{\text{жен, ед, вин}},$$
$$S_{\text{муж, ед, им}}\to\text{«}\textit{эллипс}\text{»},\quad S_{\text{жен, ед, вин}}\to\text{«параболу»},$$
$$V^{t3}\to\text{«}\textit{пересекает}\text{»},$$

где ПРЕДЛ, S_{xyz}, $\tilde{V}^3$, V^{t3} - вспомогательные символы, означающие, соответственно, «предложение», «существительное рода x в числе y и падеже z», «группа глагола в 3-м лице», «переходный глагол в 3-м лице», а символ ПРЕДЛ - начальный, приписывает предложению «*Эллипс пересекает параболу*» размеченную систему составляющих

$$((\textit{Эллипс})\quad S_{\text{муж, ед, им}}((\textit{пересекает})V^{t3}\quad (\textit{параболу})$$
$$S_{\text{жен, ед, вин}})\tilde{V}^3)\ \text{ПРЕДЛ}.$$

Математич. значение Г. с. определяется прежде всего тем, что порождаемые ими языки (так наз. НС-я з ы к и) представляют собой простой подкласс класса примитивно рекурсивных множеств: класс НС-языков совпадает с классом языков, допускаемых недетерминированными линейно ограниченными *Тьюринга машинами* с одной лентой и одной головкой. «Конкретные» числовые множества при обычных способах кодирования натуральных чисел весьма часто оказываются НС-языками (таковы, напр., множество полных квадратов, множество простых чисел, множество десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ и т. п.).

Для каждой Г. с. может быть построена эквивалентная ей л е в о к о н т е к с т н а я (соответственно п р а в о к о н т е к с т н а я) Г. с., то есть Г. с., все правила к-рой имеют вид $\xi A\to\xi\theta$ (соответственно $A\xi\to\theta\xi$). В то же время всякая Г. с., все правила к-рой имеют вид $xAy\to x\theta y$, где x, y — цепочки в основном алфавите, эквивалентна нек-рой *грамматике бесконтекстной*.

Класс НС-языков замкнут относительно объединения, пересечения, умножения, усеченной итерации, подстановки; неизвестно, замкнут ли он относительно дополнения.

Сложность вывода. Временна́я сложность вывода в Г. с. ограничена сверху показательной функцией. Существуют языки, порождаемые Г. с. с временно́й сложностью порядка n^2 и не порождаемые никакими Г. с с меньшей по порядку временно́й сложностью (например, язык $\{xbx, x\in\{a_1,\ a_2\}^*\}$); примеров более высоких нижних оценок временной сложности неизвестно. Емкость всякой Г. с. очевидным образом равна n; для произвольной порождающей грамматики, емкость к-рой ограничена сверху линейной функцией

$$f(n)=kn,$$

существует эквивалентная ей Г. с. (эта Г. с. может быть построена эффективно, если известно k).

Алгоритмические проблемы. Если нек-рый класс языков содержит хотя бы один НС-язык и хотя бы для одного НС-языка L_0 содержит разве лишь конечное число «почти совпадающих» с L_0 языков (языки L_1 и L_2 «почти совпадают», если их симметрич. разность $(L_1\setminus L_2)\cup(L_2\setminus L_1)$ конечна), то свойство принадлежать данному классу нераспознаваемо в классе Г. с. В частности, нераспознаваемы свойства быть пустым, конечным, автоматным, линейным, бесконтекстным языком, иметь пустое или конечное дополнение, совпадать

с (любым) фиксированным НС-языком. Примером свойства языков, распознаваемого в классе Г. с., может служить свойство содержать (любую) фиксированную цепочку.

См. также *Грамматика бесконтекстная*.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ — один из видов формальной *грамматики*. Г. т. предназначаются для преобразования *синтаксических структур*, что делает их более адекватными для описания естественного языка, чем формальные грамматики других типов, осуществляющие порождение или распознавание синтаксич. структур лишь вместе с порождением (распознаванием) цепочек, поскольку раздельное рассмотрение синтаксических и линейных отношений между речевыми единицами больше соответствует природе языка.

Г. т. значительно более громоздки, чем грамматики, предназначенные для преобразования «цепочек», в связи с чем разработка формальных концепций Г. т. началась только в конце 60-х гг. 20 в., хотя содержательная база для этого была построена Н. Хомским (N. Chomsky) примерно на 10 лет раньше. Имеется несколько концепций Г. т.; нек-рые из них предназначаются для переработки систем составляющих, другие — для переработки деревьев подчинения. Примером могут служить так наз. Δ-грамматики, представляющие собой конечные системы элементарных преобразований, имеющих вид $t_1 \Rightarrow t_2 | f$, где t_1 и t_2 (конечные) ориентированные деревья с помеченными вершинами и дугами, а f — отображение множества вершин t_1 в множество вершин t_2. Применить такое преобразование к дереву T (интерпретируемому как дерево подчинения) с помеченными вершинами и дугами означает заменить в нем нек-рое поддерево, изоморфное t_1, поддеревом, изоморфным t_2, «перевесив» при этом «внешние связи» каждой вершины A заменяемого поддерева на вершину $f(A)$ заменяющего. Δ-грамматики применяются для перехода от синтаксич. структур одного уровня к структурам другого уровня (см. *Математическая лингвистика*) и для осуществления синонимич. преобразований глубинных синтаксич. структур.

Лит.: [1] Хомский Н., в кн.: Новое в лингвистике, 1962, вып. 2, с. 412–527; [2] Ginsburg S., Partee B., «Inform. and Control», 1969, v. 15, № 4, p. 297—334; [3] Гладкий А. В., Мельчук И. А., в кн.: Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода, М., 1971, в. 1, с. 16—41.

А. В. Гладкий.

ГРАНИЦА — 1) Множество точек подпространства A данного топологич. пространства X, обладающих тем свойством, что любая окрестность каждой из них содержит как точки из A, так и точки из $X \setminus A$. Общепринятые обозначения: $\mathrm{гр}A$, ∂A, $\mathrm{Fr}A$, $\mathrm{Fr}_X A$.

2) Синоним понятия край *многообразия*, например Г. симплекса.

А. В. Чернавский.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ — задачи нахождения аналитической в нек-рой области функции по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Впервые такая задача была поставлена в 1857 Б. Риманом (см. [1]). Д. Гильберт [2] исследовал граничную задачу в следующей постановке (задача Римана — Гильберта): найти функцию $\Phi(z) = u + iv$, аналитическую в односвязной области S^+ с контуром L, непрерывную в $S^+ \cup L$, по граничному условию

$$\mathrm{Re}\,(a + ib)\Phi = au - bv = c, \qquad (1)$$

где a, b, c — заданные на L действительные непрерывные функции. Первоначально Д. Гильберт привел эту задачу к сингулярному интегральному уравнению с целью дать пример приложения такого уравнения.

Задача (1) может быть сведена к последовательному решению двух задач Дирихле. Полное исследование задачи, проведенное таким способом, имеется в [3].

Близкой к задаче (1) является задача, к к-рой пришел А. Пуанкаре [4] при разработке математич. теории приливов. Задача Пуанкаре состоит в определении гармонической в области S^+ функции $u(x, y)$ по условию на границе L этой области:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+C(s)u=f(s), \qquad (2)$$

где $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, s — дуговая абсцисса, n — нормаль к L.

Под обобщенной задачей Римана — Гильберта — Пуанкаре (задача Р.—Г. П.) понимается следующая линейная граничная задача: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в S^+, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\{\lambda\Phi\}=f(t_0), \quad t_0\in S^+, \qquad (3)$$

где λ — интегро-дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\lambda\Phi=\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\,\Phi_i^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0, t)\,\Phi^{(j)}(t)\,ds\right\}, \qquad (4)$$

в к-рой $a_0(t_0)$, ..., $a_m(t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции класса H (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера), $f(t)$ — заданная действительная функция класса H, $h_j(t_0, t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции вида

$$h_j(t_0, t)=\frac{h_j^0(t_0, t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha<1,$$

причем $h_j^0(t_0, t)$ — функции класса H по обеим переменным. В правой части (4) под $\Phi^{(j)}(t_0)$ подразумевается граничное значение на L изнутри области S^+ производной j-го порядка функции $\Phi(z)$.

Частным случаем задачи Р.— Г.— П. при $m=0$, $h_j(t_0, t)=0$ является задача Римана — Гильберта; задача Пуанкаре также является частным случаем сформулированной задачи. К задаче Р.— Г.— П. приводятся многие важные граничные задачи, напр. граничные задачи для уравнений с частными производными эллиптич. типа с двумя независимыми переменными.

Задача Р.—Г.— П. была поставлена и в предположении, что $a_m(t_0)\neq 0$, $t_0\in L$, и решена И. Н. Векуа [3].

В теории граничных задач важную роль играет понятие индекса задачи — целого числа, определяемого формулой

$$\varkappa=2(m+n),$$

где $2\pi n$ — приращение $\arg\overline{a_m(t)}$ при однократном обходе контура L в направлении, составляющем область S^+ слева.

Задача Р.— Г.— П. редуцируется к сингулярному интегральному уравнению вида

$$N\mu\equiv A(t_0)\,\mu(t_0)+\int_L N(t_0, t)\,\mu(t)\,ds=f(t_0)-c\sigma(t_0), \qquad (5)$$

где μ — искомая действительная функция класса H, c — искомая действительная постоянная, а

$$N(t_0, t)=\frac{K(t_0, t)}{t-t_0};$$

функции $A(t_0)$, $K(t_0, t)$, $\sigma(t_0)$ выражаются через $a_j(t)$ и $h_j(t_0, t)$, $j=0,\ldots, m$.

Пусть k и k' — числа линейно независимых решений соответствующего (5) однородного интегрального уравнения $N\mu=0$ и союзного с ним однородного интегрального уравнения

$$N'\nu=A(t_0)\,\nu(t_0)+\int_L N(t, t_0)\,\nu(t)\,ds=0. \qquad (6)$$

Числа k и k' связаны с индексом $\varkappa$ задачи Р.— Г.— П. равенством

$$\varkappa = k - k'.$$

Особый интерес представляет тот случай, когда задача разрешима при всякой правой части $f(t_0)$. Для того чтобы задача Р. Г. - П. была разрешима при любой правой части $f(t_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $k'=0$ или $k'=1$, причем в последнем случае решение $\nu(t)$ уравнения (6) должно удовлетворять условию

$$\int_L \nu(t)\,\sigma(t)\,ds \neq 0;$$

в обоих случаях $\varkappa \geqslant 0$ и однородная задача $\operatorname{Re}\{\lambda\Phi\}=0$ имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений. При $\sigma(t)=0$ задача Р.— Г.— П. разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда $k'=0$.

В случае задачи Римана - Гильберта имеют место следующие утверждения: 1) при $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача (1) разрешима при любой правой части и 2) при $\varkappa < -2$ эта задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} e^{i\left(\frac{\varkappa}{2}+k\right)\varphi}\,\Omega(\varphi)\,c(\varphi)\,d\varphi = 0, \qquad k=1,\ \ldots,\ -\varkappa-1,$$

где

$$\Omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2(\varphi)+b^2(\varphi)}} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\theta(\varphi_1)\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi}{2}\,d\varphi_1\right\},$$

$$\theta(t) = \arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right], \qquad a^2+b^2 \neq 0.$$

Задача Римана - Гильберта тесно связана с так наз. задачей линейного сопряжения. Если L — простая гладкая или кусочно гладкая линия, состоящая из замкнутых контуров, ограничивающих нек-рую область S^+ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, остающуюся слева при обходе L, то дополнение $S^+ \cup L$ до плоскости z обозначается через S^-. Пусть функция $\Phi(z)$ задана и непрерывна в окрестности линии L всюду, кроме, быть может, самой L. Говорят, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t \in L$ слева (или справа), если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^+(t)$ [или $\Phi^-(t)$], когда z стремится к t по любому пути, оставаясь слева (или справа) от L.

Функцию $\Phi(z)$ наз. кусочно аналитической с линией скачка L, если она аналитична в S^+ и S^- и непрерывно продолжима на каждую точку $t \in L$ как слева так и справа.

В задаче линейного сопряжения требуется определить кусочно аналитич. функцию $\Phi(z)$ с линией скачка L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции класса H. В предположении, что $G(t) \neq 0$ всюду на L, целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

наз. индексом задачи линейного сопряжения.

Когда $\Phi(z)=(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — кусочно аналитический вектор, $G(t)$ — квадратная $(n\times n)$-матрица и $g(t)=(g_1, \ldots, g_n)$ — вектор, причем $\det G(t) \neq 0$, целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L$$

наз. суммарным индексом задачи линейного сопряжения. Понятия индекса и суммарного индекса играют важную роль в теории задачи линейного сопряжения (см. [5], [6], [7], [8]).

На базе теории задачи линейного сопряжения построена теория одномерных сингулярных интегральных уравнений вида (5).

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912; [3] Векуа И.Н., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1942, т. 11, с. 109—39; [4] Poincaré H., Leçons de mécanique céleste, t. 3, P., 1910, ch. 10; [5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [6] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970; [7] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963; [8] Хведелидзе Б. В., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1956, т. 23, с. 3—158.

А. В. Бицадзе.

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ — свойства аналитич. функций, проявляющиеся при приближении к границе области определения.

Можно считать, что понимаемое в самом широком смысле изучение Г. с. а. ф. началось с *Сохоцкого теоремы* и *Пикара теоремы* о поведении аналитич. функций в окрестности изолированной *существенно особой точки*, полученных во 2-й пол. 19 в. В лекциях П. Пенлеве (P. Painlevé, 1895) впервые появляются термины того подхода к изучению Г. с. а. ф., к-рый теперь носит назв. теории *предельных множеств*. В диссертации П. Фату (P. Fatou, 1906) впервые систематически изучаются нек-рые Г. с. а. ф. вблизи непрерывной границы области определения. Примерно в 1-й трети 20 в. теория Г. с. а. ф. получила существенное развитие в трудах многих ученых. После середины 20 в. теория Г. с. а. ф. снова развивается очень бурно, в ней возникают новые идеи и методы, новые направления и объекты исследования. В своем развитии теория Г. с. а. ф. тесно взаимодействует с различными областями математического анализа и математики вообще, в первую очередь с такими, как теория вероятностей, теория гармонических функций, теории конформных отображений, граничных задач аналитических функций, потенциала, распределения значений, римановых поверхностей, субгармонических функций, функциональных алгебр. Через граничные задачи теория Г. с. а. ф. тесно связана с различными областями применения математики.

В связи с тем, что изучение Г. с. а. ф. связано прежде всего с геометрией границы Γ области определения D аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z, в теории Г. с. а. ф. выделились три основных направления.

а) Изучение поведения $f(z)$ в окрестности изолированной граничной точки $a \in \Gamma$. Наибольшее значение имеет случай существенно особой точки a, к к-рому относятся *Сохоцкого теорема*, *Пикара теорема*, *Жюлиа теорема*, *Иверсена теорема*.

б) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда граница Γ есть всюду разрывное множество. Большое значение здесь имела диссертация В. В. Голубева «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» (1916, см. [1]).

в) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда область D ограничена непрерывной замкнутой кривой Γ. В частности, наиболее важен случай единичного круга.

Случаи а) и в) — в нек-ром смысле крайние, случай б) - промежуточный. Наибольшее внимание исследователей привлек случай в), о к-ром говорится ниже.

Пусть аналитич. функция $f(z)$ определена в конечной односвязной области D комплексной плоскости z, ограниченной жордановой спрямляемой кривой Γ. Основными проблемами, характерными для классич. направления изучения Г. с. а. ф., являются следующие.

1) Проблема существования граничных значений, т. е. вопрос о том, при каких условиях и в каком смысле существуют граничные значения $f(z)$ при приближении точки z к Γ. Эта проблема, как и последующие, иначе может быть сформулирована как задача о выделении достаточно обширных классов аналитич. функций в D, имеющих в том или

ином смысле граничные значения на достаточно массивных множествах точек Γ.

2) Проблема граничного представления $f(z)$, т. е. вопрос о том, при каких условиях и при помощи какого аналитич. аппарата может быть выражена зависимость функции $f(z)$ от ее граничных значений на Γ. Здесь, очевидно, для различных классов аналитич. функций аналитич. аппарат будет варьироваться.

3) Проблема единственности, или вопрос о том, какими свойствами должно обладать множество $E \subset \Gamma$, чтобы две аналитич. функции того или иного класса совпадали всюду в D, если их граничные значения на E совпадают.

Первым результатом в решении проблемы существования явилась теорема Фату (1906): если аналитич. функция $f(z)$ ограничена в единичном круге $D=\{z;|z|<1\}$, $|f(z)|\leqslant M$, то почти всюду по мере Лебега на единичной окружности $\Gamma=\{z;\ |z-1\}$ существуют радиальные граничные, или предельные, значения $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})$. При высказанных условиях можно показать, что почти всюду на Γ существуют не только радиальные, но и угловые граничные значения, или граничные значения по всем некасательным путям. Это означает, что $f(z)$ почти для всех точек $e^{i\theta}\in\Gamma$ стремится к определенному пределу $f(e^{i\theta})$, когда z стремится к точке $e^{i\theta}$, оставаясь внутри любого фиксированного угла

$$\Delta(e^{i\theta},\varepsilon)=\{|z|<1\}\cap\left\{|\arg(e^{i\theta}-z)|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\},\ \varepsilon>0,$$

раствора $\pi-2\varepsilon$, меньшего π, с вершиной в точке $e^{i\theta}$, биссектрисой к-рого служит радиус, проведенный в точку $e^{i\theta}$. В определенном смысле теорема Фату неулучшаема; как показал Н. Н. Лузин (1919), для любого множества $E\subset\Gamma$ меры нуль на Γ существует ограниченная аналитич. функция $f(z)$ такая, что $f(z)$ не имеет радиальных пределов на E.

Класс ограниченных аналитич. функций в области D обозначается $B(D)$ или $H_\infty(D)$. После результатов Фату первоочередной задачей выглядело распространение его теорем на более широкие классы функций. Различают следующие основные классы аналитич. функций в единичном круге D, связанные строгими включениями:

$$A(D)\subset B(D)=H_\infty(D)\subset H_p(D)\subset N^*(D)\subset N(D). \quad (1)$$

Класс $A(D)$ — это класс однозначных аналитических в D и непрерывных в замкнутой области $D\cup\Gamma=\overline{D}$ функций.

Классы $H_p(D)$ для всех положительных чисел p определяются условием

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right\}^{1/p}=$$
$$=C(f,p)<+\infty. \quad (2)$$

Для любых $0<p_1<p_2<+\infty$ имеют место строгие включения $H_\infty\subset H_{p_2}\subset H_{p_1}$. Классы H_p впервые встречаются у Г. Харди (1915), и их часто наз. классами Харди. При $1\leqslant p<\infty$ в H_p можно ввести норму по формуле (2), а в H_∞ — по формуле

$$\|f\|_\infty=\|f\|_B=\sup_{z\in D}|f(z)|,$$

и при этом классы H_p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, наделенные, кроме того, естественной структурой векторного пространства, превращаются в банаховы пространства Харди. При $0<p<1$ на H_p можно только ввести метрику $\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p^p$, превращающую H_p в полное метри-

ческое ненормируемое пространство. Класс ограниченных аналитич. функций $B=H_\infty$ содержится в любом классе H_p, $p>0$.

Класс $N(D)$ мероморфных функций $f(z)$ в единичном круге D наз. классом функций ограниченного вида; он был введен Р. Неванлинной в 1924. Класс $N(D)$ можно охарактеризовать как совокупность всех мероморфных функций $f(z)$ в D, представимых в виде отношения двух ограниченных регулярных функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в D, $f(z)=f_1(z)/f_2(z)$.

Все регулярные функции $f(z)\in N(D)$ образуют подкласс $N^*(D)$, причем $f(z)\in N^*(D)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=C(f)<+\infty, \qquad (3)$$

где $\ln^+x$ $\ln x$ при $\ln x\geqslant 0$ и $\ln^+x=0$ при $\ln x<0$. В классе $N^*(D)$ содержатся все классы H_p, $0<p\leqslant+\infty$.

Классы H_p имеют следующее обобщение. Пусть $\psi(t)$ — сильно выпуклая функция при $-\infty<t<+\infty$, т. е. неотрицательная выпуклая неубывающая функция такая, что $\psi(t)/t\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Тогда класс $H_\psi(D)$ определяется условием

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\ln|f(re^{i\varphi})|)\,d\varphi\right\}=$$

$$=C(f,\psi)<+\infty \qquad (2')$$

[ср. с условием (2), где $\psi(t)=e^{pt}$].

Основной результат по проблеме существования граничных значений для случая единичного круга D гласит: каждая мероморфная функция $f(z)$ ограниченного вида в D почти всюду на Г имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$; эти граничные значения таковы, что функция $\ln|f(e^{i\theta})|$ суммируема по Лебегу на Г. Для классов H_p, $0<p<+\infty$, или H_ψ сюда добавляется свойство: функция $|f(e^{i\theta})|^p$ или, соответственно, $\psi(\ln|f(e^{i\theta})|)$ суммируема по Лебегу на Г. Для ограниченных функций $f(z)$, $|f(z)|\leqslant M$, вместо этого имеем vrai $\max|f(e^{i\theta})|\leqslant M$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Таким образом, условие (3) можно охарактеризовать как наиболее широкое достаточное условие на средний рост аналитич. функции $f(z)$ при $|z|\to 1$, обеспечивающее существование почти всюду на Г угловых граничных значений.

Было доказано, что условие (3) нельзя существенно ослабить. Напр., А. Зигмунд (A. Zygmund) доказал, что для произвольной возрастающей функции $\psi(t)$, $\psi(t)\,t\to 0$ при $0<t<+\infty$, существует аналитическая в D функция $f(z)$ такая, что

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\psi(\ln^+|f(re^{i\varphi})|)\,d\varphi<+\infty,$$

но не имеющая нигде на Г граничных значений. Также и при произвольно медленном росте максимума $M(r;f)=\max\{|f(z)|;\ |z|=r\}$ существуют аналитич. функции без радиальных граничных значений.

Граничное представление функций $f(z)$ класса $N(D)$, характеризующее функции этого класса, имеет вид:

$$f(z)=z^m e^{i\lambda}\frac{B_1(z;\,a_\mu)}{B_2(z;\,b_\nu)}\times$$

$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta\times$$

$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\Phi(\theta), \qquad (4)$$

где m — целое число, $m=k$, если точка $z=0$ — нуль кратности k, и $m=-k$, если $z=0$ — полюс кратности k; λ — действительное число;

$$B_1(z;\,a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{|a_\mu|}{a_\mu}\,\frac{a_\mu-z}{1-\bar{a}_\mu z} \qquad (5)$$

— *Бляшке произведение*, составленное по всем нулям $a_\mu \neq 0$ функции $f(z)$ внутри D с учетом их кратности; $B_2(z;\ b_\nu)$ — произведение Бляшке вида (5), составленное по всем полюсам $b_\nu \neq 0$ функции $f(z)$ в D; $\Phi(\theta)$ — сингулярная функция ограниченной вариации на $[0,\ 2\pi]$ с производной, равной нулю почти всюду. Последний интеграл в (4) — типа Лебега — Стилтьеса, первый — типа Лебега.

Как показал М. М. Джрбашян (см. [10]), теория мероморфных функций ограниченного вида допускает существенное расширение. Именно, можно ввести семейство классов мероморфных функций N_α, зависящее от непрерывного параметра α, $-1 < \alpha < -\infty$, причем классы N_α характеризуются такими параметрич. представлениями, из к-рых при $\alpha = 0$ получается представление (4). При возрастании α классы N_α расширяются, и класс N_0 совпадает с классом Неванлинны N.

Для аналитич. функций $f(z) \in N^*(D)$ в представлении (4) следует положить $B_2(z;\ b_\nu) \equiv 1$. Для функций $f(z) \in H_p$, $0 < p \leqslant +\infty$, или H_ψ в представлении (4) имеем: $B_2(z;\ b_\nu) \equiv 1$ и $\Phi(\theta)$ есть невозрастающая функция указанного типа. См. также *Коши интеграл*.

В проблеме единственности первый результат был получен братьями Ф. и М. Рис (1916): если функция $f(z) \in H_\infty$ на множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры Лебега на Γ имеет радиальные граничные значения $f(e^{i\theta}) = 0$, то $f(z) \equiv 0$ в D. Представление (4) позволяет распространить эту теорему на мероморфные *ограниченного вида функции*. В то же время Н. Н. Лузин построил (1919) для любого множества $E \subset \Gamma$ меры нуль аналитич. функцию $f(z)$ такую, что $f(e^{i\theta}) \to 0$ всюду на E, когда $z \to e^{i\theta}$ любым способом, но $f(z)$ не равна тождественно нулю. Наиболее глубокие и общие граничные теоремы единственности для мероморфных функций общего вида были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым в 1925 (см. *Единственности свойства*, *Лузина — Привалова теоремы*).

Рассмотрим случай произвольной плоской области D, ограничившись, однако, для краткости, односвязными областями D со спрямляемой границей Γ. Условия (2), (3) и (2′) равносильны требованию, чтобы субгармонич. функции $f(z)|^p$, $\ln^+|f(z)|$ и $\psi(\ln|f(z)|)$, соответственно, имели *гармоническую мажоранту* в D. В такой форме эти условия вполне пригодны и естественны для определения классов H_p, N^* и H_ψ в произвольных областях. Известно, что спрямляемая кривая Γ почти во всех точках имеет определенную касательную и нормаль. Включения (1) остаются в силе, равно как и теорема Фату о существовании почти всюду на Γ угловых граничных значений для класса N^*. При этом биссектрисой угловых областей $\Delta(\zeta,\ \varepsilon)$ следует считать нормаль к Γ в точке $\zeta \in \Gamma$. Переносится также теорема единственности Ф. и М. Рисов для класса N^*.

В случае произвольной области D В. И. Смирнов ввел также часто употребляемые к л а с с ы E_p, $p > 0$, со следующим определением: $f(z) \in E_p(D)$, если существует последовательность контуров $\{\Gamma_j\} \subset D$, $\Gamma_j \to \Gamma$, такая, что

$$\sup_{\{\Gamma_j\}} \int_{\Gamma_j} |f(z)|^p\,|\,dz\,| = C(f,\ p) < +\infty.$$

Классы E_p особенно удобны при изучении вопросов представимости функций интегралом Коши.

Значительный интерес вызывает изучение Г. с. а. ф., осуществляющих конформное отображение. Пусть функция $z = F(w)$ осуществляет конформное отображение единичного круга $|w| < 1$ на область D плоскости z со спрямляемой границей Γ. Доказано, напр., что при этом производная $F'(w)$ принадлежит классу Харди H_1 в круге $|w| < 1$, а следовательно, она представима в форме (4) с $B_2 \equiv 1$ и невозрастающей сингулярной

функцией $\Phi(\theta)$. В. И. Смирнов указал на важность класса S таких областей D, для к-рых эта сингулярная функция $\Phi(\theta) \equiv 0$. В 1937 М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев построили пример области со спрямляемой границей, не входящей в этот класс S Смирнова, что еще более подчеркивает важность характеризации областей типа Смирнова.

Усилия многих исследователей направлены также на изучение Г. с. а. ф. $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Пусть $D=U^n=\{z\in\mathbb{C}^n; |z_j|<1, j=1, 2, \ldots, n\}$ — единичный *поликруг*, $T^n=\{z\in\mathbb{C}^n; |z_j|=1, j=1, 2, \ldots, n\}$ — его остов. Класс $N^*(D)$ аналитич. функций $f(z)$ в D можно определить условием:

$$\sup_{0<r<1}\int_{T^n}\ln^+|f(rz)|\,dm_n(z)=C(f)<+\infty,$$

аналогичным (3), а классы $H_p(D)$ или $H_\psi(D)$ условием типа $(\psi(t)=e^{pt}$ для случая $H_p(D)$, $p>0)$:

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\int_{T^n}\psi(\ln|f(rz)|)\,dm_n(z)\right\}=C(f,\psi)<+\infty,$$

где m_n — нормированная *Хаара мера* на T^n, $m_n(T^n)=1$. Включения типа $B=H_\infty\subset H_\psi\subset N^*$ сохраняются. Аналитич. функции $f(z)\in N^*(D)$ почти всюду на T^n по мере Хаара m_n имеют «радиальные» граничные значения $f^*(z)=\lim_{r\to 1-0} f(rz)$, $z\in T^n$, причем $\ln^+|f^*(z)|$ суммируем на T^n по мере m_n. Для граничных представлений и свойств единственности функций $f(z)$ в U^n при $n>1$ достаточно простых и общих адекватных характеристик пока (1977) не найдено.

Многие граничные свойства переносятся на различные обобщения аналитич. функций, в частности на абстрактные аналитич. функции $f: D\to X$ со значениями, напр., в отделимом локально выпуклом топологич. пространстве X над полем $\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Хавинсон С. Я., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [6] Носиро К., Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [7] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [8] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966; [9] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [10] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966, гл. 9; [11] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [12] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ — см. *Краевые условия*.

ГРАНИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ области, простые концы области, — элементы области B комплексной плоскости, определяемые следующим образом. Пусть B — односвязная область расширенной комплексной плоскости, ∂B — граница области B. Сечением c области B наз. всякая простая замкнутая в сферической метрике жорданова дуга $c=\overline{ab}$ с концами a и b (случаи $a=b$, a или $b=\infty$ не исключаются) такая, что a, b принадлежат ∂B; неконцевые точки c принадлежат B; дуга c разбивает B на две подобласти, такие, что на границе каждой из них найдется точка, принадлежащая ∂B и отличная от a и b. Последовательность K сечений c_n области B наз. цепью, если: диаметр c_n стремится к 0 при $n\to\infty$; для каждого n пересечение $c_n\cap c_{n+1}$ пусто; любой путь, соединяющий фиксированную точку $O\in B$ в B с сечением c_n $(n>1)$, пересекает сечение c_{n-1}. Две цепи $K=\{c_n\}$ и $K'=\{c'_n\}$ в B эквивалентны, если каждое сечение c_n разделяет в B точку O от всех сечений c'_n

за исключением конечного числа их. Класс эквивалентности цепей в B наз. граничным элементом, или простым концом, области B.

Пусть P — Г. э. области B, определяемый цепью $K=\{c_n\}$, и пусть B_n - такая из двух подобластей, на к-рые c_n разбивает область B, что она не содержит точку O. Множество $I(P)\quad\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}$ наз. телом (или носителем) Г. э. Тело Г. э. состоит из точек границы и не зависит от выбора цепи K в классе эквивалентности. Главной точкой Г. э. наз. точка Г. э., к к-рой стягиваются (сходятся) сечения по крайней мере одной из цепей, определяющих рассматриваемый Г. э. Смежной (или дополнительной) точкой Г. э. наз. всякая его точка, не являющаяся главной. Всякий Г. э. содержит по крайней мере одну главную точку. Главные точки Г. э. образуют замкнутое множество. Г. э. следующим образом классифицируются по К. Каратеодори [1]: Г. э. 1-го рода содержит единственную главную точку и не содержит смежных точек; Г. э. 2-го рода — единственную главную точку и бесконечное множество смежных точек; Г. э. 3-го рода — континуум главных точек и не содержит смежных точек; Г. э. 4-го рода — континуум главных точек и бесконечное множество смежных точек.

Другое равносильное определение Г. э. дал П. Кёбе [2]. Оно основано на классах эквивалентности путей. Основной в теории Г. э. является теорема Каратеодори: при однолистном конформном отображении области B на единичный круг $|\zeta|<1$ между точками окружности $|\zeta|=1$ и Г. э. области B существует взаимно однозначное соответствие. При этом каждая последовательность точек области B, сходящаяся к Г. э. P, преобразуется в последовательность точек единичного круга, сходящуюся к точке ζ_0, $|\zeta_0|=1$, являющейся образом Г. э. P.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1913, Bd 73, S. 323—70; [2] Koebe P., «J. reine und angew. Math.», 1915, Bd 145, S. 177—223; [3] Суворов Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 9.

Е. Г. Голузина.

ГРАНИЧНЫХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — метод исследования *однолистных функций*, основывающийся на рассмотрении *вариаций функции* $w=f(z)$, однолистной в области плоскости z, причем вариации функции определяются надлежащими вариациями границы образа этой области.

Основная лемма Г. в. м. Пусть D — область плоскости w и дополнение Δ области D до расширенной плоскости состоит из нек-рого числа континуумов. Пусть Γ — континуум в Δ и на Γ существует аналитич. функция $s(w)\neq 0$ такая, что для любой точки $w_0\in\Gamma$ и для любой однолистной в области D функции $F(w)$, представимой в виде

$$F(w)=w+A_0+\frac{A_1\rho^2}{w-w_0}+O(\rho^3), \qquad (*)$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\{A_1 s(w_0)\}+O(\rho)\geq 0,$$

причем оценка остаточного члена в (*) является равномерной в каждой замкнутой подобласти области D. Тогда Γ — аналитическая кривая и представляется параметрически посредством функции $w=w(t)$ от действительного параметра t. Этот параметр можно выбрать таким образом, что Γ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 s(w)+1=0.$$

Этот результат обнаруживает существенную роль *квадратичных дифференциалов* в решении экстремаль-

ных задач теории однолистных функций, так как во многих приложениях $s(w)$ оказывается мероморфной функцией. В нек-рых случаях из условий задачи следует, что соответствующие полюсы функции $s(w)$ принадлежат границе экстремальной области, и основная лемма Г. в. м. показывает, что граница этой области принадлежит объединению замыканий критич. траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -s(w)dw^2.$$

Для ряда экстремальных задач основная лемма Г. в. м. не только дает качественный результат, но и оказывается достаточной информацией для определения границы экстремальной области, что приводит к полному решению данной задачи.

Посредством Г. в. м. были получены: качественные результаты в *коэффициентов проблеме* для класса S и в задаче о максимуме n-го диаметра в семействе континуумов данной емкости, решение ряда экстремальных задач однолистных конформных отображений двусвязных областей, *искажения теоремы* для многосвязных областей, дающие одновременно доказательство теорем существования однолистных конформных отображений данной многосвязной области на канонические области, и др.

Лит.: [1] Schiffer M., «Proc. London Math. Soc.», 1938, ser. 2, v. 44, p. 432—49; [2] Шиффер М., Некоторые новые результаты в теории конформных отображений, пер. с англ., в кн.: Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953; [3] Schiffer M., в сб.: Calculus of variations and its applications, N. Y. -Toronto L., 1958, p. 93—113. *Г. В. Кузьмина.*

ГРАНЬ многогранника — плоский многоугольник, являющийся частью поверхности многогранника и ограниченный его ребрами.

ГРАССМАНА МНОГООБРАЗИЕ — множество $G_{n,m}(k)$, $m \leqslant n$, всех m-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве V над телом k. Если k — поле, то $G_{n,m}(k)$ с помощью грассмановых координат (см. *Внешняя алгебра*) вкладывается в $(C_n^m - 1)$-мерное проективное пространство над k в виде компактного алгебраич. многообразия. В изучении геометрич. свойств Г. м. большую роль играют так наз. многообразия Шуберта $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$, $0 \leqslant a_0 < a_1 < \dots < a_m \leqslant n$, определяемые следующим образом: если $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ — флаг подпространств, т. е. набор таких подпространств, что $\dim V_k = k$, то

$$S_{a_0 a_1 \dots a_m} = \{W \in G_{n,m}(k), \dim(W \cap V_{a_r}) \geqslant r, 0 \leqslant r \leqslant m\}.$$

Любое ρ-мерное алгебраич. подмногообразие в Г. м. $G_{n,m}(k)$ эквивалентно единственной целочисленной линейной комбинации многообразий $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$, где $\sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{1}{2} m(m+1) = \rho$ (см. [1]).

В случаях, когда k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, Г. м. над k можно рассматривать как компактное аналитич. многообразие (действительное при $k = \mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$ и комплексное при $k = \mathbb{C}$). Эти многообразия замечательны тем, что являются классифицирующими пространствами для *классических групп* $O(m)$, $U(m)$, $\mathrm{Sp}(m)$ соответственно. Точнее, для любого клеточного комплекса X размерности $\leqslant c(n+1) - 2$, где $c = 1, 2, 4$ соответственно, множество классов изоморфных m-мерных векторных расслоений над k с базой X находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопич. классов непрерывных отображений $X \to G_{n+m,m}(k)$ (см. [2]). Аналогичная теория для групп $SO(m)$ и $SU(m)$ приводит к рассмотрению Г. м. $G^0_{n,m}(k)$ ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) ориентированных m-мерных подпространств в k^n. Перечисленные Г. м. тесно связаны, в частности, с теорией *характеристических классов.*

Роль, к-рую играют Г. м. в топологии, потребовала детального изучения их топологич. инвариантов. Старейший метод этого изучения основан на многообразиях Шуберта, с помощью к-рых легко построить клеточное разбиение для $G_{n,m}(k)$ ($k=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$). Оказывается, в частности, что циклы $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$ порождают базисы групп гомологий $H_*(G_{n,m}(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, $H_*(G_{n,m}(\mathbb{R}),\ \mathbb{Z}_2)$, $H_*(G_{n,m}(\mathbb{H}),\mathbb{Z})$. Хорошо изучены также алгебры когомологий Г. м. и действие степеней Стинрода на них [3].

Другой аспект теории Г. м. состоит в том, что они являются однородными пространствами линейной группы над соответствующим телом и представляют собой основные примеры неприводимых *симметрических пространств*.

Многообразия, аналогичные Г. м., можно конструировать также из подпространств бесконечномерных векторных пространств. В частности, в теории деформаций аналитич. структур существенную роль играет банахово аналитич. многообразие G_B, элементами к-рого являются замкнутые подпространства банахова пространства B над $\mathbb{C}$, допускающие замкнутое прямое дополнение.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [2] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [4] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

ГРАФ — множество V вершин и набор E неупорядоченных и упорядоченных пар вершин; обозначается Г. через $G(V, E)$. Неупорядоченная пара вершин наз. р е б р о м, упорядоченная пара — д у г о й. Г., содержащий только ребра, наз. н е о р и е н т и р о в а н н ы м; Г., содержащий только дуги,— о р и е н т и р о в а н н ы м. Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления), такие ребра (дуги) наз. кратными. Дуга (или ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) наз. п е т л е й. (Иногда под Г. понимают Г. без петель и кратных ребер; тогда Г., в к-ром допускаются кратные ребра, наз. м у л ь т и г р а ф о м, а Г., в к-ром допускаются кратные ребра и петли, наз. п с е в д о г р а ф о м.)

Вершины, соединенные ребром или дугой, наз. с м е ж н ы м и. Ребра, имеющие общую вершину, также наз. с м е ж н ы м и. Ребро (дуга) и любая из его двух вершин наз. и н ц и д е н т н ы м и. Говорят, что ребро (u, v) соединяет вершины u и v, а дуга (u, v) начинается в вершине u и кончается в вершине v.

Каждый Г. можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, к-рые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам) Г. В трехмерном пространстве любой Г. можно представить таким образом, что линии, соответствующие ребрам (дугам), не пересекаются во внутренних точках.

Существуют различные способы задания Г. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — вершины графа $G(V, E)$, а $e_1, e_2, \dots, e_m$ — его ребра. М а т р и ц е й с м е ж н о с т и, соответствующей графу G, наз. матрица $A=\|a_{ij}\|$, у к-рой элемент a_{ij} равен числу ребер (дуг), соединяющих вершины u_i и u_j (идущих из u_i в u_j), и $a_{ij}=0$, если соответствующие вершины не смежны. В м а т р и ц е и н ц и д е н т н о с т и $B=\|b_{ij}\|$ графа G элемент $b_{ij}=1$, если вершина u_i инцидентна ребру e_j, и $b_{ij}=0$, если вершина u_i и ребро e_j не инцидентны. Г. можно задать посредством списков, напр., указанием пар вершин, соединенных ребрами (дугами), или заданием для каждой вершины множества смежных с ней вершин. Два графа $G(V, E)$ и $H(W, I)$ наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин V, W и множест-

вами ребер E, I, сохраняющее отношение инцидентности (см. также *Графов изоморфизм*).

Подграфом $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ наз. Г. с множеством вершин $V' \subseteq V$ и множеством ребер (дуг) $E' \subseteq E$, каждое из к-рых инцидентно только вершинам из V'. Подграфом $G'(V', E')$, порожденным подмножеством $V' \subseteq V$, наз. Г. с множеством вершин V' и набором ребер (дуг) E', состоящим из всех ребер (дуг) графа G, к-рые соединяют вершины из V'. Остовный подграф $G'(V, E')$ содержит все вершины графа G и нек-рый поднабор его ребер (дуг) $E' \subseteq E$. Последовательность ребер (u_0, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{i-1}, u_i), (u_i, u_{i+1}), ..., (u_{r-1}, u_r) наз. маршрутом, соединяющим вершины u_0 и u_r. Маршрут замкнут, если $u_0 = u_r$. Маршрут наз. цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины различны. Замкнутая (простая) цепь наз. (простым) циклом. Г. наз. связным, если любая пара его вершин соединена маршрутом. Максимальный связный подграф графа G наз. компонентой связности. Несвязный Г. имеет по крайней мере две компоненты связности (см. также *Графа связность*).

Длина маршрута (цепи, простой цепи) равна количеству ребер в порядке их прохождения. Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины u_i и u_j в графе G, наз. расстоянием $d(u_i, u_j)$ между u_i и u_j. В связном неориентированном Г. расстояние удовлетворяет аксиомам метрики. Диаметр Г. - это его наибольшее расстояние. Величина $\min\limits_{u_i} \max\limits_{u_j} d(u_i, u_j)$ наз. радиусом, а вершина u_0, для к-рой $\max\limits_{u_j} d(u_i, u_j)$ принимает наименьшее значение, наз. центром графа G. В Г. может быть много центров и ни одного.

Степенью вершины u_i графа G, обозначаемой d_i, наз. число ребер, инцидентных этой вершине. Если граф G (без петель) имеет n вершин и m ребер, то $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$. Вершина u_i наз. изолированной, если $d_i = 0$, и концевой, если $d_i = 1$. Г., у к-рого все вершины имеют одинаковые степени (равные k), наз. регулярным (степени k). В полном Г. нет петель и каждая пара вершин соединена в точности одним ребром. Для графа $G(V, E)$, не имеющего петель и кратных ребер, дополнительным Г. к G наз. граф $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$, у к-рого $\overline{V} = V$ и вершины смежны в $\overline{G}$ только в том случае, когда они не смежны в G. Г., дополнительный к полному, состоит из изолированных вершин и наз. пустым. Многие характеристики для графа G и его дополнения $\overline{G}$ оказываются зависимыми. В ориентированном графе G для каждой вершины u_i определяются полустепень исхода и полустепень захода как количества дуг, выходящих из этой вершины и входящих в нее соответственно. Полный ориентированный Г. наз. *турниром*.

Каждому графу G можно отнести ряд Г., являющихся производными от G. Так, реберным графом $L(G)$ графа G наз. Г., вершины к-рого соответствуют ребрам графа G и две вершины смежны в $L(G)$ в том и только в том случае, когда соответствующие им ребра графа G смежны. В тотальном графе $T(G)$ графа G вершины соответствуют элементам графа G, т. е. вершинам и ребрам, и две вершины в $T(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы в G смежны или инцидентны. Многие свойства графа G переносятся на графы $L(G)$ и $T(G)$. Известно много обобщений понятия «Г.»; одними из них являются понятия *гиперграфа* и *сети*.

С помощью различных операций можно строить Г. из более простых, переходить от одного Г. к более простому, разбивать Г. на более простые, в заданном

классе Г. переходить от одного Г. к другому и т. д. Наиболее употребительными одноместными операциями являются: удаление ребра (вершины ребра сохраняются), добавление ребра между двумя вершинами Г., удаление вершины вместе с инцидентными ей ребрами (Г., полученный в результате удаления вершины v из графа G, часто обозначают $G-v$), добавление вершины (к-рую можно соединить ребрами с нек-рыми вершинами Г.), стягивание ребра — отождествление пары смежных вершин, т. е. удаление пары смежных вершин и добавление новой вершины, смежной с теми вершинами Г., к-рые были смежны хотя бы с одной из удаленных вершин; подразбиение ребра — удаление ребра и добавление новой вершины, к-рая соединяется ребром с каждой вершиной удаленного ребра.

В ряде задач теории Г. используются двуместные операции над Г. Пусть $G_1=G(V_1, E_1)$ и $G_2=G(V_2, E_2)$ — Г. такие, что $V_1 \cap V_2=\phi$ и $E_1 \cap E_2=\phi$. Объединением графов G_1 и G_2 наз. граф G $G_1 \cup G_2$ с множеством вершин $V=V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E=E_1 \cup E_2$. Произведением графов G_1 и G_2 наз. граф $G=G_1 \times G_2$, множеством вершин к-рого являются элементы декартова произведения $V=V_1 \times V_2$, причем две из этих вершин (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в том и только в том случае, если либо $u_1=v_1$ и вершина u_2 смежна с вершиной v_2, либо $u_2=v_2$ и вершина u_1 смежна с вершиной v_1. Напр., любой Г. является объединением своих компонент связности; Г., известный как n-мерный единичный куб Q_n, может быть определен рекуррентно с помощью операции произведения:

$$Q_n=K_2 \times Q_{n-2},$$

где $Q_1=K_2$ — граф, состоящий из пары вершин, соединенных одним ребром. Эти операции можно определить также для пересекающихся Г., в частности для подграфов одного Г. Сложением по модулю 2 графов G_1 и G_2 наз. граф G с множеством вершин $V=V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E=(E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$.

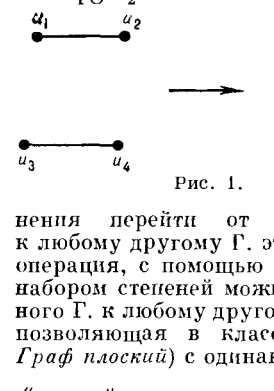


Рис. 1.

Употребляются и другие многоместные операции над Г.

Для некоторых классов Г. удается найти простые операции, позволяющие с помощью многократного их применения перейти от любого Г. изучаемого класса к любому другому Г. этого класса. На рис. 1 приведена операция, с помощью к-рой в классе Г. с одинаковым набором степеней можно перейти от одного произвольного Г. к любому другому; на рис. 2 показана операция, позволяющая в классе плоских триангуляций (см. *Граф плоский*) с одинаковым числом вершин перейти от произвольной триангуляции к любой другой.

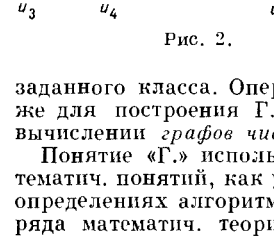


Рис. 2.

Для описания и изучения нек-рых классов Г. отыскиваются такие операции и множества Г., из к-рых с помощью данных операций можно получить любой Г. заданного класса. Операции над Г. используются также для построения Г. с заданными свойствами, при вычислении *графов числовых характеристик* и т. д.

Понятие «Г.» используется в определении таких математич. понятий, как управляющая система, в нек-рых определениях алгоритма, грамматики и др. Изложение ряда математич. теорий становится более наглядным при использовании геометрич. представления Г., напр.

теории марковских цепей. Понятие «Г.» широко используется при создании и описании различных математич. моделей в экономике, биологии и т. д.

Лит.: [1] Берж К., Теория графов и ее применения, пер. с франц., М., 1962; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [4] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. П. Козырев.

ГРАФ ДВУДОЛЬНЫЙ, бихроматический граф,— граф, множество вершин к-рого V можно разбить на два непересекающихся подмножества V' и V'' (т. е. $V=V'\cup V''$, $V'\cap V''=\phi$) так, что каждое ребро соединяет нек-рую вершину из V' с нек-рой вершиной из V''. Граф является Г. д. тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину. Под Г. д. часто понимают также граф, в к-ром заранее заданы подмножества вершин V' и V'' (доли). Г. д. удобны для представления бинарных отношений между элементами двух разных типов, напр.: взяв элементы данного множества и его подмножества, имеем отношение «вхождение элемента в подмножество»; для исполнителей и видов работ имеем отношение «данный исполнитель может выполнять данную работу» и т. д.

Среди задач о Г. д. важное место занимает изучение паросочетаний, т. е. семейств попарно несмежных ребер. Такие задачи возникают, напр., в теории расписаний (разбиение ребер Г. д. на минимальное число непересекающихся паросочетаний), в задаче о назначениях (нахождение максимального паросочетания) и т. д. Мощность максимального паросочетания в Г. д. равна

$$|V'|-\max_{A'\subseteq V'}(|A'|-|V''(A')|),$$

где $V''(A')$ — число вершин из V'', смежных хотя бы с одной вершиной из A'. Полный Г. д.— это Г. д., в к-ром любые две вершины из различных подмножеств соединены ребром (напр., граф $K_{3,3}$, см. *Граф плоский*, рис. 1). Обобщением понятия «Г. д.» является понятие «k-дольного графа», т. е. графа, в к-ром вершины разбиты на k подмножеств так, что каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.

Лит.: [1] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968.

В. Б. Алексеев.

ГРАФ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ — граф, каждому ребру к-рого приписана ориентация. Г. о. G задается множеством вершин V и набором E упорядоченных пар вершин, наз. дугами. Говорят, что дуга (u, v) исходит из вершины u и входит в вершину v. Число дуг, исходящих из v, наз. полустепенью исхода вершины v, а число дуг, входящих в v, наз. полустепенью захода вершины v. Чередующаяся последовательность вершин и дуг v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n, в к-рой $e_i=(v_{i-1}, v_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. маршрутом (ориентированным). Маршрут наз. замкнутым, если его первая и последняя вершины совпадают. Путь — это маршрут, в к-ром все вершины различны. Контур — это нетривиальный (содержащий хотя бы одну дугу) замкнутый маршрут, у к-рого все вершины различны, кроме первой и последней. Если существует путь из вершины u в вершину v, то говорят, что v достижима из u.

Г. о. G с нумерованными вершинами v_1, ..., v_n и дугами e_1, ..., e_m можно задать матрицей инцидентности, т. е. матрицей $\|b_{ij}\|$ размера $n\times m$, в к-рой

$$b_{ij}=\begin{cases}+1, & \text{если дуга } e_j \text{ исходит из } v_i,\\ -1, & \text{если дуга } e_j \text{ заходит в } v_i,\\ 0, & \text{если дуга } e_j \text{ не инцидентна } v_i.\end{cases}$$

Матрицей смежности $A(G)$ вершин Г. о. G наз. матрица $\|a_{ij}\|$ размера $n\times n$, в к-рой элемент a_{ij} равен числу дуг, идущих из v_i в v_j. Суммы элементов

по строкам матрицы $A(G)$ равны полустепеням исхода вершин Г. о. G, а суммы элементов по столбцам — полустепеням захода. Элемент (i, j) матрицы $A^k(G)$ (т. е. k-й степени матрицы смежности графа G) равен числу маршрутов длины k, идущих из v_i в v_j.

В Г. о. можно определить несколько типов связности (см. *Графа связность*). Г. о. наз. сильносвязным, или сильным, если любые две его вершины взаимно достижимы; односторонне связным, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой; слабосвязным, или слабым, если любые две его вершины соединены цепью в графе, полученном из исходного Г. о. заменой каждой дуги (неориентированным) ребром.

Г. о. используются: в теории вероятностей для представления *Маркова цепей*; в теории игр при описании множества игровых ситуаций и результатов состязаний; в математич. экономике при решении транспортных задач; в теории автоматов для задания диаграмм переходов и т. п. В самой теории графов при решении нек-рых задач относительно неориентированных графов иногда вводят ориентацию, сводя исходную задачу к задаче над Г. о. Основное отличие Г. о. от неориентированного графа проявляется при определении таких понятий, как путь, связность, достижимость, расстояние и др. Наиболее интересными типами Г. о. являются *турниры*, транзитивные графы, графы частичных порядков, растущие деревья, графы однозначных отображений, бесконтурные графы.

Лит.: [1] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] Picard C. F., Graphes et questionnaires, v. 1—2, P., 1972.

А. А. Сапоженко.

ГРАФ ПЛОСКИЙ, планарный граф,— граф, допускающий правильную укладку на плоскости (см. *Графа укладка*). Иными словами, граф G наз. плоским, если он может быть изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а линии, соответствующие ребрам (исключая их концевые точки), не проходят через точки, соответствующие вершинам, и не пересекаются. К рассмотрению Г. п. сводятся такие задачи, как задача о раскраске карт, задачи о проектировании коммуникаций, задачи из радиоэлектроники, связанные с реализацией схемы с помощью плоских печатных подсхем, и др. Любая правильная (без пересечения ребер) укладка связного Г. п. порождает разбиение плоскости на отдельные области (грани). Такое разбиение плоскости наз. плоской картой. Для любой плоской карты имеет место формула Эйлера

$$n-m+r=2,$$

где n — число вершин, m — число ребер и r — число областей карты (включая внешнюю область). Отсюда графы K_5 (полный граф с $n=5$) и $K_{3,3}$ (полный *граф двудольный*, имеющий по 3 вершины в каждой доле, см. рис. 1) не являются плоскими. Эти графы являются в нек-ром смысле минимальными *неплоскими* графами в силу теоремы Понтрягина — Куратовского: граф плоский тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (см. *Графов гомеоморфизм*).

Рис. 1.

Существуют и другие критерии планарности (т. е. свойства графа быть плоским). В частности, граф G является плоским тогда и только тогда, когда каждая нетривиальная двусвязная компонента графа G обладает таким базисом циклов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ и таким

дополнительным циклом Z_0, что любое ребро G принадлежит точно двум из этих $m+1$ циклов (б а з и с ц и к л о в – это подмножество циклов данного графа, независимое и полное во множестве всех циклов графа относительно операции сложения по модулю 2, см. *Граф*).

Любой Г. п. можно изобразить на плоскости так, чтобы все его ребра являлись отрезками прямых. Любой трехсвязный Г. п. (см. *Графа связность*) единственным образом укладывается на сфере (с точностью до гомеоморфизма сферы). Каждой укладке Г. п. на плоскости, а следовательно и плоской карте, можно поставить в соответствие геометрически д в о й с т в е н н ы й ей граф, получаемый следующим образом. В каждую область карты помещается по вершине Г. п., и если две области имеют общее ребро e, то помещенные в них вершины соединяются ребром e^*, пересекающим только ребро e (на рис. 2 сплошными линиями изображена укладка Г. п., а штриховыми – двойственный ей граф). Плоская карта, каждая грань к-рой ограничена тремя ребрами, наз. п л о с к о й т р и а н г у л я ц и е й. Число ребер плоской триангуляции с n вершинами равно $3n-6$.

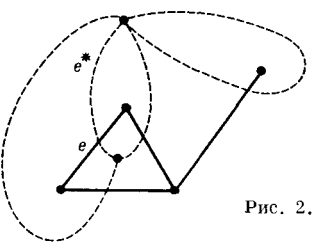


Рис. 2.

В теории графов большое внимание уделяется раскраскам Г. п. (см. *Графа раскраска*); для неплоских графов изучаются различные числовые характеристики, показывающие степень непланарности, напр. род, толщина, крупность графа, число скрещиваний и др. (см. *Графа укладка*).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.
В. Б. Алексеев.

ГРАФ СЛУЧАЙНЫЙ — вероятностная модель, предназначенная для изучения частотных характеристик различных параметров графов. Под Г. с. обычно понимается нек-рый класс графов $\mathcal{G}=\{G\}$, на к-ром задано распределение вероятностей. Произвольный конкретный граф G из $\mathcal{G}$ наз. р е а л и з а ц и е й Г. с. Всякая числовая характеристика графа (см. *Графов числовые характеристики*) может рассматриваться как случайная величина. Понятие Г. с. оказывается весьма полезным при моделировании сетей связи, подверженных нек-рым случайным изменениям, или логических сетей, элементы к-рых могут приходить в неисправные состояния; при рассмотрении картины фазовых превращений в статистич. физике; при изучении различных биологич. процессов; при решении задач минимизации *булевых функций* и др. В ряде случаев понятие Г. с. позволяет использовать аппарат теории вероятностей для получения асимптотич. решений перечислительных задач.

Одной из типичных является такая конструкция Г. с., при к-рой все реализации получаются в результате применения к заданному неслучайному графу G (чаще всего полному) нек-рой процедуры уничтожения его ребер; при этом обычно предполагается, что уничтожение различных ребер – события независимые и уничтожение ребра e происходит с вероятностью $q(e)$. Такую конструкцию Г. с. обозначают $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$. Наибольший интерес представляет изучение различных числовых характеристик связности Г. с. $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ таких, как число компонент связности, диаметр, радиус, число связности и т. п., к-рые можно интерпретировать как характеристику надежности соответствующей сети связи или логической сети. В этом случае число $1-q(e)$ характеризует надежность связи e, а $q(e)$ – вероятность выхода ее из строя.

Если G — полный граф с n вершинами, $q(e)=q$, $0<q<1$, то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, Г. с. $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ связен, имеет диаметр и радиус, равные 2, содержит гамильтонов цикл (см. *Графа обход*). Если $q(e)$ — функция числа вершин n, то вероятность связности Г. с. $\mathcal{G}_n(q)=\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ зависит от близости величины $1-q(e)$ к $\ln n/n$. Точнее, пусть

$$x_n = n(1-q(e)) - \ln n;$$

тогда $\mathcal{G}_n(q)$ стремится к 1 при $n\to\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; стремится к 0, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$; стремится к $e^{-e^{-c}}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$ (c — нек-рая константа). В последнем случае число ребер Г. с. асимптотически равно $\frac{n\ln n}{2}$.

Этот же Г. с. $\mathcal{G}_n(q)$ может рассматриваться как граф, получаемый из неслучайного пустого n-вершинного графа путем случайного соединения его вершин ребрами так, что любая пара вершин соединяется независимо от остальных с вероятностью $p=1-q$. Этому способу образования графа $\mathcal{G}_n(q)$ можно придать динамику, если положить $q=e^{-t}$, $t>0$, и смотреть на t как на время. При этом наблюдается следующая картина. В начальный момент времени $t=0$ имеется n изолированных вершин. Затем с ростом t появляются нетривиальные компоненты связности, представляющие собой деревья или связные графы с одним циклом и малым числом вершин. Затем появляется одна «главная» компонента, содержащая число вершин, асимптотически равное n (при больших n). Дальнейший процесс характеризуется ростом главной компоненты и уменьшением числа малых компонент. Наконец, наступает момент, когда граф становится связным. Эту эволюцию Г. с. можно рассматривать как модель картины фазовых превращений, где роль жидкой фазы играет главная компонента, а роль разреженной фазы играют компоненты с малым числом вершин.

Существует много других видов Г. с., напр. Г. с., связанные с деревьями (с л у ч а й н ы е д е р е в ь я), с однозначными отображениями конечного множества в себя (с л у ч а й н ы е о т о б р а ж е н и я), с подграфами единичного n-мерного куба (с л у ч а й н ы е б у л е в ы ф у н к ц и и).

Лит.: [1] М у р Э. Ф., Ш е н н о н К. Э., «Кибернетический сборник», 1960, в. 1, с. 109—48; [2] С т е п а н о в В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 164—85; [3] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [4] С а п о ж е н к о А. А., «Проблемы кибернетики», 1975, в. 30, с. 227—61.

А. А. Сапоженко.

ГРАФ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ — граф, на к-ром та или иная числовая характеристика принимает свое минимальное или максимальное значение. Обычно отыскиваются экстремальные значения нек-рой одной числовой характеристики при ограничениях на другие числовые характеристики и свойства. Часто задача состоит в описании множества соответствующих Г. э. Пусть, напр., зафиксированы целые положительные числа n и k и отыскивается наибольшее число ребер n-вершинного графа, не имеющего полных подграфов с $k+1$ вершинами. Установлено, что это число равно

$$\frac{k-1}{2k}(n^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2},$$

где $n-k\left[\frac{n}{k}\right]+r$. При этом единственным с точностью до изоморфизма Г. э. является полный k-дольный граф, мощности долей к-рого отличаются не более чем на единицу (см. [3]).

На Г. э. изучаемые числовые характеристики достигают своего глобального экстремума. Так наз. к р и т и ч е с к и е г р а ф ы могут рассматриваться как локально оптимальные. Пусть заданы нек-рое свойство

A и набор одноместных операций O_1, ..., O_s над графами. Граф G, обладающий свойством A, наз. критическим по свойству A относительно операций O_1, ..., O_s, если после применения любой из этих операций получается граф, не обладающий свойством A. При этом предполагается, что множество графов, не обладающих свойством A, замкнуто относительно рассматриваемых операций. В качестве свойства A рассматриваются такие свойства графа, как быть связным, плоским, k-хроматическим и т. п., а в качестве операций — операции удаления и добавления вершины или ребра, стягивания ребра и др. Напр., граф Петерсена (см. рис.) является критическим по свойству иметь реберное хроматическое число, равное 4, относительно операции удаления ребра. Полный пятивершинный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$ (см. *Граф плоский*, рис. 1), каждая доля к-рого имеет три вершины, являются критическими по свойству не быть плоским относительно операций удаления ребра, стягивания ребра, удаления вершины.

При изучении свойств и характеристик графов оказывается полезным изучение их критических подграфов, т. е. подграфов, обладающих теми или иными свойствами и являющихся минимальными (максимальными) по включению. Примеры таких подграфов — компоненты связности (k-связности), остовные деревья. Экстремальные и критич. графы служат: для описания классов графов, обладающих заданными свойствами и числовыми характеристиками; для установления взаимосвязи между различными свойствами и числовыми характеристиками; для проверки наличия того или иного свойства графа.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [3] Turán P., «Mat. Fiz. Lapok», 1941, v. 48, p. 436—52.

А. А. Сапоженко.

ГРАФА АВТОМОРФИЗМ — изоморфное отображение графа на себя (см. *Графов изоморфизм*). Множество всех автоморфизмов данного графа образует группу относительно операции композиции автоморфизмов. Автоморфизмы графа G порождают группу подстановок вершин $\Gamma(G)$, наз. группой (или иногда вершинной группой) графа G, и группу подстановок ребер $\Gamma_1(G)$, наз. реберной группой графа G. Реберная и вершинная группы графа G без петель и кратных ребер изоморфны тогда и только тогда, когда граф G имеет не более одной изолированной вершины и никакая его компонента связности не является изолированным ребром. Для каждой конечной группы F существует граф, группа автоморфизмов к-рого изоморфна F. В то же время существуют группы подстановок на множестве из n элементов, не являющиеся вершинной группой никакого графа с n вершинами. С Г. а. можно связать различные типы и меры симметрии графа. Асимметричным называется граф, не имеющий автоморфизмов, отличных от тождественного. При $n\to\infty$ почти все графы с n вершинами являются асимметричными.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. Б. Алексеев.

ГРАФА ОБХОД — маршрут, содержащий все вершины или ребра графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными Г. о. являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы. Маршрут (замкнутый маршрут) наз. эйлеровой цепью (эйлеровым циклом), если он содержит все ребра графа и проходит через каждое ребро по одному разу. Имеется эффективный критерий существования эйлеровых циклов (теорема Эйлера): связный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.

Маршрут (замкнутый маршрут) наз. гамильтоновой цепью (гамильтоновым циклом), если он содержит все вершины графа и через каждую проходит по одному разу. Известен ряд достаточных условий существования гамильтоновых циклов, напр.: граф не имеет петель и кратных ребер и для любых двух его несмежных вершин сумма степеней не меньше числа вершин этого графа; граф является плоским и 4-связным; граф не имеет петель и кратных ребер, а число n его вершин и число m его ребер удовлетворяют условиям $n \geqslant 3$ и $m \geqslant \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$. Граф наз. гамильтоновым (эйлеровым), если он имеет гамильтонов (эйлеров) цикл. Граф наз. гамильтоново связным, если любые две его вершины соединены гамильтоновой цепью, и k-гамильтоновым, если любая простая цепь длины k входит в нек-рый гамильтонов цикл. Известная задача о коммивояжере состоит в том, чтобы найти в графе, ребрам к-рого приписаны неотрицательные числа (длины ребер), гамильтонов цикл, имеющий наименьшую сумму длин ребер. Эта и другие задачи о Г. о. имеют различные технич. и экономич. приложения.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969.
В. П. Козырев.

ГРАФА РАСКРАСКА — приписывание цветов вершинам и (или) ребрам графа, обладающее определенными свойствами. Правильная вершинная (реберная) раскраска — это раскраска вершин (ребер) графа, при к-рой любые смежные вершины (ребра) окрашены в разные цвета. Правильную вершинную раскраску часто наз. просто раскраской графа. Граф наз. k-раскрашиваемым, если существует правильная вершинная Г. р. k цветами. Наименьшее число цветов, достаточное для правильной вершинной раскраски графа G, наз. хроматическим числом $\chi(G)$ графа G. Если $\chi(G)=k$, то граф G наз. k-хроматическим. Граф является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины. Если максимальная степень вершин графа G равна r, то граф G всегда r-раскрашиваем, за исключением двух случаев: 1) $r=2$ и G имеет компоненту связности, являющуюся циклом нечетной длины; 2) $r>2$ и полный граф с $r+1$ вершинами является компонентой связности графа G.

Для объединения двух графов G_1 и G_2 справедливо неравенство

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leqslant \chi(G_1)\,\chi(G_2),$$

причем равенство здесь достигается. Более того, если граф G такой, что $\chi(G)=k=ab$, то найдутся подграфы G_1 и G_2 в G такие, что $G=G_1 \cup G_2$, $\chi(G_1)=a$, $\chi(G_2)=b$. Если G — граф с n вершинами и $\overline{G}$ — граф, дополнительный к G, то

$$2\sqrt{n} \leqslant \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leqslant n+1,$$

$$n \leqslant \chi(G)\,\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,$$

причем все границы достигаются. Хроматическим числом $\chi(S)$ двумерной поверхности S наз. максимум хроматич. чисел графов, допускающих правильную укладку на S (см. *Графа укладка*). Для ориентируемой поверхности S_γ рода $\gamma>0$ справедливо равенство

$$\chi(S_\gamma) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48\gamma}}{2}\right].$$

При $\gamma=0$ это равенство принимает вид $\chi(S_0)=4$, что составляет утверждение *четырех красок задачи*. Пусть $f(G, t)$ — число различных правильных раскрасок графа G с нумерованными вершинами в t или меньше цветов, тогда для любого графа G функция $f(G, t)$ есть

многочлен от переменной t, наз. хроматическим многочленом графа G. Напр., хроматич. многочлен любого дерева с n вершинами имеет вид $f(G, t) = t(t-1)^{n-1}$. Реберное хроматич. число (хроматический класс) $\chi'(G)$ графа G — это наименьшее число цветов, достаточное для правильной раскраски ребер графа G. Если максимальная степень вершин графа G равна k (допускаются кратные ребра), то

$$k \leqslant \chi'(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}k\right].$$

Если при этом кратность каждого ребра не более r, то $\chi'(G) \leqslant k+r$. В частности, для графов без петель и кратных ребер $k \leqslant \chi'(G) \leqslant k+1$.

Задачи на Г. р. возникают при проектировании коммуникаций, в радиоэлектронике, в планировании эксперимента и других областях.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Шеннон К. Э., «Кибернетический сборник», 1960, в. 2, с. 249–53.

В. Б. Алексеев.

ГРАФА СВЯЗНОСТЬ — одна из топологических характеристик графа. Граф наз. связным, если для любых его вершин u и v существует цепь, соединяющая эти вершины. Числом вершинной связности графа G [обозначение $\varkappa(G)$] наз. наименьшее число вершин, удаление к-рых (вместе с инцидентными им ребрами) приводит к несвязному графу или к графу, состоящему из одной изолированной вершины. Числом реберной связности [обозначение $\lambda(G)$] наз. наименьшее число ребер графа G, удаление к-рых приводит к несвязному графу. Граф G наз. k-связным, если $\varkappa(G) \geqslant k$, и k-реберно связным, если $\lambda(G) \geqslant k$. Максимальный по включению k-связный подграф графа G наз. его k-связной компонентой; 1-связная компонента наз. компонентой связности. При исследовании коммуникационных и логических сетей числа связности соответствующих графов можно интерпретировать как степень надежности этих сетей.

В теории графов изучаются способы установления Г. с., условия, при к-рых граф является k-связным или k-реберно связным, соотношения между различными видами связности, зависимость чисел связности от других параметров графа и т. п. Так, если $\delta(G)$ — минимальная степень вершин графа G, то справедливы следующие неравенства: $\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

Для любых целых a, b, c $(0 < a \leqslant b \leqslant c)$ существует граф G, у к-рого $\varkappa(G) = a$, $\lambda(G) = b$, $\delta(G) = c$. Если граф G имеет n вершин и $\delta(G) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, то $\lambda(G) = \delta(G)$. Говорят, что множество S вершин, ребер или вершин и ребер разделяет вершины u и v, если u и v принадлежат разным компонентам связности графа $G - S$, полученного из G удалением элементов множества S. Справедливы следующие утверждения.

Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v, равно наибольшему числу простых цепей, не имеющих общих вершин, соединяющих u и v. Граф G является k-связным тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере k вершинно непересекающимися цепями. Аналогичные теоремы справедливы и для реберной связности. Граф k-реберно связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере k реберно непересекающимися цепями. Множество ребер, удаление к-рых приводит к несвязному графу, наз. разрезом. В каждом графе наибольшее число реберно непересекающихся разрезов, разделяющих вершины u и v, равно наименьшему числу ребер простой цепи, соединяющей u и v, т. е. расстоянию $d(u, v)$ между u и v.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Форд Л., Фалкерсон Д., *Потоки в сетях*, пер. с англ., М., 1966. *А. А. Сапоженко.*

ГРАФА УКЛАДКА, графа вложение,— отображение вершин и ребер графа соответственно в точки и непрерывные кривые нек-рого пространства такое, что вершины, инцидентные ребру, отображаются в концы кривой, соответствующей этому ребру. Правильной укладкой наз. укладка, при к-рой разным вершинам соответствуют различные точки, а кривые, соответствующие ребрам (исключая их концевые точки), не проходят через точки, соответствующие вершинам, и не пересекаются. Любой граф допускает правильную укладку в трехмерное пространство. Граф, допускающий правильную укладку на плоскости, наз. плоским. Существуют неплоские графы, напр. графы K_5 и $K_{3,3}$ (см. *Граф плоский*, рис. 1). Наименьший род двумерной ориентируемой поверхности, на к-рой граф G допускает правильную укладку, наз. родом $\gamma(G)$ графа G. Установлено, в частности, что

$$\gamma(K_n) = \left]\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right[,$$

где K_n — полный граф с n вершинами, $]a[$ — наименьшее целое число, не меньшее a;

$$\gamma(K_{m,n}) = \left]\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right[,$$

где $K_{m,n}$ — полный *граф двудольный*;

$$\gamma(Q_n) = 1 + (n-4)\cdot 2^{n-3},$$

где Q_n есть n-мерный куб. Толщиной $\theta(G)$ графа G наз. наименьшее число его плоских подграфов, объединение к-рых дает граф G. Установлено, в частности, что

$$Q(K_p) = \left[\frac{p+7}{6}\right] \text{ при } p \neq 9,\ 10;\ \theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3,$$

$$\theta(Q_n) = \left]\frac{n+1}{4}\right[,$$

$$\theta(K_{m,n}) = \left]\frac{mn}{2(m+n-2)}\right[$$

(возможно с несколькими исключениями).

Изучаются также другие числовые характеристики, связанные с Г. у., напр. число скрещиваний — наименьшее число пересечений ребер, с к-рым можно уложить данный граф на данной поверхности; крупность — наибольшее число непересекающихся по ребрам неплоских подграфов в данном графе и др. Рассматриваются также укладки на неориентируемых поверхностях. Вложение графа в n-мерную целочисленную решетку — это отображение в данную решетку, при к-ром вершины отображаются в различные узлы решетки, а ребра идут по линиям решетки.

Задачи об укладках графов на поверхностях и вложениях их в решетки возникают при автоматизированном проектировании ЭВМ, при проектировании коммуникаций и т. д.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Теория графов. Покрытия, укладки, турниры, сб. переводов, М., 1974, с. 82–159. *В. Б. Алексеев.*

ГРАФИК отображения $f: X \to Y$ множества X во множество Y — подмножество Γ произведения $X \times Y$, состоящее из точек вида $(x, f(x))$, $x \in X$. Если X и Y — топологич. пространства, f — непрерывное отображение и p: $X \times Y \to X$ — проекция топологич. произведения $X \times Y$ на сомножитель X, то на подпространстве Γ произведения $X \times Y$ отображение p является гомеоморфизмом. Если пространство Y хаусдорфово, то множество Γ замкнуто в произведении $X \times Y$. *Б. А. Пасынков.*

В случае действительной функции f с n действительными аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и областью определе-

ния E^n г р а ф и к есть множество всех упорядоченных пар $((x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n))$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ — любая точка из E^n; иначе — множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ пространства E^{n+1}. Если выбрать систему координат (прямоугольную декартову, полярную или какую-либо другую), то числовые точки $(x, f(x))$, $(x, y, f(x, y))$ можно изобразить точками плоскости или пространства. Для действительных функций $f(x)$ одного действительного переменного, имеющих $f'(x)$, $f''(x)$, в более или менее сложных примерах эскиз Г. строится при помощи исследования знака $f'(x)$ и $f''(x)$. По знаку $f'(x)$ судят о монотонности функции f, по знаку $f''(x)$ - о направлении *выпуклости* Г. функции. Для получения представления о графике действительной функции $z(x, y)$ двух действительных переменных может применяться метод сечений: рассматриваются сечения Г. нек-рыми плоскостями, в частности, плоскостями $z = c$; проекция этого сечения на плоскость Oxy наз. множеством уровня функции $z(x, y)$. Аналогично, для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ с областью определения E^n множеством уровня функции f с $w = c$ (c — любое число) наз. множество всех решений уравнения $c = f(x_1, \ldots, x_n)$; решения $(x_1, \ldots, x_n)$ нужно искать в E^n. Множество уровня может оказаться пустым множеством. Если множество уровня есть линия или поверхность, то она наз. линией или поверхностью уровня функции.

А. А. Конюшков.

ГРАФИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО — отношение между двумя *конструктивными объектами*, заключающееся в том, что эти объекты одинаковым образом составлены из одинаковых элементарных знаков. Г. р. двух *слов* означает, что они составлены из одних и тех же букв, одинаково следующих друг за другом. Точнее Г. р. с л о в можно охарактеризовать следующим образом: а) пустое слово считается графически равным только самому себе; б) два непустых слова $P\xi$ и $Q\eta$ (здесь ξ и η означают последние буквы этих слов) считаются графически равными тогда и только тогда, когда P и Q графически равны, а буквы ξ и η одинаковы. Обычно Г. р. обозначается знаками $=$, $\underline{=}$.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 42), с. 13—14.

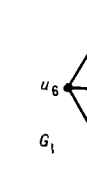
Н. М. Нагорный.

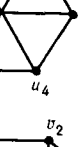
ГРАФОВ ГОМЕОМОРФИЗМ — отношение эквивалентности на множестве графов, характеризующее их геометрич. свойства. Г. г. определяется следующим образом. П о д р а з б и е н и е м ребра (a, b) графа G наз. операция, состоящая в добавлении новой вершины v, удалении ребра (a, b) и добавлении двух ребер (a, v) и (b, v). Геометрически эта операция состоит в выделении на линии (a, b) нек-рой (внутренней) точки v, к-рая объявляется новой вершиной. Граф G' наз. подразбиением графа G, если он может быть получен из G путем применения нек-рого числа раз операции подразбиения ребер. Графы G_1 и G_2 наз. г о м е о м о р ф н ы м и, если существуют такие их подразбиения, к-рые изоморфны (см. *Графов изоморфизм*).

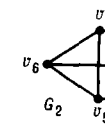
В. Б. Алексеев.

ГРАФОВ ИЗОМОРФИЗМ — отношение эквивалентности на множестве графов. И з о м о р ф н ы м о т о б р а ж е н и е м одного неориентированного графа на другой наз. взаимно однозначное отображение вершин и ребер одного графа соответственно на вершины и ребра другого графа, при к-ром сохраняется отношение инцидентности. Два графа наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует изоморфное отображение одного из этих графов на другой. Графы G_1 и G_2, представленные на рис., не изоморфны, а G_1 и G_3 изоморфны. Обычно изоморфные графы не различают. Число попарно неизоморфных графов с данным числом вершин и данным числом ребер конечно. Подобным образом можно определить изоморфизм ориентированных графов, гиперграфов и сетей.

Проблема установления Г. и. является важной проблемой теории графов. Для нек-рых классов графов имеются алгоритмы, позволяющие установить изоморфизм достаточно эффективно (напр., для *деревьев* или плоских графов, см. [1]). Для нек-рых классов графов с n вершинами доказана однозначная (с точностью







до изоморфизма) восстанавливаемость графа по набору всех его (n 1)-вершинных подграфов $G - v$, получаемых удалением всевозможных вершин v. Это установлено, в частности, для деревьев и *турниров* (при $n \neq 5,6$).

Лит.: [1] Хопкрофт Дж., Тарьян Р., «Кибернетический сборник», 1975, в. 12, с. 39—61; [2] Kelly P. J., «Pacific J. Math.», 1957, v. 7, p. 961—68. *В. Б. Алексеев.*

ГРАФОВ ТЕОРИЯ — область дискретной математики, особенностью к-рой является геометрич. подход к изучению объектов. Основной объект Г. т. граф и его обобщения. Первые задачи Г. т. были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок (задача о Кенигсбергских мостах, задача о расстановке ферзей на шахматной доске, задачи о перевозках, задача о кругосветном путешествии и др.). Одним из первых результатов в Г. т. явился критерий существования обхода всех ребер графа без повторений, полученный Л. Эйлером (1736) при решении задачи о Кенигсбергских мостах. Сформулированная в сер. 19 в. проблема четырех красок (см. *Четырех красок задача*) также выглядит как развлекательная задача, однако попытки ее решения привели к появлению нек-рых исследований графов, имеющих теоретическое и прикладное значение. В сер. 19 в. появились работы, в к-рых при решении практич. задач были получены результаты, относящиеся к Г. т. Так, напр., Г. Кирхгоф [2] при составлении полной системы уравнений для токов и напряжений в электрич. схеме предложил по существу представлять такую схему графом и находить в этом графе остовные деревья, с помощью к-рых выделяются линейно независимые системы контуров. А. Кэли [3], исходя из задач подсчета числа изомеров предельных углеводородов, пришел к задачам перечисления и описания деревьев, обладающих заданными свойствами, и решил нек-рые из них. В 20 в. задачи, связанные с графами, начали возникать не только в физике, химии, электротехнике, биологии, экономике, социологии и т. д., но и внутри математики, в таких разделах, как топология, алгебра, теория вероятностей, теория чисел. В нач. 20 в. графы стали использоваться для представления нек-рых математич. объектов и формальной постановки различных дискретных задач; при этом наряду с термином «граф» употреблялись и другие термины, напр. карта, комплекс, диаграмма, сеть, лабиринт. После выхода в свет в 1936 монографии Д. Кёнига [4] термин «граф» стал более употребительным, чем другие. В этой работе были систематизированы известные к тому времени факты. В 20 -30-х гг. 20 в. появились первые результаты, относящиеся к изучению свойств связности, планарности, симметрии графов, к-рые привели к формированию ряда новых направлений в Г. т. Значительно расширились исследования по Г. т. в конце 40-х — начале 50-х гг., прежде всего в силу развития *кибер-*

нетики и вычислительной техники. Благодаря развитию вычислительной техники, изучению сложных кибернетич. систем, интерес к Г. т. возрос, а проблематика Г. т. существенным образом обогатилась. Кроме того, использование ЭВМ позволило решать возникающие на практике конкретные задачи, связанные с большим объемом вычислений, прежде не поддававшиеся решению. Для ряда экстремальных задач Г. т. были разработаны методы их решения, напр., один из таких методов позволяет решать задачи о построении максимального потока через сеть (см. *Поток в сети*). Для отдельных классов графов (деревья, плоские графы и т. д.), к-рые изучались и ранее, было показано, что решения нек-рых задач для графов из этих классов находятся проще, чем для произвольных графов (нахождение условий существования графов с заданными свойствами, установление изоморфизма графов и др.).

Характеризуя проблематику Г. т., можно отметить, что нек-рые направления носят более комбинаторный характер, другие — более геометрический. К первым относятся, напр., задачи о подсчете и перечислении графов с фиксированными свойствами, задачи о построении графов с заданными свойствами. Геометрический (топологический) характер носят многие циклы задач Г. т., напр. *графов обходы*, *графов укладки*. Существуют направления, связанные с различными классификациями графов, напр. по свойствам их разложения. Примером результата о существовании графов с фиксированными свойствами может служить критерий реализуемости чисел степенями вершин нек-рого графа: набор целых чисел $0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, сумма к-рых четна, можно реализовать степенями вершин графа без петель и кратных ребер тогда и только тогда, когда для любого $r (1 \leqslant r \leqslant n-1)$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min(r, d_i).$$

Примерами задач о подсчете графов с заданными свойствами являются задачи о нахождении количеств неизоморфных графов с одинаковым числом вершин и (или) ребер. Для числа неизоморфных деревьев с n вершинами была получена асимптотич. формула

$$t_n = C \frac{\theta^n}{n^{5/2}} + O\left(\frac{\theta^n}{n^{7/2}}\right),$$

где $C = 0{,}534948\ldots$, $\theta = 2{,}95576\ldots$. Для числа g_n неизоморфных графов без петель и кратных ребер с n вершинами было показано, что

$$g_n = \frac{C^2}{n!} \frac{n}{2} \left(1 + \frac{2n(n-1)}{2^n} + \frac{8(3n-7)n!}{3(n-3)! \cdot 2^{2n}} + O\left(\frac{n^5}{2^{5n/2}}\right)\right).$$

Наряду с проблемами, носящими общий характер, в Г. т. имеются специфич. циклы задач. В одном из них изучаются различные свойства связности графов, исследуется строение графов по свойствам связности (см. *Графа связность*). При анализе надежности сетей связи, электронных схем, коммуникационных сетей возникает задача о нахождении количеств непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины графа. Здесь получен ряд результатов. Напр., наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины графа, равно наибольшему числу непересекающихся (по вершинам) простых цепей, соединяющих эту пару вершин. Найдены критерии и построены эффективные алгоритмы установления меры связности графа (наименьшего числа вершин или ребер, удаление к-рых нарушает связность графа).

В другом направлении исследований Г. т. изучаются маршруты, содержащие все вершины или ребра графа (см. *Графа обход*). Известен простой критерий существования маршрута, содержащего все ребра графа:

в связном графе цикл, содержащий все ребра и проходящий по каждому ребру один раз, существует тогда и только тогда, когда все вершины графа имеют четные степени. В случае обхода множества вершин графа имеется только ряд достаточных условий существования цикла, проходящего по всем вершинам графа по одному разу.

Характерным специфическим направлением Г. т. является цикл задач, связанный с раскрасками графов, в к-ром изучаются разбиения множества вершин (ребер), обладающие определенными свойствами, напр. смежные вершины (ребра) должны принадлежать различным множествам (вершины или ребра из одного множества окрашиваются одним цветом; см. *Графа раскраска*). Было доказано, что наименьшее число цветов, достаточное для раскраски ребер любого графа без петель с максимальной степенью σ, равно $[3\sigma/2]$, а для раскраски вершин любого графа без петель и кратных ребер достаточно $\sigma+1$ цветов.

Существуют и другие циклы задач (см. *Покрытия и упаковки*, *Графа укладка*, *Графов числовые характеристики*); нек-рые из них сложились под влиянием различных разделов математики. Так, под влиянием топологии производится изучение вложений графов в различные поверхности. Напр., было получено необходимое и достаточное условие вложения графа в плоскость (критерий Понтрягина — Куратовского): граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, получаемых с помощью подразбиения ребер из полного 5-вершинного графа и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле. Под влиянием алгебры стали изучаться группы автоморфизмов графов (см. *Графа автоморфизм*). В частности, было доказано, что каждая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов нек-рого графа. Влияние теории вероятностей сказалось на исследовании *графов случайных*. Многие свойства были изучены для «почти всех» графов; напр. было показано, что почти все графы с n вершинами связаны, имеют диаметр 2, обладают гамильтоновым циклом (циклом, проходящим через все вершины графа по одному разу).

В Г. т. существуют специфич. методы решения экстремальных задач. Один из них основан на теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, утверждающей, что максимальный поток, к-рый можно пропустить через сеть из вершины u в вершину v, равен минимальной пропускной способности разрезов, разделяющих вершины u и v (см. *Поток в сети*). Были построены различные эффективные алгоритмы нахождения максимального потока.

Большое значение в Г. т. имеют алгоритмические вопросы. Для конечных графов, т. е. для графов с конечным множеством вершин и ребер, как правило, проблема существования алгоритма решения задач, в том числе экстремальных, решается положительно. Решение многих задач, связанных с конечными графами, может быть выполнено с помощью полного перебора всех допустимых вариантов. Однако таким способом удается решить задачу только для графов с небольшим числом вершин и ребер. Поэтому существенное значение для Г. т. имеет построение эффективных алгоритмов, находящих точное или приближенное решение. Для нек-рых задач такие алгоритмы построены, напр., для установления планарности графов, определения изоморфизма деревьев, нахождения максимального потока.

Результаты и методы Г. т. применяются при решении транспортных задач о перевозках, для нахождения оптимальных решений задачи о назначениях, для выделения «узких мест» при планировании и управлении разработок проектов, при составлении опти-

мальных маршрутов доставки грузов, а также при моделировании сложных технологич. процессов, в построении различных дискретных устройств, в программировании и т. д.

Лит.: [1] Euler L., в кн.: Commentationes Arithmetical Collectae, St. Peterburg, 1766, с. 66—70; [2] Kirchhoff G., «Poggendorf Annalen», 1847, Bd 72, S. 497—508; [3] Cayley A., «Collected Mathematical papers», Camb., 1854, v. 3, p. 242; [4] König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, 2 ed., N. Y., 1950; [5] Берж К., Теория графов и ее применение, пер. с франц., М., 1962; [6] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [7] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [8] Козырев В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, 1972, с. 25—74; [9] Harary F., Palmer E., Graphical enumeration, N. Y. — L., 1973.

В. Б. Алексеев, В. П. Козырев, А. А. Сапоженко.

ГРАФОВ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ — функции, заданные на множестве графов и принимающие значения из нек-рого множества чисел. Ниже приведен ряд Г. ч. х. и их наиболее употребительные обозначения. Наиболее простыми Г. ч. х. являются число вершин и число ребер (дуг) графа G. Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа G наз. наименьшее число ребер, удаление к-рых приводит к графу без циклов;

$$\nu(G)=m-n+k,$$

где m — число ребер, n — число вершин, k — число компонент связности графа G. Числом вершинной связности $\varkappa(G)$ [числом реберной связности $\lambda(G)$] наз. наименьшее количество вершин (ребер) графа G, удаление к-рых приводит к несвязному графу или тривиальному графу (т. е. графу, состоящему из одной вершины). Плотность $\varphi(G)$ есть наибольшее число вершин в полном подграфе графа G; число независимости, или число внутренней устойчивости, $\varepsilon(G)$ есть наибольшее число попарно несмежных вершин графа G (при этом попарно несмежные вершины графа G образуют внутреннее устойчивое множество). Хроматическим числом $\chi(G)$ [реберным хроматическим числом $\chi'(G)$] наз. наименьшее количество цветов, к-рыми можно раскрасить вершины (ребра) графа G так, чтобы любые смежные вершины (ребра) были окрашены разными цветами (см. также *Графа раскраска*). Числом внешней устойчивости $\beta(G)$ наз. наименьшее количество вершин такого подмножества W множества вершин графа G, что любая вершина, не принадлежащая W, смежна по крайней мере с одной вершиной из W. Древесность $\Upsilon(G)$ есть наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов графа G, объединение к-рых есть граф G. Кручность $\xi(G)$ — это наибольшее число непересекающихся по ребрам неплоских подграфов графа G. Толщина $\theta(G)$ — это наименьшее число плоских подграфов, объединение к-рых есть G. Число скрещиваний — это наименьшее число попарных пересечений ребер графа G при расположении его на плоскости. Род $\gamma(G)$ графа G есть наименьший род двумерной ориентируемой поверхности, на к-рой можно уложить граф G без пересечения его ребер (см. *Графа укладка*).

Нек-рые числовые характеристики относят данному графу количества подграфов определенного типа, напр. число остовных деревьев, число гамильтоновых циклов и т. д. Существуют характеристики, зависящие от параметра $f_k(G)$ (напр., число полных подграфов с k вершинами), совокупность этих характеристик может быть задана многочленом $\Sigma_k f_k(G)x^k$ - аналогом производящей функции. Многие из таких многочленов можно находить рекуррентно, применяя операции над графами — удаление вершины или ребра, стягивание ребра и др. При решении задач теории графов часто

возникает необходимость изучения взаимосвязи различных Г. ч. х. На нек-рых множествах Г. ч. х. достигают своих экстремальных значений, при нахождении к-рых часто удается описать графы, на к-рых они достигаются. Тогда нахождение экстремальных значений сводится к исследованию таких графов. Для изучения графов, у к-рых рассматриваемая характеристика принимает заданное значение, оказывается полезным исследование свойств критических графов (см. *Граф экстремальный*).

Лит.: [1] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [2] Козырев В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 25—75; [3] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. П. Козырев.

ГРЕГОРИ ФОРМУЛА приближенного интегрирования для функции $y=f(x)$ — формула, имеющая вид:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n + \\ + A_2(\Delta^1 y_{n-1} - \Delta^1 y_0) - A_3(\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0) + \\ + A_4(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - A_5(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) + \ldots + R,$$

где $y_j = f(a+jh)$, $\Delta^l y_j$ — разности функции y порядка $l = 1, 2, \ldots$ в точках $a+jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$

$$A_k = \int_0^1 t\,(t-1)\ldots(t-k+1)\,(k!)^{-1}\,dt, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

в частности

$$A_2 = -\frac{1}{12}, \quad A_3 = \frac{1}{24}, \quad A_4 = -\frac{19}{720}, \quad A_5 = \frac{3}{160}, \ldots$$

Г. ф. получается при интегрировании интерполяционного многочлена с узлами в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$. Если в Г. ф. взяты разности до порядка n включительно, то она может быть получена из формулы Ньютона — Котеса (см. *Котеса формулы*) замкнутого типа и потому остаточные члены у этих формул одинаковы. Простейший вариант Г. ф. был предложен Дж. Грегори (J. Gregory, 1668).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966.

Л. Д. Кудрявцев.

ГРЁТША ПРИНЦИП — теорема в теории *конформных отображений*, предложенная в 1928 Х. Грётшем [1] и используемая при доказательстве неравенств для длин кривых нек-рых семейств и площади занимаемой ими области; им же в дальнейшем были разработаны многочисленные применения развитого на этой основе *полос метода* в теории однолистных функций, заданных в конечносвязных или в бесконечносвязных областях.

Г. п. состоит в следующем. Пусть в кольце $K(r, R) = \{z : r<|z|<R\}$, $0<r<R<\infty$, имеется конечное число попарно непересекающихся односвязных областей B_k, $k=1, \ldots, n$, с жордановыми границами, содержащими невырождающиеся в точки дуги γ_k и Γ_k соответствующих окружностей $|z|=r$, $|z|=R$ [B_k образуют полосы, соединяющие граничные компоненты кольца $K(r, R)$]. Если B_k отображается на нек-рый прямоугольник $\{w : 0<\mathrm{Re}\ w<a_k,\ 0<\mathrm{Im}\ w<b_k\}$ так, что γ_k и Γ_k переходят в стороны длины a_k, то $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{2\pi}{\ln R - \ln r}$, и равенство достигается только в том случае, если $B_k = \{z : r<|z|<R,\ \alpha_k<\arg z<\beta_k\}$, α_k, β_k — постоянные, $k=1, \ldots, n$, и объединение $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ покрывает кольцо $K(r, R)$, за исключением принадлежащих ему интервалов лучей $\arg z=\alpha_k$, $\arg z=\beta_k$.

Г. п. и метод полос входят как составные части в *экстремальной метрики метод* и применяются не только в конформных, но и в более общих, напр., *квазиконформных отображениях*.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1928, Bd 80, S. 367—76, 497—502; 1929, Bd 81, S. 217—21; 1930, Bd 82, S. 69—80; 1931, Bd 83, S. 185—200; 1932, Bd 84, S. 114—20; [2] Голузин

Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.
И. А. Александров.

ГРЁТША ТЕОРЕМЫ — различные результаты о конформных и квазиконформных отображениях Х. Грётша (см. [1]). На основе разработанного им *полос метода*, представляющего первую общую форму метода конформных модулей (см. *Экстремальной метрики метод*), Х. Грётш систематически исследовал и решил большое количество экстремальных задач конформного отображения многосвязных (в том числе бесконечносвязных) областей, включая вопросы существования, единственности и геометрич. свойств экстремальных отображений. Ниже приведены нек-рые из простейших Г. т.

Среди всех однолистных конформных отображений $w=f(z)$ фиксированного кругового кольца $K_R=\{z: R<|z|<1\}$, при к-рых единичная окружность $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ переходит в себя, максимум диаметра образа окружности $\Gamma_R=\{z: |z|=R\}$ достигается в том и только в том случае, когда граничной компонентой $f(\Gamma_R)$ служит прямолинейный отрезок с серединой в точке $w=0$. Аналогичный результат установлен для многосвязных областей.

Среди всех однолистных конформных отображений $w=f(z)$ фиксированной многосвязной области $B\ni\infty$ с разложением в бесконечности $f(z)=z+O(1)\ (z\to\infty)$ и с нормировкой $f(z_0)=0$ в фиксированной точке $z_0\in B$ максимум $|f'(z_0)|$, максимум $|f(z_1)|$ и минимум $|f(z_1)|$ в фиксированной точке $z_1\in B$, $z_1\neq z_0$, достигаются только на отображениях, переводящих каждую граничную компоненту B соответственно в дугу окружности с центром в точке $w=0$; в дугу эллипса с фокусами в точках $w=0$ и $w=w'=f(z_1)$; в дугу гиперболы с фокусами в точках $w=0$ и $w=w''=f(z_1)$. В каждой из указанных задач экстремальное отображение существует и единственно. В том же классе отображений для фиксированного $z_1\in B$ областью значений функционала $\Phi(f)=\ln(f(z_1)/z_1)$ является круг

$$\left\{w: \left|w-\frac{1}{2}(w'+w'')\right|\leqslant\frac{1}{2}|w'-w''|\right\}.$$

Каждая граничная точка этого круга является значением функционала Φ на единственном отображении из рассматриваемого класса, обладающем определенными геометрич. свойствами.

Х. Грётш впервые предложил одну из форм представления *квазиконформных отображений* и перенес на эти отображения многие экстремальные результаты, установленные им ранее для конформных отображений.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Naturwiss. Kl.», 1929, Bd 81, № 1, S. 38—47; № 4, S. 217—21; 1930, Bd 82, № 1, S. 69—80; 1932, Bd 84, № 4, S. 269—78; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.
П. М. Тамразов.

ГРИНА ЛИНИИ — ортогональные траектории семейства поверхностей уровня $G_y(x)=r$, $0\leqslant r<+\infty$, где $G_y(x)=G(x,y)$ есть *Грина функция* (задачи Дирихле для уравнения Лапласа) для области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с фиксированным полюсом $y\in D$. Иными словами, Г. л.— это интегральные кривые поля градиента $\operatorname{grad} G_y(x)$. Имеются также обобщения (см. [2]).

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 1; [2] Brelot M., Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 199—263.
Е. Д. Соломенцев.

ГРИНА ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ на полугруппе — бинарные отношения $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$, заданные следующим образом: $x\mathcal{L}y$ означает, что x и y порождают совпадающие левые *главные идеалы*; $x\mathcal{R}y$ и $x\mathcal{J}y$ имеют аналогичный смысл с заменой «левые» на «правые» и «двусторонние» соответственно; $\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$ (объединение в решетке отношений эквива-

лентности); $\mathscr{H}=\mathscr{L}\cap\mathscr{R}$. Отношения $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ перестановочны в смысле умножения бинарных отношений, так что $\mathscr{D}$ совпадает с их произведением. Отношение $\mathscr{L}$ является правой конгруэнцией, т. е. стабильно справа: $a\mathscr{L}b$ влечет $ac\mathscr{L}bc$ для любого c; отношение $\mathscr{R}$ есть левая конгруэнция (стабильно слева). $\mathscr{L}$-класс и $\mathscr{R}$-класс пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же $\mathscr{D}$-классе. Все $\mathscr{H}$-классы, лежащие в одном $\mathscr{D}$-классе, равномощны. Если $\mathscr{D}$-класс D содержит *регулярный элемент*, то все элементы из D регулярны, причем вместе с любым своим элементом D содержит и все инверсные к нему; такой $\mathscr{D}$-класс наз. регулярным. В регулярном $\mathscr{D}$-классе каждый $\mathscr{L}$-класс и каждый $\mathscr{R}$-класс содержит идемпотент. Если H — произвольный $\mathscr{H}$-класс, то либо H является группой (это имеет место тогда и только тогда, когда H есть максимальная подгруппа данной полугруппы), либо $H\bigcap H^2=\varnothing$. Все групповые $\mathscr{H}$-классы из одного и того же $\mathscr{D}$-класса суть изоморфные группы. В общем случае $\mathscr{D}\neq\mathscr{J}$, но, напр., если нек-рая степень каждого элемента полугруппы S лежит в подгруппе (в частности, если S — *периодическая полугруппа*), то $\mathscr{D}=\mathscr{J}$. Отношение включения главных левых идеалов естественным образом определяет отношение частичного порядка на множестве $\mathscr{L}$-классов; аналогично, для $\mathscr{R}$-классов и $\mathscr{J}$-классов. Рассматриваемые отношения были введены Дж. Грином [1].

Лит.: [1] Green J., «Ann. Math.», 1951, v. 54, p. 163—172; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., тт. 1 и 2, М., 1972; [4] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [5] Hofmann K., Mostert P., Elements of compact semigroups, Columbus (Ohio), 1966. *Л. Н. Шеврин.*

ГРИНА ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X, на к-ром определены гармонич. и супергармонич. функции и существует *Грина функция* (для *Дирихле задачи* в классе гармонич. функций), или, что равносильно, существует отличная от константы положительная супергармонич. функция. Точнее, пусть X является E-пространством, т. е. связным отделимым топологич. пространством, в к-ром: 1) каждая точка $x\in X$ имеет открытую окрестность V_x, гомеоморфную нек-рому открытому множеству V'_x евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (или его компактификации $\overline{\mathbb{R}^n}$ по Александрову; см. *Александрова бикомпактное расширение*); 2) образы всякого непустого пересечения $V_x\bigcap V_y$ двух окрестностей в V'_x и V'_y изометричны, а при $n=2$ конформно эквивалентны. Гармонич. и супергармонич. функции на E-пространстве X определяются локально посредством перехода к образам V'_x. Если, кроме того, на E-пространстве X существует отличная от константы положительная супергармонич. функция, или, что равносильно, положительный потенциал, то X наз. Грина пространством. Напр., евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, его компактификация $\overline{\mathbb{R}^n}$ ($n\geqslant 2$), римановы поверхности являются E-пространствами. При этом $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 3$ и римановы поверхности гиперболич. типа являются Г. п., а $\mathbb{R}^2$ и римановы поверхности параболич. типа не являются Г. п. Всякая область в Г. п. X снова есть Г. п.

В рамках аксиоматич. теории потенциала (см. *Потенциала теория абстрактная*) в качестве обобщения Г. п. можно рассматривать такие *гармонические пространства* X, на к-рых существует положительный потенциал.

Лит.: [1] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974; [2] Brelot M., Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 199—263. *Е. Д. Соломенцев.*

ГРИНА ФОРМУЛЫ — формулы интегрального исчисления функций многих переменных, связывающие значения n-кратного интеграла по области D n-мерного евклидова пространства E^n и $(n-1)$-кратного интеграла

по кусочно гладкой границе $\partial D=\Gamma$ этой области. Г. ф. получаются интегрированием по частям интегралов от дивергенции векторного поля, непрерывного в $\overline{D}=D+\Gamma$ и непрерывно дифференцируемого в D.

В простейшей Г. ф.

$$\int_\Gamma [P\,dx+Q\,dy]=\int\int_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dx\,dy \qquad (1)$$

криволинейный интеграл по контуру Γ выражается через двойной интеграл по области $D\subset E^2$. При этом область D ориентируется естественным образом, а на границе Γ берется индуцированная ориентация, известная как обход против часовой стрелки. Формула (1) имеет простой гидродинамич. смысл: поток через границу области Γ жидкости, текущей по плоскости со скоростью $v=(Q,-P)$, равен интегралу по области D от интенсивности (дивергенции) $\operatorname{div} v=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ распределенных в D источников и стоков. В этом смысле Г. ф. (1) подобна *Остроградского формуле* (см. также *Стокса формула*).

Формула (1) иногда наз. именами К. Гаусса (C. Gauss) и Б. Римана (B. Riemann). Ни одно из употребляемых названий не является исторически верным: формула (1) встречалась еще в работах по анализу 18 в.— у Л. Эйлера (L. Euler) и др.

Дж. Грину [1] принадлежат следующие Г. ф. *потенциала теории*

$$\int_D\left[v\Delta u+\sum\nolimits_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right]dx=\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial N}\,ds. \qquad (2)$$

— **подготовительная Г. ф.** и

$$\int_D[u\Delta v-v\Delta u]\,dx=\int_\Gamma\left[u\frac{\partial v}{\partial N}-v\frac{\partial u}{\partial N}\right]ds, \qquad (3)$$

где D — область E^3, $x=(x^1,\ x^2,\ x^3)$, $dx=dx^1dx^2dx^3$ — элемент объема G, ds — элемент площади Γ, $N=(N_1,\ N_2,\ N_3)$ — единичная внешняя (ко)нормаль к Γ,

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum\nolimits_{i=1}^{3}N_i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

— оператор дифференцирования в направлении (ко)вектора N, а

$$\Delta=\sum\nolimits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

— оператор Лапласа.

Формулы (2), (3) справедливы и в случае, когда D есть область E^n, $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $dx=dx^1\ldots dx^n$ — элемент объема D, ds — элемент $(n-1)$-мерного объема Γ, а

$$\Delta=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

— оператор Лапласа с n независимыми переменными.

Обобщения Г. ф. (2) и (3) для линейных дифференциальных операторов с частными производными с достаточно гладкими коэффициентами имеют вид:

1) если

$$Lu=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right]+\sum\nolimits_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)\,u,$$

$$L^*v=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^j}\right]-\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}[b^i(x)\,v]+$$
$$+c(x)\,v$$

— (вещественно) сопряженные дифференциальные операторы второго порядка, $a^{ij}=a^{ji}$, то

$$\int_D \left[vLu + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu \right) v \right] dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial M} \, ds,$$

$$\int_D [uL^*v - vLu] \, dx = \int_\Gamma \left[u \frac{\partial v}{\partial M} - v \frac{\partial u}{\partial M} - B uv \right] ds,$$

где $N=(N_1, \ldots, N_n)$ — единичный (ко)вектор внешней нормали к Γ,

$$B = \sum_{i=1}^n N_i b^i, \quad \frac{\partial}{\partial M} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} N_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— оператор дифференцирования по направлению так наз. конормали

$$M = \left(\sum_{j=1}^n a^{1j} \frac{\partial}{\partial x^j}, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^n a^{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

оператора L;

2) если

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x) u,$$

$$L^*v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} [a^{ij}(x) v] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} [b^i(x) v] + c(x) v,$$

то

$$\int_D \left[vLu + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu \right) v \right] = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial M} \, ds,$$

$$\int_D [uL^*v - vLu] \, dx = \int_\Gamma \left[u \frac{\partial v}{\partial M} - v \frac{\partial u}{\partial M} - Cuv \right] ds,$$

где M — конормаль оператора L, а

$$C = \sum_{i=1}^n \left[b^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^{ij}}{\partial x^j} \right] N_i;$$

3) если

$$Lu = \sum_{p=1}^m \sum_{|\alpha|=p} a^\alpha(x) D_\alpha u + a(x) u,$$

$$L^*v = \sum_{p=1}^m (-1)^p D_\alpha [a^\alpha(x) v] + a(x) v$$

— (вещественно) сопряженные дифференциальные операторы порядка m, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ — целочисленный мультииндекс длины $|\alpha|=p$, $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $D_\alpha = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_p}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, то

$$\int_D [uL^*v - vLu] \, dx =$$

$$= \sum_{p=1}^m \sum_{|\alpha|=p} \sum_{k=1}^p \int_\Gamma (-1)^k \left[\partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_{k-1}} (a^\alpha v) \right] \times$$

$$\times N_{\alpha_k} \left[\partial_{\alpha_{k+1}} \ldots \partial_{\alpha_p} u \right] ds. \qquad (4)$$

Здесь граничный интеграл можно записать в виде билинейной суммы

$$\sum_{ij} \int_\Gamma B^{ij} (S_i u) (T_j v) \, ds,$$

где S_i, T_j — нек-рые линейные дифференциальные операторы порядков s_i, t_j, $0 \leqslant s_i + t_j \leqslant m-1$.

Г. ф. играют важную роль в анализе и особенно в теории краевых задач для дифференциальных операторов (обыкновенных и с частными производными) второго и более высоких порядков. Для достаточно гладких в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $v(x)$ Г. ф. (2), (4) служат

источником ряда соотношений, полезных для изучения свойств решения краевых задач, выяснения вида краевых задач, получения решения в явном виде и т. п. Напр., для гармонической в D функции $u(x)$ из (2) при $v(x)=1$ следует *Гаусса теорема*:

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}\, ds = 0.$$

Для достаточно гладких в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $w(x)$ и функции

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} |x-y|^{2-n} + w(x), & \text{если } n \geqslant 3, \\ -\ln|x-y| + w(x), & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

имеющей при $x=y$ такую же особенность, как и фундаментальное решение оператора Лапласа, верны следующие Г. ф.:

$$\int_D \left[u\Delta w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \right] dx = cu(y) + \int_D u \frac{\partial v}{\partial N}\, ds, \quad (5)$$

$$\int_D [u\Delta w - v\Delta u]\, dx = cu(y) + \int_D \left[u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right] ds. \quad (6)$$

Здесь число

$$c = \begin{cases} \omega_n, & \text{если } y \in D, \\ \frac{1}{2}\omega_n, & \text{если } y \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } y \notin \overline{D}, \end{cases}$$

а $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь $(n-1)$-мерной единичной сферы пространства E^n. При этом для $y \in \Gamma$ предполагается, что граница Γ имеет непрерывную касательную плоскость в нек-рой окрестности y.

Формулы (5) и (6) служат основой получения интегральных представлений решений основных краевых задач *потенциала теории* (см. *Гармоническая функция*, *Грина функция*, *Пуассона формула*). Напр., отсюда для гармонической в D функции $u(x)$ получаем ф о р м у л у, или и н т е г р а л Г р и н а

$$u(y) = \frac{1}{c} \int_\Gamma \left[v(x) \frac{\partial u}{\partial N} - u(x) \frac{\partial v}{\partial N} \right] ds, \quad (7)$$

играющую важную роль в теории *гармонических функций*.

Формулы, подобные формулам (5), (6), дающие интегральные представления решения задачи Коши или смешанной задачи, имеют место и для нормально гиперболич. оператора второго порядка. См. *Кирхгофа формула*, *Римана метод*, *Римана функция*.

О Г. ф. в теории краевых задач см. также [4] – [9].

Лит.: [1] G r e e n G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham, [1828]; [2] М а к с в е л л Д., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1954; [3] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, т. 2, 20 изд., М., 1966; [4] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] С о б о л е в С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [7] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [8] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [9] Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971.

А. К. Гущин, Л. П. Купцов.

ГРИНА ФУНКЦИЯ — функция, связанная с интегральным представлением решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Г. ф. краевой задачи для линейного дифференциального уравнения — фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Г. ф. является ядром интегрального оператора, обратного к дифференциальному оператору, порожденному данным дифференциальным уравнением и однородными краевыми условиями. Г. ф. позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям. Нахождение Г. ф. сводит исследование свойств дифференциального

оператора к изучению аналогичных свойств соответствующего интегрального оператора.

Функция Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть L — дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным полиномом

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}, \quad a < x < b,$$

и краевыми условиями $U_j[y] = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$U_j[y] = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b).$$

Г. ф. оператора L наз. функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая условиям:

1) $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех значений x и ξ из сегмента $[a, b]$;

2) при любом фиксированном ξ из интервала (a, b) функция $G(x, \xi)$ имеет равномерно непрерывные производные n-го порядка по x в каждом из полусегментов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$, причем производная $(n-1)$-го порядка при $x = \xi$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_n(\xi)};$$

3) в каждом из полусегментов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $l_x[G] = 0$ и краевым условиям $U_{jx}[G] = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если краевая задача $Ly = 0$ имеет лишь тривиальные решения, то оператор L имеет и притом только одну Г. ф. (см. [1]). При этом для любой функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, существует решение краевой задачи $Ly = f$, и это решение задается формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Если оператор L имеет Г. ф. $G(x, \xi)$, то сопряженный оператор L^* также имеет Г. ф., к-рая равна $\overline{G(\xi, x)}$. Если, в частности, оператор L самосопряженный $(L = L^*)$, то $G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)}$, то есть Г. ф. в этом случае является эрмитовым ядром. Напр., Г. ф. самосопряженного оператора L 2-го порядка, порожденного дифференциальной операцией с действительными коэффициентами

$$l[y] = \frac{d}{dx}\left(p \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y, \quad a < x < b,$$

и краевыми условиями $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, имеет вид:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C y_1(x) y_2(\xi), & \text{если } x \leqslant \xi, \\ C y_1(\xi) y_2(x), & \text{если } x > \xi. \end{cases}$$

Здесь $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — произвольные решения уравнения $l[y] = 0$, удовлетворяющие соответственно условиям $y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$; $C = [p(\xi) W(\xi)]^{-1}$, где W — определитель Вронского (*вронскиан*) решений y_1 и y_2, причем можно показать, что C не зависит от ξ.

Если оператор L имеет Г. ф., то краевая задача на собственные значения $Ly = \lambda y$ эквивалентна интегральному уравнению $y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi)\, d\xi$, к которому применима теория Фредгольма. Поэтому краевая задача $Ly = \lambda y$ может иметь не более счетного числа собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, у которых отсутствуют конечные предельные точки. Сопряженная задача имеет комплексно сопряженные собственные значения той же кратности. Для каждого λ, не являющегося собственным значением оператора L, можно построить Г. ф. $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$, где I — тождественный оператор. Функция $G_1(x, \xi, \lambda)$ является мероморфной функцией параметра λ; ее полюсами могут быть лишь собственные значения оператора L. Если крат-

ность собственного значения λ_0 равна единице, то

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{u_0(x)\overline{v_0(\xi)}}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda),$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0, а $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственным значениям λ_0 и $\overline{\lambda_0}$ и нормированные так, что

$$\int_a^b u_0(x)\,\overline{v_0(x)}\,dx = 1.$$

Если $G(x, \xi, \lambda)$ имеет бесконечно много полюсов и при том только 1-го порядка, то существует полная биортогональная система

$$u_1(x), u_2(x), \ldots; v_1(x), v_2(x), \ldots$$

собственных функций операторов L и L^*. Если занумеровать собственные значения в порядке возрастания их абсолютных величин, то интеграл

$$I_R(x, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} d\lambda \int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi$$

равен частичной сумме

$$S_k(x, f) = \sum_{|\lambda_n| < R} u_n(x) \int_a^b f(\xi)\,\overline{v_n(\xi)}\, d\xi$$

разложения функции f по собственным функциям оператора L. Положительное число R выбирается так, чтобы на окружности $|\lambda| = R$ функция $G(x, \xi, \lambda)$ была регулярной по λ. Для регулярной краевой задачи и для любой кусочно гладкой функции $f(x)$ в интервале $a < x < b$ выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} I_R(x, f) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

т. е. имеет место разложимость в сходящийся ряд (см. [1]).

Если Г. ф. $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$ имеет кратные полюсы, то ее главная часть выражается через канонич. системы собственных и присоединенных функций операторов L и L^* (см. [2]).

Выше рассматривался случай, когда краевая задача $Ly = 0$ не имела нетривиальных решений. Если же эта краевая задача имеет нетривиальные решения, то вводят так наз. обобщенную Грина функцию. Пусть, напр., имеется ровно m линейно независимых решений задачи $Ly = 0$. Тогда существует обобщенная Г. ф. $\tilde{G}(x, \xi)$, к-рая обладает свойствами 1) и 2) обычной Г. ф., при $a < \xi < b$ удовлетворяет как функция x краевым условиям и, кроме того, является решением уравнения

$$l_x[y] = -\sum_{k=1}^m \varphi_k(x)\,\overline{v_k(\xi)};$$

здесь $\{v_k(x)\}_{k=1}^m$ - система линейно независимых решений сопряженной задачи $L^*y = 0$, а $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ — произвольная биортогональная ей система непрерывных функций. Тогда

$$y(x) = \int_a^b \tilde{G}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

есть решение краевой задачи $Ly = f$, если функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию разрешимости, т. е. ортогональна всем $v_k(x)$.

Если $\tilde{G}_0(x, \xi)$ — одна из обобщенных Г. ф. оператора L, то любая другая обобщенная Г. ф. может быть представлена в виде

$$\tilde{G}(x, \xi) = \tilde{G}_0(x, \xi) + \sum_{k=1}^m u_k(x)\,\psi_k(\xi),$$

где $\{u_k(x)\}$ — полная система линейно независимых решений задачи $Ly = 0$, а $\psi_k(\xi)$ — произвольные непрерывные функции (см. [3]).

Функция Грина для дифференциальных уравнений с частными производными. 1) Эллиптические уравнения. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m, порожденный дифференциальным полиномом

$$a(x, D) - \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^N$ и однородными краевыми условиями $B_j u = 0$, где B_j — граничные операторы с коэффициентами, определенными на границе $\partial\Omega$ области Ω, к-рая предполагается достаточно гладкой. Функция $G(x, y)$ наз. Г. ф. оператора A, если при любом $y \in \Omega$ она удовлетворяет однородным краевым условиям $B_{jx} G(x, y) = 0$ и, рассматриваемая как обобщенная функция, удовлетворяет уравнению

$$a(x, D) G(x, y) = \delta(x - y).$$

В случае операторов с гладкими коэффициентами и нормальных граничных условий, обеспечивающих единственность решения однородной краевой задачи, Г. ф. существует и решение краевой задачи $Au = f$ представляется в виде (см. [4])

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy.$$

В этом случае для Г. ф. справедливы равномерные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$ оценки

$$|G(x, y)| \leqslant C |x - y|^{m-n}, \text{ если } m < n,$$
$$|G(x, y)| \leqslant C + C |\ln |x - y||, \text{ если } m = n,$$

и Г. ф. равномерно ограничена, если $m > n$.

Краевая задача на собственные значения $Au = \lambda u$ эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_\Omega G(x, y) u(y)\, dy,$$

для к-рого применима теория Фредгольма (см. [5]). При этом Г. ф. сопряженной краевой задачи равна $\overline{G(y, x)}$. Отсюда, в частности, следует, что может существовать не более чем счетное число собственных значений и что они не имеют конечных предельных точек, а сопряженная краевая задача имеет комплексно сопряженные собственные значения той же кратности.

Для уравнений 2-го порядка Г. ф. изучена полнее, поскольку явно выписывается вид особенности фундаментального решения. Так, для оператора Лапласа Г. ф. имеет вид

$$G(x, y) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} |x - y|^{2-n} + \gamma(x, y), \text{ при } n > 2,$$

$$G(x, y) = +\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| + \gamma(x, y), \quad \text{при} \quad n = 2,$$

где $\gamma(x, y)$ — гармоническая в области Ω функция, выбранная таким образом, чтобы Г. ф. удовлетворяла краевому условию.

Г. ф. $G(x, y)$ первой краевой задачи для эллиптич. оператора 2-го порядка $a(x, D)$ с гладкими коэффициентами в области Ω с границей $\partial\Omega$ типа Ляпунова позволяет выразить решение задачи

$$a(x, D) u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

в виде

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) \varphi(y)\, d\sigma_y,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$ — производная по внешней конормали для оператора $a(x, D)$.

В случае, если однородная краевая задача $Au = 0$ имеет нетривиальные решения, то, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, вводится обоб-

щенная Г. ф. Так, напр., в случае второй краевой задачи для оператора Лапласа существует обобщенная Г. ф., наз. *Неймана функцией* (см. [3]).

2) Параболические уравнения. Пусть P – параболический дифференциальный оператор порядка m, порожденный дифференциальным полиномом

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,\ t)\,D_x^\alpha,$$

$$x\in\Omega,\quad t>0,$$

и однородными начальным и краевыми условиями

$$u(x,\ 0)=0,\qquad B_j u(x,\ t)=0,$$

где B_j – граничные операторы с коэффициентами, определенными при $x\in\partial\Omega$ и $t\geqslant 0$. Г. ф. оператора P наз. функция $G(x,\ t,\ y,\ \tau)$, к-рая для любых $t>\tau\geqslant 0$ и $y\in\Omega$ удовлетворяет по x однородным краевым условиям, является при $(x,\ t)\neq(y,\ \tau)$ решением уравнения

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)G(x,\ t,\ y,\ \tau)=0$$

и для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\tau+0}\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ \tau)\,\varphi(y)\,dy=\varphi(x).$$

В случае операторов с гладкими коэффициентами и нормальных граничных условий, обеспечивающих единственность решения задачи $pu=0$, Г. ф. существует, и решение уравнения

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,\ t)=f(x,\ t),$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям и начальному условию $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, имеет вид

$$u(x,\ t)=\int_0^t d\tau\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ \tau)\,f(y,\ \tau)\,dy+$$

$$+\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ 0)\,\varphi(y)\,dy.$$

При изучении эллиптич. или параболич. систем вместо Г. ф. вводится понятие матрицы Грина, к-рая позволяет выразить решения однородных краевых задач для указанных систем в виде интегралов от произведений матрицы Грина на векторы правых частей и начальных условий (см. [7]).

Г. ф. наз. по имени Дж. Грина (G. Green), впервые рассмотревшего один ее частный случай в своем исследовании по теории потенциала (1828).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [2] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 1, с. 11—14; [3] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [5] Gårding L., «Math. scand.», 1953, v. 1, № 1, S. 55—72; [6] Фридман А., Уравнения с частными производными, параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [7] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.*

Функция Грина в теории функций. В теории функций комплексного переменного под (действительной) Г. ф. понимается Г. ф. первой краевой задачи для оператора Лапласа, т. е. функция вида

$$G(z,\ z_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(z,\ z_0),\quad z,\in\Omega,\qquad(1)$$

где $z=x+iy$ – комплексное переменное, $z_0=x_0+iy_0$ – полюс Г. ф., $z_0\in\Omega$, $\gamma(z,\ z_0)$ – гармонич. функция z, принимающая на границе области $\partial\Omega$ значения $-\ln(1/|z-z_0|)$. Пусть область Ω односвязная и $w=f(z,\ z_0)$ – аналитич. функция, реализующая конформное отображение области Ω на единичный круг в плоскости w так, что точка z_0 переходит в центр круга, $f(z_0,z_0)=0$, $f'(z_0,\ z_0)>0$.

Тогда

$$G(z,\ z_0) = \ln \frac{1}{|f(z,\ z_0)|}. \qquad (2)$$

Если $H(z,\ z_0)$ — сопряженная гармоническая для $G(z,\ z_0)$ функция, $H(z_0, z_0) = 0$, то аналитич. функция $F(z,\ z_0) = G(z,\ z_0) + iH(z,\ z_0)$ наз. комплексной функцией Грина области Ω с полюсом z_0. Обращение формулы (2) дает

$$f(z,\ z_0) = e^{-F(z,\ z_0)}. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) показывают, что задачи построения конформного отображения области Ω на круг и отыскания Г. ф. эквивалентны. Г. ф. $G(z,\ z_0)$, $F(z,\ z_0)$ инвариантны относительно конформных отображений, что облегчает иногда их отыскание (см. *Отображений метод*).

В теории римановых поверхностей Г. ф. удобнее определить при помощи минимального свойства, справедливого для функции (1): среди всех положительных гармонических при $z \neq z_0$ функций $U(z,\ z_0)$ на римановой поверхности Ω, имеющих в окрестности точки z_0 вид

$$U(z,\ z_0) = \ln \frac{1}{|z - z_0|} + \gamma(z,\ z_0), \qquad (4)$$

где $\gamma(z,\ z_0)$ — регулярная на всей поверхности Ω гармонич. функция, Г. ф. $G(z,\ z_0)$, если она существует, является наименьшей, т. е. $G(z,\ z_0) \leqslant U(z,\ z_0)$. При этом существование Г. ф. характерно для римановых поверхностей гиперболич. типа. Так определенная Г. ф. на (идеальной) границе римановой поверхности, вообще говоря, уже не везде обращается в нуль. Аналогично обстоит дело и в *потенциала теории* (см. также *Потенциала теория абстрактная*). Для произвольного открытого множества Ω, напр. в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, Г. ф. $G(x,\ x_0)$ также можно определить при помощи указанного минимального свойства, причем при $n \geqslant 3$ в (4) вместо $\ln \frac{1}{|x - x_0|}$ следует писать $|x - x_0|^{2-n}$. Вообще говоря, при приближении к границе $\partial\Omega$ такая Г. ф. не обязательно стремится к нулю. Для римановых поверхностей параболич. типа и для нек-рых областей в $\mathbb{R}^2$ (напр., для $\Omega = \mathbb{R}^2$) Г. ф. не существует.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

Грина функция в статистической механике — упорядоченная по времени линейная комбинация *корреляционных функций*, удобная промежуточная величина при расчетах физич. характеристик систем большого числа взаимодействующих частиц.

1) Г. ф. в квантовой статистической механике. Наиболее часто применяются двувременные коммутаторные температурные Г. ф.: запаздывающие (ret, +), опережающие (adv, −) и причинные (c), определяемые соотношениями:

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t - t') = \ll A(t) \mid B(t') \gg^{(\mathrm{ret})} = -\theta(t - t') \langle [A(t),\ B(t')]_\eta \rangle,$$

$$G_{AB}^{(\mathrm{adv})}(t - t') = \ll A(t) \mid B(t') \gg^{(\mathrm{adv})} = -\theta(t' - t) \langle [A(t),\ B(t')]_\eta \rangle,$$

$$G_{AB}^{(\mathrm{c})}(t - t') = \ll A(t)\ B(t') \gg^{(\mathrm{c})} = \langle T_\eta A(t)\, B(t') \rangle,$$

где

$$[A(t),\ B(t')]_\eta = A(t)\, B(t') - \eta B(t')\, A(t),$$

$$T_\eta A(t) B(t') = \theta(t - t') A(t)\, B(t') + \eta\theta(t' - t) B(t') A(t),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \eta = \pm 1.$$

Здесь $A(t)$ и $B(t')$ — зависящие от времени динамич. величины (операторы в пространстве состояний системы в *Гейзенберга представлении*), через $\langle\cdots\rangle$ обозначено среднее по *Гиббса статистическому ансамблю*; значение $\eta = \pm 1$ выбирается из соображений удобства. Эффективность применения Г. ф. в значительной степени обусловлена использованием спектральных представлений для их фурье-образов $G^{(n)}_{AB}(E)$, n=ret, adv, с. Так, напр., в случае ненулевой температуры для запаздывающих и опережающих Г. ф. справедливо представление:

$$G^{(n)}_{AB}(E) = \ll A \mid B \gg^{(n)}_{E} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(e^{\omega/\theta}-\eta\right) J_{AB}(\omega)}{E-\omega+i\varepsilon\alpha_n}\, d\omega,$$

$$\varepsilon \longrightarrow +0, \quad \alpha_n = \begin{cases} 1, & n=\text{ret}, \\ -1, & n=\text{adv}. \end{cases}$$

Здесь $J_{AB}(\omega)$ — спектральная плотность; $\theta = kT$, где T — абсолютная температура, $T \neq 0$, k — постоянная Больцмана; использована система единиц, в которой $\hbar = h/2\pi = 1$, где h — постоянная Планка. Справедлива, в частности, формула:

$$G^{(\text{ret})}_{AB}(\omega) - G^{(\text{adv})}_{AB}(\omega) = \left(e^{\omega/\theta}-1\right) J_{AB}(\omega),$$

позволяющая вычислять спектральную плотность (а следовательно, и ряд физич. характеристик системы) через Г. ф. Аналогичные спектральные формулы существуют и для нуля температуры. Особенности (полюса на комплексной плоскости) фурье-образа Г. ф. характеризуют спектр и затухание элементарных возбуждений в системе. Основные источники вычисления Г. ф.: а) приближенное решение бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений, к-рая выводится непосредственно из определения Г. ф. путем «расцепления» ее, исходя из тех или иных физич. соображений; б) суммирование «основных» с физич. точки зрения членов рядов теории возмущений (суммирование диаграмм); этот способ применяется в основном при вычислении причинных Г. ф. и имеет много общего с методикой расчета Г. ф. в квантовой теории поля.

2) Г. ф. в классической статистической механике. Вводятся опережающие (ret) и запаздывающие (adv) двувременные Г. ф. путем замены в соответствующих формулах для квантового случая (при $\eta = +1$) операторов $A(t)$ и $B(t')$ на функции динамич. состояния изучаемой классич. системы и коммутатора $A(t)B(t') - B(t')A(t)$ (квантовые скобки Пуассона) — на классические (обычные) скобки Пуассона; соответственно под $\langle\cdots\rangle$ понимается усреднение по классическому ансамблю Гиббса. Введение причинной Г. ф. здесь теряет смысл из-за коммутативности произведения динамич. величин. Аналогично квантовому случаю, существуют и могут быть эффективно использованы спектральные представления для фурье-образа Г. ф. Основным источником для вычисления классич. Г. ф. служат системы уравнений, получающиеся варьированием по бесконечно малому изменению гамильтониана той или иной системы уравнений для корреляционных функций: *Боголюбова цепочки уравнений*, системы уравнений гидродинамики и т. д.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, с. 53; [2] Зубарев Д. Н., «Успехи физ. наук», 1960, т. 71, с. 71; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, в. 8, с. 677; [4] их же, Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973.

В. Н. Плечко.

ГРОНУОЛЛА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых и функциональных рядов, определяется заданием двух функций $f(w)$ и $g(w)$, удовлетворяющих определенным условиям. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

суммируется методом Гронуолла (f, g) к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty} U_n = s,$$

где U_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n,$$

$$z = f(w),\ g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n.$$

Метод был введен Т. Гронуоллом [1] как обобщение *Валле Пуссена метода суммирования*, в к-рый он обращается при

$$z = f(w) = \frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1+w}},\quad w = \frac{4z}{(1+z)^2},\quad g(w) = \frac{1}{\sqrt{1-w}}.$$

При

$$f(w) = w,\quad g(w) = (1-w)^{-k-1}.$$

Г. м. с. обращается в *Чезаро метод суммирования*.

Лит.: [1] Cronwall T. H., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 1, p. 101—17.

И. И. Волков.

ГРОТЕНДИКА ГРУППА аддитивной категории — абелева группа, сопоставляемая аддитивной категории универсальным аддитивным отображением. Точнее, пусть C — малая аддитивная категория и G — абелева группа. Отображение $\varphi : C \to G$ наз. аддитивным, если для любой точной последовательности $0 \to L \to M \to N \to 0$ объектов из C выполняется $\varphi(L)+\varphi(N)=\varphi(M)$. Существует группа $K(C)$, наз. Г. г., и такое аддитивное отображение $k : C \to K(C)$, наз. универсальным отображением, что для любого аддитивного отображения $\varphi : C \to G$ существует единственный гомоморфизм $\chi : K(C) \to G$, удовлетворяющий условию $\varphi = \chi \cdot k$.

Впервые эта конструкция была рассмотрена А. Гротендиком (A. Grothendieck) для категорий когерентных и локально свободных пучков на схемах при доказательстве теоремы Римана — Роха. См. *К-функтор* в алгебраич. геометрии. Группа $K(C)$ определена однозначно с точностью до изоморфизма и может быть задана образующими — каждому объекту $L \in C$ соответствует образующая $[L]$ — и соотношениями $[M] - [L] - [N] = 0$ для всякой точной последовательности

$$0 \to L \to M \to N \to 0.$$

Частным случаем этого понятия является Г. г. коммутативного моноида M (который можно рассматривать как категорию). Тогда универсальное отображение k является гомоморфизмом M в группу $K(M)$, а если в M выполняется закон сокращения, то k — инъективный гомоморфизм.

Если X — топологич. пространство, то Г. г. аддитивной категории векторных расслоений над X является инвариантом пространства, изучаемым в *К-теории*. Если C — категория невырожденных симметрических билинейных форм на векторных пространствах над полем k, то $K(C)$ есть группа Витта — Гротендика над k (см. *Витта кольцо*).

Лит.: [1] Swan R., «Topology», 1963, v. 2, p. 85—110; [2] Борель А., Серр Ж.-П., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 17—54; [3] Атья М., Лекции по К-теории, пер. с англ., М., 1967; [4] Bass H., Topics to algebraic K-theory, Bombay, 1966; [5] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. И. Данилов.

ГРОТЕНДИКА КАТЕГОРИЯ — *абелева категория*, обладающая семейством образующих и удовлетворяющая аксиоме: в категории $\mathfrak{A}$ существуют копроизведения (суммы) любых семейств объектов и для каждого направленного по возрастанию семейства подобъектов $(U_i, \mu_i]$, $i \in I$, и произвольного объекта A и каждого подобъекта (V, σ) выполнено равенство

$$(\bigcup_{i\in I} (U_i, \mu_i]) \cap (V, \sigma] = \bigcup_{i\in I} (U_i \mu_i] \cap (V, \sigma]).$$

Категория левых (правых) Λ-модулей над произвольным ассоциативным кольцом Λ с единицей и категории пучков Λ-модулей над произвольным топологич. пространством есть Г. к. Полная подкатегория $\mathfrak{S}$ категории ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}$ левых Λ-модулей наз. подкатегорией локализации, если она замкнута относительно копределов и если в точной последовательности

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

объект A принадлежит $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда и A' и A'' принадлежат $\mathfrak{S}$. Каждая подкатегория локализации позволяет построить факторкатегорию ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$. Абелева категория тогда и только тогда является Г. к., когда она эквивалентна нек-рой факторкатегории вида ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$.

В Г. к. каждый объект обладает инъективной оболочкой, поэтому Г. к. хорошо приспособлены для гомологич. приложений.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Popesco N., Gabriel P., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, № 17, p. 4188—90. *М. Ш. Цаленко.*

ГРОТЕНДИКА ТОПОЛОГИЯ — см. *Топологизированная категория.*

ГРОТЕНДИКА ФУНКТОР— функтор вложения (см. *Вложение категорий*) из категории C в категорию $\hat{C}$ контравариантных функторов, определенных на C и принимающих значения в категории множеств (Ens). Пусть X — объект U-категории C (где U — фиксированное универсальное множество); сопоставление $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ определяет контравариантный функтор $h_X : C \to (\mathrm{Ens})$ в категорию множеств. Для любого объекта F категории $\hat{C}$ контравариантных функторов из C в категорию (Ens) имеет место естественная биекция $F(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, F)$. При этом

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, h_Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

(лемма Ионеда). Поэтому сопоставление $X \to h_X$ определяет полное изоморфное вложение $h : C \to \hat{C}$, к-рое и наз. Г. ф. С помощью Г. ф. можно вводить алгебраич. структуры на объектах категории (см. *Групповой объект* категории, *Групповая схема*).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Grothendieck A., Seminaire Bourbaki. 1959/1960, № 195.
И. В. Долгачев.

ГРУБАЯ СИСТЕМА, структурно устойчивая (динамическая) система,— гладкая *динамическая система*, обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом ее возмущении, отстоящем от нее в C^1-метрике не более чем на δ, существует *гомеоморфизм* фазового пространства, к-рый сдвигает точки не более чем на ε и переводит траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной. Формально определение предполагает заданной нек-рую риманову метрику на фазовом многообразии. Фактически о Г. с. обычно говорят либо когда фазовое многообразие замкнуто, либо когда траектории входят в нек-рую компактную область G с гладкой границей, не касаясь последней, причем возмущение и гомеоморфизм рассматривают только на G. Ввиду компактности выбор метрики не играет роли.

Таким образом, при малом (в смысле C^1) возмущении Г. с. получается система, эквивалентная исходной по всем своим топологич. свойствам (однако приведенное определение содержит еще дополнительное требование, чтобы эта эквивалентность осуществлялась посредством гомеоморфизма, близкого к тождественному). Иногда термины «грубость» и «(структурная) устойчивость» употребляют в более широком смысле, напр. имея в виду

только сохранение при малых возмущениях того или иного свойства системы (в этом случае лучше говорить о грубости данного свойства). См. также *Локальная грубость*.

Г. с. были введены А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1]. При малой размерности фазового многообразия (единица для дискретного времени и единица или два для непрерывного) Г. с. допускают простую характеристику в терминах качественных свойств поведения траекторий (это — так наз. *Морса — Смейла системы*) и образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех динамич. систем, снабженном C^1-топологией (см. [1], [2]; таким образом, системы с более сложным и более чувствительным к малым возмущениям поведением траекторий можно в этом случае рассматривать как исключительные). В бо́льших размерностях ни один из этих фактов не имеет места, как установил С. Смейл (S. Smale, [3]). Он высказал гипотезу, что, несмотря на все эти усложнения, можно и в общем случае сформулировать необходимые и достаточные условия грубости в терминах качественной картины поведения траекторий, а именно: 1) неблуждающие точки должны образовывать *гиперболическое множество* Ω, в к-ром всюду плотны периодич. траектории (так наз. а к с и о м а А С м е й л а); 2) устойчивое и неустойчивое многообразия любых двух траекторий из Ω должны пересекаться трансверсально (с т р о г о е у с л о в и е т р а н с в е р с а л ь н о с т и). Достаточность этих условий доказана почти в полной общности, необходимость пока что (70-е гг. 20 в.) удается доказать лишь при нек-ром видоизменении определения грубости (см., напр., [4] или [5]).

Лит.: [1] А н д р о н о в А. А., П о н т р я г и н Л. С., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 5, с. 247—50; [2] P e i x o t o M. M., «Topology», 1962, v. 1, № 2, p. 101—20; 1963, v. 2, № 2, p. 179—80; [3] С м е й л С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 1, с. 113—85; [4] К у ш н и р е н к о А. Г., К а т о к А. Б., А л е к с е е в В. М., Гладкие динамические системы, «Девятая летняя матем. школа. Ин-т матем. АН УССР», К., 1972, с. 50—341; [5] Н и т е ц к и З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975. *Д. В. Аносов.*

ГРУДЫ И ПОЛУГРУДЫ — алгебры с одной тернарной операцией, удовлетворяющей нек-рым тождествам. Груды (г.) определяются тождествами:

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]],$$
$$[x_1x_1x_2]=x_2,\quad [x_1x_2x_2]=x_1,$$

а полугруды (п.) — тождествами:

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1[x_4x_3x_2]x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]].$$

Всякая груда является полугрудой.

Если в множестве $\Phi(A, B)$ всех взаимно однозначных отображений множества A на множество B определить тернарную операцию, ставя в соответствие упорядоченной тройке отображений φ_1, φ_2, φ_3 отображение, являющееся суперпозицией φ_1, φ_2^{-1}, φ_3, то $\Phi(A, B)$ становится г. Любая г. изоморфна нек-рой г. взаимно однозначных отображений. Если в произвольной группе G ввести тернарную операцию, полагая $[g_1g_2g_3]=g_1g_2^{-1}g_3$, то также получится г. (г р у д а, а с с о ц и р о в а н н а я с д а н н о й г р у п п о й). Понятие г. было введено при рассмотрении вышеуказанной тернарной операции в абелевой группе (см. [1]). Г. изучались и с абстрактной точки зрения (см. [2], [3]). В частности, Р. Бэр доказал [2], что если в г. S фиксировать произвольный элемент s_0, то операции, определяемые равенствами $s_1s_2=[s_1s_0s_2]$, $s^{-1}=[s_0ss_0]$, задают на S структуру группы, в к-рой s_0 является единицей; при этом г., ассоциированная с этой группой, совпадает с исходной г., а группы, получаемые из данной г. фиксированием различных ее элементов, изоморфны. Другими словами, многообразие всех г. эквивалентно многообразию всех групп.

Совокупность $\mathfrak{P}(A, B)$ всех *бинарных отношений* между элементами множеств A и B является п. относитель-

но тройного умножения: $[\rho_1\rho_2\rho_3]=\rho_1\rho_2^{-1}\rho_3$. Множество всех обратимых частичных отображений A в B также замкнуто относительно тройного умножения и является обобщенной грудой (см. [4]), то есть п. с тождествами:

$$[x_1x_1[x_2x_2x_3]] = [x_2x_2[x_1x_1x_3]],$$
$$[[x_1x_2x_2]x_3x_3] = [[x_1x_3x_3]x_2x_2].$$

Обобщенные г. находят приложение в основаниях дифференциальной геометрии при рассмотрении координатных атласов (см. [5]).

П. тесно связаны с полугруппами с инволюцией. Если на полугруппе S задана инволюция θ, являющаяся антиавтоморфизмом, то тернарная операция $[s_1s_2s_3] = s_1\theta(s_2)s_3$ превращает S в п. Всякая п. изоморфна подполугруде нек-рой полугруппы с инволюцией (см. [4]).

Лит.: [1] Prüfer H., «Math. Z.», 1924, Bd 20, S. 165–87; [2] Baer R., «J. reine und angew. Math.», 1929, Bd 160, S. 199—207; [3] Certaine J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 49, p. 869—77; [4] Вагнер В. В., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 3, с. 545—632; [5] его же, Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра, в кн.: Тр. 4 Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Л., 1963, с. 17—29; [6] Глускин Л. М., в сб.: Теория полугрупп и ее приложения, т. 1, Саратов, 1965, с. 179—97, 198—228.

В. Н. Салий.

ГРУПП КАТЕГОРИЯ — категория Gr, объектами к-рой являются всевозможные группы, а морфизмами — все гомоморфизмы групп. Иногда предполагают, что все рассматриваемые группы принадлежат фиксированному *универсальному множеству*. Г. к. является локально малой биполной категорией с нулевыми морфизмами. Она обладает единственной структурой *бикатегории*, в к-рой допустимыми эпиморфизмами являются *нормальные эпиморфизмы* и допустимыми мономорфизмами — все *мономорфизмы*. Причем нормальные эпиморфизмы — это в точности сюръективные гомоморфизмы, а мономорфизмы — в точности инъективные гомоморфизмы. *Проективными объектами* Г. к. являются свободные группы и только они, *инъективными объектами* — только единичные группы, к-рые будут одновременно и *нулевыми объектами*. Аксиоматич. описание Г. к. дано П. Леру [3].

Г. к. является частным случаем общего определения Г. к. над произвольной категорией K. Категория $\mathrm{Gr}K$ состоит из всех *групповых объектов* из K и гомоморфизмов между ними; эта категория наследует ряд свойств категории K, она, в частности, полна, если полна категория K.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 6, с. 3–52; [2] Eckmann B., Hilton P. J., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, № 3, S. 227–55; 1963, Bd 151, № 2, S. 150—86; 1963, Bd 150, № 2, S. 165—87; [3] Leroux P., «Canad. Math. Bull.», 1972, v. 15, № 3, p. 375—80.

М. Ш. Цаленко.

ГРУПП МНОГООБРАЗИЕ — класс всех групп, удовлетворяющих фиксированной системе тождественных соотношений

$$v(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

где v пробегает нек-рое множество V групповых слов, т. е. элементов *свободной группы* X со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Как и всякое *алгебраических систем многообразие* Г. м. может быть определено также замкнутостью относительно подсистем (подгрупп), гомоморфных образов и декартовых произведений. Наименьшее многообразие, содержащее данный класс $\mathfrak{S}$ групп, обозначается $\mathrm{var}\,\mathfrak{S}$. Относительно операций пересечения многообразий и объединения многообразий, определяемого формулой

$$\mathfrak{U} \vee \mathfrak{V} = \mathrm{var}(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}),$$

Г. м. образуют полную модулярную, но не дистрибутивную решетку. Произведение $\mathfrak{UV}$ многообразий $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ определяется как Г. м., состоящее из всех групп G, обладающих нормальной подгруппой $N \in \mathfrak{U}$ такой, что $G/N \in \mathfrak{V}$. Каждое Г. м., отличное от многообразия единичных групп и многообразия всех групп, однозначно

представимо в виде произведения далее неразложимых Г. м.

Примеры Г. м.: многообразие $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп, бернсайдово многообразие $\mathfrak{B}_n$ всех групп экспоненты (показателя) n, определяемое тождеством $x^n=1$, многообразие $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{B}_n\wedge\mathfrak{A}$, многообразие $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп класса $\leqslant c$, многообразие $\mathfrak{A}^l$ всех разрешимых групп длины $\leqslant l$, в частности при $l=2$, $\mathfrak{A}^2$ — многообразие метабелевых групп.

Пусть $\mathcal{P}$ — нек-рое свойство групп. Говорят, что Г. м. $\mathfrak{V}$ обладает свойством $\mathcal{P}$ (локально обладает свойством $\mathcal{P}$), если каждая группа из $\mathfrak{V}$ (каждая конечно порожденная группа из $\mathfrak{V}$) обладает свойством $\mathcal{P}$. Именно в этом смысле говорят, что многообразие нильпотентное, локально нильпотентное, локально конечное и т. д.

Свойства разрешимого Г. м. $\mathfrak{V}$ зависят от $\mathfrak{V}\wedge\mathfrak{A}^2$. Так, если $\mathfrak{V}\not\supseteq\mathfrak{A}^2$, то $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{B}_n\mathfrak{N}_c\mathfrak{B}_n$ при нек-рых подходящих n и c (см. [2], [3]). Описание метабелевых Г. м. в значительной степени сводится к описанию локально конечных Г. м.: если метабелево многообразие $\mathfrak{V}$ не локально конечно, то

$$\mathfrak{V}\quad\mathfrak{V}_1\vee\mathfrak{V}_2\vee\mathfrak{V}_3,$$

где $\mathfrak{V}_1=\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$, $\mathfrak{V}_2$ однозначно представимо в виде объединения конечного числа Г. м. вида $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}_k\wedge\mathfrak{A}^2,\mathfrak{V}_3$, локально конечно [4]. Некоторые локально конечные метабелевые многообразия описаны, напр. многообразия p-групп класса $\leqslant p+1$ (см. [5]).

Г. м. наз. кроссовым, если оно порождается конечной группой. Кроссовы Г. м. локально конечны. Г. м. наз. почти кроссовым, если оно не кроссово, но всякое его собственное подмногообразие кроссово. Разрешимые почти кроссовы многообразия исчерпываются многообразиями $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_p^2$, $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{A}_p\mathfrak{T}_q$, где p, q, r — различные простые числа, $\mathfrak{T}_q=\mathfrak{B}_q\wedge\mathfrak{N}_2$ при нечетном q и $\mathfrak{T}_2=\mathfrak{B}_4\wedge\mathfrak{N}_2$ (см. [6]). Существуют, однако, другие почти кроссовы многообразия; такие, напр., содержатся во всяком многообразии $\mathfrak{R}$ всех локально конечных групп экспоненты $p\geqslant 5$ (см. [7]). В изучении локально конечных Г. м. важную роль играют критические группы — конечные группы, не лежащие в многообразии, порожденном всеми их собственными подгруппами и факторгруппами. В кроссовом многообразии может содержаться лишь конечное число неизоморфных критич. групп. Всякое локально конечное многообразие порождается своими критич. группами.

Г. м. наз. конечно базируемым, если оно может быть задано конечным числом тождеств. Таковы, напр., все кроссовы, нильпотентные и метабелевы многообразия. Доказано [8] существование не конечно базируемых Г. м. и континуальность количества всех Г. м. Примеры бесконечных независимых систем тождеств приведены в [9]. Произведение конечно базируемых Г. м. не обязано быть конечно базируемым, в частности $\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_2$ не имеет конечного базиса.

Г. м. наз. многообразием лиевского типа, если оно порождается своими нильпотентными группами без кручения. Если, кроме того, факторы нижнего центрального ряда свободных групп многообразия — группы без кручения, то многообразие наз. магнусовым. Класс многообразий лиевского типа не совпадает с классом магнусовых многообразий; каждый из них замкнут относительно операции умножения многообразий [10]. Магнусовыми являются, напр., многообразие всех групп, многообразия $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{A}^n$ и многообразия, получающиеся из многообразий $\mathfrak{N}_c$ с помощью применения в конечном числе операций пересечения и умножения [11].

Лит.: [1] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [2] Каргаполов М. И., Чуркин В. А., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, вып. 6, с. 651—57; [3] Groves J. R. F., «Bull. Austr. Math. Soc.», 1972, v. 7, № 3, p. 437—

41; [4] Brayce R. A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», ser. A 266, 1970, № 1176, p. 281—355; [5] Brisley W., «J. Austr. Math. Soc.», 1971, v. 12, № 1, p. 53—63; [6] Ольшанский А. Ю., «Матем. сб.», 1971, т. 85, № 1, с. 115—31; [7] Размыслов Ю. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, в. 1, с. 33—44; [8] Ольшанский А. Ю., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 2, с. 376—84; [9] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975; [10] Шмелькин А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1973, т. 29, с. 247—60; [11] Горчаков Ю. М., «Сиб. матем. журнал», 1969, т. 10, № 5, с. 1023—33.

А. Л. Шмелькин.

ГРУППА — один из основных типов *алгебраических систем*. Теория Г. изучает в самой общей форме свойства алгебраич. операций, наиболее часто встречающихся в математике и ее приложениях (примеры таких операций — умножение чисел, сложение векторов, последовательное выполнение преобразований и т. д.). Понятие Г. явилось исторически одним из первых примеров абстрактных алгебраич. систем и послужило во многих отношениях образцом при перестройке других математич. дисциплин на рубеже 19 20 вв., в результате к-рой понятие математич. системы (структуры) стало основным в математике.

Определение. Группой наз. произвольное множество G с одной бинарной операцией, удовлетворяющей следующим аксиомам (если операцию записывать как умножение):

1) операция ассоциативна, т. е. $(ab)c=a(bc)$ для любых a, b, c из G;

2) операция гарантирует единицу, т. е. в G существует такой элемент e, наз. единицей, что $ae=ea=a$ для любого a из G;

3) операция гарантирует обратные элементы, т. е. для любого a из G существует в G такой элемент x, наз. обратным к a, что $ax=xa=e$.

Иногда вместо системы аксиом 1) — 3) пользуются равносильной системой из двух аксиом: 1) и 4) операция гарантирует левые и правые частные, т. е. для любых двух элементов a, b из G существуют в G такие элементы x, y, наз. левым частным и правым частным от деления b на a, что $ax=b$, $ya=b$.

Из определений следует, что единица в любой Г. единственна, для любого элемента из Г. обратный к нему элемент единствен и для любых элементов a, b из Г. оба частных от деления b на a единственны.

Исторические замечания. Истоки понятия Г. обнаруживаются в нескольких дисциплинах, главная из к-рых — теория решения алгебраич. уравнений в радикалах. В «Мемуаре об алгебраическом решении уравнений» Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1771) и одной работе А. Вандермонда (A. Vandermonde, 1771) впервые для нужд этой теории были применены подстановки. Особо важен для теории Г. «Мемуар» Ж. Лагранжа, где в терминах многочленов по существу получено разложение симметрической Г. подстановок на смежные классы по подгруппе. Глубокие связи между свойствами Г. подстановок и свойствами уравнений были указаны Н. Абелем (N. Abel, 1824) и Э. Галуа (E. Galois, 1830). Вместе с тем Э. Галуа принадлежат конкретные достижения в теории Г.: открытие роли нормальных подгрупп в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах, установление простоты знакопеременных Г. степени $n\geqslant 5$ и пр. Важную роль в систематизации и развитии этого направления алгебры сыграл трактат К. Жордана (C. Jordan, 1870) о Г. подстановок.

Независимо идея Г. возникла в геометрии, когда в середине 19 в. на смену единой античной геометрии пришли многочисленные «геометрии» и остро встал вопрос об установлении связей и родства между ними. Выход из создавшегося положения был намечен исследованиями по проективной геометрии, посвященными изучению поведения фигур при различных преобразованиях. Постепенно интерес в этих исследованиях перешел на изучение самих преобразований и поиск их классифи-

кации. Таким «изучением геометрического родства» много занимался А. Мёбиус (A. Möbius), исследовавший конгруэнтность, подобие, аффинность, коллинеацию и, наконец, «элементарные виды родства» геометрич. фигур, т. е. по существу топологич. эквивалентность. На более сознательном уровне классификация геометрий была дана А. Кэли (A. Cayley, 1854 и далее) и другими представителями английской школы теории инвариантов: А. Кэли явно пользовался термином «Г.», систематически использовал таблицы умножения, наз. теперь его именем (см. *Кэли таблица*), он доказал представимость всякой конечной Г. подстановками, пришел к пониманию Г. как системы, заданной порождающими элементами и определяющими соотношениями. Заключительным этапом на этом пути явилась «Эрлангенская программа» Ф. Клейна (F. Klein, 1872), положившая в основу классификации геометрий понятие Г. преобразований.

Третий источник понятия Г.— теория чисел. Уже Л. Эйлер (L. Euler, 1761), изучая «вычеты, остающиеся при делении степеней», по существу пользовался сравнениями и разбиениями на классы вычетов, что на теоретико-групповом языке означает разложение Г. на смежные классы по подгруппе. К. Гаусс (C. Gauss, 1801) в «Арифметических исследованиях», занимаясь уравнением деления круга, фактически определил подгруппы его группы Галуа. Там же, изучая «композицию двоичных квадратичных форм», К. Гаусс по существу доказал, что классы эквивалентных форм образуют относительно композиции конечную абелеву Г.

Осознание в конце 19 в. принципиального единства теоретико-групповых идей, использовавшихся долгое время независимо в разных областях математики, привело к выработке современного абстрактного понятия Г. Так, С. Ли (S. Lie, 1895) уже определял Г. как совокупность преобразований, замкнутую относительно операции, к-рая ассоциативна и гарантирует единицу и обратные элементы. Изучение Г. без предположения их конечности и без каких бы то ни было предположений о природе элементов впервые оформилось в самостоятельную область математики с выходом в 1916 книги О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп».

Примеры групп. Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие роль Г. в алгебре, в других разделах математики и в естествознании.

а) Группы Галуа. Пусть K — конечное, сепарабельное и нормальное расширение поля k. Автоморфизмы поля K, оставляющие элементы подполя k неподвижными, образуют Г. $\mathrm{Gal}(K/k)$ относительно их последовательного выполнения, наз. *Галуа группой* расширения K k. Основная теорема *Галуа теории* гласит: отображение, сопоставляющее каждой подгруппе Г. $\mathrm{Gal}(K/k)$ ее неподвижное подполе, является антиизоморфизмом решетки подгрупп Г. $\mathrm{Gal}(K/k)$ на решетку промежуточных подполей, заключенных между k и K.

Приложение к вопросу о разрешимости уравнений в радикалах осуществляется следующим образом. Пусть f — многочлен от x над полем k, K — поле разложения f. Группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ наз. группой Галуа многочлена f над полем k (ее элементы естественным образом изображаются подстановками корней уравнения $f(x)=0$). Оказывается, уравнение $f(x)=0$ тогда и только тогда решается в радикалах, когда группа Галуа многочлена f разрешима (см. *Разрешимая группа*).

В этом и других аналогичных примерах Г. возникают в форме Г. автоморфизмов математич. структур. Это не только одна из важнейших форм, но и вообще присущая только Г. форма применения, обеспечивающая им особое положение в алгебре. Дело в том, что автоморфизмы произвольных структур, говоря словами Галуа, всегда можно «группировать», тогда как определить на множе-

ство автоморфизмов строение кольца или какой-нибудь другой полезной структуры удается лишь в специальных случаях.

б) Гомологические группы. Ведущей идеей теории гомологий является применение теории (абелевых) Г. к изучению категории топологич. пространств. Каждому пространству X сопоставляется семейство абелевых Г. $H_0(X)$, $H_1(X)$, ... и каждому непрерывному отображению $f : X \to Y$ — семейство гомоморфизмов $f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Изучение гомологич. Г. $H_n(X)$ (см. *Гомологии группа*) и их гомоморфизмов средствами теории Г. часто позволяет решить исходную топологич. задачу. Типичный пример — задача распространения: можно ли отображение $g : A \to Y$, определенное на подпространстве A пространства X, распространить на все X, т. е. представить g как суперпозицию вложения $h : A \to X$ и нек-рого непрерывного отображения $f : X \to Y$? Если да, то в гомологиях должно быть $g_n = f_n \cdot h_n$, т. е. каждый гомоморфизм $g_n : H_n(A) \to H_n(Y)$ можно пропустить через $H_n(X)$ с заданным множителем h_n. Если эта алгебраич. задача неразрешима, то и исходная топологич. задача неразрешима. Этим способом можно получать важные положительные результаты.

Гомологич. Г. иллюстрируют другой типичный путь применения Г. — путь изучения неалгебраич. объектов с помощью алгебраич. систем, отражающих их поведение. Именно таков основной метод алгебраич. топологии. Аналогичный метод и, в частности, гомологич. Г. успешно используются и для изучения самих алгебраич. систем — Г., колец и пр. (напр., в теории расширений Г.).

в) Группы симметрий. Понятие Г. позволяет в точных терминах охарактеризовать симметричность той или иной геометрич. фигуры. Именно, каждой фигуре можно сопоставить совокупность всех преобразований пространства, совмещающих данную фигуру с нею самой. Эта совокупность будет Г. относительно последовательного выполнения преобразований. Она и характеризует симметричность фигуры. Именно с таких позиций Е. С. Федоров в 1890 решил задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных задач кристаллографии. Существует всего 17 плоских федоровских Г., они были найдены непосредственно; пространственных федоровских Г. — 230, и только теория Г. позволила провести их исчерпывающую классификацию. Это был исторически первый случай применения теории Г. непосредственно в естествознании.

Аналогичную роль играет теория Г. в физике. Так, в квантовой механике состояние физич. системы изображается точкой бесконечномерного векторного пространства. Если физич. система переходит из одного состояния в другое, то изображающая ее точка подвергается нек-рому линейному преобразованию. Соображения симметрии и теория представлений Г. линейными преобразованиями имеют здесь первостепенное значение.

Указанные примеры иллюстрируют классифицирующую роль теории Г. всюду, где речь идет о симметрии. Изучая симметрию, по существу имеют дело с автоморфизмами систем (не обязательно математических), поэтому теория Г. незаменима в этих вопросах.

Важнейшие классы групп. «Конечная цель» теории Г. — описать все групповые операции или, иначе, все Г. с точностью до изоморфизма. Теория Г. распадается на ряд разделов, выделяемых чаще всего дополнительными условиями на групповую операцию или внесением в Г. дополнительных структур, связанных определенным образом с групповой операцией.

Старейшей и интенсивно развивающейся ветвью теории Г. является теория *конечных групп*. Важное место

в ней занимает отыскание конечных простых Г., к к-рым относятся многие классические Г. матриц над конечными полями, а также «спорадические» простые конечные Г. (группы Матьё и др.). На другом полюсе находятся конечные разрешимые Г., в них обычно интересуются специфическими системами подгрупп (холловых, картеровых и пр.), во многом определяющих строение самой Г. Часто конечные Г. возникают в форме Г. подстановок или матриц над конечными полями; изучению представлений матрицами и подстановками посвящено большое самостоятельное направление теории конечных Г.

Типичным методом исследования бесконечных Г. является наложение на них того или иного условия конечности. Здесь наибольшее внимание привлекают *периодические группы*, локально конечные Г., Г. с условием максимальности для подгрупп (*нётеровы группы*), Г. с условием минимальности для подгрупп (*артиновы группы*), *конечно порожденные группы*, Г. конечного ранга (см. *Ранг группы*), *финитно аппроксимируемые группы*.

При изучении *абелевых групп* важную роль играют полные абелевы Г., абелевы Г. без кручения и периодические абелевы Г., а в них — сервантные подгруппы и примарные подгруппы. Исследование произвольной абелевой Г. во многом сводится к теориям указанных классов с помощью теории расширений абелевых Г., развиваемой в основном гомологич. методами (см. *Расширение* группы).

Более широкими по отношению к классу абелевых Г. являются классы *нильпотентных групп* и *разрешимых групп*, теория к-рых также достаточно развита. Из обобщений нильпотентности и разрешимости наиболее употребительны локальная нильпотентность, локальная разрешимость, нормализаторное условие, а также многочисленные свойства, определяемые наличием в Г. субнормальных систем (см. *Подгрупп система*) того или иного типа. Заметную роль играют специальные классы разрешимых и нильпотентных Г.: *сверхразрешимые группы*, *полициклические группы*.

Важной частью теории Г. является теория Г. преобразований (см. *Преобразований группа*), в том числе теория Г. подстановок (см. *Подстановок группа*) и теория *линейных групп*. Ряд важных классов Г. определяется внесением в Г. дополнительных структур, согласованных с групповой операцией; сюда относятся *топологические группы*, *Ли группы*, *алгебраические группы*, *упорядоченные группы*. Из других классов Г. следует отметить Г., свободные в том или ином многообразии (см. *Свободная группа*), *полные группы*, Г., аппроксимируемые в том или ином смысле, Г., определяемые условиями в терминах порождающих элементов и определяющих соотношений, Г., выделяемые условиями на решетку подгрупп.

Лит.: [1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., Основы теории групп, М., 1972; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [4] Шмидт О. Ю., Избр. тр. Математика, М., 1959, с. 17—70; [5] Wussing H., Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, B., 1969; [6] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов, М., 1949, с. 111—258; [7] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков.*

n-ГРУППА — обобщение понятия группы на случай n-арной операции. n-группой наз. универсальная алгебра с одной n-арной ассоциативной операцией, однозначно обратимой на каждом месте (см. *Алгебраическая операция*). Теория n-Г. при $n \geqslant 3$ существенно отличается от теории групп (т. е. 2-групп). Напр., при $n \geqslant 3$ у n-Г. нет аналога единицы.

Пусть $\Gamma(\circ)$ группа с операцией умножения $\circ$, $n \geqslant 3$ — произвольное целое число, тогда на множестве Γ можно следующим образом определить n-арную операцию ω:

$$a_1 a_2 \ \dots \ a_n \omega = a_1 \circ a_2 \circ \ \dots \ \circ a_n.$$

Получаемая n-Г. наз. **n-группой, определяемой группой Г($\circ$)**. Известны необходимые и достаточные условия, при к-рых n-Г. определяется нек-рой группой (см. [1]). Всякая n-Г. вкладывается в n-Г., определяемую группой (**теорема Поста**).

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра, М., 1974.

В. Д. Белоусов.

p-ГРУППА — группа, каждый неединичный элемент к-рой есть p-**элемент**, т. е. элемент, удовлетворяющий уравнению $x^{p^n}=1$; здесь p — фиксированное одно и то же для всех элементов группы простое число, а n — натуральное число, вообще говоря, свое для каждого элемента группы. В том же смысле вместо буквы p употребляют другие буквы, напр. q, r, s, но в таком случае их употребление особо оговаривают. Если p — конкретное простое число, напр. 2, 3, 5, ..., то говорят о 2-группах, 3-группах и т. д. Иногда p-Г. наз. **примарными группами**. Обобщением p-Г. является π-группа (π — заданное множество простых чисел), определяемая как группа, каждый неединичный элемент к-рой есть π-**элемент**, т. е. элемент, удовлетворяющий условию $x^m=1$, где m — натуральное число, все простые делители к-рого принадлежат π. Реже в том же смысле пишут П-группа, σ-группа, τ-группа. Если N — множество всех простых чисел, то часто обозначают $p'=N\setminus p$, $\pi'=N\setminus\pi$ и говорят о p'- и π'-группах, о p'- и π'-элементах. Подгруппа данной группы, являющаяся p-Г. (π-группой), наз. **p-подгруппой** (π-**подгруппой**).

Значительная часть работ в теории конечных групп связана с задачей описания произвольных конечных групп через конечные p-Г. и простых конечных групп через 2-группы (см. [1], гл. IV и VI и [2]). Поэтому наиболее интенсивно развиваются направления, связанные с описанием конечных p-Г. по их абелевым подгруппам, либо с их описанием посредством p-автоморфизмов.

Бесконечные (неабелевы) p-Г. менее изучены. Ниже приводится небольшое число наиболее важных результатов, грубо разделенных на три части.

1) О результатах, относящихся к решению проблем Бернсайда, см. *Бернсайда проблема*.

2) Локально конечная p-Г. непроста (см. [3], с. 290).

3) Примеры, показывающие отличие теории конечных p-Г. от общей теории p-Г. а) Существует локально конечная p-Г., к-рая не имеет неединичных абелевых нормальных подгрупп (см. [3], с. 294). б) Существует локально конечная p-Г., совпадающая со своим коммутантом (см. [3], с. 296).

См. также *Группа с условием конечности*.

Лит.: [1] Huppert B., Endliche Gruppen, B., 1967; [2] Gorenstein D., Finite Groups, N. Y., 1968; [3] Шмидт О. Ю., Избр. тр. Математика, М., 1959; [4] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [5] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 123—60; [6] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968.

Ю. М. Горчаков.

ГРУППА БЕЗ КРУЧЕНИЯ — группа, не имеющая элементов конечного порядка. Свободная, свободная разрешимая, свободная нильпотентная и свободная абелева группы суть Г. б. к. Прямое, полное прямое и свободное произведения Г. б. к. суть Г. б. к. Факторгруппа Г. б. к. G по ее нормальной подгруппе H есть Г. б. к. тогда и только тогда, когда из того, что $x^n\in H$, следует $x\in H$ для всех $x\in G$ и для любого натурального n. Расширение Г. б. к. с помощью Г. б. к. есть Г. б. к. Если группа аппроксимируется p-группами по двум различным простым числам p, то она есть Г. б. к.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ГРУППА С ОДНОЗНАЧНЫМ ИЗВЛЕЧЕНИЕМ КОРНЯ, R-**группа** — группа, у к-рой из равенства $x^n=y^n$ следует $x=y$, где x, y — любые элементы груп-

ны, n — любое натуральное число. Группа G тогда и только тогда является R-группой, когда она без кручения и такова, что из $x^n y = yx^n$ следует $xy = yx$ для любых $x, y \in G$ и натурального числа n. R-группа распадается в теоретико-множественное объединение пересекающихся по единице абелевых групп ранга 1. Группа тогда и только тогда есть R-группа, когда она без кручения и ее факторгруппа по центру есть R-группа. Подгруппа R-группы, прямое и полное прямое произведения R-групп суть R-группы. Для класса R-групп справедлива локальная теорема: если всякая конечно порожденная подгруппа группы G есть R-группа, то и сама группа G является R-группой. Свободные группы, свободные разрешимые группы, а также локально нильпотентные группы без кручения являются R-группами. Класс всех полных R-групп образует многообразие алгебр с операциями умножения и извлечения корня (D-г р у п п ы).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ГРУППА С УСЛОВИЕМ КОНЕЧНОСТИ — группа, элементы или подгруппы к-рой удовлетворяют тому или иному условию конечности. Под у с л о в и е м к о н е ч н о с т и в теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существуют бесконечные группы, к-рые им не обладают. Наиболее важными в теоретико-групповых исследованиях являются следующие условия конечности: конечность убывающих цепей подгрупп (условие минимальности для подгрупп, см. *Артинова группа*), конечность возрастающих цепей подгрупп (условие максимальности для подгрупп, см. *Нётерова группа*), конечная порожденность, конечность порядков элементов (периодичность), конечность конечно порожденных подгрупп (локальная конечность, см. *Локально конечная группа*), конечность ранга, конечность классов сопряженных элементов.

Систематич. изучение Г. с у. к. началось в 1939—40 (см. [1]) с исследования локально нильпотентных и локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп, в результате к-рого было установлено, что бесконечные группы такого рода являются конечными расширениями прямых произведений конечного числа квазициклич. групп. Вопрос о справедливости утверждения этой теоремы для произвольной бесконечной группы с условием минимальности для подгрупп в общем случае пока (1977) не решен. В предположении локальной конечности он решен положительно [5]. Изучение групп с условием минимальности обогатило теорию групп важными результатами. Само условие минимальности подвергалось при этом существенным ограничениям: налагалось не на все подгруппы, а лишь на подгруппы, удовлетворяющие тем или иным дополнительным требованиям (инвариантность, абелевость, конечность индекса, примарность и пр.). Исследование групп с условием максимальности оказалось менее продуктивным, чем исследование групп с условием минимальности. Разрешимые группы с условием максимальности — это полициклич. группы. В разрешимых группах условие максимальности для подгрупп эквивалентно условию максимальности для абелевых подгрупп [4]. Аналогичный результат установлен и для условия минимальности в локально разрешимых группах. Условие максимальности для подгрупп эквивалентно условию конечной порожденности группы и всех ее подгрупп. Для нильпотентных групп оно эквивалентно конечной порожденности самой группы.

Группа имеет к о н е ч н ы й р а н г, если минимальное число образующих элементов в каждой ее конечно порожденной подгруппе не превосходит нек-рого фиксированного числа. Это условие конечности было широко использовано при изучении разрешимых групп и локально нильпотентных групп. Было установлено, в

частности, что если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы без кручения имеют конечный ранг, то конечный ранг имеет и вся группа [4].

Ряд существенных результатов дало исследование групп с конечными классами сопряженных элементов. Наиболее изученными среди них оказались слойно конечные группы, т. е. группы с конечными множествами элементов каждого порядка. Их изучение доведено по существу до полного описания их строения. Из этого описания вытекает, в частности, что класс слойно конечных групп совпадает с классом локально нормальных групп, удовлетворяющих условию минимальности для примарных подгрупп.

Лит.: [1] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, № 5(89), с. 45—96; [2] Robinson D. J. S., Finitenessconditions and generalized soluble groups, p. 1, 2, B.—Heid.—N. Y., 1972; [3] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [4] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1951, т. 28 (70), № 3, с. 567—88; [5] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 5, с. 579—615. *С. Н. Черников.*

ГРУППА С УСЛОВИЕМ МАКСИМАЛЬНОСТИ для подгрупп — см. *Нётерова группа.*

ГРУППА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ для подгрупп — см. *Артинова группа.*

ГРУППА ТИПА p^∞ — см. *Квазициклическая группа.*

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА группы G над полем K — ассоциативная алгебра над полем K, элементами к-рой являются всевозможные формальные конечные суммы вида $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, $g\in G$, $\alpha_g\in K$, а операции определяются формулами:

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g+\sum_{g\in G}\beta_g g=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)g,$$

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right)=\sum_{h\in G}\left(\sum_{xy=h,\ x,\ y\in G}(\alpha_x\beta_y)h\right)$$

(в правой части второй формулы сумма также конечна). Эта алгебра обозначается KG; элементы группы G образуют базис алгебры KG; умножение базисных элементов в Г. а. индуцируется групповым умножением. Алгебра KG изоморфна алгебре функций, определяемых на группе G со значениями в поле K и принимающих лишь конечное число ненулевых значений; умножение в этой алгебре — свертка функций.

Эту же конструкцию можно рассмотреть и для случая, когда K — ассоциативное кольцо. Таким образом приходят к понятию группового кольца группы G над кольцом K; в случае, когда K коммутативно и с единицей, групповое кольцо наз. часто также групповой алгеброй группы над кольцом.

Г. а. были введены Г. Фробениусом (G. Frobenius) и И. Шуром [1] в связи с изучением представлений групп, поскольку рассмотрение представлений группы G над полем K равносильно изучению модулей над Г. а. KG. Так, теорема Машке на языке групповых алгебр формулируется следующим образом: если G конечная группа, а K — поле, то Г. а. KG полупроста тогда и только тогда, когда порядок группы G не делится на характеристику поля K.

В начале 50-х гг. 20 в. появились исследования по Г. а. бесконечных групп в связи с применением целочисленных Г. а. в алгебраич. топологии, а также с использованием методов теории Г. а. при изучении строения группы. Этому способствовал также ряд проблем, поставленных для Г. а., наиболее известная из них: содержит ли делители нуля Г. а. группы без кручения? (проблема Капланского).

Некоторые направления исследований по групповым кольцам и алгебрам.

Радикал и полупростота. Групповое кольцо обладает ненулевым нильпотентным идеалом тогда и только тогда, когда либо K имеет ненулевой нильпотентный идеал, либо порядок нек-рой конечной

нормальной подгруппы из G делится на порядок элемента из аддитивной группы кольца K. Если K — кольцо без нильидеалов и порядок любого элемента из G не делится на порядок ни одного элемента из аддитивной группы K, то KG без нильидеалов. Г. а. KG над полем характеристики 0 полупроста в смысле *Джекобсона радикала*, если K содержит трансцендентный элемент над полем рациональных чисел.

В л о ж е н и е Г. а. в т е л а. Г. а. упорядоченной группы вложима в тело (т е о р е м а М а л ь ц е в а — Н е й м а н а). Существует предположение, что это же верно для Г. а. всякой правоупорядоченной группы.

С в я з ь т е о р е т и к о - к о л ь ц е в ы х с в о й с т в г р у п п о в о г о к о л ь ц а KG со с т р о е н и е м г р у п п ы G и к о л ь ц а K. Напр., KG первично тогда и только тогда, когда кольцо K первично и группа G не имеет конечных нормальных подгрупп.

П р о б л е м а и з о м о р ф и з м а: если групповые кольца KG и KH изоморфны как K-алгебры, то какая связь существует между строением групп G и H, в частности, когда G и H изоморфны? Выяснилось, что однозначно определяет группу групповое кольцо периодической разрешимой группы класса 2 над кольцом целых чисел и групповое кольцо счетной абелевой p-группы над кольцом характеристики p.

Рассматривались различные обобщения понятия Г. а., напр. понятие *скрещенного произведения* группы и кольца, для к-рого остаются справедливыми многие свойства Г. а.

Лит.: [1] S c h u r I., «Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.», 1905, S. 406—32; [2] К э р т и с Ч., Р а й н е р И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] P a s s m a n D. S., Infinite group rings, N. Y., 1971; [4] Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 5—118; [5] Б о в д и А. А., Групповые кольца, Ужгород, 1974; см. также лит. при статье *Представления групп*.

А. А. Бовди.

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА л о к а л ь н о б и к о м п а к т н о й г р у п п ы топологическая алгебра с *инволюцией*, образованная функциями на группе и такая, что в ней умножение определяется как свертка. Пусть банахово пространство $L^1(G)$ построено с помощью левоинвариантной *Хаара меры* dg на локально бикомпактной топологич. группе G и пусть в $L^1(G)$ умножение определяется как свертка $(f_1, f_2) \to f_1 * f_2$, а инволюция $f \to f^*$ — по формуле $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}\Delta(g)$, где Δ — модуль группы G. Полученная *банахова алгебра* с инволюцией наз. г р у п п о в о й а л г е б р о й группы G и обозначается также через $L^1(G)$. Если G — конечная группа, то определение Г. а. совпадает с обычным алгебраич. определением Г. а. над полем комплексных чисел.

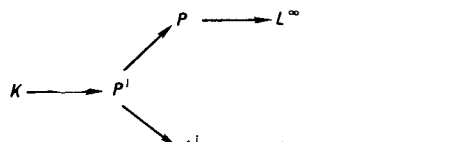
Понятие Г. а. позволяет применять общие методы теории банаховых алгебр в задачах теории групп и, в частности, в абстрактном гармонич. анализе. Свойства Г. а. как банаховой алгебры отражают свойства топологич. группы: так, Г. а. содержит единичный элемент тогда и только тогда, когда группа дискретна; Г. а. является прямой суммой (топологической) своих конечномерных минимальных двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда группа бикомпактна. Исключительно важную роль играет понятие Г. а. в теории *унитарных представлений* группы: между непрерывными унитарными представлениями топологич. группы G и невырожденными *симметричными представлениями* Г. а. $L^1(G)$ существует взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее непрерывному унитарному представлению π группы G в гильбертовом пространстве H представление Г. а. $L^1(G)$, определяемое формулой

$$f \longrightarrow \int_G f(g)\,\pi(g)\,dg, \quad f \in L^1(G).$$

Г. а. локально бикомпактных групп обладают рядом общих свойств. Именно, любая Г. а. содержит аппроксимативную единицу (см. *Банахова алгебра*), образован-

ную семейством характеристич. функций окрестностей единичного элемента, упорядоченных по включению (в сторону убывания); поэтому для Г. а. можно установить соответствие между положительными функционалами на Г. а. и ее симметричными представлениями. Любая Г. а. является полупростой алгеброй и имеет симметричное *точное представление*. В частности, представление Г. а., определяемое *регулярным представлением* группы, является точным. Замкнутые левые идеалы $L^1(G)$ суть замкнутые векторные подпространства $L^1(G)$, инвариантные относительно левого сдвига.

Иногда групповой алгеброй наз. банахова алгебра с инволюцией, полученная из Г. а. $L^1(G)$ присоединением единицы. Существует ряд других алгебр с инволюцией, к-рые иногда наз. групповыми алгебрами. К их числу относятся, в частности: алгебра мер $M(G)$ относительно свертки; алгебры относительно обычного умножения, напр. алгебра $L^\infty(G)$ существенно ограниченных измеримых по мере Хаара функций, алгебра $P(G)$ комплексных линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций. Множество $P^1(G) = P(G) \cap L^1(G)$ и совокупность $K(G)$ непрерывных финитных функций образуют алгебру и относительно свертки, и относительно обычного умножения. Имеет место следующая таблица, в к-рой стрелки означают включения:



Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Guichardet A., Analyse harmonique commutative, P., 1968.
А. И. Штерн.

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ — величина, характеризующая скорость распространения волнового процесса в диспергирующих средах. Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с переменным коэффициентом

$$\frac{1}{c^2(z)}u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} = 0,$$

$$0 \leqslant z < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad c(z) > 0.$$

Ищутся решения, удовлетворяющие условиям

$$u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_{z\to\infty} \longrightarrow 0$$

и имеющие вид

$$u = e^{i\omega(k)t - ikx} v(z).$$

Функция $v(z)$ должна быть ненулевым решением одномерной краевой задачи

$$v'' + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2(z)}\right) v = 0; \quad v\Big|_{z=0} = 0; \quad v_{z\to\infty} \longrightarrow 0.$$

Если в нек-ром промежутке изменения k существует конечный набор $\omega_j(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, при к-рых эта задача имеет ненулевое решение v_j, то величины $V = \omega_j(k)/k$ и $U = d\omega_j/dk$ наз. соответственно фазовой и групповой скоростями волны

$$u_j = e^{i\omega(k) - ikx} v_j(z).$$

Фазовая скорость и Г. с. связаны следующим соотношением (формула Рэлея):

$$U = V - \lambda\, dV/d\lambda,$$

где λ — длина волны.

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 5, Л., 1950, с. 315—19, 419—25, 439—67; [2] Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959.
В. М. Бабич.

ГРУППОВАЯ СХЕМА, схема групп,— обобщение понятия алгебраич. группы. Пусть (Sch/S) — категория схем над базисной схемой S; *групповой объект* этой категории наз. групповой схемой над схемой S (а также групповой S-схемой,

или S-с х е м о й г р у п п). Для Г. с. G над S функтор точек $h_G: X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(X, G) = G(X)$ является контравариантным функтором из категории (Sch/S) в категорию групп (Gr). Категория $(S - \mathrm{Gr})$ групповых схем над S определяется как полная подкатегория категории таких функторов, образованная представимыми функторами.

П р и м е р ы. 1) Алгебраич. группа над полем k есть приведенная Г. с. конечного типа над полем k. (Иногда алгебраич. группой наз. произвольную Г. с. конечного типа над полем.)

2) Функтор, сопоставляющий S-схеме X аддитивную (соответственно мультипликативную) группу кольца сечений структурного пучка $\Gamma(X, O_X)$ представим. Соответствующая Г. с. над S наз. а д д и т и в н о й (соответственно м у л ь т и п л и к а т и в н о й) группой и обозначается $G_{a,\,S}$ (соответственно $G_{m,\,S}$). Для любой S-схемы S'

$$G_{a,\,S} \times S' \simeq G_{a,\,S'}, \quad G_{m,\,S} \times_S S' \simeq G_{m,\,S'}.$$

3) Каждая абстрактная группа Γ определяет Г. с. $(\Gamma)_S$ — прямую сумму семейства схем $(S_g)_{g \in G}$, каждая из к-рых изоморфна S. Соответствующий функтор сопоставляет S-схеме X прямую сумму $\Gamma^{\pi_0(X)}$, где $\pi_0(X)$ — множество связных компонент схемы X.

Если G — Г. с. над S, то для любой точки $s \in S$ слой $G_s \quad G \underset{S}{\otimes} k(s)$ является Г. с. над полем вычетов $k(s)$ этой точки. В частности, каждую Г. с. конечного типа над схемой S можно рассматривать как семейство алгебраич. групп, параметризованное базой S. На Г. с. распространяется терминология теории схем; так, говорят о гладких, плоских, конечных, собственных Г. с.

Для любой Г. с. G соответствующая приведенная схема G_{red} также есть Г. с., для к-рой каноническое замкнутое вложение $G_{\mathrm{red}} \to G$ есть морфизм Г. с. Каждая приведенная Г. с. локально конечного типа над полем является гладкой. Каждая Г. с. локально конечного типа над полем нулевой характеристики приведена (т е о р е м а К а р т ь е).

Многие понятия и результаты теории алгебраич. групп имеют свои аналоги для Г. с. Напр., имеется аналог структурной теории Бореля — Шевалле для аффинных алгебраич. групп [5], развита когомологич. теория расширений Г. с. и однородных пространств над Г. с. (см. [2], [5]). С другой стороны, многие проблемы и результаты специфичны для теории Г. с. и связаны с наличием нильпотентных элементов в структурном пучке как базисной, так и самой Г. с. Так, изучаются инфинитезимальные и формальные деформации Г. с. [4], вопросы подъема в нулевую характеристику, формальные пополнения Г. с. (см. *Формальная группа*). Г. с. естественным образом возникают при изучении алгебраич. групп над полем положительной характеристики (см. *р-делимая группа*).

Понятие аффинной Г. с. над базисной аффинной схемой $S = \mathrm{Spec}(B)$ двойственно понятию коммутативной *Хопфа алгебры*, именно, если $G = \mathrm{Spec}(A)$ такая Г. с., то A является коммутативной алгеброй Хопфа.

См. также *Коммутативная групповая схема*, *Конечная групповая схема*.

Лит.: [1] Т е й т Д ж., О о р т Ф., «Математика», 1972, т. 16, № 1, с. 165—83; [2] D e m a z u r e M., G a b r i e l P., Groupes algébriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [3] O o r t F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N.Y., 1966; [4] е г о ж е, «Compositio math.», 1971, v. 23, p. 265—96; [5] Schémas en groupes, t. 1—3, B.— Hdlb.— N.Y., 1970. *И. В. Долгачев.*

ГРУППОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — *ассоциативное исчисление*, в к-ром эффективным образом выполнено естественное групповое требование существования обратной операции. Именно, ассоциативное исчисление $\mathfrak{A}$ наз. Г. и. (см. [1], с. 341), если для него может быть построен и н в е р т и р у ю щ и й а л г о р и т м, т. е.

такой *алгоритм* $\mathfrak{S}$, что для всякого слова P в алфавите A исчисления $\mathfrak{A}$ выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{S}(P)$ определено и также является словом в A; 2) слова $P\mathfrak{S}(P)$ и $\mathfrak{S}(P)P$ эквивалентны в $\mathfrak{A}$ пустому слову (алгоритм здесь следует понимать в к.-л. точном смысле слова, напр. как *нормальный алгорифм*).

Наиболее употребительными являются Г. и. специального типа (так наз. инверсивные исчисления, см. [2]), у к-рых существование инвертирующего алгоритма обеспечивается надлежащим подбором их алфавитов и списков соотношений: алфавит инверсивного исчисления имеет четную длину, для каждой его буквы ξ явно указывается обратная ей буква ξ^{-1}, а в список соотношений включается полный набор так наз. тривиальных соотношений, т. е. соотношений, правые части к-рых суть пустые слова, а левые имеют вид $\xi\xi^{-1}$.

Роль Г. и. определяется тем, что они являются представлениями конечно определенных групп. Г. и. $\mathfrak{A}$, как и всякое ассоциативное исчисление, стандартным образом (см. *Ассоциативное исчисление*) порождает конечно определенную ассоциативную систему $K_{\mathfrak{A}}$, к-рая вследствие наличия у $\mathfrak{A}$ инвертирующего алгоритма оказывается группой. *Алгоритмическая проблема* распознавания эквивалентности слов в Г. и. $\mathfrak{A}$ представляет собой формулированную в терминах Г. и. проблему тождества для конечно определенной группы $K_{\mathfrak{A}}$. Это — первая из числа фундаментальных проблем разрешимости, сформулированных в 1911 М. Деном [3] для конечно определенных групп. Рядом авторов было найдено положительное решение этой проблемы для групп, определяемых частными типами Г. и. В частности, оно было получено для групп, определяемых инверсивными исчислениями с одним нетривиальным соотношением (см. [4]). В 1952 П. С. Новиков (см. [5], а также [6]) впервые построил пример конечно определенной группы с неразрешимой проблемой тождества, т. е. группы, порожденной таким Г. и., для к-рого невозможен никакой алгоритм в уточненном смысле слова (напр., *Тьюринга машина* или *нормальный алгорифм*), решающий проблему эквивалентности слов в этом Г. и. Этот пример дает отрицательное решение проблемы тождества для конкретной конечно определенной группы с учетом современного уточнения этой проблемы, даваемого теорией алгоритмов (см. *Чёрча тезис*). Впоследствии были приведены др. примеры таких Г. и. (см., напр., [7], [8]).

Упомянутый пример П. С. Новикова дает отрицательное решение и второй фундаментальной проблемы Дэна — проблемы распознавания пар слов, сопряженных в данном Г. и. Позднее П. С. Новиков [9] дал более простое и независимое от указанного примера отрицательное решение проблемы сопряженности.

Большой интерес с алгебраич. точки зрения представляет изучение тех свойств Г. и., к-рые оказываются инвариантными относительно изоморфизмов Г. и., это свойства абстрактных конечно определенных групп. В 1955 С. И. Адян [10]—[12] получил весьма общий результат, аналогичный результату А. А. Маркова для ассоциативных исчислений, давший отрицательное решение практически всех известных в то время алгоритмич. проблем, связанных с основными классификациями Г. и. В частности, им было получено отрицательное решение третьей проблемы Дена — проблемы изоморфии любой фиксированной конечно определенной группе. Впоследствии аналогичные результаты получил М. Рабин [13].

Неразрешимость упомянутых алгоритмич. проблем, касающихся Г. и., повлекла за собой отрицательное решение ряда алгоритмич. проблем топологии. Так, по Г. и. с неразрешимой проблемой сопряженности можно построить двумерный полиэдр, для к-рого неразрешима

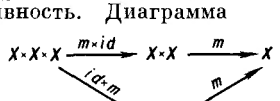
проблема гомотопии путей. Опираясь на результаты С. И. Адяна, А. А. Марков получил в 1958 отрицательное решение проблемы гомеоморфии (см. [14]).

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954; [2] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 907—36; [3] Dehn M., «Math. Ann.», 1911, Bd 71, S. 116; [4] Magnus W., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 163, № 2, S. 141—65; [5] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, с. 709—12; [6] его же, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955; [7] Boone W. W., «Indagat. math.», 1954, v. 16, p. 231, 492; 1955, v. 17, p. 252—56; 1957, v. 19, p. 22—7, 227—32; [8] Britton J. L., «Proc. London Math. Soc.», 3 ser., 1958, v. 8, № 32, p. 493—506; [9] Новиков П. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 6, с. 485—524; [10] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, с. 533—35; [11] его же, там же, 1957, т. 117, № 1, с. 9—12; [12] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [13] Rabin M. O., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 172—94; [14] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20. *Н. М. Нагорный.*

ГРУППОВОЙ ОБЪЕКТ категории — объект X категории C такой, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ множество морфизмов $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ является группой, а соответствие $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ — функтором из категории C в категорию групп (Gr). Гомоморфизмом Г. о. X в Г. о. Y наз. такой морфизм $f : X \to X'$ категории C, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ соответствующее отображение $\mathrm{Hom}_C(Y, X) \to \mathrm{Hom}_C(Y, X')$ является гомоморфизмом групп. Г.о.категории C образуют подкатегорию $(\mathrm{Gr} - C)$ категории C; морфизмами в этой категории служат гомоморфизмы. Функтор $X \to h_X = \mathrm{Hom}_C(\cdot, X)$ устанавливает эквивалентность категории $(\mathrm{Gr} - C)$ и категории представимых предпучков групп на категории C. В случае, когда значения функтора $h_X : Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ принадлежат подкатегории (Ab) абелевых групп, Г. о. X наз. коммутативным, или абелевым. Если категория C обладает конечными произведениями и финальным объектом e, то Г. о. X категории C определяются следующими свойствами.

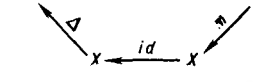
Существуют морфизмы $m : X \times X \to X$ (умножение), $r : X \to X$ (обращение) и $\beta : e \to X$ (единица), к-рые удовлетворяют следующим аксиомам.

а) Ассоциативность. Диаграмма



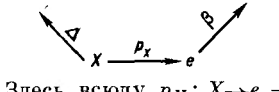
коммутативна.

б) Существование единичного элемента. Диаграмма



коммутативна.

в) Существование обратного элемента. Диаграмма



коммутативна. Здесь всюду $p_X : X \to e$ — канонический морфизм объекта X в финальный объект e, а $\Delta : X \to X \times X$ — диагональный морфизм.

В случае, когда C есть категория множеств (Ens), Г. о. X суть в точности группы. Финальным объектом категории (Ens) является множество $\{e\}$, состоящее из одного элемента e. Аксиома а) означает ассоциативность бинарной операции, задаваемой морфизмом $m : X \times X \to X$. Морфизм $r : X \to X$ есть отображение обращения, а морфизм $\beta : \{e\} \to X$ есть отображение множества $\{e\}$ в X, образ к-рого равен единичному элементу в X.

Аналогичным способом можно определить кольцевой объект категории и вообще задать алгебраическую структуру на объекте категории (см. [2]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6; [2] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, t. 1, B.—Hdlb.—N.Y., 1970. *И. В. Долгачев.*

ГРУППОИД — *универсальная алгебра* с одной бинарной операцией. Г.— самый широкий класс таких алгебр; группы, полугруппы, квазигруппы — все это Г. специального вида. Важным понятием для Г. является понятие и з о т о п и и операций. Пусть на множестве G определены две бинарные операции, обозначаемые $(\cdot)$ и $(\circ)$, они изотопны, если существуют такие три взаимно однозначных отображения α, β и γ множества G на себя, что $a\cdot b=\gamma^{-1}(\alpha a\circ\beta b)$ для любых a, $b\in G$. Г., изотопный квазигруппе, сам является квазигруппой; Г. с единицей, изотопный группе, изоморфен этой группе. Поэтому понятием изотопии в теории групп не пользуются, для групп изотопия совпадает с изоморфизмом.

Г р у п п о и д с с о к р а щ е н и е м — это Г., в к-ром любое из равенств $ab=ac$, $ba=ca$ влечет $b=c$ (a, b, c — элементы Г.). Каждый Г. с сокращением вложим в квазигруппу. Гомоморфный образ квазигруппы — г р у п п о и д с д е л е н и е м, т. е. Г., в к-ром уравнения $ax=b$ и $ya=b$ разрешимы (но не обязательно однозначно).

Множество с одной частичной (т. е. определенной не для всяких пар элементов) бинарной операцией наз. ч а с т и ч н ы м г р у п п о и д о м. Каждый частичный подгруппоид свободного частичного Г. свободен.

Вместо термина «Г.» употребляется иногда термин «о п е р а т и в».

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Borůvka O., Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, B., 1960; [4] Bruck R. H., A survey of binary systems, B., [a. o.], 1971. *В. Д. Белоусов.*

ГУКА ЗАКОН — закон, устанавливающий в известных пределах зависимость между напряженным состоянием и деформацией упругого тела. Г. з. заключается в том, что малая деформация пропорциональна приложенным к телу силам, т. е. тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}:

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}\right),$$

где δ — символ Кронекера, K — модуль всестороннего сжатия, μ — модуль сдвига (см. *Упругости математическая теория*).

В простейшей форме Г. з. был экспериментально установлен Р. Гуком (R. Hooke) в 1660.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965, § 4. *А. Б. Иванов.*

ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ — см. *Рауса — Гурвица критерий.*

ГУРВИЦА ТЕОРЕМА: если $\{f_n(z)\}$ — последовательность голоморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}$, равномерно сходящаяся внутри D к функции $f(z)\not\equiv 0$, то для любой замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, лежащей в D вместе с областью, ограниченной Γ, и не проходящей через нули функции $f(z)$, можно указать такое число $N=N(\Gamma)$, что при $n>N$ каждая из функций $f_n(z)$ имеет внутри Γ одно и то же число нулей, равное числу нулей функции $f(z)$ внутри Γ. Получена А. Гурвицем [1].

Лит.: [1] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84; то же: Math. Werke, Bd 2, Basel, 1933, S. 533—45. [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *Е. Д. Соломенцев.*

ГУРВИЦА ФОРМУЛА — см. *Римана — Гурвица формула.*

ГУРСА ЗАДАЧА — решение гиперболич. уравнения и системы 2-го порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух характеристич. кривых, выходящих из одной точки.

Для гиперболич. уравнения

$$u_{xy}=F(x,\ y,\ u,\ p,\ q),\quad p=u_x,\quad q=u_y, \qquad (1)$$

заданного, напр., в области $\Omega=\{(x, y) : 0<x<y<1\}$, Г. з. ставится следующим образом: найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) и непрерывное в замыкании $\overline{\Omega}$ по краевому условию

$$u(0, t)=\varphi(t),\ u(t, 1)=\psi(t),\ \varphi(1)=\psi(0),\ 0\leqslant t\leqslant 1, \quad (2)$$

где φ и ψ — заданные непрерывно дифференцируемые функции. Если функция F непрерывна для всех $(x, y)\in\overline{\Omega}$ и для любой системы действительных значений переменных u, p, q и допускает производные F_u, F_p и F_q, к-рые при тех же условиях по абсолютной величине меньше нек-рого числа, то в области Ω существует единственное и устойчивое решение задачи (1), (2).

При исследовании Г. з. в линейном случае

$$Lu\equiv u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f \quad (3)$$

фундаментальную роль играет ф у н к ц и я Р и м а н а $R(x, y; \xi, \eta)$, к-рая однозначно определяется как решение уравнения

$$R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR=0,$$

удовлетворяющее на характеристиках $x=\xi$ и $y=\eta$ условию

$$R(\xi, y; \xi, \eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt,$$

$$R(x, \eta; \xi, \eta)=\exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt,$$

где (ξ, η) — произвольная точка из области Ω задания уравнения (3). Если функции a_x, b_y и c непрерывны, то функция Римана существует и по переменным ξ, η является решением уравнения $LR=0$.

Решение Г. з. (2) для уравнения (3) дается так наз. ф о р м у л о й Р и м а н а. При $\varphi=\psi\equiv 0$ она имеет вид:

$$u(x, y)=\int_0^x d\xi\int_1^y R(\xi, \eta; x, y)\,f(\xi, \eta)\,d\eta.$$

Из формулы Римана следует, что значение $u(x_0, y_0)$ решения Г. з. в точке $(x_0, y_0)\in\Omega$ зависит лишь от значения заданных функций в характеристич. четырехугольнике $0\leqslant x\leqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant y_0$. При $f\equiv 0$ это значение зависит лишь от значения функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ в промежутках $0\leqslant x\leqslant x_0$ и $0\leqslant y\leqslant y_0$ соответственно, а при $a=b=c=f\equiv 0$ функция

$$u(x_0, y_0)=\varphi(y_0)+\psi(x_0)-\varphi(0).$$

Метод получения явных формул решения Г. з. с помощью функции Римана известен под названием м е т о д а Р и м а н а. Этот метод распространен на довольно широкий класс гиперболич. систем 1-го и 2-го порядков. В частности, на систему вида (3), где a, b и c — квадратные симметрич. матрицы порядка n, а f и u — векторы с n компонентами.

Непосредственным обобщением Г. з. является з а д а ч а Д а р б у — П и к а р а, к-рая состоит в определении решения гиперболич. уравнения и системы 2-го порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух гладких монотонных кривых γ и δ, выходящих из одной точки A и расположенных в характеристич. угле с вершиной в точке A. В частности, γ и δ могут частично или полностью совпадать со сторонами этого угла. Эта задача исследована для уравнения вида (1).

Г. з. иногда наз. з а д а ч е й Д а р б у. Под Г. з. для гиперболич. уравнений 2-го порядка с несколькими независимыми переменными часто понимают характеристич. задачу, т. е. задачу отыскания решения по заданным его значениям на характеристич. коноиде (см. *Дифференциальные уравнения с частными производными*; задача с данными на характеристиках).

Г. з. названа по имени Э. Гурса (E. Goursat), подробно ее исследовавшего.

Лит.: [1] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., т. 3, ч. 1, М.—Л., 1933; [2] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957.

А. М. Нахушев.

ГУРСА КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция прямых, у к-рой первый точечный инвариант фокальной сети одной фокальной поверхности (M_1) равен второму точечному инварианту другой фокальной поверхности (M_2). Пусть (M_3), (M_4) — преобразования Лапласа (см. *Лапласа преобразование* в геометрии) фокальных поверхностей (M_1) и (M_2). Тогда для каждой прямой M_1M_2 Г. к. существует поверхность 2-го порядка, проходящая через точки M_i ($i=1, 2, 3, 4$) и имеющая касание 3-го порядка с линией u на поверхности (M_3) и с линией v на поверхности (M_4) (см. [1]). Если две соседние конгруэнции в последовательности Лапласа (см. *Лапласа последовательность*) являются Г. к., то вся последовательность состоит из Г. к.

Г. к. наз. по имени Э. Гурса (E. Goursat), к-рый рассматривал конгруэнции такого типа.

Лит.: [1] Tzitzeica (Тzitzeica) G., «J. math. pures et appl.», 1928, ser. 9, t. 7, p. 189—208; [2] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.

В. Т. Базылев.

ГЮЙГЕНСА ПРИНЦИП — утверждение, в силу к-рого при распространении колебаний, описываемом волновым уравнением в пространстве нечетного числа измерений, резко локализованное начальное состояние наблюдается позднее в другой точке, как явление, столь же резко ограниченное. В случае четного числа пространственных переменных Г. п. не имеет места — сигнал от локализованного начального возмущения, принятый в точке наблюдения, будет размытым. Г. п. был впервые сформулирован Х. Гюйгенсом (Ch. Huygens) в 1678 (см. [1]), а затем развит А. Френелем (A. Fresnel) в 1818 при исследовании проблем дифракции.

Г. п. является следствием математич. факта, что решение волнового уравнения в точке M трехмерного пространства в момент t выражается через значения решения и его производных на произвольной замкнутой поверхности, содержащей точку M внутри, в предшествующие моменты времени. В частности, решение в точке (M, t) задачи Коши для волнового уравнения определяется начальными данными только на пересечении начального многообразия с характеристич. конусом точки (M, t) и не зависит от начальных данных внутри характеристич. конуса. Впервые строгая математич. формулировка Г. п. была дана Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz) в 1859 для стационарного и Г. Кирхгофом (G. Kirchhoff) в 1882 для нестационарного случаев.

Обобщением Г. п. на линейные гиперболич. уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\,j}^{n-1} g^{ij}(x)\,u_{ij}+\sum_{i=1}^{n} b^{i}(x)\,u_i+c(x)u=0 \qquad (*)$$

являются результаты Ж. Адамара (см. [2]), в силу к-рых решение задачи Коши для уравнения (*) при четных $n\geqslant 4$ зависит лишь от начальных данных на пересечении начального многообразия с характеристич. коноидом тогда и только тогда, когда в фундаментальном решении (*) отсутствуют логарифмич. члены. Об описании всего класса уравнений вида (*), для к-рых справедлив Г. п., см. [4].

Лит.: [1] Гюйгенс Х., Трактат о свете, пер. с франц., М.—Л., 1935; [2] Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, New Haven—L., 1923; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Ибрагимов Н. Х., Принцип Гюйгенса, в кн.: Некоторые проблемы математики и механики, Л., 1970.

А. Г. Свешников.